정답 및 해설

고등 내신 1등급을 위한 기출문제집

100발100중

고등 기출문제집

공통수학 1 상

1학기·중간

I 다항식

1 다항식의 연산

교과서 예제 p.7

01 (1) $-x^4+5x^2-3x-6$ (2) y^3-y^2+7y+5
(3) $(3y+1)x^3-5x^2+(y^2+1)x-2$

02 (1) x^3-2x^2+x+6 (2) $4x^2+6xy+4y^2$ (3) $x^2+6xy-2y^2$

03 (1) $2x^2+4xy-y^2$ (2) $-x^2-5xy+5y^2$

04 (1) $x^2-3xy-2y^2$ (2) $-2x^2+5xy+2y^2$

05 (1) $x^3-5x^2-4x+20$ (2) x^3+x^2+x+6

06 (1) $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$ (2) $x^3-6x^2+12x-8$
(3) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ (4) x^3+27 (5) x^3-8y^3

07 (1) 몫: x^2-5x+5, 나머지: -3 (2) 몫: $x+1$, 나머지: x

08 x^3-3x^2+4x-1

09 몫: $-x^2+2x+2$, 나머지: -5

기출 Best | 1회 p.8~10

01 ②	02 ①	03 ④	04 ③	05 ①
06 ④	07 ⑤	08 ①	09 ③	10 ①
11 ④	12 ②	13 ③	14 ③	15 ②

기출 Best | 2회 p.11~13

01 ②	02 ②	03 ⑤	04 ⑤	05 ③
06 ⑤	07 ③	08 ①	09 ④	10 ①
11 ⑤	12 ③	13 ②	14 ①	15 ①

변형유형 집중공략 p.14~15

1-1 ①	1-2 ③	2-1 ⑤	2-2 -1

서술형 What & How p.16~17

1 360	2 3	3 45	4 -8

실전 문제 | 1회 p.18~21

01 ⑤	02 ①	03 ⑤	04 ①	05 ④
06 ①	07 ①	08 ①	09 ④	10 ②
11 ①	12 ③	13 ⑤	14 ③	15 ⑤
16 ③	17 ②	18 37	19 13	

실전 문제 | 2회 p.22~25

01 ④	02 ⑤	03 ①	04 ④	05 ④
06 ②	07 ⑤	08 ①	09 ④	10 ①
11 ③	12 ③	13 ①	14 ③	15 ⑤
16 ②	17 ⑤	18 41	19 (1) 3 (2) 2	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.26~28

1 ①	2 ③	3 ④
4 ①	5 ①	6 ④

2 나머지정리와 인수분해

교과서 예제 p.31, 33

01 ㄷ, ㄹ

02 $a=5$, $b=-6$, $c=-3$

03 (1) $a=4$, $b=1$, $c=5$ (2) $a=1$, $b=-2$, $c=2$

04 (1) 3 (2) 6

05 $\frac{11}{8}$

06 3

07 (1) -1, -3, -1, -1, -5, -8, 7, 몫: x^2+5x-8,
나머지: 7
(2) 2, -2, 0, 2, 4, 1, -3, 몫: $-2x^2+x+2$, 나머지: -3

08 (1) 몫: $-2x^2-x+2$, 나머지: 5 (2) 몫: x^2+2x-4, 나머지: 6

09 (1) $b(4ab-3)$ (2) $(3+x)(a-b)$ (3) $(a-1)(b+1)$
(4) $(x-3)^2$ (5) $(x+4)(x-4)$ (6) $(2x-7)(x+5)$
(7) $(x+2y)^2$ (8) $(4x+y)(2x-3y)$

10 (1) $(x-2)^3$ (2) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$
(3) $(a-b+c)^2$ (4) $(x+4)(x^2-4x+16)$ (5) $(x-4y)^3$
(6) $(3x+2)^3$ (7) $(2x+y-3z)^2$
(8) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ (9) $(a+2b-1)^2$
(10) $(x+3y)^3$ (11) $(a+b+2)^2$

11 (1) $(x-1)(x-2)(x^2-3x+4)$
(2) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
(3) $(x+2)(x-2)(x^2+3)$ (4) $(x^2+2x-6)(x^2-2x-6)$
(5) $(2x+y-1)(x+y+2)$ (6) $(x+y+5)(x+y-5)$
(7) $(x^2+4x+2)(x^2+4x-4)$ (8) $(x-2y-1)(x+4y-3)$
(9) $(x+3y+z)(x+3y-z)$

12 1, 1, 1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4

13 (1) $(x-1)(x-2)(x+4)$ (2) $(x+1)(x+4)(x-3)$
(3) $(x+2)(x-3)(x-4)$

기출 Best | 1회 p.34~38

01 ①	02 ④	03 ②	04 ⑤	05 ③
06 ③	07 ①	08 ④	09 ②	10 ②
11 ⑤	12 ①	13 ②	14 ①	15 ⑤
16 ③	17 ⑤	18 ④	19 ③	20 ①
21 ④	22 ②	23 ⑤	24 ⑤	25 ④

기출 Best | 2회 p.39~43

01 ③	02 ②	03 ④	04 ④	05 ④
06 ②	07 ⑤	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 ①	12 ③	13 ①	14 ②	15 ①

16 ③	17 ⑤	18 ②	19 ②	20 ③
21 ③	22 ④	23 ①	24 ①	25 ⑤

변형유형 집중공략 p.44~45

1-1 25	1-2 ②	2-1 ③	2-2 5514

서술형 What & How p.46~49

1 12	2 -1	3 27	4 13
5 6	6 -4	7 4699	8 23

실전 문제 | 1회 p.50~54

01 ②	02 ②	03 ①	04 ②	05 ③
06 ⑤	07 ③	08 ②	09 ④	10 ①
11 ④	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 ⑤	17 ⑤	18 ⑤	19 ④	20 ①
21 6	22 ④	23 -32	24 277, 293	

실전 문제 | 2회 p.55~59

01 ⑤	02 ②	03 ②	04 ③	05 ④
06 ②	07 ④	08 ③	09 ⑤	10 ①
11 ②	12 ⑤	13 ①	14 ③	15 ③
16 ④	17 ④	18 ④	19 ④	20 ⑤
21 ⑤	22 ④	23 16	24 4	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.60~64

1 3	2 -1	3 ③	4 ⑤	5 23
6 -2	7 ②	8 ④	9 ④	10 4

Ⅱ 방정식과 부등식

1 복소수

교과서 예제 p.67

01 (1) 실수부분: 0, 허수부분: -6
(2) 실수부분: $3-\sqrt{3}$, 허수부분: 0
(3) 실수부분: -2, 허수부분 2
(4) 실수부분: $\frac{7}{3}$, 허수부분: $\frac{2}{3}$

02 (1) ㄷ, ㅂ (2) ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ

03 (1) $x=2$, $y=3$ (2) $x=2$, $y=6$

04 (1) $5+3i$ (2) $-4i$ (3) $\sqrt{2}-3i$ (4) $\pi-2i$

05 (1) $4+2i$ (2) $3-9i$ (3) $-7-26i$ (4) $-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$

06 (1) 6 (2) $4i$ (3) 13 (4) $5+12i$

07 (1) 1 (2) $-i$ (3) $1+i$ (4) 0

08 (1) $\sqrt{6}i$ (2) $-8i$

09 (1) $\pm3\sqrt{2}i$ (2) $\pm7i$

10 (1) -16 (2) $-3i$ (3) $\sqrt{5}$ (4) -54

기출 Best | 1회 p.68~71

01 ④	02 ②	03 ①	04 ③	05 ④
06 ③	07 ①	08 ⑤	09 ②	10 ③
11 ⑤	12 ①	13 ⑤	14 ①	15 ①
16 ③	17 ④			

기출 Best | 2회 p.72~75

01 ④	02 ②	03 ①	04 ③	05 ①
06 ②	07 ⑤	08 ②	09 ①	10 ①
11 ④	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ④
16 ①	17 ⑤			

변형유형 집중공략 p.76~77

1-1 19	1-2 96	2-1 ③	2-2 ①

서술형 What & How p.78~81

1 8	2 -1	3 2	4 1	5 53
6 4	7 $-2c$	8 $-z$		

실전 문제 | 1회 p.82~85

01 ⑤	02 ①	03 ②	04 ②	05 ②
06 ①	07 ⑤	08 ④	09 ⑤	10 ④
11 ②	12 ⑤	13 ①	14 ⑤	15 ③
16 ③	17 ①	18 -2	19 256	

실전 문제 | 2회 p.86~89

01 ②	02 ③	03 ①	04 ③	05 ④
06 ③	07 ②	08 ①	09 ①	10 ①
11 ④	12 ②	13 ⑤	14 ③	15 ①
16 -9	17 ①	18 -1	19 33	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.90~92

1 ③	2 ①	3 25
4 12	5 94	6 38

2 이차방정식과 이차함수

교과서 예제 p.95, 97

01 (1) $x=2$ 또는 $x=5$, 실근 (2) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$, 실근
(3) $x=-\frac{3}{4}$, 실근 (4) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, 실근 (5) $x=2\pm\sqrt{2}i$, 허근

02 (1) ㄹ, ㅂ (2) ㄷ, ㅁ (3) ㄱ, ㄴ

03 $k<\frac{81}{4}$ (2) $k=\frac{81}{4}$ (3) $k>\frac{81}{4}$

04 (1) -6 (2) -1 (3) 38 (4) 40

05 (1) $x^2-3x+2=0$ (2) $x^2-4x+1=0$ (3) $x^2-2x+2=0$

06 (1) $(x+4i)(x-4i)$ (2) $(x-5-\sqrt{15})(x-5+\sqrt{15})$

(3) $2\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)$

07 $a=-8,\ b=13$ **08** $a=-6,\ b=34$

09 (1) $-3,\ 4$ (2) $-\frac{4}{3}$ **10** (1) 2 (2) 0 (3) 1

11 (1) $k<\frac{1}{3}$ (2) $k=\frac{1}{3}$ (3) $k>\frac{1}{3}$

12 $k\le16$ **13** (1) 3, 8 (2) $-2,\ 5$

14 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다.

(3) 한 점에서 만난다. (접한다.)

15 (1) $k>2$ (2) $k=2$ (3) $k<2$

16 $k\ge\frac{9}{2}$

17 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 0 (2) 최댓값: 5, 최솟값: 3

(3) 최댓값: -3, 최솟값: -6 (4) 최댓값: 7, 최솟값: 4

기출 Best | 1회 p.98~102

01 ①	02 ④	03 ①	04 ①	05 ④
06 ①	07 ④	08 ⑤	09 ④	10 ①
11 ④	12 ④	13 ③	14 ③	15 ②
16 ②	17 ⑤	18 ②	19 ⑤	20 ①
21 ⑤	22 ③	23 ①	24 ③	25 ①

기출 Best | 2회 p.103~107

01 ④	02 ③	03 ④	04 ①	05 ①
06 ③	07 ⑤	08 ⑤	09 ④	10 ②
11 ④	12 ①	13 ①	14 ①	15 ⑤
16 ⑤	17 ③	18 ③	19 ④	20 ⑤
21 ①	22 ④	23 ②	24 ①	25 ④

변형유형 집중공략 p.108~109

1-1 8 1-2 ④ 2-1 -144 2-2 ②

서술형 What & How p.110~113

1 $x^2-11x+25=0$ 2 $8x^2+20x-1=0$

3 (1) $f(x)=x^2+6x+5$ (2) $(-5,\ 0)$, $(-1,\ 0)$

4 -2 5 3 6 4 7 4 8 6

실전 문제 | 1회 p.114~118

01 ②	02 ④	03 ③	04 ①	05 ④
06 ⑤	07 ②	08 ④	09 ④	10 ③
11 ④	12 ②	13 ⑤	14 ①	15 ①
16 ⑤	17 ②	18 ①	19 ⑤	20 ②
21 15	22 ④	23 -6	24 2	

실전 문제 | 2회 p.119~123

01 ④	02 ⑤	03 ⑤	04 ①	05 ④
06 ③	07 ②	08 ⑤	09 ③	10 ②
11 ③	12 ⑤	13 ③	14 ①	15 ⑤
16 ④	17 ③	18 ④	19 ⑤	20 ②
21 ③	22 5	23 20	24 (1) -9 (2) 5	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.124~128

1 ②	2 ③	3 ②	4 ②	5 ④
6 ⑤	7 12	8 14	9 ①	10 -14

3 여러 가지 방정식

교과서 예제 p.131, 133

01 (1) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$ (2) $x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

(3) $x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$ (4) $x=0$ 또는 $x=\pm5$

02 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(2) $x=-1$ 또는 $x=2\pm i$

(3) $x=-1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

(4) $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\pm i$

03 (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

(2) $x=1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=3\pm2\sqrt{3}$

(3) $x=\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=\pm2i$

(4) $x=-2\pm\sqrt{7}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

04 (1) -2 (2) -3 (3) 1 (4) -3

05 (1) 6 (2) 2 (3) -3 (4) -2

06 (1) $x^3-2x^2-7x+2=0$ (2) $x^3-8x^2+19x-14=0$

(3) $x^3-x^2+3x+5=0$ (4) $x^3-7x^2+16x-10=0$

07 $a=3,\ b=2$ **08** $a=-4,\ b=6$

09 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) 0 (7) -1

10 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 0 (5) 1 (6) 0 (7) -1

11 (1) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{23}{13} \\ y=-\frac{7}{13} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

12 (1) $\begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=4\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-4\sqrt{3} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-3\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=-\dfrac{2\sqrt{85}}{5} \\ y=\dfrac{\sqrt{85}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{85}}{5} \\ y=-\dfrac{\sqrt{85}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$

기출 Best | 1회

p.134~137

01 ①, ④	02 ③	03 ②	04 ①	05 ②
06 ④	07 ⑤	08 ②	09 ③	10 ⑤
11 ①	12 ②	13 ④	14 ⑤	15 ②
16 ④	17 ③	18 ⑤	19 ③	20 ③

기출 Best | 2회

p.138~141

01 ①, ⑤	02 ①	03 ①	04 ③	05 ③
06 ①	07 ⑤	08 ②	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ②	13 ⑤	14 ③	15 ③
16 ④	17 ②	18 ①	19 ⑤	20 ③

변형유형 집중공략

p.142~143

1-1 ⑤	1-2 12	2-1 65	2-2 1

서술형 What & How

p.144~147

1 -1

2 1

3 $a=-3$, $b=4$, 나머지 두 근: $1-i$, 1

4 $a=-1$, $b=5$, 나머지 두 근: $1-2i$, -1

5 (1) 0 (2) -1

6 0

7 $\begin{cases} x=\sqrt{17} \\ y=\sqrt{17} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{17} \\ y=-\sqrt{17} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-4\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=4\sqrt{2} \end{cases}$

8 $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

실전 문제 | 1회

p.148~151

01 ③	02 ④	03 ③	04 ②	05 ①
06 ②	07 ④	08 ④	09 ⑤	10 ①
11 ③	12 ④	13 ③	14 ③	15 ③
16 ②	17 16	18 -9	19 135	

실전 문제 | 2회

p.152~155

01 ②	02 ④	03 ⑤	04 ⑤	05 ③
06 ②	07 ④	08 ④	09 ①	10 ②
11 ③	12 ③	13 ④	14 ①	15 ③
16 ②	17 ②	18 4	19 -3	

수능형 기출문제 & 변형문제

p.156~160

1 16	2 9	3 ⑤	4 ⑤	5 12
6 -84	7 ②	8 11	9 ①	10 ②

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.162~165

01 ①	02 ②	03 ⑤	04 ①	05 ②
06 ④	07 ⑤	08 ①	09 ⑤	10 ④
11 ③	12 ④	13 ②	14 ③	15 ④
16 ②	17 1	18 1	19 12	20 8

실전 모의고사 2회

p.166~169

01 ③	02 ③	03 ①	04 ⑤	05 ①
06 ②	07 ③	08 ③	09 ②	10 ⑤
11 ⑤	12 ②	13 ③	14 ①	15 ①
16 ③	17 $x=-1\pm3i$		18 -71	19 3
20 5				

실전 모의고사 3회

p.170~173

01 ②	02 ②	03 ①	04 ③	05 ④
06 ③	07 ②	08 ⑤	09 ④	10 ③
11 ②	12 ④	13 ④	14 ①	15 ③
16 ⑤	17 0	18 2	19 13	20 1

실전 모의고사 4회

p.174~177

01 ④	02 ③	03 ④	04 ①	05 ②
06 ①	07 ④	08 ④	09 ④	10 ①
11 ⑤	12 ⑤	13 ①	14 ③	15 ⑤
16 ⑤	17 -2	18 4	19 12	20 2

실전 모의고사 5회

p.178~181

01 ②	02 ⑤	03 ②	04 ④	05 ①
06 ③	07 ④	08 ④	09 ①	10 ③
11 ②	12 ①	13 ③	14 ④	15 ④
16 ⑤	17 2	18 8	19 25	20 40

I 다항식

1 다항식의 연산

교과서 예제 p.7

01 답 (1) $-x^4+5x^2-3x-6$ (2) y^3-y^2+7y+5
(3) $(3y+1)x^3-5x^2+(y^2+1)x-2$

02 (1) $(x^3-x^2+2)+(-x^2+x+4)$
$=x^3-x^2+2-x^2+x+4$
$=x^3-2x^2+x+6$
(2) $(6x^2+3xy-4y^2)-(2x^2-3xy-8y^2)$
$=6x^2+3xy-4y^2-2x^2+3xy+8y^2$
$=4x^2+6xy+4y^2$
(3) $(x^2+xy-y^2)-2(xy+y^2)+(y^2+7xy)$
$=x^2+xy-y^2-2xy-2y^2+y^2+7xy$
$=x^2+6xy-2y^2$
답 (1) x^3-2x^2+x+6 (2) $4x^2+6xy+4y^2$ (3) $x^2+6xy-2y^2$

03 (1) $A+B=(x^2+xy+y^2)+(x^2+3xy-2y^2)$
$=x^2+xy+y^2+x^2+3xy-2y^2$
$=2x^2+4xy-y^2$
(2) $3A-2(A+B)=3A-2A-2B=A-2B$
$=(x^2+xy+y^2)-2(x^2+3xy-2y^2)$
$=x^2+xy+y^2-2x^2-6xy+4y^2$
$=-x^2-5xy+5y^2$
답 (1) $2x^2+4xy-y^2$ (2) $-x^2-5xy+5y^2$
다른풀이 (2) $3A-2(A+B)$
$=3(x^2+xy+y^2)-2(2x^2+4xy-y^2)$
$=3x^2+3xy+3y^2-4x^2-8xy+2y^2$
$=-x^2-5xy+5y^2$

04 (1) $A-X=B$에서
$X=A-B=(x^2-2xy)-(xy+2y^2)$
$=x^2-2xy-xy-2y^2$
$=x^2-3xy-2y^2$
(2) $2(X+A)=B+X$에서 $2X+2A=B+X$
$\therefore X=B-2A=(xy+2y^2)-2(x^2-2xy)$
$=xy+2y^2-2x^2+4xy$
$=-2x^2+5xy+2y^2$
답 (1) $x^2-3xy-2y^2$ (2) $-2x^2+5xy+2y^2$

05 (1) $(x-2)(x-5)(x+2)=(x-2)(x+2)(x-5)$
$=(x^2-4)(x-5)$
$=x^3-5x^2-4x+20$
(2) $(x+2)(x^2-x+3)=x^3-x^2+3x+2x^2-2x+6$
$=x^3+x^2+x+6$
답 (1) $x^3-5x^2-4x+20$ (2) x^3+x^2+x+6

06 (1) $(a+b-c)^2$
$=\{a+b+(-c)\}^2$
$=a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2b\times(-c)+2\times(-c)\times a$
$=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$
(2) $(x-2)^3=x^3-3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2-2^3$
$=x^3-6x^2+12x-8$
(3) $(x+3y)^3=x^3+3\times x^2\times 3y+3\times x\times(3y)^2+(3y)^3$
$=x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$
(4) $(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-x\times 3+3^2)$
$=x^3+3^3=x^3+27$
(5) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$
$=(x-2y)\{x^2+x\times 2y+(2y)^2\}$
$=x^3-(2y)^3$
$=x^3-8y^3$
답 (1) $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$ (2) $x^3-6x^2+12x-8$
(3) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ (4) x^3+27 (5) x^3-8y^3

07 (1)
$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-5x+5 \\
x+3 & x^3-2x^2-10x+12 \\
 & x^3+3x^2 \\ \hline
 & -5x^2-10x \\
 & -5x^2-15x \\ \hline
 & 5x+12 \\
 & 5x+15 \\ \hline
 & -3
\end{array}$$
$\therefore$ 몫: x^2-5x+5, 나머지: -3
(2)
$$\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\
x^2+x-1 & x^3+2x^2+x-1 \\
 & x^3+x^2-x \\ \hline
 & x^2+2x-1 \\
 & x^2+x-1 \\ \hline
 & x
\end{array}$$
$\therefore$ 몫: $x+1$, 나머지: x
답 (1) 몫: x^2-5x+5, 나머지: -3 (2) 몫: $x+1$, 나머지: x

08 $P(x)=(x^2-2x-1)(x-1)+3x-2$
$=x^3-x^2-2x^2+2x-x+1+3x-2$
$=x^3-3x^2+4x-1$
답 x^3-3x^2+4x-1

09 $P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(-2x^2+4x+4)-5$
$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(-x^2+2x+2)-5$
$=(2x-1)(-x^2+2x+2)-5$
이므로 $P(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $-x^2+2x+2$, 나머지는 -5이다.
답 몫: $-x^2+2x+2$, 나머지: -5

기출 Best | 1회　　p.8~10

01 $4A-5B-2(A-2B)$

$=4A-5B-2A+4B$

$=2A-B$

$=2(x^3-x^2+4x-1)-(x^2-2x+3)$

$=2x^3-2x^2+8x-2-x^2+2x-3$

$=2x^3-3x^2+10x-5$　　답 ②

02 다항식 $(x^3-2x^2-x+4)(x^2+kx+3)$의 전개식에서 x항은

$-x\times3+4\times kx=(4k-3)x$

이때 x의 계수가 9이므로

$4k-3=9,\ 4k=12\qquad\therefore k=3$　　답 ①

03 ① $(2a+1)(4a^2-2a+1)=(2a+1)\{(2a)^2-2a\times1+1^2\}$

$=(2a)^3+1^3$

$=8a^3+1$

② $(x-4)^3=x^3-3\times x^2\times4+3\times x\times4^2-4^3$

$=x^3-12x^2+48x-64$

③ $(x+2y-2z)^2$

$=\{x+2y+(-2z)\}^2$

$=x^2+(2y)^2+(-2z)^2+2\times x\times2y+2\times2y\times(-2z)+2\times(-2z)\times x$

$=x^2+4y^2+4z^2+4xy-8yz-4zx$

④ $(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$

$=(x-4y)\{x^2+x\times4y+(4y)^2\}$

$=x^3-(4y)^3=x^3-64y^3$

⑤ $(3x+1)^3=(3x)^3+3\times(3x)^2\times1+3\times3x\times1^2+1^3$

$=27x^3+27x^2+9x+1$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.　　답 ④

04 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$6=2^2+2xy,\ 2xy=2$

$\therefore xy=1$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=2^3+3\times1\times2=14$　　답 ③

05 $x+y=\dfrac{1}{\sqrt5+\sqrt3}+\dfrac{1}{\sqrt5-\sqrt3}=\dfrac{(\sqrt5-\sqrt3)+(\sqrt5+\sqrt3)}{(\sqrt5+\sqrt3)(\sqrt5-\sqrt3)}$

$=\dfrac{2\sqrt5}{5-3}=\sqrt5$

$xy=\dfrac{1}{\sqrt5+\sqrt3}\times\dfrac{1}{\sqrt5-\sqrt3}=\dfrac{1}{(\sqrt5+\sqrt3)(\sqrt5-\sqrt3)}$

$=\dfrac{1}{5-3}=\dfrac12$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(\sqrt5)^3-3\times\dfrac12\times\sqrt5=\dfrac{7\sqrt5}{2}$　　답 ①

06 $\dfrac1a+\dfrac1b+\dfrac1c=-1$에서 $\dfrac{bc+ca+ab}{abc}=-1$

$\dfrac{bc+ca+ab}{5}=-1\qquad\therefore ab+bc+ca=-5$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=(-1)^2-2\times(-5)=11$　　답 ④

07 $x^4-14x^2+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-14+\dfrac{1}{x^2}=0\qquad\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=14$

이때 $\left(x+\dfrac1x\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=14+2=16$이므로

$x+\dfrac1x=4\ (\because x>0)$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac1x\right)^3-3\left(x+\dfrac1x\right)$

$=4^3-3\times4=52$　　답 ⑤

08 $x^2+3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+3+\dfrac1x=0\qquad\therefore x+\dfrac1x=-3$

$\therefore x^3-2x+4-\dfrac2x+\dfrac{1}{x^3}$

$=x^3+\dfrac{1}{x^3}-2\left(x+\dfrac1x\right)+4$

$=\left(x+\dfrac1x\right)^3-3\left(x+\dfrac1x\right)-2\left(x+\dfrac1x\right)+4$

$=\left(x+\dfrac1x\right)^3-5\left(x+\dfrac1x\right)+4$

$=(-3)^3-5\times(-3)+4$

$=-8$　　답 ①

09 $4A=4\times(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=(5^2-1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=(5^4-1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=(5^8-1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=(5^{16}-1)(5^{16}+1)$

$=5^{32}-1$　　답 ③

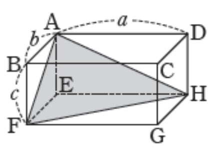
10 $14\times16\times(15^4+15^2+1)$

$=(15-1)(15+1)(15^4+15^2+1)$

$=(15^2-1)\{(15^2)^2+15^2+1\}$

$=(15^2)^3-1^3=15^6-1$　　답 ①

11 $\overline{AD}=a,\ \overline{AB}=b,\ \overline{BF}=c$라 하면



직육면체의 겉넓이가 208이므로

$2(ab+bc+ca)=208$

$\therefore ab+bc+ca=104$

삼각형 AFH의 각 변의 길이의 제곱의 합이 232이므로

$\overline{AF}^2+\overline{FH}^2+\overline{HA}^2=232$

이때 세 직각삼각형 ABF, FGH, HDA에서

$\overline{AF}^2=b^2+c^2$, $\overline{FH}^2=a^2+b^2$, $\overline{HA}^2=a^2+c^2$이므로

$$\overline{AF}^2+\overline{FH}^2+\overline{HA}^2=(b^2+c^2)+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)=232$$

$2a^2+2b^2+2c^2=232$ $\therefore a^2+b^2+c^2=116$

따라서

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\&=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\&=116+2\times104=324\end{aligned}$$

이므로

$a+b+c=18$ ($\because a+b+c>0$)

이고, 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\times18=72$ 답 ④

12

$$\begin{array}{r|l} & 2x-2 \\ \hline x^2+x & 2x^3\qquad+x-4 \\ & 2x^3+2x^2 \\ \hline & -2x^2+x \\ & -2x^2-2x \\ \hline & 3x-4 \end{array}$$

따라서 $a=-2$, $b=-2$, $c=3$이므로

$a+b+c=-2+(-2)+3=-1$ 답 ②

13

$$\begin{array}{r|l} & 3x-4 \\ \hline x^2+x-4 & 3x^3-x^2-18x+18 \\ & 3x^3+3x^2-12x \\ \hline & -4x^2-6x+18 \\ & -4x^2-4x+16 \\ \hline & -2x+2 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x-4$, $R(x)=-2x+2$이므로

$Q(2)=6-4=2$, $R(-2)=4+2=6$

$\therefore Q(2)+R(-2)=2+6=8$ 답 ③

14

$$\begin{array}{r|l} & x^2-x+3 \\ \hline x^2-3x-14 & x^4-4x^3-8x^2+5x-10 \\ & x^4-3x^3-14x^2 \\ \hline & -x^3+6x^2+5x \\ & -x^3+3x^2+14x \\ \hline & 3x^2-9x-10 \\ & 3x^2-9x-42 \\ \hline & 32 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & x^4-4x^3-8x^2+5x-10\\&=(x^2-3x-14)(x^2-x+3)+32\\&=0\times(x^2-x+3)+32=32\end{aligned}$$ 답 ③

15 다항식 $P(x)$를 $x-\frac{3}{4}$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=\left(x-\frac{3}{4}\right)Q(x)+R=\frac{1}{4}(4x-3)Q(x)+R\\&=(4x-3)\times\frac{1}{4}Q(x)+R\end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $4x-3$으로 나누었을 때의 몫은

$\frac{1}{4}Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 ②

기출 Best 2회 p.11~13

01

$$\begin{aligned}&-2(A-B)+3A-C\\&=-2A+2B+3A-C\\&=A+2B-C\\&=(x^2-2xy+2y^2)+2(5x^2-2xy-y^2)-(-2x^2+3y^2)\\&=x^2-2xy+2y^2+10x^2-4xy-2y^2+2x^2-3y^2\\&=13x^2-6xy-3y^2\end{aligned}$$

따라서 $a=13$, $b=-6$, $c=-3$이므로

$a-b-c=13-(-6)-(-3)=22$ 답 ②

02

$$\begin{aligned}&(1+x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})^2\\&=(1+x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})\\&\qquad\times(1+x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})\end{aligned}$$

이므로 이 식의 전개식에서 x^3항은

$$\begin{aligned}1\times3x^3+x\times2x^2+2x^2\times x+3x^3\times1&=(3+2+2+3)x^3\\&=10x^3\end{aligned}$$

따라서 x^3의 계수는 10이다. 답 ②

03 ① $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$$\begin{aligned}&=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\\&=(x^4-y^4)(x^4+y^4)\\&=x^8-y^8\end{aligned}$$

② $(3x-2y+z)^2$

$$\begin{aligned}&=\{3x+(-2y)+z\}^2\\&=(3x)^2+(-2y)^2+z^2+2\times3x\times(-2y)+2\times(-2y)\times z\\&\qquad+2\times z\times3x\\&=9x^2+4y^2+z^2-12xy-4yz+6zx\end{aligned}$$

③ $(x+2)(x-1)(x-4)$

$$\begin{aligned}&=(x^2+x-2)(x-4)\\&=x^3-4x^2+x^2-4x-2x+8\\&=x^3-3x^2-6x+8\end{aligned}$$

④ $(x+6)^3=x^3+3\times x^2\times6+3\times x\times6^2+6^3$
$=x^3+18x^2+108x+216$

⑤ $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)=(3x+y)\{(3x)^2-3x\times y+y^2\}$
$=(3x)^3+y^3=27x^3+y^3$

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

04 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$-\frac{1}{2}=(-1)^3-3xy\times(-1)$, $3xy=\frac{1}{2}$

$\therefore xy=\frac{1}{6}$

$\therefore \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\dfrac{(-1)^2-2\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=4$ 답 ⑤

05 $x-y=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{6-2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$xy=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{1}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{1}{6-2}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+3\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$ 답 ③

06 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$에서

$0=4+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-2$

$(xy+yz+zx)^2$

$=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2\times xy\times yz+2\times yz\times zx$

$+2\times zx\times xy$

$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$

에서

$(-2)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz\times 0$

$\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=4$ 답 ⑤

07 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$

$x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=3^3+3\times3=36$

이때 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)=x^5-\dfrac{1}{x}+x-\dfrac{1}{x^5}$이므로

$x^5-\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=11\times36-3=393$ 답 ③

08 $x^2-2x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-2-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\dfrac{1}{x}=2$

$\therefore x^3+4x^2-3+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$

$=\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)+4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3$

$=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+4\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\right\}-3$

$=2^3+3\times2+4(2^2+2)-3=35$ 답 ①

09 $(5+2)(5^2+2^2)(5^4+2^4)(5^8+2^8)$

$=\dfrac{1}{3}\times(5-2)(5+2)(5^2+2^2)(5^4+2^4)(5^8+2^8)$

$=\dfrac{1}{3}(5^2-2^2)(5^2+2^2)(5^4+2^4)(5^8+2^8)$

$=\dfrac{1}{3}(5^4-2^4)(5^4+2^4)(5^8+2^8)$

$=\dfrac{1}{3}(5^8-2^8)(5^8+2^8)$

$=\dfrac{1}{3}(5^{16}-2^{16})$ 답 ④

10 $60=x$로 놓으면

$\dfrac{62^3-59^3}{61^2-64\times58}$

$=\dfrac{(60+2)^3-(60-1)^3}{(60+1)^2-(60+4)\times(60-2)}$

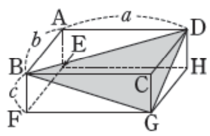
$=\dfrac{(x+2)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x+4)(x-2)}$

$=\dfrac{(x^3+6x^2+12x+8)-(x^3-3x^2+3x-1)}{(x^2+2x+1)-(x^2+2x-8)}$

$=\dfrac{9x^2+9x+9}{9}=\dfrac{9(x^2+x+1)}{9}=x^2+x+1$

$=60^2+60+1=3661$ 답 ①

11 $\overline{AD}=a$, $\overline{AB}=b$, $\overline{BF}=c$라 하면



직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$4(a+b+c)=48 \qquad \therefore a+b+c=12$

직육면체의 겉넓이가 86이므로

$2(ab+bc+ca)=86 \qquad \therefore ab+bc+ca=43$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=12^2-2\times43=58$

이때 세 직각삼각형 ABD, BFG, GHD에서

$\overline{BD}^2=a^2+b^2$, $\overline{BG}^2=a^2+c^2$, $\overline{GD}^2=b^2+c^2$

이므로 삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합은

$\overline{BD}^2+\overline{BG}^2+\overline{GD}^2=(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

$=2\times58=116$ 답 ⑤

12 $2x^3+3x^2+2=A(2x+1)+x+3$이므로

$2x^3+3x^2-x-1=A(2x+1)$

따라서 $A=(2x^3+3x^2-x-1)\div(2x+1)$이므로

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x-1 \\ \hline
2x+1 & 2x^3+3x^2-x-1 \\
 & 2x^3+x^2 \\ \hline
 & 2x^2-x \\
 & 2x^2+x \\ \hline
 & -2x-1 \\
 & -2x-1 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$\therefore A=x^2+x-1$ 답 ③

13

$$
\begin{array}{r}
2x+1 \\
x^2-3x-1\,\overline{)\,2x^3-5x^2-8x+4} \\
\underline{2x^3-6x^2-2x} \\
x^2-6x+4 \\
\underline{x^2-3x-1} \\
-3x+5
\end{array}
$$

따라서 $Q(x)=2x+1$, $R(x)=-3x+5$이므로
$Q(-1)=-2+1=-1$,
$R(3)=-9+5=-4$
$\therefore Q(-1)R(3)=-1\times(-4)=4$ 답 ②

14

$$
\begin{array}{r}
x^2-2x-6 \\
x^2+2x-4\,\overline{)\,x^4\qquad -14x^2-\ 4x+34} \\
\underline{x^4+2x^3-\ 4x^2\qquad\qquad} \\
-2x^3-10x^2-\ 4x\quad \\
\underline{-2x^3-\ 4x^2+\ 8x\quad} \\
-\ 6x^2-12x+34 \\
\underline{-\ 6x^2-12x+24} \\
10
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore x^4-14x^2-4x+34&=(x^2+2x-4)(x^2-2x-6)+10 \\
&=0\times(x^2-2x-6)+10 \\
&=10
\end{aligned}
$$
답 ①

15 $P(x)$를 $x+\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫이 $4x^2-2x+2$, 나머지가 -3이므로

$$
\begin{aligned}
P(x)&=\left(x+\frac{3}{2}\right)(4x^2-2x+2)-3 \\
&=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2-x+1)-3 \\
&=(2x+3)(2x^2-x+1)-3
\end{aligned}
$$

따라서 $Q(x)=2x^2-x+1$, $r=-3$이므로
$Q(r)=Q(-3)=18+3+1=22$ 답 ①

변형유형 집중공략 p.14~15

1-1 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서
$-4=(-1)^3+3xy\times(-1)$, $3xy=3$
$\therefore xy=1$
따라서 $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(-1)^2+4\times1=5$이므로
$x+y=\sqrt{5}$ ($\because x+y>0$)

$$
\begin{aligned}
\therefore x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y) \\
&=(\sqrt{5})^3-3\times1\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}
\end{aligned}
$$
답 ①

1-2
$$
\begin{aligned}
x^2+y^2&=(x-y)^2+2xy \\
&=(-2)^2+2\times1=6, \\
x^3-y^3&=(x-y)^3+3xy(x-y) \\
&=(-2)^3+3\times1\times(-2)=-14
\end{aligned}
$$

이때 $(x^2+y^2)(x^3-y^3)=x^5-x^2y^3+y^2x^3-y^5$이므로

$$
\begin{aligned}
x^5-y^5&=(x^2+y^2)(x^3-y^3)+x^2y^3-y^2x^3 \\
&=(x^2+y^2)(x^3-y^3)-x^2y^2(-y+x) \\
&=(x^2+y^2)(x^3-y^3)-(xy)^2(x-y) \\
&=6\times(-14)-1^2\times(-2)=-82
\end{aligned}
$$
답 ③

2-1 $P(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-x+3$이므로
$P(x)=(x^2+1)Q(x)-x+3$
$\therefore xP(x)=x(x^2+1)Q(x)-x^2+3x$
이때 $(-x^2+3x)\div(x^2+1)$을 계산하면

$$
\begin{array}{r}
-1 \\
x^2+1\,\overline{)\,-x^2+3x} \\
\underline{-x^2\qquad -1} \\
3x+1
\end{array}
$$

즉, $-x^2+3x=-(x^2+1)+3x+1$이므로

$$
\begin{aligned}
xP(x)&=x(x^2+1)Q(x)-x^2+3x \\
&=x(x^2+1)Q(x)-(x^2+1)+3x+1 \\
&=(x^2+1)\{xQ(x)-1\}+3x+1
\end{aligned}
$$

따라서 $xP(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $3x+1$이다.
답 ⑤

참고 $(-x^2+3x)\div(x^2+1)$을 계산하지 않고 다음과 같이 식을 변형할 수도 있다.

$$
\begin{aligned}
-x^2+3x&=-(x^2-3x)=-\{(x^2+1)-3x-1\} \\
&=-(x^2+1)+3x+1
\end{aligned}
$$

2-2 $P(x)=(x^2-4x-3)Q(x)-x+5$이므로

$$
\begin{aligned}
x\{P(x)-Q(x)\}&=x\{(x^2-4x-3)Q(x)-x+5-Q(x)\} \\
&=x\{(x^2-4x-4)Q(x)-x+5\} \\
&=x(x^2-4x-4)Q(x)-x^2+5x
\end{aligned}
$$

이때 $(-x^2+5x)\div(x^2-4x-4)$를 계산하면

$$
\begin{array}{r}
-1 \\
x^2-4x-4\,\overline{)\,-x^2+5x} \\
\underline{-x^2+4x+4} \\
x-4
\end{array}
$$

즉, $-x^2+5x=-(x^2-4x-4)+x-4$이므로

$$
\begin{aligned}
&x\{P(x)-Q(x)\} \\
&=x(x^2-4x-4)Q(x)-x^2+5x \\
&=x(x^2-4x-4)Q(x)-(x^2-4x-4)+x-4 \\
&=(x^2-4x-4)\{xQ(x)-1\}+x-4
\end{aligned}
$$

따라서 $R(x)=x-4$이므로
$R(3)=3-4=-1$ 답 -1

서술형 What & How p.16~17

1 두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a, b라 하면 $\overline{AB}=10$이므로 $a+b=10$

두 정육면체의 부피의 합이 400이므로

$a^3+b^3=400$ ...... ❶

$(a+b)^3-3ab(a+b)=400$

$10^3-3ab\times10=400$

$30ab=600 \qquad \therefore ab=20$ ...... ❷

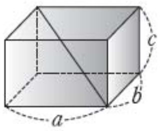
따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은

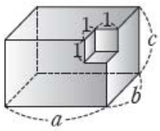
$6a^2+6b^2=6(a^2+b^2)=6\{(a+b)^2-2ab\}$

$\qquad =6(10^2-2\times20)=360$ ...... ❸

답 360

2





[그림 1] [그림 2]

위의 그림과 같이 [그림 1]의 직육면체의 각 모서리의 길이를 a, b, c라 하면 [그림 2]의 입체도형의 겉넓이는

$ab+bc+ca+(ab-1)+(bc-1)+(ca-1)+1+1+1$

$=2ab+2bc+2ca=166$

$\therefore ab+bc+ca=83$ ...... ❶

[그림 2]의 입체도형의 모든 모서리의 길이의 합은

$3a+(a-1)+3b+(b-1)+3c+(c-1)+1\times9$

$=4a+4b+4c+6=70$

$4a+4b+4c=64 \qquad \therefore a+b+c=16$ ...... ❷

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\qquad =16^2-2\times83=90$

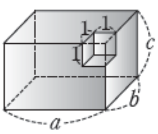
따라서 [그림 1]의 직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3\sqrt{10} \qquad \therefore k=3$ ...... ❸

답 3

채점기준	배점
❶ [그림 1]의 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c로 놓고 [그림 2]의 입체도형의 겉넓이에 대한 식 세우기	3
❷ [그림 2]의 입체도형의 모든 모서리의 길이의 합에 대한 식 세우기	3
❸ [그림 1]의 직육면체의 대각선의 길이와 k의 값 구하기	2

참고 [그림 2]의 입체도형에서 오른쪽 그림과 같이 잘린 부분의 면을 이동하여 생각하면 입체도형의 겉넓이는



$2(ab+bc+ca)$

3 $x+y+z=6$에서

$x+y=6-z$, $y+z=6-x$, $z+x=6-y$ ...... ❶

이므로

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(6-z)(6-x)(6-y)$

$=\{36-6(z+x)+zx\}(6-y)$

$=216-36y-36(z+x)+6y(z+x)+6zx-xyz$

$=216-36(x+y+z)+6(zx+yz+xy)-xyz$ ...... ❷

$=216-36\times6+6\times6-(-9)=45$ ...... ❸

답 45

4 $x\{(x+1)^3+(x-1)^3\}-x^2\{(x+1)^3-(x-1)^3\}$

$=x\{(x^3+3x^2+3x+1)+(x^3-3x^2+3x-1)\}$

$\quad -x^2\{(x^3+3x^2+3x+1)-(x^3-3x^2+3x-1)\}$ ...... ❶

$=x(2x^3+6x)-x^2(6x^2+2)$

$=2x^4+6x^2-6x^4-2x^2$

$=-4x^4+4x^2$ ...... ❷

$=-4\times(\sqrt{2})^4+4\times(\sqrt{2})^2$

$=-4\times4+4\times2=-8$ ...... ❸

답 -8

채점기준	배점
❶ 곱셈 공식을 이용하여 다항식 전개하기	3
❷ 전개한 다항식을 간단히 하기	2
❸ $x=\sqrt{2}$를 대입하여 식의 값 구하기	2

실전 문제 | 1회

p.18~21

01 $B-2(X-A)=3B$에서

$B-2X+2A=3B$, $-2X=-2A+2B$

$\therefore X=A-B$

$\qquad =(2x^2+xy-y^2)-(x^2-3xy-2y^2)$

$\qquad =2x^2+xy-y^2-x^2+3xy+2y^2$

$\qquad =x^2+4xy+y^2$

답 ⑤

02 $(1-2x+3x^2-4x^3+5x^4)^5$의 전개식에서 x항은

$-2x\times1\times1\times1\times1+1\times(-2x)\times1\times1\times1$

$\qquad +1\times1\times(-2x)\times1\times1+1\times1\times1\times(-2x)\times1$

$\qquad +1\times1\times1\times1\times(-2x)$

$=-2x\times5=-10x$

이므로 x의 계수는 -10이다.

답 ①

참고 $(1-2x+3x^2-4x^3+5x^4)^5$의 전개식에서 $3x^2$, $-4x^3$, $5x^4$항은 x의 계수에 영향을 주지 않으므로

$(1-2x)^5=(1-2x)(1-2x)(1-2x)(1-2x)(1-2x)$

의 전개식에서 x의 계수를 구하는 것과 같다.

03 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$8=2^2-2ab$, $2ab=-4$

$\therefore ab=-2$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\qquad =2^3-3\times(-2)\times2=20$

이때 $(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^5+a^2b^3+b^2a^3+b^5$이므로

$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-b^2a^3-a^2b^3$

$\qquad =(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)$

$\qquad =(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b)$

$\qquad =8\times20-(-2)^2\times2=152$

답 ⑤

04 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{yz+zx+xy}{xyz}=0$이므로 $xy+yz+zx=0$

$\therefore (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$=3+2\times0=3$

답 ①

05 $x+y=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$,

$xy=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=4-5=-1$

이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\times(-1)=18$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\times(-1)\times4=76$

$\therefore x^2+x^3+y^2+y^3=(x^2+y^2)+(x^3+y^3)$

$=18+76=94$

답 ④

06 $a-b=3$ …… ㉠

$b-c=1$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$a-c=4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 양변을 각각 제곱하면

$a^2-2ab+b^2=9$ …… ㉣

$b^2-2bc+c^2=1$ …… ㉤

$a^2-2ac+c^2=16$ …… ㉥

㉣+㉤+㉥을 하면

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=26$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=13$

답 ①

07 $x^2-4x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x+\frac{1}{x}=4$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$,

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3\times4=52$

이때 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x^5}$이므로

$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=14\times52-4=724$

답 ①

08 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{yz+xz+xy}{xyz}=\frac{1}{4}$에서

$xyz=4(xy+yz+zx)$

$\therefore (x-4)(y-4)(z-4)$

$=\{xy-4(x+y)+16\}(z-4)$

$=xyz-4xy-4z(x+y)+16(x+y)+16z-64$

$=xyz-4(xy+yz+zx)+16(x+y+z)-64$

$=4(xy+yz+zx)-4(xy+yz+zx)+16(x+y+z)-64$

$=16(x+y+z)-64$

$=16\times2-64=-32$

답 ①

09 $100=x$로 놓으면

$101^3-(100-1)(9801+100)$

$=101^3-(100-1)(99^2+100)$

$=(x+1)^3-(x-1)\{(x-1)^2+x\}$

$=(x+1)^3-(x-1)^3-x(x-1)$

$=(x^3+3x^2+3x+1)-(x^3-3x^2+3x-1)-x^2+x$

$=5x^2+x+2$

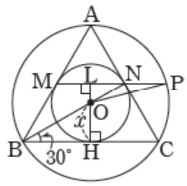
$=5\times100^2+100+2$

$=50102$

답 ④

10 정삼각형 ABC의 외심과 내심, 무게중심은 점 O로 일치한다.

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=x$, $\angle OBH=30°$

따라서 직각삼각형 OBH에서

$\overline{BH}=\frac{\overline{OH}}{\tan 30°}=\sqrt{3}x$, $\overline{OB}=\frac{\overline{OH}}{\sin 30°}=2x$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BH}=2\sqrt{3}x$

두 점 M, N은 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점이므로

$\overline{MN}/\!/\overline{BC}$, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\sqrt{3}x$

점 O에서 $\overline{MN}$에 내린 수선의 발을 L이라 하면 두 삼각형 OBH, ONL은 서로 닮음이므로

$\overline{OH}:\overline{OL}=\overline{OB}:\overline{ON}$, $x:\overline{OL}=2:1$

$2\overline{OL}=x$ $\quad\therefore \overline{OL}=\frac{1}{2}x$

또, $\overline{LP}=\overline{LN}+\overline{NP}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+2\sqrt{3}$, $\overline{OP}=\overline{OB}=2x$이므로 직각삼각형 LOP에서

$\overline{OL}^2+\overline{LP}^2=\overline{OP}^2$

$\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+2\sqrt{3}\right)^2=(2x)^2$, $\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x^2+6x+12=4x^2$

$3x^2-6x-12=0$, $x^2-2x-4=0$

$x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-2-\frac{4}{x}=0$ $\quad\therefore x-\frac{4}{x}=2$

이때 양변을 제곱하면 $x^2-8+\frac{16}{x^2}=4$

$\therefore x^2+\frac{16}{x^2}=12$

답 ②

11

$$\begin{array}{r|l} & 2x-5 \\ \hline x^2-x-3 & 2x^3-7x^2+3x+2 \\ & 2x^3-2x^2-6x \\ \hline & -5x^2+9x+2 \\ & -5x^2+5x+15 \\ \hline & 4x-13 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x-5$, 나머지는 $4x-13$이므로

$a=2$, $b=-5$, $c=4$, $d=-13$

$\therefore a+b+c+d=2+(-5)+4+(-13)$

$=-12$

답 ①

12 $P(x)=(3x+1)Q(x)+R$

$=3\left(x+\frac{1}{3}\right)Q(x)+R$

$=\left(x+\frac{1}{3}\right)\times 3Q(x)+R$

따라서 다항식 $P(x)$를 $x+\frac{1}{3}$로 나누었을 때 몫은 $3Q(x)$, 나머지는 R이므로

$a=3$, $b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

답 ③

13 $P(x)=(x-2)(x^2-4)+3$

$=(x-2)\{(x^2+1)-5\}+3$

$=(x-2)(x^2+1)-5(x-2)+3$

$=(x^2+1)(x-2)-5x+13$

따라서 $Q(x)=x-2$, $R(x)=-5x+13$이므로

$Q(-4)=-4-2=-6$

$R(3)=-5\times 3+13=-2$

$\therefore Q(-4)\times R(3)=-6\times(-2)=12$

답 ⑤

14 $(x^4+ax+b)\div(x-1)^2$, 즉 $(x^4+ax+b)\div(x^2-2x+1)$을 계산하면

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+3 \\
\hline
x^2-2x+1 & x^4+\qquad\qquad\qquad ax+b \\
 & x^4-2x^3+x^2 \\
\hline
 & \quad 2x^3-x^2+\qquad ax \\
 & \quad 2x^3-4x^2+\qquad 2x \\
\hline
 & \qquad 3x^2+(a-2)x+b \\
 & \qquad 3x^2-\qquad 6x+3 \\
\hline
 & \qquad\qquad (a+4)x+b-3
\end{array}$$

이때 나머지가 0이므로 $a+4=0$, $b-3=0$

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로

$ab=-4\times 3=-12$

답 ③

15 $x=\frac{1+\sqrt{6}}{2}$에서

$2x=1+\sqrt{6}$, $2x-1=\sqrt{6}$

양변을 제곱하면

$(2x-1)^2=(\sqrt{6})^2$, $4x^2-4x+1=6$

$\therefore 4x^2-4x-5=0$

$(4x^4-13x^2-x+10)\div(4x^2-4x-5)$를 계산하면

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x-1 \\
\hline
4x^2-4x-5 & 4x^4\qquad -13x^2-x+10 \\
 & 4x^4-4x^3-5x^2 \\
\hline
 & \quad 4x^3-8x^2-x \\
 & \quad 4x^3-4x^2-5x \\
\hline
 & \qquad -4x^2+4x+10 \\
 & \qquad -4x^2+4x+5 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 5
\end{array}$$

$\therefore 4x^4-13x^2-x+10=(4x^2-4x-5)(x^2+x-1)+5$

$=0\times(x^2+x-1)+5=5$

답 ⑤

16 $(x+a)(x^2+7x+b)$에서

x^2항은 $ax^2+7x^2=(a+7)x^2$

이때 x^2의 계수가 4이므로

$a+7=4$ $\quad\therefore a=-3$

또, x항은 $7ax+bx=(7a+b)x$

이때 x의 계수가 -16이므로

$7a+b=-16$, $7\times(-3)+b=-16$

$\therefore b=5$

$\therefore ab=-3\times 5=-15$

답 ③

17 큰 물통에 담긴 물의 부피는

$\pi\times r^2\times(3r+1)=3\pi r^3+\pi r^2$ (mL)

작은 물통에 담긴 물의 부피는

$\pi\times 1^2\times(r-1)=\pi r-\pi$ (mL)

$(3\pi r^3+\pi r^2)\div(\pi r-\pi)$를 계산하면

$$\begin{array}{r|l}
 & 3r^2+4r+4 \\
\hline
\pi r-\pi & 3\pi r^3+\pi r^2 \\
 & 3\pi r^3-3\pi r^2 \\
\hline
 & \qquad 4\pi r^2 \\
 & \qquad 4\pi r^2-4\pi r \\
\hline
 & \qquad\qquad 4\pi r \\
 & \qquad\qquad 4\pi r-4\pi \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 4\pi
\end{array}$$

즉, $3\pi r^3+\pi r^2=(\pi r-\pi)(3r^2+4r+4)+4\pi$이므로

$f(r)=3r^2+4r+4$, $a=4\pi$

$\therefore f\left(\frac{a}{\pi}\right)=f(4)=3\times 4^2+4\times 4+4=68$

답 ②

참고 $r\geq 6$이므로 $\pi r-\pi=(r-1)\pi\geq 5\pi$이고 $5\pi>4\pi$이므로 4π는 나머지가 될 수 있다.

18 $(x-2)(x+1)(x+3)(x+6)$

$=\{(x-2)(x+6)\}\{(x+1)(x+3)\}$

$=(x^2+4x-12)(x^2+4x+3)$ ······ ❶

이때 $x^2+4x=t$로 놓으면

$(x^2+4x-12)(x^2+4x+3)$

$=(t-12)(t+3)$

$=t^2-9t-36$

$=(x^2+4x)^2-9(x^2+4x)-36$

$=x^4+8x^3+16x^2-9x^2-36x-36$

$=x^4+8x^3+7x^2-36x-36$ ······ ❷

따라서 $a=8$, $b=7$, $c=-36$이므로

$a-b-c=8-7-(-36)=37$ ······ ❸

답 37

채점기준	배점
❶ 일차항의 계수가 같아지도록 일차식을 두 개씩 묶어 다항식을 전개하기	3
❷ 공통부분을 한 문자로 놓고 다항식을 전개하기	2
❸ $a-b-c$의 값 구하기	1

19 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$

$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(abc)^2}$ …… ㉠ …… ❶

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$에서

$3^2=4+2(ab+bc+ca)$, $2(ab+bc+ca)=5$

$\therefore ab+bc+ca=\frac{5}{2}$ …… ❷

양변을 제곱하면

$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2\times ab\times bc+2\times bc\times ca+2\times ca\times ab$

$=\frac{25}{4}$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\frac{25}{4}$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\times\frac{1}{2}\times 3=\frac{25}{4}$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{13}{4}$ …… ❸

따라서 ㉠에서

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(abc)^2}$

$=\frac{\frac{13}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=13$ …… ❹

답 13

채점기준	배점
❶ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$을 통분하여 나타내기	1
❷ $ab+bc+ca$의 값 구하기	2
❸ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값 구하기	3
❹ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.22~25

01 $B+C-A$

$=(x^2-2x+3)+(2x^3-x+4)-(x^3-x^2+4x-1)$

$=x^2-2x+3+2x^3-x+4-x^3+x^2-4x+1$

$=x^3+2x^2-7x+8$

답 ④

02 $(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})^2$의 전개식에서 x^6항은

$1\times 6x^6+x\times 5x^5+2x^2\times 4x^4$

$+3x^3\times 3x^3+4x^4\times 2x^2+5x^5\times x+6x^6\times 1$

$=(6+5+8+9+8+5+6)x^6=47x^6$

따라서 x^6의 계수는 47이다.

답 ⑤

03 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$

이때 $x^2-5x=t$로 놓으면

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$

$=(t+4)(t+6)=t^2+10t+24$

$=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24$

$=x^4-10x^3+25x^2+10x^2-50x+24$

$=x^4-10x^3+35x^2-50x+24$

따라서 $a=-50$, $b=24$이므로

$a+b=-50+24=-26$

답 ①

다른풀이 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$의 전개식에서 x항은

$x\times(-2)\times(-3)\times(-4)+(-1)\times x\times(-3)\times(-4)$

$+(-1)\times(-2)\times x\times(-4)+(-1)\times(-2)\times(-3)\times x$

$=-50x$

이므로 $a=-50$

상수항은 $-1\times(-2)\times(-3)\times(-4)=24$이므로

$b=24$

04 ① $(x-3y)^3=x^3-3\times x^2\times 3y+3\times x\times(3y)^2-(3y)^3$

$=x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

② $(x+4)(x^2-4x+16)=(x+4)(x^2-x\times 4+4^2)$

$=x^3+4^3=x^3+64$

③ $(2x+1)^3=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 1+3\times 2x\times 1^2+1^3$

$=8x^3+12x^2+6x+1$

④ $(x-1)(x^2-x+1)=x^3-x^2+x-x^2+x-1$

$=x^3-2x^2+2x-1$

⑤ $(a-b+2c)^2=\{a+(-b)+2c\}^2$

$=a^2+(-b)^2+(2c)^2+2\times a\times(-b)$

$+2\times(-b)\times 2c+2\times 2c\times a$

$=a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

05 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=7^2-2\times 14=21$

이므로

$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$=a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2$

$=2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$=2(21+14)=70$

답 ④

다른풀이 $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$=2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$=2\{(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\}$

$=2(7^2-14)=70$

06 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$3=1^2-2ab$, $2ab=-2$ $\therefore ab=-1$

$(a^2+b^2)^3=(a^2)^3+3(a^2)^2b^2+3a^2(b^2)^2+(b^2)^3$

$=a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$

이므로

$a^6+b^6=(a^2+b^2)^3-3a^4b^2-3a^2b^4$
$\qquad=(a^2+b^2)^3-3a^2b^2(a^2+b^2)$
$\qquad=(a^2+b^2)^3-3(ab)^2(a^2+b^2)$
$\qquad=3^3-3\times(-1)^2\times3=18$ 답 ②

다른풀이 $(a^3+b^3)^2=a^6+2a^3b^3+b^6$에서
$a^6+b^6=(a^3+b^3)^2-2a^3b^3$
$\qquad=\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}^2-2(ab)^3$
$\qquad=\{1^3-3\times(-1)\times1\}^2-2\times(-1)^3=18$

07 $x^3-x^2-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+1$
$=\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+1$
$=\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right\}-\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\right\}+1$
$=(3^3+3\times3)-(3^2+2)+1$
$=26$ 답 ⑤

08 $(x^2-1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^4+x^2+1)$
$=\{(x^2-1)(x^4+x^2+1)\}\{(x^2+1)(x^4-x^2+1)\}$
$=(x^2-1)\{(x^2)^2+x^2\times1+1^2\}(x^2+1)\{(x^2)^2-x^2\times1+1^2\}$
$=\{(x^2)^3-1^3\}\{(x^2)^3+1^3\}$
$=(x^6-1)(x^6+1)$
$=(6-1)\times(6+1)=35$ 답 ①

09 $4x+1=\sqrt{2}$에서 $4x=\sqrt{2}-1$ $\quad\therefore x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$
$4y-1=\sqrt{2}$에서 $4y=\sqrt{2}+1$ $\quad\therefore y=\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$
따라서
$x-y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}-\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}=-\dfrac{1}{2}$,
$xy=\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}\times\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}=\dfrac{2-1}{16}=\dfrac{1}{16}$
이므로
$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$\qquad=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3+3\times\dfrac{1}{16}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{32}$ 답 ④

10 $1000=x$로 놓으면
$1001\times(1000000-1000+1)-999\times1001001$
$=1001\times(1000000-1000+1)-999\times(1000000+1000+1)$
$=(x+1)(x^2-x+1)-(x-1)(x^2+x+1)$
$=(x^3+1)-(x^3-1)=2$ 답 ①

11
$$
\begin{array}{r}
x+1\\
x^2+x+2\,\overline{)\,x^3+2x^2+3x+1}\\
\underline{x^3+\ x^2+2x}\\
x^2+\ x+1\\
\underline{x^2+\ x+2}\\
-1
\end{array}
$$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=-1$이므로
$a^2+b^2+c^2=1^2+1^2+(-1)^2=3$ 답 ③

12 $P(x)=(x+1)Q(x)+r$이므로
$x^2P(x)=x^2(x+1)Q(x)+rx^2$
이때 $rx^2\div(x+1)$을 계산하면
$$
\begin{array}{r}
rx-r\\
x+1\,\overline{)\,rx^2}\\
\underline{rx^2+rx}\\
-rx\\
\underline{-rx-r}\\
r
\end{array}
$$
즉, $rx^2=(x+1)(rx-r)+r=r(x+1)(x-1)+r$이므로
$x^2P(x)=x^2(x+1)Q(x)+rx^2$
$\qquad=x^2(x+1)Q(x)+r(x+1)(x-1)+r$
$\qquad=(x+1)\{x^2Q(x)+r(x-1)\}+r$
따라서 $x^2P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은
$x^2Q(x)+r(x-1)$, 나머지는 r이다. 답 ③

13
$$
\begin{array}{r}
2x+3\\
x^2+x+b\,\overline{)\,2x^3+5x^2+\qquad ax+6}\\
\underline{2x^3+2x^2+\qquad 2bx}\\
3x^2+(a-2b)x+6\\
\underline{3x^2+\qquad 3x+3b}\\
(a-2b-3)x+6-3b
\end{array}
$$
이때 나머지가 0이므로 $a-2b-3=0$, $6-3b=0$
따라서 $a=7$, $b=2$이므로
$ab=7\times2=14$ 답 ①

14 $P(x)=(x+3)(x^2-2x-4)-3$
$\qquad=(x+3)(x^2+4x+1-6x-5)-3$
$\qquad=(x+3)(x^2+4x+1)+(x+3)(-6x-5)-3$
$\qquad=(x+3)(x^2+4x+1)-6x^2-23x-18$
$(-6x^2-23x-18)\div(x^2+4x+1)$을 계산하면
$$
\begin{array}{r}
-6\\
x^2+4x+1\,\overline{)\,-6x^2-23x-18}\\
\underline{-6x^2-24x-\ 6}\\
x-12
\end{array}
$$
즉,
$-6x^2-23x-18=(x^2+4x+1)\times(-6)+x-12$
$\qquad=-6(x^2+4x+1)+x-12$
이므로
$P(x)=(x^2+4x+1)(x+3)-6x^2-23x-18$
$\qquad=(x^2+4x+1)(x+3)-6(x^2+4x+1)+x-12$
$\qquad=(x^2+4x+1)\{(x+3)-6\}+x-12$
$\qquad=(x^2+4x+1)(x-3)+x-12$
따라서 $Q(x)=x-3$, $R(x)=x-12$이므로
$Q(1)=1-3=-2$, $R(1)=1-12=-11$
$\therefore Q(1)\times R(1)=-2\times(-11)=22$ 답 ③

15 n^3+7이 $n-2$의 배수이므로 n^3+7은 $n-2$로 나누어떨어진다.
$(n^3+7)\div(n-2)$를 계산하면

$$\begin{array}{r@{}l} & \ n^2+2n+4 \\ n-2 \ \big) & \ n^3 \qquad\qquad +\ 7 \\ & \ n^3-2n^2 \\ \hline & \qquad 2n^2 \\ & \qquad 2n^2-4n \\ \hline & \qquad\qquad 4n+\ 7 \\ & \qquad\qquad 4n-\ 8 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 15 \end{array}$$

$\therefore\ n^3+7=(n-2)(n^2+2n+4)+15$
이때 n^3+7이 $n-2$로 나누어떨어져야 하므로 15는 $n-2$로 나누어떨어져야 한다. 즉, $n-2$는 15의 양의 약수이므로
$n-2=1$ 또는 $n-2=3$ 또는 $n-2=5$ 또는 $n-2=15$
$\therefore\ n=3$ 또는 $n=5$ 또는 $n=7$ 또는 $n=17$
따라서 모든 자연수 n의 합은
$3+5+7+17=32$

답 ⑤

16 x^4y+xy^4
$=xy(x^3+y^3)$
$=xy\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}$
$=1\times(4^3-3\times1\times4)=52$

답 ②

17 $A+B=3x^2+2xy+y^2$ ······ ㉠
$A-B=-x^2+4xy-3y^2$ ······ ㉡
㉠+㉡을 하면
$2A=2x^2+6xy-2y^2$
$\therefore\ A=x^2+3xy-y^2$
㉠−㉡을 하면
$2B=4x^2-2xy+4y^2$
$\therefore\ B=2x^2-xy+2y^2$
$\therefore\ 2A+B=2(x^2+3xy-y^2)+2x^2-xy+2y^2$
$=2x^2+6xy-2y^2+2x^2-xy+2y^2$
$=4x^2+5xy$

답 ⑤

18 $x^4-7x^2+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-7+\dfrac{1}{x^2}=0\qquad\therefore\ x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$ ······ ❶

이때 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=7+2=9$이므로

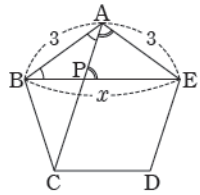
$x+\dfrac{1}{x}=3\ (\because\ x>0)$ ······ ❷

$\therefore\ x^3+4x^2-5+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$
$=x^3+\dfrac{1}{x^3}+4x^2+\dfrac{4}{x^2}-5$
$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-5$
$=3^3-3\times3+4\times7-5=41$ ······ ❸

답 41

채점기준	배점
❶ $x^2+\dfrac{1}{x^2}$의 값 구하기	2
❷ $x+\dfrac{1}{x}$의 값 구하기	2
❸ $x^3+4x^2-5+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$의 값 구하기	2

19 (1) 정오각형의 한 내각의 크기는 $108°$이므로 이등변삼각형 ABE에서



$\angle ABE=\dfrac{1}{2}\times(180°-108°)=36°$
같은 방법으로 이등변삼각형 BCA에서
$\angle BAC=36°$
$\therefore\ \angle PAE=\angle BAE-\angle BAP=108°-36°=72°$
이때 삼각형 ABP에서
$\angle APE=\angle ABP+\angle BAP=36°+36°=72°$
이므로 $\angle APE=\angle PAE$
즉, 삼각형 APE는 $\overline{PE}=\overline{AE}=3$인 이등변삼각형이다. ······ ❶

$\overline{BP}=\overline{BE}-\overline{PE}=x-3$이므로 $\overline{BE}:\overline{PE}=\overline{PE}:\overline{BP}$에서
$\overline{PE}^2=\overline{BE}\times\overline{BP}$, $3^2=x(x-3)$
$x^2-3x-9=0$ ······ ❷
$x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-3-\dfrac{9}{x}=0\qquad\therefore\ x-\dfrac{9}{x}=3$ ······ ❸

(2) $x^2-3x-9=0$이므로
$(x^3-4x^2-6x+11)\div(x^2-3x-9)$를 계산하면

$$\begin{array}{r@{}l} & \ x-1 \\ x^2-3x-9 \ \big) & \ x^3-4x^2-6x+11 \\ & \ x^3-3x^2-9x \\ \hline & \quad -\ x^2+3x+11 \\ & \quad -\ x^2+3x+\ 9 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 2 \end{array}$$ ······ ❹

$\therefore\ x^3-4x^2-6x+11=(x^2-3x-9)(x-1)+2$
$=0\times(x-1)+2=2$ ······ ❺

답 (1) 3 (2) 2

채점기준	배점
❶ $\overline{PE}=\overline{AE}=3$임을 설명하기	2
❷ 주어진 비례식을 이용하여 x에 대한 이차방정식 세우기	2
❸ $x-\dfrac{9}{x}$의 값 구하기	1
❹ $(x^3-4x^2-6x+11)\div(x^2-3x-9)$ 계산하기	2
❺ $x^3-4x^2-6x+11$의 값 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.26~28

1 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+1$이므로
$f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+1$

$\therefore \{f(x)\}^2$

$=\{(x^2+1)Q(x)+x+1\}^2$

$=(x^2+1)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2+1)Q(x)(x+1)+(x+1)^2$

$=(x^2+1)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2+1)Q(x)(x+1)+(x^2+2x+1)$

$=(x^2+1)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2+1)Q(x)(x+1)+(x^2+1)+2x$

$=(x^2+1)[(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2Q(x)(x+1)+1]+2x$

따라서 $R(x)=2x$이므로

$R(3)=2\times3=6$ 답 ①

2 $P(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x-2$이므로

$P(x)=(x^2+1)Q(x)+x-2$

$\therefore x\{P(x)\}^2$

$=x\{(x^2+1)Q(x)+x-2\}^2$

$=x[(x^2+1)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2+1)Q(x)(x-2)+(x-2)^2]$

$=x(x^2+1)^2\{Q(x)\}^2+2x(x^2+1)Q(x)(x-2)+x(x-2)^2$

$=(x^2+1)[x(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2xQ(x)(x-2)]+x^3-4x^2+4x$

이때 $(x^3-4x^2+4x)\div(x^2+1)$을 계산하면

$$\begin{array}{r|l} & x-4 \\ x^2+1 & x^3-4x^2+4x \\ & \underline{x^3\qquad+x} \\ & -4x^2+3x \\ & \underline{-4x^2\qquad-4} \\ & 3x+4 \end{array}$$

즉, $x^3-4x^2+4x=(x^2+1)(x-4)+3x+4$이므로

$x\{P(x)\}^2$

$=(x^2+1)[x(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2xQ(x)(x-2)]+x^3-4x^2+4x$

$=(x^2+1)[x(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2xQ(x)(x-2)]+(x^2+1)(x-4)+3x+4$

$=(x^2+1)[x(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2xQ(x)(x-2)+(x-4)]+3x+4$

따라서 $R(x)=3x+4$이므로

$R(-5)=3\times(-5)+4=-11$ 답 ③

3 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{4}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times1=\frac{4}{3}\qquad\therefore \overline{AB}=\frac{8}{3}$

이때 $\overline{AH}=\overline{AB}-\overline{BH}=\frac{8}{3}-x$이고

두 직각삼각형 AHC, CHB가 서로 닮음이므로

$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$

$\overline{CH}^2=\overline{AH}\times\overline{BH}$

$1^2=\left(\frac{8}{3}-x\right)\times x,\ 1=\frac{8}{3}x-x^2$

$3=8x-3x^2,\ 3x^2-8x+3=0$

$\therefore x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-3\times3}}{3}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

이때 $x<1$이므로 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

$(3x^3-5x^2+4x+7)\div(3x^2-8x+3)$을 계산하면

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ 3x^2-8x+3 & 3x^3-5x^2+4x+7 \\ & \underline{3x^3-8x^2+3x} \\ & 3x^2+\ x+7 \\ & \underline{3x^2-8x+3} \\ & 9x+4 \end{array}$$

$\therefore 3x^3-5x^2+4x+7=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$

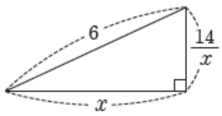
$=0\times(x+1)+9x+4$

$=9x+4$

$=9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4$

$=16-3\sqrt{7}$ 답 ④

4 직각삼각형의 빗변이 아닌 한 변의 길이가 x이고 넓이가 7이므로 다른 한 변의 길이는 $\frac{14}{x}$이다.



이때 직각삼각형의 빗변의 길이가 6이므로

$x^2+\left(\frac{14}{x}\right)^2=6^2,\ x^2+\frac{196}{x^2}=36$

따라서 $\left(x+\frac{14}{x}\right)^2=x^2+\frac{196}{x^2}+28=36+28=64$이므로

$x+\frac{14}{x}=8\ (\because x>0)$

양변에 x를 곱하면

$x^2+14=8x\qquad\therefore x^2-8x+14=0$

$(x^3-5x^2-10x+32)\div(x^2-8x+14)$를 계산하면

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ x^2-8x+14 & x^3-5x^2-10x+32 \\ & \underline{x^3-8x^2+14x} \\ & 3x^2-24x+32 \\ & \underline{3x^2-24x+42} \\ & -10 \end{array}$$

$\therefore x^3-5x^2-10x+32=(x^2-8x+14)(x+3)-10$

$=0\times(x+3)-10$

$=-10$ 답 ①

5 두 강철 용기 A, B에 담긴 이상 기체의 몰수를 각각 n_A, n_B라 하고, 압력을 각각 P_A, P_B라 하자.

강철 용기 A에 담긴 이상 기체의 몰수는 강철 용기 B에 담긴 이상 기체의 몰수의 $\frac{1}{4}$배이므로

$n_A=\frac{1}{4}n_B$

강철 용기 A에 담긴 이상 기체의 압력은 강철 용기 B에 담긴 이상 기체의 압력의 $\frac{3}{2}$배이므로

$P_A=\frac{3}{2}P_B$

두 강철 용기 A, B에 담긴 이상 기체의 절대 온도가 같으므로 절대 온도를 T라 하면

$$V_A=R\left(\frac{n_AT}{P_A}\right)=R\left(\frac{\frac{1}{4}n_BT}{\frac{3}{2}P_B}\right)=\frac{1}{6}R\left(\frac{n_BT}{P_B}\right)=\frac{1}{6}V_B$$

$\therefore \frac{V_A}{V_B}=\frac{1}{6}$ 답 ①

6 두 인공위성 A, B의 공전 주기를 각각 P_A, P_B, 공전 궤도 반경을 각각 R_A, R_B라 하자.
인공위성 A의 공전 주기가 인공위성 B의 공전 주기의 2배이므로
$P_A=2P_B$
인공위성 A의 공전 궤도 반경이 인공위성 B의 공전 궤도 반경의 4배이므로
$R_A=4R_B$
천왕성과 지구의 질량을 각각 M_A, M_B라 하면

$$\begin{aligned}M_A&=k\left(\frac{R_A^3}{GP_A^2}\right)=k\left\{\frac{(4R_B)^3}{G(2P_B)^2}\right\}\\&=k\left(\frac{64R_B^3}{G\times4P_B^2}\right)\\&=16k\left(\frac{R_B^3}{GP_B^2}\right)\\&=16M_B\end{aligned}$$

따라서 천왕성의 질량은 지구의 질량의 16배이다. 답 ④

2 나머지정리와 인수분해

교과서 예제 p.31, 33

01 ㄱ. $x^2-2x=2x-x^2$에서 $2x^2-4x=0$
ㄷ. $(x+5)(x-5)=x^2-5^2=x^2-25$
ㄹ. $(x-3)^2-x=(x^2-6x+9)-x=x^2-7x+9$
따라서 x에 대한 항등식인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ
참고 ㄱ, ㄴ. (좌변)≠(우변)이므로 항등식이 아니다.

02 등식 $(a-3)x^2+(b+5)x+c+4=2x^2-x+1$이 x에 대한 항등식이므로
$a-3=2$, $b+5=-1$, $c+4=1$
$\therefore a=5$, $b=-6$, $c=-3$ 답 $a=5$, $b=-6$, $c=-3$

03 (1) $x^2+ax-5=(bx-1)(x+c)$에서
$x^2+ax-5=bx^2+(bc-1)x-c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$1=b$, $a=bc-1$, $-5=-c$
즉, $b=1$, $c=5$이므로 $a=1\times5-1=4$
(2) $x^2-2x+3=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+c$의 양변에
$x=1$을 대입하면
$1-2+3=c$ $\quad\therefore c=2$
$x=-1$을 대입하면
$1+2+3=-2b+c$, $6=-2b+2$
$2b=-4$ $\quad\therefore b=-2$
$x=0$을 대입하면
$3=-a-b+c$, $3=-a+2+2$ $\quad\therefore a=1$
답 (1) $a=4$, $b=1$, $c=5$ (2) $a=1$, $b=-2$, $c=2$
다른풀이 (2) $x^2-2x+3=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+c$에서
$x^2-2x+3=ax^2+bx-a-b+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$1=a$, $-2=b$, $3=-a-b+c$ $\quad\therefore c=2$

04 (1) $P(1)=2+3-4+2=3$
(2) $P(-2)=-16+12+8+2=6$ 답 (1) 3 (2) 6

05 $P\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+1=\frac{11}{8}$ 답 $\frac{11}{8}$

06 $P\left(\frac{1}{3}\right)=2$이므로
$P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}a+1=2$, $\frac{1}{3}a=1$
$\therefore a=3$ 답 3

07 (1)
$$\begin{array}{r|rrrr} \boxed{-1} & 1 & 6 & \boxed{-3} & \boxed{-1} \\ & & \boxed{-1} & \boxed{-5} & 8 \\ \hline & 1 & 5 & \boxed{-8} & \boxed{7} \end{array}$$
∴ 몫: x^2+5x-8, 나머지: 7

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} \boxed{2} & \boxed{-2} & 5 & \boxed{0} & -7 \\ & & -4 & \boxed{2} & \boxed{4} \\ \hline & -2 & \boxed{1} & 2 & \boxed{-3} \end{array}$$
몫: $-2x^2+x+2$, 나머지: -3

답 (1) -1, -3, -1, -1, -5, -8, 7, 몫: x^2+5x-8, 나머지: 7
(2) 2, -2, 0, 2, 4, 1, -3, 몫: $-2x^2+x+2$, 나머지: -3

08 (1) 먼저 $(-4x^3+5x+3)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$을 조립제법을 이용하여 계산하면
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & -4 & 0 & 5 & 3 \\ & & -2 & -1 & 2 \\ \hline & -4 & -2 & 4 & \boxed{5} \end{array}$$
이므로
$$-4x^3+5x+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)(-4x^2-2x+4)+5$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\times 2(-2x^2-x+2)+5$$
$$=(2x-1)(-2x^2-x+2)+5$$
즉, $(-4x^3+5x+3)\div(2x-1)$의 몫은 $-2x^2-x+2$, 나머지는 5이다.

(2) 먼저 $(3x^3+7x^2-10x+2)\div\left(x+\frac{1}{3}\right)$을 조립제법을 이용하여 계산하면
$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 3 & 7 & -10 & 2 \\ & & -1 & -2 & 4 \\ \hline & 3 & 6 & -12 & \boxed{6} \end{array}$$
이므로
$$3x^3+7x^2-10x+2=\left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2+6x-12)+6$$
$$=\left(x+\frac{1}{3}\right)\times 3(x^2+2x-4)+6$$
$$=(3x+1)(x^2+2x-4)+6$$
즉, $(3x^3+7x^2-10x+2)\div(3x+1)$의 몫은 x^2+2x-4, 나머지는 6이다.

답 (1) 몫: $-2x^2-x+2$, 나머지: 5
(2) 몫: x^2+2x-4, 나머지: 6

09 (2) $3(a-b)-x(b-a)=3(a-b)+x(a-b)$
$=(3+x)(a-b)$

(3) $ab+a-1-b=a(b+1)-(1+b)$
$=(a-1)(b+1)$

답 (1) $b(4ab-3)$ (2) $(3+x)(a-b)$ (3) $(a-1)(b+1)$
(4) $(x-3)^2$ (5) $(x+4)(x-4)$ (6) $(2x-7)(x+5)$
(7) $(x+2y)^2$ (8) $(4x+y)(2x-3y)$

10 (1) $x^3-6x^2+12x-8=x^3-3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2-2^3$
$=(x-2)^3$

(2) $8a^3-27b^3=(2a)^3-(3b)^3$
$=(2a-3b)\{(2a)^2+2a\times 3b+(3b)^2\}$
$=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

(3) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
$=a^2+(-b)^2+c^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times c+2\times c\times a$
$=\{a+(-b)+c\}^2$
$=(a-b+c)^2$

(4) $x^3+64=x^3+4^3$
$=(x+4)(x^2-x\times 4+4^2)$
$=(x+4)(x^2-4x+16)$

(5) $x^3-12x^2y+48xy^2-64y^3$
$=x^3-3\times x^2\times 4y+3\times x\times(4y)^2-(4y)^3$
$=(x-4y)^3$

(6) $27x^3+54x^2+36x+8$
$=(3x)^3+3\times(3x)^2\times 2+3\times 3x\times 2^2+2^3$
$=(3x+2)^3$

(7) $4x^2+y^2+9z^2+4xy-6yz-12zx$
$=(2x)^2+y^2+(-3z)^2+2\times 2x\times y+2\times y\times(-3z)+2\times(-3z)\times 2x$
$=\{2x+y+(-3z)\}^2$
$=(2x+y-3z)^2$

(8) $x^3+27y^3=x^3+(3y)^3$
$=(x+3y)\{x^2-x\times 3y+(3y)^2\}$
$=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

(9) $a^2+4b^2+1+4ab-4b-2a$
$=a^2+(2b)^2+(-1)^2+2\times a\times 2b+2\times 2b\times(-1)+2\times(-1)\times a$
$=\{a+2b+(-1)\}^2$
$=(a+2b-1)^2$

(10) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$
$=x^3+3\times x^2\times 3y+3\times x\times(3y)^2+(3y)^3$
$=(x+3y)^3$

(11) $a^2+b^2+4+2ab+4b+4a$
$=a^2+b^2+2^2+2ab+2\times b\times 2+2\times 2\times a$
$=(a+b+2)^2$

답 (1) $(x-2)^3$ (2) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$
(3) $(a-b+c)^2$ (4) $(x+4)(x^2-4x+16)$ (5) $(x-4y)^3$
(6) $(3x+2)^3$ (7) $(2x+y-3z)^2$
(8) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ (9) $(a+2b-1)^2$
(10) $(x+3y)^3$ (11) $(a+b+2)^2$

11 (1) $x^2-3x=X$로 놓으면

$(x^2-3x)(x^2-3x+6)+8$
$=X(X+6)+8=X^2+6X+8$
$=(X+2)(X+4)$
$=(x^2-3x+2)(x^2-3x+4)$
$=(x-1)(x-2)(x^2-3x+4)$

(2) $x^2=X$로 놓으면

$x^4-5x^2+4=X^2-5X+4$
$=(X-1)(X-4)$
$=(x^2-1)(x^2-4)$
$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

(3) $x^2=X$로 놓으면

$x^4-x^2-12=X^2-X-12$
$=(X-4)(X+3)$
$=(x^2-4)(x^2+3)$
$=(x+2)(x-2)(x^2+3)$

(4) x^4-16x^2+36

$=(x^4-12x^2+36)-4x^2$
$=(x^2-6)^2-(2x)^2$
$=\{(x^2-6)+2x\}\{(x^2-6)-2x\}$
$=(x^2+2x-6)(x^2-2x-6)$

(5) $2x^2+3xy+y^2+3x+y-2$

$=2x^2+3xy+3x+y^2+y-2$
$=2x^2+(3y+3)x+(y+2)(y-1)$
$=\{2x+(y-1)\}\{x+(y+2)\}$
$=(2x+y-1)(x+y+2)$

(6) $x+y=X$로 놓으면

$(x+y-3)(x+y+3)-16$
$=(X-3)(X+3)-16$
$=X^2-9-16=X^2-25$
$=(X+5)(X-5)$
$=(x+y+5)(x+y-5)$

(7) $x^2+4x=X$로 놓으면

$(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-8$
$=X^2-2X-8$
$=(X+2)(X-4)$
$=(x^2+4x+2)(x^2+4x-4)$

(8) $x^2+2xy-4x-8y^2+2y+3$

$=x^2+(2y-4)x-(8y^2-2y-3)$
$=x^2+(2y-4)x-(2y+1)(4y-3)$
$=\{x-(2y+1)\}\{x+(4y-3)\}$
$=(x-2y-1)(x+4y-3)$

(9) $x^2+9y^2+6xy-z^2$

$=x^2+6xy+9y^2-z^2$
$=(x+3y)^2-z^2$
$=\{(x+3y)+z\}\{(x+3y)-z\}$
$=(x+3y+z)(x+3y-z)$

답 (1) $(x-1)(x-2)(x^2-3x+4)$
(2) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
(3) $(x+2)(x-2)(x^2+3)$
(4) $(x^2+2x-6)(x^2-2x-6)$
(5) $(2x+y-1)(x+y+2)$
(6) $(x+y+5)(x+y-5)$
(7) $(x^2+4x+2)(x^2+4x-4)$
(8) $(x-2y-1)(x+4y-3)$
(9) $(x+3y+z)(x+3y-z)$

12 $P(x)=x^3+2x^2+x-4$라 하면

$P(\boxed{1})=1+2+1-4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & -4 \\ & & \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{4} & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-\boxed{1})(x^2+\boxed{3}x+\boxed{4})$

답 1, 1, 1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4

13 (1) $P(x)=x^3+x^2-10x+8$이라 하면

$P(1)=1+1-10+8=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & -10 & 8 \\ & & 1 & 2 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+2x-8)$
$=(x-1)(x-2)(x+4)$

(2) $P(x)=x^3+2x^2-11x-12$라 하면

$P(-1)=-1+2+11-12=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 2 & -11 & -12 \\ & & -1 & -1 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2+x-12)$
$=(x+1)(x+4)(x-3)$

(3) $P(x)=x^3-5x^2-2x+24$라 하면

$P(-2)=-8-20+4+24=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & -5 & -2 & 24 \\ & & -2 & 14 & -24 \\ \hline & 1 & -7 & 12 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x^2-7x+12)$
$=(x+2)(x-3)(x-4)$

답 (1) $(x-1)(x-2)(x+4)$ (2) $(x+1)(x+4)(x-3)$
(3) $(x+2)(x-3)(x-4)$

기출 Best | 1회 p.34~38

01 $3x^2-x+2=ax(x+1)+bx(x-1)+c(x-1)(x+1)$ 의 양변에

$x=0$을 대입하면 $2=-c \quad \therefore c=-2$

$x=1$을 대입하면 $3-1+2=2a \quad \therefore a=2$

$x=-1$을 대입하면 $3+1+2=2b \quad \therefore b=3$

$\therefore abc=2\times3\times(-2)=-12$

답 ①

02 $(k-2)x-(3k+1)y+14=0$의 좌변을 k에 대한 내림차순으로 정리하면

$kx-2x-3ky-y+14=0$

$k(x-3y)-2x-y+14=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x-3y=0, \ -2x-y+14=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=6, \ y=2$

$\therefore xy=6\times2=12$

답 ④

03 $2x+y-3=0$에서 $y=-2x+3$

이를 $4x^2+axy+by+c=0$에 대입하여 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$4x^2+ax(-2x+3)+b(-2x+3)+c=0$

$4x^2-2ax^2+3ax-2bx+3b+c=0$

$(4-2a)x^2+(3a-2b)x+3b+c=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$4-2a=0, \ 3a-2b=0, \ 3b+c=0$

즉, $a=2$이므로 $3a-2b=6-2b=0 \quad \therefore b=3$

$3b+c=9+c=0 \quad \therefore c=-9$

따라서 $a=2, \ b=3, \ c=-9$이므로

$a-b-c=2-3-(-9)=8$

답 ②

04 $(2x^4-x+3)^3=a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+a_{10}x^{10}+\cdots+a_1x+a_0$ 의 양변에

$x=0$을 대입하면 $3^3=a_0 \quad \therefore a_0=27$

$x=1$을 대입하면

$(2-1+3)^3=a_{12}+a_{11}+a_{10}+\cdots+a_1+a_0$

$64=a_{12}+a_{11}+a_{10}+\cdots+a_1+27$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=37$

답 ⑤

05 x^3+ax^2+b를 x^2+3x-6으로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2+3x-6)(x+c)$

$\qquad =x^3+(c+3)x^2+(3c-6)x-6c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c+3, \ 0=3c-6, \ b=-6c$

$0=3c-6$에서 $3c=6 \quad \therefore c=2$

$a=c+3=2+3=5, \ b=-6c=-6\times2=-12$

$\therefore a^2+b^2=5^2+(-12)^2=169$

답 ③

06 나머지정리에 의하여

$P(-1)=6, \ P(1)=-8$

$P(-1)=-1+a-b-6=6$에서

$a-b=13 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$P(1)=1+a+b-6=-8$에서

$a+b=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, \ b=-8$

$\therefore ab=5\times(-8)=-40$

답 ③

07 나머지정리에 의하여 $P(2)=1, \ P(3)=3$

$P(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$

$\qquad =(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=2, \ x=3$을 각각 대입하면

$P(2)=2a+b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$P(3)=3a+b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, \ b=-3$

따라서 $R(x)=2x-3$이므로

$R(1)=2\times1-3=-1$

답 ①

08 $P(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots$ ㉠

$P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-3$이고, ㉠에서 $(x-1)^2(x-2)Q(x)$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-3$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x-1)^2+x-3$

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+x-3$

이때 나머지정리에 의하여 $P(2)=5$이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$P(2)=a+2-3=5 \quad \therefore a=6$

따라서 $R(x)=6(x-1)^2+x-3$이므로

$R(3)=6\times2^2+3-3=24$

답 ④

09 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$P(x)=(x-2)Q(x)+3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 6이므로

$Q(x)=(x+1)Q'(x)+6 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-2)\{(x+1)Q'(x)+6\}+3$

$\qquad =(x-2)(x+1)Q'(x)+6(x-2)+3$

$\qquad =(x-2)(x+1)Q'(x)+6x-9$

따라서 $R(x)=6x-9$이므로

$R(1)=6-9=-3$

답 ②

10 $215=x$로 놓으면 $216=x+1$

$(x+1)^{25}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x+1)^{25}=xQ(x)+R$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $R=1$

㉠의 양변에 $x=215$를 대입하면

$216^{25}=215Q(215)+1$

따라서 216^{25}을 215로 나누었을 때의 나머지는 1이다. 답 ②

11 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+x-2$라 하면 $P(x)$가 $x-1$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 $P(1)=0$, $P(2)=0$

$P(1)=1+a+b+1-2=0$에서

$a+b=0$ ...... ㉠

$P(2)=16+8a+4b+2-2=0$에서

$8a+4b=-16$ $\quad\therefore 2a+b=-4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=4$

$\therefore ab=-4\times 4=-16$ 답 ⑤

12 $P(1)=P(2)=P(3)=6$에서

$P(1)-6=P(2)-6=P(3)-6=0$이므로 다항식 $P(x)-6$은 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어진다.

이때 $P(x)-6$은 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$P(x)-6=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+6$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-2)=-3\times(-4)\times(-5)+6=-54$ 답 ①

13 $P(x)+3$이 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$P(x)+3=(x+2)^2(ax+b)$

$\therefore P(x)=(x+2)^2(ax+b)-3$

이때 $6-P(x)$가 x^2-1, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로 $x+1$, $x-1$로 각각 나누어떨어진다. 즉,

$6-P(-1)=0$, $6-P(1)=0$

$\therefore P(-1)=6$, $P(1)=6$

$P(-1)=-a+b-3=6$에서 $-a+b=9$ ...... ㉠

$P(1)=3^2(a+b)-3=6$에서

$9(a+b)=9$ $\quad\therefore a+b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=5$

따라서 $P(x)=(x+2)^2(-4x+5)-3$이므로

$P(2)=4^2\times(-3)-3=-51$ 답 ②

참고 삼차식 $P(x)+3$이 이차식 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로 몫은 일차식이다.

14 오른쪽의 조립제법에서

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & a & 1 & 7 \\ & & 3 & b & c \\ \hline & 1 & 1 & 4 & \boxed{19} \end{array}$$

$a+3=1$, $1+b=4$, $7+c=19$

이므로 $a=-2$, $b=3$, $c=12$

$\therefore a+b+c=-2+3+12=13$

답 ①

15 x^3-2x^2+3x-5를 $x-2$로 반복하여 나누었을 때의 나머지가 차례대로 c, b, a의 값이 된다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -2 & 3 & -5 \\ & & 2 & 0 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 3 & \boxed{1} \leftarrow c \\ & & 2 & 4 & \\ \hline 2 & 1 & 2 & \boxed{7} \leftarrow b & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{4} \leftarrow a & & \end{array}$$

따라서 $a=4$, $b=7$, $c=1$이므로

$a^2+b^2+c^2=4^2+7^2+1^2=66$ 답 ⑤

참고 위의 조립제법에서

$x^3-2x^2+3x-5=(x-2)(x^2+3)+1$

$x^2+3=(x-2)(x+2)+7$

$x+2=(x-2)+4$

이므로

x^3-2x^2+3x-5

$=(x-2)(x^2+3)+1$

$=(x-2)\{(x-2)(x+2)+7\}+1$

$=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+4\}+7]+1$

$=(x-2)^3+4(x-2)^2+7(x-2)+1$

16 ① $a^3+125=a^3+5^3$

$=(a+5)(a^2-a\times 5+5^2)$

$=(a+5)(a^2-5a+25)$

② $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$

$=(2a)^3-3\times(2a)^2\times b+3\times 2a\times b^2-b^3$

$=(2a-b)^3$

③ $x^2+4x-y^2+4y=x^2-y^2+4x+4y$

$=(x+y)(x-y)+4(x+y)$

$=(x+y)(x-y+4)$

④ $x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx$

$=x^2+y^2+(2z)^2+2xy+2\times y\times 2z+2\times 2z\times x$

$=(x+y+2z)^2$

⑤ $27x^3-8y^3=(3x)^3-(2y)^3$

$=(3x-2y)\{(3x)^2+3x\times 2y+(2y)^2\}$

$=(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

17 $x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12$

$=X^2-8X+12=(X-2)(X-6)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

$=(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)$ 답 ⑤

18 $x(x-1)(x-2)(x-3)+1$

$=\{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}+1$

$=(x^2-3x)(x^2-3x+2)+1$

$x^2-3x=X$로 놓으면

$(x^2-3x)(x^2-3x+2)+1=X(X+2)+1$

$=X^2+2X+1$

$=(X+1)^2$

$=(x^2-3x+1)^2$

따라서 $a=-3$, $b=1$이므로

$a^2+b^2=(-3)^2+1^2=10$ 답 ④

19 $x(x+2)(x+4)(x+6)+k$

$=\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+k$

$=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+k$

$x^2+6x=X$로 놓으면

$(x^2+6x)(x^2+6x+8)+k$

$=X(X+8)+k$

$=X^2+8X+k$ …… ㉠

주어진 다항식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 X에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$k=4^2=16$ 답 ③

참고 이차식 x^2+ax+b가 완전제곱식이다. ➡ $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

20 $x^4+5x^2+9=x^4+6x^2+9-x^2$

$=(x^2+3)^2-x^2$

$=\{(x^2+3)+x\}\{(x^2+3)-x\}$

$=(x^2+x+3)(x^2-x+3)$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=1+3=4$ 답 ①

21 $x^2+3xy+2y^2+x+3y-2$

$=x^2+(3y+1)x+2y^2+3y-2$

$=x^2+(3y+1)x+(2y-1)(y+2)$

$=(x+2y-1)(x+y+2)$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=1$, $d=2$ 또는 $a=1$, $b=2$, $c=2$, $d=-1$이므로

$a+b+c+d=2+(-1)+1+2=4$ 답 ④

22 $P(x)=x^3+5x^2+10x+6$이라 하면

$P(-1)=-1+5-10+6=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	5	10	6
		-1	-4	-6
	1	4	6	0

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2+4x+6)$

따라서 $a=1$, $b=4$, $c=6$이므로

$abc=1\times4\times6=24$ 답 ②

23 $P(x)=x^4+ax+b$라 하면 $P(x)$는 $(x-1)(x-2)$를 인수로 가지므로

$P(1)=0$, $P(2)=0$

$P(1)=1+a+b=0$에서

$a+b=-1$ …… ㉠

$P(2)=16+2a+b=0$에서

$2a+b=-16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-15$, $b=14$

$P(x)=x^4-15x+14$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	0	0	-15	14
		1	1	1	-14
2	1	1	1	-14	0
		2	6	14	
	1	3	7	0	

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x^2+3x+7)$ 답 ⑤

다른풀이 x^4+ax+b가 $(x-1)(x-2)$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	0	0	a	b
		1	1	1	$a+1$
2	1	1	1	$a+1$	$a+b+1=0$
		2	6	14	
	1	3	7	$a+15=0$	

$\therefore x^4+ax+b=(x-1)(x-2)(x^2+3x+7)$

24 $a^3c+a^2bc-ac^3+ab^2c+b^3c-bc^3$

$=a^2c(a+b)+ac(-c^2+b^2)+bc(b^2-c^2)$

$=a^2c(a+b)+(ac+bc)(b^2-c^2)$

$=a^2c(a+b)+c(a+b)(b^2-c^2)$

$=c(a+b)(a^2+b^2-c^2)$

$=0$

이때 $c>0$, $a+b>0$이므로

$a^2+b^2-c^2=0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 ⑤

25 $100=x$로 놓으면

$\frac{101^2}{100^2-1}\times\frac{100^3-1}{100\times101+1}$

$=\frac{(x+1)^2}{x^2-1}\times\frac{x^3-1}{x(x+1)+1}$

$=\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}\times\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$

$=x+1$

$=100+1=101$ 답 ④

기출 Best | 2회

p.39~43

01 $3x^2-8x+8=ax(x-1)+bx(x-2)+c(x-1)(x-2)$
의 양변에 $x=0$을 대입하면
$8=2c \qquad \therefore c=4$
$x=1$을 대입하면
$3-8+8=-b \qquad \therefore b=-3$
$x=2$를 대입하면
$12-16+8=2a \qquad \therefore a=2$
$\therefore a+b+c=2+(-3)+4=3$ 답 ③

02 $(k+1)x^2+2kx+km+2n-1=0$이 2를 근으로 가지므로
$x=2$를 대입하면 등식이 성립한다. 즉,
$4(k+1)+4k+km+2n-1=0$
$4k+4+4k+km+2n-1=0$
$8k+km+2n+3=0$
좌변을 k에 대한 내림차순으로 정리하면
$k(8+m)+2n+3=0$
이 등식이 k에 대한 항등식이므로
$8+m=0,\ 2n+3=0$
따라서 $m=-8,\ n=-\frac{3}{2}$이므로
$mn=-8\times\left(-\frac{3}{2}\right)=12$ 답 ②

03 $x+y=4$에서 $y=4-x$
이를 $ax^2+bxy+cy^2=16$에 대입하여 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$ax^2+bx(4-x)+c(4-x)^2=16$
$ax^2+4bx-bx^2+c(16-8x+x^2)-16=0$
$ax^2+4bx-bx^2+16c-8cx+cx^2-16=0$
$(a-b+c)x^2+(4b-8c)x+16c-16=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-b+c=0,\ 4b-8c=0,\ 16c-16=0$
$16c-16=0$에서 $16c=16 \qquad \therefore c=1$
$4b-8c=0$에서 $4b-8=0,\ 4b=8 \qquad \therefore b=2$
$a-b+c=0$에서 $a-2+1=0 \qquad \therefore a=1$
$\therefore abc=1\times2\times1=2$ 답 ④

04 $(3x^2-3x-2)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$ ······ ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$(3-3-2)^4=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$
$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=16$ ······ ㉡
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$(3+3-2)^4=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$
$\therefore a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8=256$ ······ ㉢
㉡+㉢을 하면
$2a_0+2a_2+2a_4+2a_6+2a_8=272$
$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=136$ 답 ④

05 $x^4+ax^2+b=(x-1)^2P(x)$
$=(x^2-2x+1)P(x)$
이므로 $P(x)=x^2+cx+b$ (c는 상수)라 하면
x^4+ax^2+b
$=(x^2-2x+1)(x^2+cx+b)$
$=x^4+(c-2)x^3+(b-2c+1)x^2+(c-2b)x+b$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=c-2,\ a=b-2c+1,\ 0=c-2b$
$0=c-2$에서 $c=2$
$0=c-2b$에서 $0=2-2b \qquad \therefore b=1$
$a=b-2c+1$에서 $a=1-2\times2+1=-2$
따라서 $P(x)=x^2+2x+1$이므로
$P(1)=1+2\times1+1=4$ 답 ④

다른풀이

1	1	0	a	0	b
		1	1	$a+1$	$a+1$
1	1	1	$a+1$	$a+1$	$a+b+1$
		1	2	$a+3$	
	1	2	$a+3$	$2a+4$	

x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로
$2a+4=0,\ a+b+1=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=1$
따라서 $P(x)=x^2+2x+1$이므로 $P(1)=4$

06 $P(x)=x^3-ax+2$라 하면 나머지정리에 의하여
$P(-1)=P(-2)$
이므로
$-1+a+2=-8+2a+2 \qquad \therefore a=7$ 답 ②

07 나머지정리에 의하여 $P(-1)=1,\ P(2)=4$
$3xP(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고,
$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$3xP(x)=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=-1,\ x=2$를 각각 대입하면
$-3P(-1)=-a+b$
$\therefore -a+b=-3$ ······ ㉠
$6P(2)=2a+b$
$\therefore 2a+b=24$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=9,\ b=6$
따라서 $R(x)=9x+6$이므로
$R(1)=9+6=15$ 답 ⑤

08 $P(x)$를 $(x-2)^2(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고,
$R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$P(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ······ ㉠

$P(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+3$이고, ㉠에서 $(x-2)^2(x-1)Q(x)$는 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로 ax^2+bx+c를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+3$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x-2)^2+x+3$

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+a(x-2)^2+x+3$

이때 나머지정리에 의하여 $P(1)=5$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=a+4=5 \qquad \therefore a=1$

따라서 $R(x)=(x-2)^2+x+3$이므로

$R(0)=(-2)^2+0+3=7$ 답 ④

09 $P(x)$를 x^2+2x+4로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x+1$이므로

$P(x)=(x^2+2x+4)Q(x)+x+1$ ······ ㉠

$Q(2)=2$, 즉 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 몫을 $Q'(x)$라 하면

$Q(x)=(x-2)Q'(x)+2$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+2x+4)\{(x-2)Q'(x)+2\}+x+1\\&=(x-2)(x^2+2x+4)Q'(x)+2(x^2+2x+4)+x+1\\&=(x^3-8)Q'(x)+2x^2+5x+9\end{aligned}$$

따라서 $R(x)=2x^2+5x+9$이므로

$R(-1)=2-5+9=6$ 답 ①

10 $2199=x$로 놓으면 $2198=x-1$

$(x-1)^{99}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x-1)^{99}=xQ(x)+R$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $R=-1$

$\therefore (x-1)^{99}=xQ(x)-1$ ······ ㉡

㉡의 양변에 $x=2199$를 대입하면

$$\begin{aligned}2198^{99}&=2199Q(2199)-1\\&=2199Q(2199)-2199-1+2199\\&=2199\{Q(2199)-1\}+2198\end{aligned}$$

따라서 2198^{99}을 2199로 나누었을 때의 나머지는 2198이다.

답 ⑤

11 $P(x)=x^3+ax^2-4x+b$라 하면 $P(x)$가 $x+2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어지므로 $P(-2)=0$, $P(3)=0$

$P(-2)=-8+4a+8+b=0$에서

$4a+b=0$ ······ ㉠

$P(3)=27+9a-12+b=0$에서

$9a+b=-15$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=12$

$\therefore ab=-3\times12=-36$ 답 ①

12 $P(1)=2$에서 $P(1)-2=0$

$P(2)=4$에서 $P(2)-4=0$

$P(3)=6$에서 $P(3)-6=0$

이므로 다항식 $P(x)-2x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어진다.

이때 $P(x)-2x$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$P(x)-2x=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+2x$

따라서 $P(x)$를 $2x-8$로 나누었을 때의 나머지는

$P(4)=3\times2\times1+8=14$ 답 ③

13 $P(x)+3$이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$P(x)+3=(x-1)^2(ax+b)$

$\therefore P(x)=(x-1)^2(ax+b)-3$

이때 $1-P(x)$가 x^2-x-2, 즉 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 $x+1$, $x-2$로 각각 나누어떨어진다. 즉,

$1-P(-1)=0$, $1-P(2)=0$

$\therefore P(-1)=1$, $P(2)=1$

$P(-1)=4(-a+b)-3=1$에서

$4(-a+b)=4 \qquad \therefore -a+b=1$ ······ ㉠

$P(2)=2a+b-3=1$에서

$2a+b=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

$$\begin{aligned}\therefore P(x)&=(x-1)^2(x+2)-3\\&=x^3-3x-1\end{aligned}$$

답 ①

14

a	2	-1	2	5
		-4	10	c
	2	b	12	-19

위의 조립제법에서

$a=-2$, $b=-1-4=-5$, $5+c=-19$

$\therefore c=-24$

$\therefore a+b+c=-2+(-5)+(-24)=-31$ 답 ②

15 $2x^3-x^2+4x-3$을 $x+1$로 반복하여 나누었을 때의 나머지가 차례대로 d, c, b의 값이 되고, 마지막의 몫이 a의 값이 된다.

-1	2	-1	4	-3
		-2	3	-7
-1	2	-3	7	$-10\leftarrow d$
		-2	5	
-1	2	-5	$12\leftarrow c$	
		-2		
	$a\rightarrow 2$	$-7\leftarrow b$		

따라서 $a=2$, $b=-7$, $c=12$, $d=-10$이므로

$a-b-c-d=2-(-7)-12-(-10)=7$ 답 ①

16 ① x^2+4x-y^2+4y
$=x^2-y^2+4x+4y$
$=(x+y)(x-y)+4(x+y)$
$=(x+y)(x-y+4)$

② $a^6-1=(a^3)^2-1^2$
$=(a^3+1)(a^3-1)$
$=(a^3+1^3)(a^3-1^3)$
$=(a+1)(a^2-a\times1+1^2)(a-1)(a^2+a\times1+1^2)$
$=(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$
$=(a+1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

③ $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$
$=a^2+(-b)^2+(-c)^2+2\times a\times(-b)$
$+2\times(-b)\times(-c)+2\times(-c)\times a$
$=\{a+(-b)+(-c)\}^2$
$=(a-b-c)^2$

④ $64x^3+27y^3=(4x)^3+(3y)^3$
$=(4x+3y)\{(4x)^2-4x\times3y+(3y)^2\}$
$=(4x+3y)(16x^2-12xy+9y^2)$

⑤ $x^3-15x^2+75x-125$
$=x^3-3\times x^2\times5+3\times x\times5^2-5^3$
$=(x-5)^3$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

17 $x^2-5x=X$로 놓으면
$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-24$
$=(X+4)(X+6)-24$
$=X^2+10X=X(X+10)$
$=(x^2-5x)(x^2-5x+10)$
$=x(x-5)(x^2-5x+10)$ 답 ⑤

18 $(x-1)(x+1)^2(x+3)-5=\{(x-1)(x+3)\}(x+1)^2-5$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x+1)-5$
$x^2+2x=X$로 놓으면
$(x^2+2x-3)(x^2+2x+1)-5$
$=(X-3)(X+1)-5$
$=X^2-2X-8$
$=(X+2)(X-4)$
$=(x^2+2x+2)(x^2+2x-4)$
따라서 $a=2$, $b=2$, $c=-4$ 또는 $a=-4$, $b=2$, $c=2$이므로
$abc=2\times2\times(-4)=-16$ 답 ②

19 $9=x$로 놓으면
$\sqrt{9\times10\times11\times12+1}=\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$
$=\sqrt{\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1}$
$=\sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$
$x^2+3x=X$로 놓으면
$\sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}=\sqrt{X(X+2)+1}$
$=\sqrt{X^2+2X+1}$
$=\sqrt{(X+1)^2}$
$=X+1$ ($\because X>0$)
$=x^2+3x+1$
$=9^2+3\times9+1=109$ 답 ②

20 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-7x^2+6=X^2-7X+6$
$=(X-1)(X-6)$
$=(x^2-1)(x^2-6)$
$=(x+1)(x-1)(x^2-6)$
따라서 인수가 아닌 것은 ③$x+3$이다. 답 ③

21 $3x^2+2y^2-7xy+5x-5y+2$
$=3x^2+(-7y+5)x+2y^2-5y+2$
$=3x^2+(-7y+5)x+(2y-1)(y-2)$
$=\{3x-(y-2)\}\{x-(2y-1)\}$
$=(3x-y+2)(x-2y+1)$ 답 ③

22 $P(x)=2x^4-7x^3-5x^2+28x-12$로 놓으면
$P(2)=32-56-20+56-12=0$
$P(-2)=32+56-20-56-12=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 2 & -7 & -5 & 28 & -12 \\
 & & 4 & -6 & -22 & 12 \\
\hline
-2 & 2 & -3 & -11 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
 & & -4 & 14 & -6 & \\
\hline
 & 2 & -7 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x+2)(2x^2-7x+3)$
$=(x-2)(x+2)(2x-1)(x-3)$
따라서 $P(x)$의 인수가 아닌 것은 ④$x+3$이다. 답 ④

23 $(x+1)(x-2)P(x)=x^4-5x^3+ax^2+5x+b$의 양변에
$x=-1$을 대입하면
$0=1+5+a-5+b$
$\therefore a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠
$x=2$를 대입하면
$0=16-40+4a+10+b$
$\therefore 4a+b=14$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=5$, $b=-6$
즉, 다항식 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6$은 $x+1$, $x-2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\
 & & -1 & 6 & -11 & 6 \\ \hline
2 & 1 & -6 & 11 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -8 & 6 & \\ \hline
 & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\therefore x^4-5x^3+5x^2+5x-6$

$=(x+1)(x-2)(x^2-4x+3)$

따라서 $P(x)=x^2-4x+3$이므로

$P(4)=16-16+3=3$ 답 ①

다른풀이 $x^4-5x^3+ax^2+5x+b$가 $x+1$, $x-2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -5 & a & 5 & b \\
 & & -1 & 6 & -a-6 & a+1 \\ \hline
2 & 1 & -6 & a+6 & -a-1 & \boxed{a+b+1} \\
 & & 2 & -8 & 2a-4 & \\ \hline
 & 1 & -4 & a-2 & \boxed{a-5} &
\end{array}$$

이때 $a+b+1=0$, $a-5=0$이므로

$a=5$, $b=-6$

$\therefore x^4-5x^3+5x^2+5x-6=(x+1)(x-2)(x^2-4x+3)$

따라서 $P(x)=x^2-4x+3$이므로 $P(4)=3$

참고 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6$

$=(x+1)(x-2)(x^2-4x+3)$

$=(x+1)(x-2)(x-1)(x-3)$

24 $b^3+c^3+b^2c+bc^2-ba^2-ca^2$

$=(b+c)(b^2-bc+c^2)+bc(b+c)-(b+c)a^2$

$=(b+c)(b^2-bc+c^2+bc-a^2)$

$=(b+c)(b^2+c^2-a^2)=0$

이때 $b+c>0$이므로 $b^2+c^2-a^2=0$

$\therefore b^2+c^2=a^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 그 넓이는 $\frac{1}{2}bc$이다. 답 ①

25 $3022=x$로 놓으면

$\frac{3022^3-1}{3022\times3023+1}+\frac{3022^3+1}{3022\times3021+1}$

$=\frac{x^3-1}{x(x+1)+1}+\frac{x^3+1}{x(x-1)+1}$

$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$

$=(x-1)+(x+1)=2x$

$=2\times3022=6044$ 답 ⑤

변형유형 집중공략

p.44~45

1-1 $(2x^3-3x-2)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12}$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $(-2)^4=a_0$ $\quad\therefore a_0=16$

$x=1$을 대입하면

$(2-3-2)^4=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{12}$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{12}=81$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=-1$을 대입하면

$(-2+3-2)^4=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{12}$

$\therefore a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{12}=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2a_0+2a_2+2a_4+\cdots+2a_{12}=82$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{12}=41$

$\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{12}=41-a_0=41-16=25$ 답 25

1-2 x^{30}을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $2^{30}=A$이므로

$x^{30}=(x-2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{29}x^{29})+A$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-2a_0+A$, $2a_0=A$ $\quad\therefore a_0=\frac{1}{2}A$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{29})+A$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{29}=A-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1=-3(a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{29})+A$

$3(a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{29})=A-1$

$\therefore a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{29}=\frac{A-1}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡+㉢을 하면

$2a_0+2a_2+2a_4+\cdots+2a_{28}=\frac{4}{3}A-\frac{4}{3}$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{28}=\frac{2}{3}A-\frac{2}{3}$

$\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{28}=\frac{2}{3}A-\frac{2}{3}-a_0$

$=\frac{2}{3}A-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}A$

$=\frac{1}{6}A-\frac{2}{3}$ 답 ②

2-1 $1233=x$로 놓으면 $1234=x+1$이므로

$1234^{55}+1234^{33}+1234^{11}+1234$

$=(x+1)^{55}+(x+1)^{33}+(x+1)^{11}+(x+1)$

$(x+1)^{55}+(x+1)^{33}+(x+1)^{11}+(x+1)$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x+1)^{55}+(x+1)^{33}+(x+1)^{11}+(x+1)=xQ(x)+R$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1+1+1+1=R$ $\quad\therefore R=4$

㉠의 양변에 $x=1233$을 대입하면

$1234^{55}+1234^{33}+1234^{11}+1234=1233Q(1233)+4$

따라서 $1234^{55}+1234^{33}+1234^{11}+1234$를 1233으로 나누었을 때의 나머지는 4이다. 답 ③

2-2 $5518=x$로 놓으면 $5517=x-1$이므로

$5517^{99}+5517^{97}+5517^{95}+5517^{93}$

$=(x-1)^{99}+(x-1)^{97}+(x-1)^{95}+(x-1)^{93}$

$(x-1)^{99}+(x-1)^{97}+(x-1)^{95}+(x-1)^{93}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x-1)^{99}+(x-1)^{97}+(x-1)^{95}+(x-1)^{93}=xQ(x)+R$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-1+(-1)+(-1)+(-1)=R$ $\therefore R=-4$

㉠의 양변에 $x=5518$을 대입하면

$5517^{99}+5517^{97}+5517^{95}+5517^{93}$

$=5518Q(5518)-4$

$=5518Q(5518)-5518-4+5518$

$=5518\{Q(5518)-1\}+5514$

따라서 $5517^{99}+5517^{97}+5517^{95}+5517^{93}$을 5518로 나누었을 때의 나머지는 5514이다.

답 5514

서술형 What & How

p.46~49

1 $P(x)$를 $(x^2+2)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2+2)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ ······ ㉠

······ ❶

$P(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이고, ㉠에서 $(x^2+2)(x+2)Q(x)$는 x^2+2로 나누어떨어지므로 ax^2+bx+c를 x^2+2로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이다.

즉,

$ax^2+bx+c=a(x^2+2)+3x-1$ ······ ❷

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x^2+2)(x+2)Q(x)+a(x^2+2)+3x-1$ ······ ❸

이때 나머지정리에 의하여 $P(-2)=5$이므로 양변에 $x=-2$를 대입하면

$P(-2)=a(4+2)-6-1=5$

$6a=12$ $\therefore a=2$ ······ ❹

따라서 $R(x)=2(x^2+2)+3x-1=2x^2+3x+3$이므로

$R(-3)=18-9+3=12$ ······ ❺

답 12

2 $P(x)$를 $(x^2+x-3)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2+x-3)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ······ ㉠

······ ❶

$P(x)$를 x^2+x-3으로 나누었을 때의 나머지가 $2x+4$이고, ㉠에서 $(x^2+x-3)(x-1)Q(x)$는 x^2+x-3으로 나누어떨어지므로 ax^2+bx+c를 x^2+x-3으로 나누었을 때의 나머지가 $2x+4$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x^2+x-3)+2x+4$ ······ ❷

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x^2+x-3)(x-1)Q(x)+a(x^2+x-3)+2x+4$

······ ❸

이때 나머지정리에 의하여 $P(1)=9$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=a(1+1-3)+2+4=9$

$-a=3$ $\therefore a=-3$ ······ ❹

따라서

$R(x)=-3(x^2+x-3)+2x+4$

$=-3x^2-x+13$

이므로

$R(2)=-12-2+13=-1$ ······ ❺

답 -1

채점기준	배점
❶ $P(x)$를 $(x^2+x-3)(x-1)$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$와 $R(x)$를 이용한 식으로 나타내기	1
❷ 이차 이하의 다항식 $R(x)$를 x^2+x-3으로 나누었을 때의 몫 a와 나머지 $2x+4$를 이용한 식으로 나타내기	3
❸ ❶의 식에 $R(x)$를 대입하여 나타내기	2
❹ 나머지정리를 이용하여 a의 값 구하기	2
❺ $R(x)$를 구하여 $R(2)$의 값 구하기	1

3 조건 ㈎에서

$P(-2)-11=P(-1)-11=P(4)-11=0$

이므로 다항식 $P(x)-11$은 $x+2$, $x+1$, $x-4$로 각각 나누어떨어진다.

이때 다항식 $P(x)-11$은 삼차식이므로 삼차항의 계수를 a라 하면

$P(x)-11=a(x+2)(x+1)(x-4)$ ($a\neq0$인 상수) ······ ❶

$\therefore P(x)=a(x+2)(x+1)(x-4)+11$

조건 ㈏에서 $P(1)=47$이므로

$P(1)=a\times3\times2\times(-3)+11=47$, $-18a=36$

$\therefore a=-2$ ······ ❷

따라서 $P(x)=-2(x+2)(x+1)(x-4)+11$이므로

$P(0)=-2\times2\times1\times(-4)+11=27$ ······ ❸

답 27

4 $P(x)$가 $Q(x)=x-1$로 나누어떨어지므로 $P(1)=0$

$P(1)=1+(-a+3)+(6-a)-6a-50=0$에서

$-8a=40$ $\therefore a=-5$ ······ ❶

$\therefore P(x)=x^3+8x^2+11x-20$

$P(3x-5)+b$도 $Q(x)=x-1$로 나누어떨어지므로

$P(3\times1-5)+b=0$ $\therefore P(-2)+b=0$ ······ ❷

이때 $P(-2)=-8+32-22-20=-18$이므로

$-18+b=0$ $\therefore b=18$ ······ ❸

$\therefore a+b=-5+18=13$ ······ ❹

답 13

채점기준	배점
❶ a의 값 구하기	2
❷ $P(-2)+b=0$임을 설명하기	2
❸ b의 값 구하기	2
❹ $a+b$의 값 구하기	1

5 $P(x)=2x^3+ax^2-5x+2$라 하면 $P(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 $P(1)=0$에서

$2+a-5+2=0 \quad \therefore a=1$ ...... ❶

$\therefore P(x)=2x^3+x^2-5x+2$

$P(x)$를 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -5 & 2 \\ & & 2 & 3 & -2 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(2x^2+3x-2)$

$=(x-1)(x+2)(2x-1)$ ...... ❷

따라서 $b=2$, $c=-1$이므로 ...... ❸

$a^2+b^2+c^2=1^2+2^2+(-1)^2=6$ ...... ❹

답 6

6 $P(x)=x^3+(a+1)x^2-3x-4$라 하면 $P(x)$는 $x+1$을 인수로 가지므로 $P(-1)=0$에서

$-1+(a+1)+3-4=0$

$\therefore a=1$ ...... ❶

$\therefore P(x)=x^3+2x^2-3x-4$

$P(x)$를 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -3 & -4 \\ & & -1 & -1 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2+x-4)$ ...... ❷

따라서 $b=1$, $c=-4$이므로 ...... ❸

$abc=1\times1\times(-4)=-4$ ...... ❹

답 -4

채점기준	배점
❶ a의 값 구하기	2
❷ 조립제법을 이용하여 주어진 다항식을 인수분해하기	2
❸ b, c의 값 각각 구하기	2
❹ abc의 값 구하기	1

7 $2350=x$로 놓으면

$\dfrac{4\times2350^3+2350-1}{2\times2350^2+2350+1}=\dfrac{4x^3+x-1}{2x^2+x+1}$ ...... ❶

이때 $P(x)=4x^3+x-1$이라 하면 $P\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-1=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 4 & 0 & 1 & -1 \\ & & 2 & 1 & 1 \\ \hline & 4 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore 4x^3+x-1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(4x^2+2x+2)$

$=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(2x^2+x+1)$

$=(2x-1)(2x^2+x+1)$ ...... ❷

$\therefore \dfrac{4\times2350^3+2350-1}{2\times2350^2+2350+1}$

$=\dfrac{4x^3+x-1}{2x^2+x+1}$

$=\dfrac{(2x-1)(2x^2+x+1)}{2x^2+x+1}$

$=2x-1$ ...... ❸

$=2\times2350-1=4699$ ...... ❹

답 4699

8 $25=x$로 놓으면

$\dfrac{25^3+5\times25^2-2\times25-24}{28\times29}=\dfrac{x^3+5x^2-2x-24}{(x+3)(x+4)}$ ...... ❶

이때 $P(x)=x^3+5x^2-2x-24$라 하면

$P(2)=8+20-4-24=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 5 & -2 & -24 \\ & & 2 & 14 & 24 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3+5x^2-2x-24=(x-2)(x^2+7x+12)$

$=(x-2)(x+3)(x+4)$ ...... ❷

$\therefore \dfrac{25^3+5\times25^2-2\times25-24}{28\times29}$

$=\dfrac{x^3+5x^2-2x-24}{(x+3)(x+4)}$

$=\dfrac{(x-2)(x+3)(x+4)}{(x+3)(x+4)}$

$=x-2$ ...... ❸

$=25-2=23$ ...... ❹

답 23

채점기준	배점
❶ $25=x$로 놓고 주어진 분수의 분자, 분모를 각각 x에 대한 다항식으로 나타내기	2
❷ 분자를 조립제법을 이용하여 인수분해하기	2
❸ 주어진 분수를 간단히 하기	2
❹ $x=25$를 대입하여 식의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.50~54

01 $2x^2+ax+9=b(x+1)(x+c)+3$에서

$2x^2+ax+9=b\{x^2+(1+c)x+c\}+3$

$\therefore 2x^2+ax+9=bx^2+b(1+c)x+bc+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=b$, $a=b(1+c)$, $9=bc+3$

$9=bc+3$에서 $9=2c+3$

$2c=6 \quad \therefore c=3$

$\therefore a=b(1+c)=2\times(1+3)=8$

$\therefore a+b+c=8+2+3=13$ 답 ②

02 $(2k+3)x+(k-2)y+k+5=0$을 k에 대한 내림차순으로 정리하면

$2kx+3x+ky-2y+k+5=0$

$k(2x+y+1)+3x-2y+5=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2x+y+1=0,\ 3x-2y+5=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=1$

$\therefore xy=-1\times1=-1$ 답 ②

03 $(x-1)(x+3)P(x)=x^4+ax^2+bx-3$이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b-3$

$\therefore a+b=2$ ...... ㉠

양변에 $x=-3$을 대입하면

$0=81+9a-3b-3$

$9a-3b=-78$

$\therefore 3a-b=-26$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6,\ b=8$

$\therefore (x-1)(x+3)P(x)=x^4-6x^2+8x-3$

양변에 $x=3$을 대입하면

$12P(3)=81-54+24-3,\ 12P(3)=48$

$\therefore P(3)=4$ 답 ①

04 $P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 나머지가 $x+3$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+x+3$

$\quad=(x+2)(x-1)Q(x)+x+3$ ...... ㉠

이때 $P(2x+3)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2\times(-1)+3)=P(1)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=1+3=4$ 답 ②

05 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, x^2-2x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+2x-1,$

$P(x)=(x^2-2x+2)Q_2(x)+2x-1$

$\therefore P(x)-2x+1=(x^2+x+1)Q_1(x),$

$\quad P(x)-2x+1=(x^2-2x+2)Q_2(x)$

즉, $P(x)-2x+1$은 $x^2+x+1,\ x^2-2x+2$를 인수로 갖고, 사차식이므로

$P(x)-2x+1=a(x^2+x+1)(x^2-2x+2)$ ($a\neq0$인 상수)

$\therefore P(x)=a(x^2+x+1)(x^2-2x+2)+2x-1$ ...... ㉠

나머지정리에 의하여 $P(1)=10$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=a(1+1+1)(1-2+2)+2-1=10$

$3a+1=10,\ 3a=9 \quad \therefore a=3$

따라서 $P(x)=3(x^2+x+1)(x^2-2x+2)+2x-1$이므로

$P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=3(1-1+1)(1+2+2)-2-1$

$\quad=12$ 답 ③

06 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $P(-1)=0$

$P(x)-5$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 22이므로 나머지정리에 의하여

$P(2)-5=22 \quad \therefore P(2)=27$

$P(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고,

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-a+b=0$ ...... ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$P(2)=2a+b=27$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=9,\ b=9$

따라서 $R(x)=9x+9$이므로

$R(1)=9+9=18$ 답 ⑤

07 $P(x)$를 $(x+1)(x^2-4x-4)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x+1)(x^2-4x-4)Q(x)+ax^2+bx+c$ ...... ㉠

$P(x)$를 x^2-4x-4로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이고, ㉠에서 $(x+1)(x^2-4x-4)Q(x)$는 x^2-4x-4로 나누어떨어지므로 ax^2+bx+c를 x^2-4x-4로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이다. 즉,

$R(x)=a(x^2-4x-4)+3x-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x+1)(x^2-4x-4)Q(x)+a(x^2-4x-4)+3x-1$

이때 나머지정리에 의하여 $P(-1)=5$이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=a\times(1+4-4)-3-1=5 \quad \therefore a=9$

따라서

$R(x)=9(x^2-4x-4)+3x-1$

$\quad=9x^2-33x-37$

이므로

$R(0)=-37$ 답 ③

08 $P(x)+2$가 $(x-3)^2$으로 나누어떨어지므로

$P(x)+2=(x-3)^2(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

$\therefore P(x)=(x-3)^2(ax+b)-2$
이때 나머지정리에 의하여 $P(2)=0$이므로
$P(2)=(2-3)^2(2a+b)-2=0 \quad \therefore 2a+b=2$ …… ㉠
또, $P(1)=10$이므로
$P(1)=(1-3)^2(a+b)-2=10$
$4(a+b)=12 \quad \therefore a+b=3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1,\ b=4$
따라서 $P(x)=(x-3)^2(-x+4)-2$이므로
$P(5)=(5-3)^2(-5+4)-2=-6$
답 ②

09 $x^{10}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고,
$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$x^{10}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a+b \quad \therefore b=-a$
이것을 ㉠에 대입하면
$$\begin{aligned}x^{10}-1&=(x-1)^2Q(x)+ax-a\\&=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)\\&=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}\end{aligned}$$
$x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1)$이므로
$(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1)$
$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$
$\therefore x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+a$
양변에 $x=1$을 대입하면
$1+1+1+\cdots+1=a \quad \therefore a=10$
따라서 $R(x)=10x-10$이므로
$R(2)=20-10=10$
답 ④

참고 $P(x)=x^n-1$ ($n\ge 2$인 자연수)에 대하여
$P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	0	0	0	…	0	0	−1
		1	1	1	…	1	1	1
	1	1	1	1	…	1	1	0

$\therefore x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$

10 $P(x)=(x+1)Q(x)+2$ …… ㉠
$Q(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 $2x+a$이므로
$Q(x)=(x-2)^2Q'(x)+2x+a$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)\{(x-2)^2Q'(x)+2x+a\}+2\\&=(x+1)(x-2)^2Q'(x)+(2x+a)(x+1)+2\end{aligned}$$ …… ㉢
이때 $P(2)=-1$이므로 ㉢에 $x=2$를 대입하면
$P(2)=(4+a)\times 3+2=-1$
$3(4+a)=-3,\ 4+a=-1$
$\therefore a=-5$
$$\begin{aligned}\therefore P(x)&=(x+1)(x-2)^2Q'(x)+(2x-5)(x+1)+2\\&=(x+1)(x-2)^2Q'(x)+2x^2-3x-3\end{aligned}$$
따라서 $R(x)=2x^2-3x-3$이므로
$R(1)=2-3-3=-4$
답 ①

11 $2^4=16=x$로 놓으면 $17=x+1$이고
$$\begin{aligned}&2^{30}+2^{22}+2^{13}+1\\&=2^2\times(2^4)^7+2^2\times(2^4)^5+2\times(2^4)^3+1\\&=4x^7+4x^5+2x^3+1\end{aligned}$$
$4x^7+4x^5+2x^3+1$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
$4x^7+4x^5+2x^3+1=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-4-4-2+1=R \quad \therefore R=-9$
㉠의 양변에 $x=16$을 대입하면
$4\times 16^7+4\times 16^5+2\times 16^3+1=17Q(16)-9$
$2^{30}+2^{22}+2^{13}+1=17Q(16)-17-9+17$
$\therefore 2^{30}+2^{22}+2^{13}+1=17\{Q(16)-1\}+8$
따라서 $2^{30}+2^{22}+2^{13}+1$을 17로 나누었을 때의 나머지는 8이다.
답 ④

12 $$\begin{aligned}P(x)&=ax^3+bx^2+cx+d\\&=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+6)+5\\&=\left(x-\frac{1}{2}\right)\times 2(x^2-2x+3)+5\\&=(2x-1)(x^2-2x+3)+5\end{aligned}$$
따라서 $Q(x)=x^2-2x+3$, $R=5$이므로
$R\times Q(0)=5\times 3=15$
답 ③

13 $$\begin{aligned}x^4+x^3-x-1&=x^3(x+1)-(x+1)\\&=(x^3-1)(x+1)\\&=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)\end{aligned}$$
따라서 x^4+x^3-x-1의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.
답 ②

14 $$\begin{aligned}x^4+4x^2+16&=x^4+8x^2+16-4x^2\\&=(x^2+4)^2-(2x)^2\\&=\{(x^2+4)+2x\}\{(x^2+4)-2x\}\\&=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)\end{aligned}$$
따라서 $P(x)=2x+4$, $Q(x)=-2x+4$ 또는
$P(x)=-2x+4$, $Q(x)=2x+4$이므로
$P(x)+Q(x)=2x+4+(-2x+4)=8$
$\therefore P(1)+Q(1)=8$
답 ⑤

15 $4x^4+ax^2+b=(x-1)(2x-1)P(x)$의 양변에
$x=1$을 대입하면
$4+a+b=0$
$\therefore a+b=-4$ …… ㉠

$x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a+b=0,\ 1+a+4b=0$

$\therefore a+4b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=1$

$\therefore 4x^4-5x^2+1=(x-1)(2x-1)P(x)$

즉, 다항식 $4x^4-5x^2+1$이 $x-1,\ 2x-1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 $4x^4-5x^2+1$을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 4 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ & & 4 & 4 & -1 & -1 \\ \hline \frac{1}{2} & 4 & 4 & -1 & -1 & \boxed{0} \\ & & 2 & 3 & 1 & \\ \hline & 4 & 6 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore 4x^4-5x^2+1=(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+6x+2)$

$\qquad\qquad\qquad\quad =(x-1)(2x-1)(2x^2+3x+1)$

따라서 $P(x)=2x^2+3x+1$이므로

$P(1)=2+3+1=6$ 답 ③

16 $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+a$

$=\{(x+2)(x+8)\}\{(x+4)(x+6)\}+a$

$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+a$

$x^2+10x=X$로 놓으면

$(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+a$

$=(X+16)(X+24)+a$

$=X^2+40X+384+a \quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 식이 $\{P(x)\}^2$ 꼴, 즉 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 X에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$384+a=20^2$

$\therefore a=16$

$\therefore X^2+40X+384+a=X^2+40X+400$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =(X+20)^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =(x^2+10x+20)^2$

따라서 $P(x)=x^2+10x+20$이므로

$P(-2)=4-20+20=4$

$\therefore a+P(-2)=16+4=20$ 답 ⑤

17 조건 (다)에서 $c^3+(a-b)c^2-(a^2+b^2)c-(a-b)(a^2+b^2)=0$

$c^2\{c+(a-b)\}-(a^2+b^2)\{c+(a-b)\}=0$

$\{c^2-(a^2+b^2)\}\{c+(a-b)\}=0$

삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여

$c+a-b>0$

이므로 $c^2-(a^2+b^2)=0$

$\therefore c^2=a^2+b^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로 조건 (가)에서

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab=24$

$\therefore ab=48$

또, 조건 (나)에서 $c=a+b-4$를 ㉠에 대입하면

$(a+b-4)^2=a^2+b^2$

$a^2+b^2+16+2ab-8b-8a=a^2+b^2$

$16+2ab-8b-8a=0$

$16+2\times 48-8b-8a=0$

$2+12-b-a=0 \qquad \therefore a+b=14$

$\therefore a^2+b^2=c^2=(a+b-4)^2$

$\qquad\qquad\quad =(14-4)^2=100$ 답 ⑤

다른풀이 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=14^2-2\times 48=100$

18 $5^2=x$로 놓으면

$\frac{5^6+3\times 5^2-4}{5^2-1}=\frac{(5^2)^3+3\times 5^2-4}{5^2-1}$

$\qquad\qquad\qquad =\frac{x^3+3x-4}{x-1}$

$P(x)=x^3+3x-4$라 하면 $P(1)=1+3-4=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 3 & -4 \\ & & 1 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+x+4)$

$\therefore \frac{x^3+3x-4}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x-1}$

$\qquad\qquad\qquad =x^2+x+4$

$\qquad\qquad\qquad =(5^2)^2+5^2+4$

$\qquad\qquad\qquad =654$

따라서 $\frac{5^6+3\times 5^2-4}{5^2-1}$를 5로 나누었을 때의 나머지는 4이다.

답 ⑤

19 $P(x)=x^3-39x^2-81x-41$에서

$P(-1)=-1-39+81-41=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -39 & -81 & -41 \\ & & -1 & 40 & 41 \\ \hline & 1 & -40 & -41 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-40x-41)$

$\qquad\quad =(x+1)(x+1)(x-41)$

$\qquad\quad =(x+1)^2(x-41)$

$\therefore P(39)=40^2\times(39-41)=-3200$ 답 ④

20 x^4+x^3+1을 $P(x)$로 나누었을 때의 몫을 $H(x)$라 하면 나머지가 $-3x^2-4x$이므로 $P(x)$는 삼차 이상의 다항식이고

$x^4+x^3+1=P(x)H(x)-3x^2-4x$

$\therefore\ x^4+x^3+3x^2+4x+1=P(x)H(x)$

이때 $I(x)=x^4+x^3+3x^2+4x+1$이라 하면 $P(x)$는 $I(x)$의 인수이고, $I(-1)=1-1+3-4+1=0$이므로 조립제법을 이용하여 $I(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ & & -1 & 0 & -3 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ x^4+x^3+3x^2+4x+1=(x+1)(x^3+3x+1)$

$=P(x)H(x)$

이때 $P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차 이상의 다항식이므로

$P(x)=x^3+3x+1$ 또는 $P(x)=(x+1)(x^3+3x+1)$

그런데 $P(x)=(x+1)(x^3+3x+1)$이면 몫 $H(x)=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ P(x)=x^3+3x+1$

한편, $P(x)$를 다항식 $Q(x)$로 나누었을 때의 몫을 $J(x)$라 하면 나머지가 $7x-2$이므로 $Q(x)$는 이차 이상의 다항식이고

$x^3+3x+1=Q(x)J(x)+7x-2$

$\therefore\ x^3-4x+3=Q(x)J(x)$

이때 $K(x)=x^3-4x+3$이라 하면 $Q(x)$는 $K(x)$의 인수이고, $K(1)=1-4+3=0$이므로 조립제법을 이용하여 $K(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ x^3-4x+3=(x-1)(x^2+x-3)$

$=Q(x)J(x)$

이때 $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차 이상의 다항식이므로

$Q(x)=x^2+x-3$ 또는 $Q(x)=(x-1)(x^2+x-3)$

그런데 $Q(x)=(x-1)(x^2+x-3)$이면 몫 $J(x)=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ Q(x)=x^2+x-3$

따라서 $P(-1)=-1-3+1=-3$, $Q(2)=4+2-3=3$이므로

$P(-1)Q(2)=-3\times3=-9$

답 ①

21 $P(1+x)+P(1-x)=0$에

$x=0$을 대입하면

$P(1)+P(1)=0$, $2P(1)=0$ $\quad\therefore\ P(1)=0$

$x=1$을 대입하면

$P(2)+P(0)=0$, $3+P(0)=0$ ($\because\ P(2)=3$)

$\therefore\ P(0)=-3$

$P(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=x(x-1)Q(x)+ax+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면

$P(0)=b$ $\quad\therefore\ b=-3$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=a+b=0$, $a-3=0$ $\quad\therefore\ a=3$

따라서 $R(x)=3x-3$이므로

$R(3)=9-3=6$

답 6

22 나머지정리에 의하여

$P(3)+Q(3)=-1$

$\{P(3)\}^3+\{Q(3)\}^3=-7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서

$\{P(3)+Q(3)\}^3-3P(3)Q(3)\{P(3)+Q(3)\}=-7$

$(-1)^3-3P(3)Q(3)\times(-1)=-7$

$3P(3)Q(3)=-6$

$\therefore\ P(3)Q(3)=-2$

따라서 구하는 나머지는 나머지정리에 의하여

$\{P(3)\}^2Q(3)+P(3)\{Q(3)\}^2=P(3)Q(3)\{P(3)+Q(3)\}$

$=-2\times(-1)=2$

답 ④

23 $\{(x+2)^3+3(x+2)^2+3(x+2)+1\}\div(x-1)^2$에서

$x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$이므로 $\cdots\cdots$ ❶

$(t^3+3t^2+3t+1)\div(t-3)^2$을 조립제법으로 계산하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 3 & 18 & 63 \\ \hline 3 & 1 & 6 & 21 & \boxed{64} \\ & & 3 & 27 & \\ \hline & 1 & 9 & \boxed{48} & \end{array}$$

$\therefore\ t^3+3t^2+3t+1=(t-3)(t^2+6t+21)+64$

$=(t-3)\{(t-3)(t+9)+48\}+64$

$=(t-3)^2(t+9)+48(t-3)+64$ $\cdots\cdots$ ❷

양변에 $t=x+2$를 대입하면

$(x+2)^3+3(x+2)^2+3(x+2)+1$

$=(x-1)^2(x+11)+48(x-1)+64$

$=(x-1)^2(x+11)+48x+16$ $\cdots\cdots$ ❸

따라서 $R(x)=48x+16$이므로

$R(-1)=-48+16=-32$ $\cdots\cdots$ ❹

답 -32

채점기준	배점
❶ $x+2=t$로 치환하기	2
❷ $(t^3+3t^2+3t+1)\div(t-3)^2$을 조립제법을 이용하여 계산하고 몫과 나머지의 형태로 나타내기	3
❸ ❷의 식에 $t=x+2$를 대입하여 x에 대한 식으로 나타내기	3
❹ $R(x)$를 구하여 $R(-1)$의 값 구하기	1

24 $15=x$로 놓으면

$15^4+8\times15^3+16\times15^2-64$

$=x^4+8x^3+16x^2-64$ $\cdots\cdots$ ❶

$=(x^2+4x)^2-8^2$

$=(x^2+4x+8)(x^2+4x-8)$ $\cdots\cdots$ ❷

$x=15$를 대입하면

$(x^2+4x+8)(x^2+4x-8)=(225+60+8)\times(225+60-8)$

$=293\times277$

따라서 구하는 두 자연수는 277, 293이다. …… ❸

답 277, 293

채점기준	배점
❶ $15=x$로 놓고 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타내기	3
❷ x에 대한 식을 인수분해하기	3
❸ 두 자연수를 각각 구하기	2

참고 277, 293은 모두 소수이다.

실전 문제 | 2회

p.55~59

01 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=x^2+4x-3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$c=1+4-3$ $\quad\therefore c=2$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a-b+c=-3$, $a-b+2=-3$

$\therefore a-b=-5$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a+b+c=4+8-3$, $a+b+2=9$

$\therefore a+b=7$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=6$

$\therefore abc=1\times6\times2=12$

답 ⑤

02 $(x^2-4)P(x)+ax+b=x^3-2x^2+4x-3$에서

$(x+2)(x-2)P(x)+ax+b=x^3-2x^2+4x-3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-2a+b=-8-8-8-3$

$\therefore -2a+b=-27$ …… ㉡

$x=2$를 대입하면

$2a+b=8-8+8-3$

$\therefore 2a+b=5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=-11$

$\therefore a-b=8-(-11)=19$

답 ②

03 $(x^2-x+1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x^{20}$의 양변에

$x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}$ …… ㉠

$x=-1$을 대입하면

$3^{10}=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{20}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})=3^{10}+1$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=\frac{1}{2}(3^{10}+1)$

㉠−㉡을 하면

$2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})=1-3^{10}$

$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=-\frac{1}{2}(3^{10}-1)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

04 조건 (가)에서 나머지정리에 의하여

$P(-3)=-7$

$P(x)$를 x^2-x-12로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-x-12)Q(x)+ax+b$

$=(x+3)(x-4)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$P(-3)=-3a+b=-7$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$P(4)=4a+b=7$ ($\because$ 조건 (나)) …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

따라서 $P(x)$를 x^2-x-12로 나누었을 때의 나머지는 $2x-1$이다.

답 ③

05 $P(x)$를 $(x+2)(2x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $3x-1$이므로

$P(x)=(x+2)(2x-1)Q(x)+3x-1$ …… ㉠

이때 $P(3x+1)$을 $6x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P\left(3\times\left(-\frac{1}{6}\right)+1\right)=P\left(\frac{1}{2}\right)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

답 ④

06 $x^{10}+x^8+x$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$x^{10}+x^8+x=(x+1)Q(x)+R$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^{10}+(-1)^8+(-1)=R$

$\therefore R=1$

$\therefore x^{10}+x^8+x=(x+1)Q(x)+1$

이때 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$3=2Q(1)+1$, $2Q(1)=2$

$\therefore Q(1)=1$

답 ②

07 $-2p=6$, $-2q=8$이므로

$p=-3$, $q=-4$

$a-2=p$, $b+6=q$, $c+8=3$이므로

$a=p+2=-3+2=-1$, $b=q-6=-4-6=-10$, $c=-5$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & -10 & -5 \\ & & -2 & 6 & 8 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & \boxed{3} \end{array}$$

$\therefore x^3-x^2-10x-5=(x+2)(x^2-3x-4)+3$

$=2\left(\frac{1}{2}x+1\right)(x^2-3x-4)+3$

$=\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x^2-6x-8)+3$

따라서 $Q(x)=2x^2-6x-8$, $R=3$이므로

$Q(1)+R=(2-6-8)+3=-9$ 답 ④

08 나머지정리에 의하여

$P(-1)-Q(-1)=5$ …… ㉠

$\{P(-1)\}^2-\{Q(-1)\}^2=-15$ …… ㉡

㉡에서

$\{P(-1)\}^2-\{Q(-1)\}^2$

$=\{P(-1)+Q(-1)\}\{P(-1)-Q(-1)\}$

$=5\{P(-1)+Q(-1)\}$ ($\because$ ㉠)

$=-15$

$\therefore P(-1)+Q(-1)=-3$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$P(-1)=1$, $Q(-1)=-4$

따라서 다항식 $P(x)Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(-1)Q(-1)=1\times(-4)=-4$ 답 ③

09 $P(0)=0$, $P(1)=1$, $P(2)=4$에서

$P(0)=P(1)-1=P(2)-4=0$

즉, $P(0)-0^2=P(1)-1^2=P(2)-2^2=0$이므로 $P(x)-x^2$은 x, $x-1$, $x-2$로 각각 나누어떨어진다.

이때 $P(x)-x^2$은 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$P(x)-x^2=x(x-1)(x-2)$

$\therefore P(x)=x(x-1)(x-2)+x^2$

따라서 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(4)=4\times3\times2+16=40$ 답 ⑤

10 $P(x)=x^3-2x^2-17x+a$가 $x+3$을 인수로 가지므로

$P(-3)=0$

$-27-18+51+a=0$

$\therefore a=-6$

$\therefore P(x)=x^3-2x^2-17x-6$

따라서 $(x-3)P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$(-1-3)P(-1)=-4P(-1)$

$=-4(-1-2+17-6)$

$=-32$ 답 ①

11 $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-2x+3$이므로

$x^3+x^2+ax+b=(x+1)(x-2)Q(x)-2x+3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+1-a+b=2+3$

$\therefore -a+b=5$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8+4+2a+b=-4+3$

$\therefore 2a+b=-13$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=-1$

따라서 $P(x)=x^3+x^2-6x-1$이므로 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(3)=27+9-18-1=17$ 답 ②

12 $x+y=X$로 놓으면

$(x+y+3)(2x+2y-1)-9$

$=\{(x+y)+3\}\{2(x+y)-1\}-9$

$=(X+3)(2X-1)-9$

$=2X^2+5X-12$

$=(2X-3)(X+4)$

$=\{2(x+y)-3\}(x+y+4)$

$=(2x+2y-3)(x+y+4)$

따라서 다항식 $(x+y+3)(2x+2y-1)-9$의 인수인 것은 ⑤ $2x+2y-3$이다. 답 ⑤

13 $x^4-6x^2+1=x^4-2x^2+1-4x^2$

$=(x^2-1)^2-(2x)^2$

$=\{(x^2-1)+2x\}\{(x^2-1)-2x\}$

$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=-2$, $d=-1$ 또는 $a=-2$, $b=-1$, $c=2$, $d=-1$이므로

$abcd=2\times(-1)\times(-2)\times(-1)=-4$ 답 ①

14 $P(x)=2x^4-9x^3+6x^2+11x-6$이라 하면

$P(-1)=2+9+6-11-6=0$,

$P(2)=32-72+24+22-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -9 & 6 & 11 & -6 \\ & & -2 & 11 & -17 & 6 \\ \hline 2 & 2 & -11 & 17 & -6 & \boxed{0} \\ & & 4 & -14 & 6 & \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(2x^2-7x+3)$

$=(x+1)(x-2)(2x-1)(x-3)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ③ $2x+1$이다. 답 ③

참고 ④ $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$이므로 x^2-2x-3은 주어진 다항식의 인수이다.

15 $P(-1)=1+8+15-4-20=0$

$P(2)=16-64+60+8-20=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -8 & 15 & 4 & -20 \\ & & -1 & 9 & -24 & 20 \\ \hline 2 & 1 & -9 & 24 & -20 & \boxed{0} \\ & & 2 & -14 & 20 & \\ \hline & 1 & -7 & 10 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-7x+10)$

$=(x+1)(x-2)(x-2)(x-5)$

$=(x+1)(x-2)^2(x-5)$

$\therefore P(7)=8\times5^2\times2=400$ 답 ③

16 $-ab^2+abc-ac^2+b^3-b^2c+bc^2$

$=-a(b^2-bc+c^2)+b(b^2-bc+c^2)$

$=(-a+b)(b^2-bc+c^2)=0$

이때

$b^2-bc+c^2=b^2-bc+\frac{1}{4}c^2+\frac{3}{4}c^2$

$=\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2>0$

이므로

$-a+b=0 \qquad \therefore a=b$

따라서 이 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ④

17 $x^3-y^3+2x^2y-2xy^2$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+2xy(x-y)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2+2xy)$

$=(x-y)(x^2+3xy+y^2)$

$=(x-y)(x^2-2xy+y^2+5xy)$

$=(x-y)\{(x-y)^2+5xy\}$

$=2\times(2^2+5\times4)$

$=48$ 답 ④

18 $2A(x)+B(x)$, $-4A(x)+B(x)$를 $C(x)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

$2A(x)+B(x)=C(x)Q_1(x)-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$-4A(x)+B(x)=C(x)Q_2(x)+6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠$\times3+$㉡을 하면

$2A(x)+4B(x)=C(x)\{3Q_1(x)+Q_2(x)\}$

$\therefore A(x)+2B(x)=\frac{1}{2}C(x)\{3Q_1(x)+Q_2(x)\}$

따라서 $A(x)+2B(x)$는 $C(x)$를 인수로 가지므로

$a=2$ 답 ④

19 $200=x$로 놓으면

$200\times201\times202\times203+1$

$=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$

이때 $x^2+3x=X$로 놓으면

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=X(X+2)+1$

$=X^2+2X+1$

$=(X+1)^2$

$=(x^2+3x+1)^2$

$=(200^2+3\times200+1)^2$

$=40601^2$

$\therefore \sqrt{200\times201\times202\times203+1}=\sqrt{40601^2}=40601$ 답 ④

20 $\{Q(x)\}^2+\{Q(x+2)\}^2=(x^2+2x)P(x)$

$=x(x+2)P(x) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\{Q(0)\}^2+\{Q(2)\}^2=0 \qquad \therefore Q(0)=Q(2)=0$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$\{Q(-2)\}^2+\{Q(0)\}^2=0 \qquad \therefore Q(-2)=Q(0)=0$

따라서 $Q(x)$는 x, $x-2$, $x+2$로 각각 나누어떨어지고 최고차항의 계수가 1이므로

$Q(x)=x(x+2)(x-2)$, $Q(x+2)=x(x+2)(x+4)$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2(x+2)^2(x-2)^2+x^2(x+2)^2(x+4)^2=x(x+2)P(x)$

$x(x+2)\{x(x+2)(x-2)^2+x(x+2)(x+4)^2\}$

$=x(x+2)P(x)$

$\therefore P(x)=x(x+2)(x-2)^2+x(x+2)(x+4)^2$

$=x(x+2)\{(x-2)^2+(x+4)^2\}$

$=x(x+2)(2x^2+4x+20)$

$=2x(x+2)(x^2+2x+10)$

$P(x)$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 몫을 $H(x)$라 하면 $R(x)$는 이차 이하의 다항식이고

$P(x)=Q(x)H(x)+R(x)$

이므로

$2x(x+2)(x^2+2x+10)=x(x+2)(x-2)H(x)+R(x)$

$2x(x+2)(x^2+2x+10)-x(x+2)(x-2)H(x)=R(x)$

$\therefore x(x+2)\{2(x^2+2x+10)-(x-2)H(x)\}=R(x)$

$\cdots\cdots$ ㉡

즉, $R(x)$는 $x(x+2)$로 나누어떨어지므로

$R(x)=ax(x+2)$ (단, a는 상수) $\cdots\cdots$ ㉢

이때 ㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2\times4\times\{2\times(4+4+10)\}=R(2) \qquad \therefore R(2)=288$

㉢에서 $R(2)=a\times2\times4=8a$이므로

$8a=288 \qquad \therefore a=36$

따라서 $R(x)=36x(x+2)$이므로

$R\left(\frac{1}{3}\right)=36\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+2\right)=28$ 답 ⑤

21 조건 (나)에서 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$P(3)=P(2)+6\times4-1$

$29=P(2)+23$ ($\because$ $P(3)=29$)

$\therefore P(2)=6$ …… ㉠

조건 (나)에서 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(2)=P(1)+6-1$

$6=P(1)+5$ ($\because$ ㉠)　　$\therefore P(1)=1$ …… ㉡

$P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고,

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(2)=2a+b$, 즉

$a+b=1$, $2a+b=6$ ($\because$ ㉠, ㉡)

두 식을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-4$

따라서 $R(x)=5x-4$이므로

$R(4)=20-4=16$

답 ⑤

22 $P(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & 5 & b \\ & & 1 & a+1 & a+6 \\ \hline 1 & 1 & a+1 & a+6 & \boxed{a+b+6} \\ & & 1 & a+2 & \\ \hline & 1 & a+2 & \boxed{2a+8} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)^2(x+a+2)$

$2a+8=0$에서 $2a=-8$　　$\therefore a=-4$

$a+b+6=0$에서 $-4+b+6=0$　　$\therefore b=-2$

따라서 $P(x)=(x-1)^2(x-2)$이므로

$P(5)=4^2\times3=48$

답 ④

다른풀이 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 b인 삼차식 $P(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로 몫은 $x+b$이다. 즉,

$x^3+ax^2+5x+b=(x-1)^2(x+b)$

$\qquad=x^3+(b-2)x^2+(-2b+1)x+b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=b-2$, $5=-2b+1$

$5=-2b+1$에서 $2b=-4$　　$\therefore b=-2$

따라서 $P(x)=(x-1)^2(x-2)$이므로

$P(5)=4^2\times3=48$

23 $(x^2-1)(x^2+8x+15)+a$

$=(x+1)(x-1)(x+3)(x+5)+a$

$=\{(x+1)(x+3)\}\{(x-1)(x+5)\}+a$

$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)+a$ …… ❶

$x^2+4x=X$로 놓으면

$(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)+a$

$=(X+3)(X-5)+a$

$=X^2-2X-15+a$ …… ㉠ …… ❷

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식의 꼴로 인수분해되려면 ㉠이 X에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$-15+a=1$　　$\therefore a=16$ …… ❸

답 16

채점기준	배점
❶ 주어진 식의 괄호 안의 부분을 인수분해한 후 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개하기	2
❷ 공통부분을 하나의 문자로 바꾸어 전개하기	2
❸ a의 값 구하기	2

24 $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $x-4$이므로

$P(x)=(x+1)^2Q_1(x)+x-4$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-1-4=-5$ …… ❶

$P(x)$를 x^2-2x로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $-3x-8$이므로

$P(x)=(x^2-2x)Q_2(x)-3x-8$

양변에 $x=2$를 대입하면

$P(2)=-6-8=-14$ …… ❷

$P(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$라 하고,

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-x-2)Q_3(x)+ax+b$

$\quad=(x+1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-a+b=-5$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$P(2)=2a+b=-14$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-8$ …… ❸

따라서 $R(x)=-3x-8$이므로

$R(-4)=12-8=4$ …… ❹

답 4

채점기준	배점
❶ $P(-1)$의 값 구하기	2
❷ $P(2)$의 값 구하기	2
❸ $R(x)=ax+b$라 하고 상수 a, b의 값 구하기	3
❹ $R(-4)$의 값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.60~64

1 $(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)$

$=(x-1)\{(x+2)(x+a)+b\}$

$=(x-1)\{x^2+(a+2)x+2a+b\}$

가 x^2+4x+5로 나누어떨어지고, x^2+4x+5는 $x-1$로 나누어 떨어지지 않으므로 $x^2+(a+2)x+2a+b$는 x^2+4x+5로 나누어떨어진다.

$\therefore x^2+(a+2)x+2a+b=x^2+4x+5$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+2=4,\ 2a+b=5$

$\therefore a=2,\ b=5-2a=5-2\times2=1$

$\therefore a+b=2+1=3$ 답 3

참고 $P(x)=x^2+4x+5$라 하면 $P(1)=1+4+5=10\neq0$이므로 $P(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지지 않는다.

2 $(x^2+3)(x+1)(2x+a)+b(x^2+1)(x+1)$

$=(x+1)\{(x^2+3)(2x+a)+b(x^2+1)\}$

$=(x+1)\{2x^3+(a+b)x^2+6x+3a+b\}$

가 x^3+3x+1로 나누어떨어지고, x^3+3x+1은 $x+1$로 나누어 떨어지지 않으므로 $2x^3+(a+b)x^2+6x+3a+b$는 x^3+3x+1로 나누어떨어진다.

$\therefore 2x^3+(a+b)x^2+6x+3a+b=2(x^3+3x+1)$

$=2x^3+6x+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ 3a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$

$\therefore ab=1\times(-1)=-1$ 답 -1

참고 $P(x)=x^3+3x+1$이라 하면

$P(-1)=-1-3+1=-3\neq0$이므로 $P(x)$는 $x+1$로 나누어 떨어지지 않는다.

3 $P(x)=x^5+ax^2+(a+1)x+2$라 하면 나머지정리에 의하여 $P(1)=6$이므로

$P(1)=1+a+(a+1)+2=6,\ 2a+4=6$

$2a=2 \qquad \therefore a=1$

$P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 6이므로

$x^5+x^2+2x+2=(x-1)Q(x)+6$

양변에 $x=2$를 대입하면

$32+4+4+2=Q(2)+6 \qquad \therefore Q(2)=36$

$\therefore a+Q(2)=1+36=37$ 답 ③

4 $P(x)=x^4+(a-2)x^3-(a+1)x^2+1$이라 하면 나머지정리에 의하여 $P(2)=9$이므로

$P(2)=16+8(a-2)-4(a+1)+1=9$

$4a=12 \qquad \therefore a=3$

$P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 9이므로

$x^4+x^3-4x^2+1=(x-2)Q(x)+9$

양변에 $x=3$을 대입하면

$81+27-36+1=Q(3)+9 \qquad \therefore Q(3)=64$

$\therefore a+Q(3)=3+64=67$ 답 ⑤

5 $P(x)=(x-3)(x^2+x-2)+5$이므로 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(4)=1\times(16+4-2)+5=23$ 답 23

6 $P(x)=(x+4)(x^2+2x-2)+2$이므로 $P(2x-4)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(2\times1-4)=P(-2)$

$=(-2+4)\times(4-4-2)+2=-2$ 답 -2

7 $(4x+2)^{10}=xQ(x)+R$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\boxed{2^{10}}=R$

$(4x+2)^{10}=xQ(x)+\boxed{2^{10}}$에 $x=505$를 대입하면

$2022^{10}=505Q(505)+\boxed{2^{10}}$

$=505Q(505)+505\times2+14$

$=505\{Q(505)+\boxed{2}\}+\boxed{14}$

따라서 2022^{10}을 505로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{14}$이다.

이때 $a=2^{10}=1024,\ b=2,\ c=14$이므로

$a+b+c=1024+2+14=1040$ 답 ②

8 $405=x$로 놓으면 $1213=3\times405-2$이므로

$1213=3x-2$

$(3x-2)^{11}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(3x-2)^{11}=xQ(x)+R \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(-2)^{11}=R$

㉠의 양변에 $x=405$를 대입하면

$1213^{11}=405Q(405)-2^{11}$

$=405Q(405)-(405\times5+23)$

$=405Q(405)-405\times5-23$

$=405\{Q(405)-5\}-23$

$=405\{Q(405)-5-1\}-23+405$

$=405\{Q(405)-6\}+382$

따라서 1213^{11}을 405로 나누었을 때의 나머지는 382이다. 답 ④

9 조건 (가)에서 $f(x)-3p^2$은 $x+2,\ x^2+4$로 각각 나누어떨어지므로 $(x+2)(x^2+4)$를 인수로 갖는다. 최고차항의 계수가 1인 사차식 $f(x)-3p^2$을 $(x+2)(x^2+4)$로 나누었을 때의 몫은 $x+k$ (k는 상수) 꼴이므로

$f(x)-3p^2=(x+2)(x^2+4)(x+k)$

$\therefore f(x)=(x+2)(x^2+4)(x+k)+3p^2$

이때

$f(1)=(1+2)(1+4)(1+k)+3p^2=15(1+k)+3p^2$,

$f(-1)=(-1+2)(1+4)(-1+k)+3p^2=5(-1+k)+3p^2$

이므로 조건 (나)에서

$15(1+k)+3p^2=5(-1+k)+3p^2,\ 15(1+k)=5(-1+k)$

$3(1+k)=-1+k$, $3+3k=-1+k$

$2k=-4 \quad \therefore k=-2$

$\therefore f(x)=(x+2)(x^2+4)(x-2)+3p^2$

$\quad =(x^2-4)(x^2+4)+3p^2$

조건 ㈐에서 $f(\sqrt{p})=0$이므로

$f(\sqrt{p})=(p-4)(p+4)+3p^2=0$, $4p^2-16=0$

$p^2-4=0$, $(p+2)(p-2)=0$

$\therefore p=2\ (\because p>0)$ 답 ④

10 조건 ㈎에서 $f(x)-\frac{3}{2}p^2$은 $x+4$, x^2-2로 각각 나누어떨어지므로 $(x+4)(x^2-2)$를 인수로 갖는다. 최고차항의 계수가 1인 사차식 $f(x)-\frac{3}{2}p^2$을 $(x+4)(x^2-2)$로 나누었을 때의 몫은 $x+k$ (k는 상수) 꼴이므로

$f(x)-\frac{3}{2}p^2=(x+4)(x^2-2)(x+k)$

$\therefore f(x)=(x+4)(x^2-2)(x+k)+\frac{3}{2}p^2$

이때

$f(3)=(3+4)(9-2)(3+k)+\frac{3}{2}p^2$

$\quad =49(3+k)+\frac{3}{2}p^2$

$f(-1)=(-1+4)(1-2)(-1+k)+\frac{3}{2}p^2$

$\quad =-3(-1+k)+\frac{3}{2}p^2$

이므로 조건 ㈏에서

$f(3)-f(-1)$

$=49(3+k)+\frac{3}{2}p^2-\left\{-3(-1+k)+\frac{3}{2}p^2\right\}$

$=49(3+k)+3(-1+k)$

$=52k+144$

$=-64$

$52k=-208 \quad \therefore k=-4$

$\therefore f(x)=(x+4)(x^2-2)(x-4)+\frac{3}{2}p^2$

$\quad =(x^2-16)(x^2-2)+\frac{3}{2}p^2$

조건 ㈐에서 $f(-\sqrt{p})=0$이므로

$f(-\sqrt{p})=(p-16)(p-2)+\frac{3}{2}p^2=0$

$\frac{5}{2}p^2-18p+32=0$, $5p^2-36p+64=0$

$(p-4)(5p-16)=0 \quad \therefore p=4\ (\because p$는 정수) 답 4

Ⅱ 방정식과 부등식

1 복소수

교과서 예제 p.67

01 답 (1) 실수부분: 0, 허수부분: -6

(2) 실수부분: $3-\sqrt{3}$, 허수부분: 0

(3) 실수부분: -2, 허수부분 2

(4) 실수부분: $\frac{7}{3}$, 허수부분: $\frac{2}{3}$

02 ㄷ. $\sqrt{4}i^2=2\times(-1)=-2$ (실수)

ㅁ. $3i^3=3\times i^2\times i=3\times(-1)\times i=-3i$ (허수)

답 (1) ㄷ, ㅂ (2) ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ

03 (1) $(x-2)+(y-3)i=0$에서

$x-2=0$, $y-3=0 \quad \therefore x=2, y=3$

(2) $(x-5)+(y-2)i=-3+4i$에서

$x-5=-3$, $y-2=4 \quad \therefore x=2, y=6$

답 (1) $x=2$, $y=3$ (2) $x=2$, $y=6$

04 답 (1) $5+3i$ (2) $-4i$ (3) $\sqrt{2}-3i$ (4) $\pi-2i$

05 (1) $(3+4i)+(1-2i)=(3+1)+(4-2)i=4+2i$

(2) $(5-2i)-(2+7i)=(5-2)+(-2-7)i=3-9i$

(3) $(2-5i)(4-3i)=8-6i-20i+15i^2$

$\quad =8-26i-15$

$\quad =-7-26i$

(4) $\frac{2+3i}{1-2i}=\frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{2+4i+3i+6i^2}{1-4i^2}$

$\quad =\frac{2+7i-6}{1-4\times(-1)}=\frac{-4+7i}{5}$

$\quad =-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$

답 (1) $4+2i$ (2) $3-9i$ (3) $-7-26i$ (4) $-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$

참고 (4) 분모가 허수인 경우에는 분모, 분자에 분모의 켤레복소수를 곱하여 분모를 실수로 만든다.

06 $z=3+2i$에 대하여 $\overline{z}=3-2i$이므로

(1) $z+\overline{z}=(3+2i)+(3-2i)$

$\quad =(3+3)+\{2+(-2)\}i$

$\quad =6$

(2) $z-\overline{z}=(3+2i)-(3-2i)$

$\quad =(3-3)+\{2-(-2)\}i$

$\quad =4i$

(3) $z\bar{z}=(3+2i)(3-2i)$
$=9-4i^2=9+4$
$=13$

(4) $z^2=(3+2i)^2=9+12i+4i^2$
$=9+12i-4=5+12i$

답 (1) 6 (2) $4i$ (3) 13 (4) $5+12i$

07 (1) $i^{100}=(i^4)^{25}=1$

(2) $(-i)^{17}=-i^{17}=-(i^4)^4\times i=-1\times i=-i$

(3) $i^{40}+i^{41}=(i^4)^{10}+(i^4)^{10}\times i=1+i$

(4) $i-i^2+i^3-i^4=i-(-1)+(-i)-1=0$

답 (1) 1 (2) $-i$ (3) $1+i$ (4) 0

08 (2) $-\sqrt{-64}=-\sqrt{64}i=-8i$

답 (1) $\sqrt{6}i$ (2) $-8i$

09 (1) $\pm\sqrt{-18}=\pm\sqrt{18}i=\pm3\sqrt{2}i$

(2) $\pm\sqrt{-49}=\pm\sqrt{49}i=\pm7i$

답 (1) $\pm3\sqrt{2}i$ (2) $\pm7i$

10 (1) $\sqrt{-32}\sqrt{-8}=\sqrt{32}i\times\sqrt{8}i=4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times(-1)=-16$

(2) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{3}{i}=\dfrac{3i}{i^2}=\dfrac{3i}{-1}=-3i$

(3) $\dfrac{\sqrt{-45}}{\sqrt{-9}}=\dfrac{\sqrt{45}i}{\sqrt{9}i}=\dfrac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

(4) $\sqrt{-36}\sqrt{-81}=\sqrt{36}i\times\sqrt{81}i=6i\times9i=54i^2=-54$

답 (1) -16 (2) $-3i$ (3) $\sqrt{5}$ (4) -54

다른풀이 (1) $\sqrt{-32}\sqrt{-8}=-\sqrt{(-32)\times(-8)}=-16$

(2) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=-\sqrt{\dfrac{27}{-3}}=-\sqrt{-9}=-3i$

(3) $\dfrac{\sqrt{-45}}{\sqrt{-9}}=\sqrt{\dfrac{-45}{-9}}=\sqrt{5}$

(4) $\sqrt{-36}\sqrt{-81}=-\sqrt{(-36)\times(-81)}=-54$

참고 ① $a<0$, $b<0$ 이외의 경우에는
$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
② $a>0$, $b<0$ 이외의 경우에는
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

기출 Best | 1회

p.68~71

01 $\frac{1}{4}$ (실수), $\pi+\sqrt{2}$ (실수),
$-3+\sqrt{-7}=-3+\sqrt{7}i$ (허수), $-3i$ (허수),
$i^2-1=-1-1=-2$ (실수),
$-\sqrt{-16}i=-\sqrt{16}i\times i=-4i^2=4$ (실수)
따라서 실수는 4개, 허수는 2개이므로 $m=4$, $n=2$
$\therefore m-n=4-2=2$

답 ④

02 $\dfrac{1-i}{1+i}+(2+3i)(2-3i)=\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}+4-9i^2$
$=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}+4+9$
$=\dfrac{-2i}{2}+13=-i+13$

답 ②

03 $z=\dfrac{7-i}{2-i}=\dfrac{(7-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$=\dfrac{14+7i-2i-i^2}{4-i^2}=\dfrac{14+5i-(-1)}{4-(-1)}$
$=\dfrac{15+5i}{5}=3+i$
에서 $z-3=i$
양변을 제곱하면
$z^2-6z+9=-1$ $\quad\therefore z^2-6z+10=0$
$\therefore z^3-6z^2+7z+8=z(z^2-6z+10)-3z+8$
$=z\times0-3z+8$
$=-3z+8=-3(3+i)+8$
$=-9-3i+8=-1-3i$

답 ①

04 복소수 z가 실수이려면 허수부분이 0이어야 하므로
$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
따라서 모든 실수 x의 값의 합은
$-2+4=2$

답 ③

참고 $x=-2$일 때, $z=0$이고 $x=4$일 때, $z=12$이다.

05 $(1+i)x-(2i-1)y=-4+2i$에서
$x+xi-2yi+y=-4+2i$
$\therefore (x+y)+(x-2y)i=-4+2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+y=-4$, $x-2y=2$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-2$
$\therefore xy=(-2)\times(-2)=4$

답 ④

06 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하면
$\overline{z_1}=a-bi$, $\overline{z_2}=c-di$
ㄱ. $z_1=\overline{z_2}$에서 $a+bi=c-di$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=c$, $b=-d$
$\therefore z_1+z_2=a+bi+c+di$
$=a+bi+a-bi=2a$
즉, z_1+z_2는 실수이다. (참)
ㄴ. $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=(a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di)$
$=ac-adi+bci-bdi^2+ac+adi-bci-bdi^2$
$=2ac-2bdi^2=2ac+2bd$
이므로 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$는 실수이다. (참)

ㄷ. $z_1=1$, $z_2=i$일 때,

$z_1^2+z_2^2=1^2+i^2=1+(-1)=0$

이지만 $z_1\neq0$이고 $z_2\neq0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

07 $\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

이때 $\alpha=-2+3i$, $\beta=1-2i$에서

$\overline{\alpha}=-2-3i$, $\overline{\beta}=1+2i$이므로

$\alpha+\beta=(-2+3i)+(1-2i)=-1+i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(-2-3i)+(1+2i)=-1-i$

$\therefore (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=(-1+i)(-1-i)$

$=1-i^2=1-(-1)=2$ 답 ①

참고 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=\overline{-1+i}=-1-i$

08 $\alpha=3+i$이므로 $\overline{\alpha}=3-i$

$\alpha+\overline{\alpha}=(3+i)+(3-i)=6$

$\alpha\overline{\alpha}=(3+i)(3-i)=9-i^2=9-(-1)=10$

$\therefore \dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}-1}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha-1}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)+\overline{\alpha}(\overline{\alpha}-1)}{(\overline{\alpha}-1)(\alpha-1)}$

$=\dfrac{\alpha^2-\alpha+(\overline{\alpha})^2-\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}-\alpha-\overline{\alpha}+1}$

$=\dfrac{(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})}{\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})+1}$

$=\dfrac{6^2-2\times10-6}{10-6+1}$

$=\dfrac{10}{5}=2$ 답 ⑤

09 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z(1+2i)+\overline{z}(1-i)=8+i$에서

$(a+bi)(1+2i)+(a-bi)(1-i)=8+i$

$a+2ai+bi-2b+a-ai-bi-b=8+i$

$2a-3b+ai=8+i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a-3b=8$, $a=1$

$a=1$을 $2a-3b=8$에 대입하면

$2-3b=8$, $-3b=6$

$\therefore b=-2$

$\therefore z=1-2i$ 답 ②

10 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $z^2<0$이므로

$a=0$, $b\neq0$

즉, $z=bi$, $\overline{z}=-bi$이므로 $(z-\overline{z})^2=-36$에서

$(z-\overline{z})^2=\{bi-(-bi)\}^2=(2bi)^2$

$=-4b^2=-36$

$b^2=9$ $\quad\therefore b=\pm3$

따라서 $z=3i$, $\overline{z}=-3i$ 또는 $z=-3i$, $\overline{z}=3i$이므로

$z\overline{z}=3i\times(-3i)=-9i^2=9$ 답 ③

참고 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

$z^2=(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi$

$z^2<0$이므로 z^2의 실수부분은 음수이고 허수부분은 0이다. 즉,

$a^2-b^2<0$, $2ab=0$

$2ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

이때 $b=0$이면 $a^2-b^2<0$에서 $a^2<0$이므로 a가 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a=0$

즉, $a=0$이고 $b\neq0$이므로 $z=bi$ $(b\neq0)$ 꼴이다.

11 $z^2-4z=(a+bi)^2-4(a+bi)$

$=(a^2+2abi+b^2i^2)-4a-4bi$

$=(a^2-4a-b^2)+(2ab-4b)i$

z^2-4z가 실수이므로 $2ab-4b=0$

$2b(a-2)=0$, $a-2=0$ ($\because b\neq0$)

$\therefore a=2$

따라서 $z=2+bi$, $\overline{z}=2-bi$이므로

$z+\overline{z}=(2+bi)+(2-bi)=4$ 답 ⑤

12 $i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$이므로

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{4002}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)$

$+\cdots+(i^{3997}+i^{3998}+i^{3999}+i^{4000})+i^{4001}+i^{4002}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$

$+\cdots+i^{3996}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{4000}(i+i^2)$

$=0+0+\cdots+0+i+i^2$

$=i-1=-1+i$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$a-b=-1-1=-2$ 답 ①

13 $i+2i^2+3i^3+\cdots+99i^{99}+100i^{100}$

$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+i^4(5i+6i^2+7i^3+8i^4)$

$+\cdots+i^{96}(97i+98i^2+99i^3+100i^4)$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$

$+\cdots+(97i-98-99i+100)$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)$

$=(2-2i)\times25$

$=50-50i$ 답 ⑤

14 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$에서

$z^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1+2i+i^2}{2}=\dfrac{2i}{2}=i$

이므로

$z^4=(z^2)^2=i^2=-1$,

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

$\therefore \frac{1}{z^{99}}=\frac{1}{(z^8)^{12}\times z^3}=\frac{1}{z^3}=\frac{z^5}{z^8}=z^5$

$=z^4\times z=-z=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

따라서 $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$a+b=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}$ 답 ①

참고 $\frac{1}{z^{99}}$의 값은 다음과 같이 여러 가지 방법으로 구할 수 있다.

① $\frac{1}{z^{99}}=\frac{z}{z^{100}}=\frac{z}{(z^4)^{25}}=\frac{z}{(-1)^{25}}$

$=-z=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

② $\frac{1}{z^{99}}=\frac{1}{z^3}=\frac{1}{z^2}\times\frac{1}{z}$

$=\frac{1}{i}\times\frac{\sqrt{2}}{1+i}=\frac{\sqrt{2}}{i-1}$

$=\frac{\sqrt{2}(i+1)}{(i-1)(i+1)}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$

15 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}$

$=\frac{1-2i-1}{1-(-1)}=\frac{-2i}{2}=-i$

이고

$-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4=-i+i^2-i^3+i^4$

$=-i+(-1)+i+1$

$=0$

이므로

$\frac{1-i}{1+i}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}$

$=-i+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{30}$

$=-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4$

$+(-i)^4\{-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4\}$

$+\cdots+(-i)^{24}\{-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4\}$

$+(-i)^{28}\{-i+(-i)^2\}$

$=0+0+\cdots+0+(-i+i^2)$

$=-i-1$ 답 ①

16 $\sqrt{-6}\sqrt{-6}+\sqrt{8}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}$

$=\sqrt{6}i\times\sqrt{6}i+2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}i+\frac{4}{2i}$

$=-6+8i+\frac{2}{i}$

$=-6+8i+\frac{2i}{i^2}$

$=-6+8i-2i$

$=-6+6i$

따라서 $a=-6$, $b=6$이므로

$ab=-6\times6=-36$ 답 ③

다른풀이 $\sqrt{-6}\sqrt{-6}+\sqrt{8}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}$

$=-\sqrt{(-6)\times(-6)}+\sqrt{8\times(-8)}-\sqrt{\frac{16}{-4}}$

$=-\sqrt{36}+\sqrt{-64}-\sqrt{-4}$

$=-6+8i-2i=-6+6i$

따라서 $a=-6$, $b=6$이므로

$ab=-6\times6=-36$

17 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로

$a>0$, $b<0$

즉, $a-b>0$, $ab<0$이므로

$\sqrt{(a-b)^2}+|ab|+a\sqrt{b^2}$

$=|a-b|+|ab|+a|b|$

$=a-b-ab-ab$

$=a-b-2ab$ 답 ④

기출 Best 2회

p.72~75

01 $5+\sqrt{2}$ (실수), $-6i$ (허수), $1-i$ (허수),

$\pi+\sqrt{7}i$ (허수), $\sqrt{-15}=\sqrt{15}i$ (허수),

$\sqrt{-3}i=\sqrt{3}i\times i=\sqrt{3}i^2=-\sqrt{3}$ (실수)

따라서 복소수는 6개, 허수는 4개이므로

$a=6$, $b=4$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ 답 ④

02 ② $(3-2i)-(4+4i)=3-2i-4-4i=-1-6i$

③ $(1+2i)(2-5i)=2-5i+4i-10i^2$

$=2-i+10=12-i$

④ $(4+i)^2=16+8i+i^2=16+8i-1=15+8i$

⑤ $\frac{5-2i}{2+5i}=\frac{(5-2i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\frac{10-25i-4i+10i^2}{4-25i^2}$

$=\frac{10-29i-10}{4+25}=\frac{-29i}{29}=-i$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

03 $z=\frac{1}{1+\sqrt{3}i}=\frac{1-\sqrt{3}i}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{1-\sqrt{3}i}{1-3i^2}$

$=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+3}=\frac{1-\sqrt{3}i}{4}$

에서 $4z=1-\sqrt{3}i$, $4z-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $16z^2-8z+1=-3$

$16z^2-8z+4=0$ $\therefore 4z^2-2z+1=0$

$\therefore 8z^3-4z^2+6z+1=2z(4z^2-2z+1)+4z+1$
$=2z\times 0+4z+1=4z+1$
$=1-\sqrt{3}i+1=2-\sqrt{3}i$ 답 ①

04 $z=i(x+2i)^2=i(x^2+4xi+4i^2)=i\{(x^2-4)+4xi\}$
$=-4x+(x^2-4)i$
가 실수이려면 허수부분이 0이어야 하므로
$x^2-4=0 \qquad \therefore x=2\ (\because x>0)$
$\therefore z=-4\times 2=-8$
따라서 $\alpha=2,\ \beta=-8$이므로
$\alpha\beta=2\times(-8)=-16$ 답 ③

05 $\dfrac{a}{3-i}+\dfrac{b}{3+i}=\dfrac{3}{1-3i}$에서
$\dfrac{a(3+i)+b(3-i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$
$\dfrac{3a+ai+3b-bi}{9-i^2}=\dfrac{3+9i}{1-9i^2}$
$\dfrac{3a+3b+(a-b)i}{10}=\dfrac{3+9i}{10}$
$3a+3b+(a-b)i=3+9i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3a+3b=3,\ a-b=9$, 즉 $a+b=1,\ a-b=9$
두 식을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=-4$
$\therefore ab=5\times(-4)=-20$ 답 ①

06 ㄱ. $z=2i$이면 $\bar{z}=-2i$이고
$z^2=(2i)^2=4i^2=-4,\ \bar{z}^2=(-2i)^2=4i^2=-4$
즉, $z^2=\bar{z}^2$이지만 z는 실수가 아니다. (거짓)
ㄴ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$z^2=(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi$
z^2이 양의 실수이므로 $a^2-b^2>0,\ 2ab=0$
$2ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$
이때 $a=0$이면 $a^2-b^2>0$에서 $-b^2>0$, 즉 $b^2<0$이므로 b가 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.
$\therefore b=0$
따라서 $z=a$이므로 z는 실수이다. (참)
ㄷ. $z=3$이면 $\bar{z}=3$이므로 $z\neq 0$이지만
$z^2-\bar{z}^2=9-9=0$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

07 $\alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}+\bar{\beta})+\beta(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$
$=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$
이때 $\alpha=4-2i,\ \beta=-5-i$에서 $\bar{\alpha}=4+2i,\ \bar{\beta}=-5+i$이므로
$\alpha+\beta=(4-2i)+(-5-i)=-1-3i$
$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=(4+2i)+(-5+i)=-1+3i$
$\therefore (\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=(-1-3i)(-1+3i)$
$=1-9i^2=1+9=10$ 답 ⑤

08 $z=1+i$이므로 $\bar{z}=1-i$
$z+\bar{z}=(1+i)+(1-i)=2$
$z\bar{z}=(1+i)(1-i)=1-i^2=1-(-1)=2$
$\therefore \dfrac{z-1}{\bar{z}}+\dfrac{z}{\bar{z}-1}=\dfrac{(z-1)(\bar{z}-1)+z\bar{z}}{\bar{z}(\bar{z}-1)}$
$=\dfrac{z\bar{z}-z-\bar{z}+1+z\bar{z}}{\bar{z}(\bar{z}-1)}$
$=\dfrac{2z\bar{z}-(z+\bar{z})+1}{\bar{z}(\bar{z}-1)}$
$=\dfrac{2\times 2-2+1}{(1-i)\times(-i)}=\dfrac{3}{-i+i^2}$
$=\dfrac{3}{-1-i}=\dfrac{3(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}$
$=\dfrac{-3+3i}{1-i^2}=\dfrac{-3+3i}{2}$ 답 ②

09 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$5iz+(1-i)\bar{z}=5-3i$에서
$5i(a+bi)+(1-i)(a-bi)=5-3i$
$5ai-5b+a-bi-ai-b=5-3i$
$a-6b+(4a-b)i=5-3i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-6b=5,\ 4a-b=-3$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-1,\ b=-1$
따라서 $z=-1-i$이므로
$z\bar{z}=(-1-i)(-1+i)$
$=1-i^2=1-(-1)=2$ 답 ①

10 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $z^2<0$이므로
$a=0,\ b\neq 0$
즉, $z=bi$이고 $\bar{z}=-bi$이므로 $z\bar{z}=32$에서
$z\bar{z}=bi\times(-bi)=-b^2i^2=b^2=32$
$\therefore b=\pm 4\sqrt{2}$
따라서 $z=4\sqrt{2}i,\ \bar{z}=-4\sqrt{2}i$ 또는 $z=-4\sqrt{2}i,\ \bar{z}=4\sqrt{2}i$이므로
$z^2+\bar{z}^2=(4\sqrt{2}i)^2+(-4\sqrt{2}i)^2=32i^2+32i^2$
$=-32-32=-64$ 답 ①

11 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하면
$z+\dfrac{3}{z}=a+bi+\dfrac{3}{a+bi}$
$=a+bi+\dfrac{3(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}$
$=a+bi+\dfrac{3a-3bi}{a^2-b^2i^2}$
$=a+bi+\dfrac{3a-3bi}{a^2+b^2}$
$=\dfrac{a^3+ab^2+3a}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2b+b^3-3b}{a^2+b^2}i$

$z+\frac{3}{z}$이 실수이므로 허수부분이 0이다. 즉,

$\frac{a^2b+b^3-3b}{a^2+b^2}=0,\ b^3+a^2b-3b=0\ (\because a^2+b^2\neq 0)$

$b(a^2+b^2-3)=0,\ a^2+b^2-3=0\ (\because b\neq 0)$

$\therefore a^2+b^2=3$

$\therefore z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2$

$=a^2+b^2=3$

답 ④

12 $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i,\ \frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1,\ \frac{1}{i^3}=\frac{i}{i^4}=i,\ \frac{1}{i^4}=1$에서

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=-i-1+i+1=0$이므로

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{999}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$

$+\cdots+\frac{1}{i^{996}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)$

$=0+0+\cdots+(-i-1+i)=-1$

답 ③

13 $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i,\ \frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1,\ \frac{1}{i^3}=\frac{i}{i^4}=i,\ \frac{1}{i^4}=1$이므로

$\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\cdots+\frac{14}{i^{14}}+\frac{15}{i^{15}}$

$=(-i-2+3i+4)+\frac{1}{i^4}(-5i-6+7i+8)$

$+\frac{1}{i^8}(-9i-10+11i+12)+\frac{1}{i^{12}}(-13i-14+15i)$

$=3\times(2+2i)+(-14+2i)$

$=6+6i-14+2i$

$=-8+8i$

따라서 $a=-8,\ b=8$이므로

$ab=-8\times 8=-64$

답 ②

14 $z=\frac{3-2i}{2+3i}=\frac{(3-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$=\frac{6-9i-4i+6i^2}{4-9i^2}=\frac{6-13i-6}{4+9}$

$=\frac{-13i}{13}=-i$

이므로

$z+z^2+z^3+z^4=-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4$

$=-i+i^2-i^3+i^4$

$=-i+(-1)-(-i)+1=0$

$\therefore z+z^2+z^3+\cdots+z^{202}$

$=(z+z^2+z^3+z^4)+z^4(z+z^2+z^3+z^4)$

$+\cdots+z^{196}(z+z^2+z^3+z^4)+z^{200}(z+z^2)$

$=0+0+\cdots+0+(-i-1)$

$=-i-1$

답 ⑤

15 $f(n)=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n$

$=\left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^n=(-i)^n$

이때 자연수 k에 대하여

$i^{4k+2}=(i^4)^k\times i^2=1^k\times i^2=-1$

$i^{4k}=(i^4)^k=1^k=1$

$\therefore f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(50)$

$=(-i)^2+(-i)^4+(-i)^6+\cdots+(-i)^{50}$

$=i^2+i^4+i^6+\cdots+i^{50}$

$=(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)$

$=-1$

답 ④

16 $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{-9}\sqrt{-16}-\frac{\sqrt{-54}+\sqrt{-24}}{\sqrt{-6}}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}+3i\times 4i-\frac{3\sqrt{6}i+2\sqrt{6}i}{\sqrt{6}i}$

$=\frac{3}{i}+12i^2-(3+2)$

$=\frac{3i}{i^2}-12-5$

$=-3i-17$

따라서 $a=-17,\ b=-3$이므로

$a+b=-17+(-3)=-20$

답 ①

17 0이 아닌 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0,\ b<0$

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$이므로 $b<0,\ c>0$

즉, $a+b<0,\ b-c<0$이므로

$\sqrt{b^2}-\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b-c)^2}$

$=|b|-|a+b|+|b-c|$

$=-b+(a+b)-(b-c)$

$=-b+a+b-b+c$

$=a-b+c$

답 ⑤

변형유형 집중공략

p.76~77

1-1 (i) $\alpha^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{2}=-i$이므로

$\alpha^3=\alpha^2\times\alpha=-i\times\alpha=-\alpha i$

$\alpha^4=(\alpha^2)^2=(-i)^2=i^2=-1$

$\alpha^5=\alpha^4\times\alpha=(-1)\times\alpha=-\alpha$

$\alpha^6=(\alpha^2)^3=(-i)^3=-i^3=-(-i)=i$

$\alpha^7=\alpha^6\times\alpha=i\times\alpha=\alpha i$

$\alpha^8=(\alpha^4)^2=(-1)^2=1$

즉, α^m의 값으로는 $\alpha,\ -i,\ -\alpha i,\ -1,\ -\alpha,\ i,\ \alpha i,\ 1$이 이 순서대로 반복된다.

(ii) $\beta^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}$

$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\beta^3=\beta^2\times\beta=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$=\frac{(\sqrt{3}i-1)(\sqrt{3}i+1)}{4}$

$=\frac{3i^2-1}{4}=-1$

이므로

$\beta^4=\beta^3\times\beta=-1\times\beta=-\beta$

$\beta^5=\beta^4\times\beta=(-\beta)\times\beta=-\beta^2$

$\beta^6=(\beta^3)^2=(-1)^2=1$

즉, β^n의 값으로는 β, β^2, -1, $-\beta$, $-\beta^2$, 1이 이 순서대로 반복된다.

(i), (ii)에서 $\alpha^m\beta^n=i$가 성립하려면

$\alpha^m=-i$, $\beta^n=-1$ 또는 $\alpha^m=i$, $\beta^n=1$

이어야 한다.

(a) $\alpha^m=-i$, $\beta^n=-1$일 때

$\alpha^m=-i$에서 $m=8k+2$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이므로

$m=2, 10$

$\beta^n=-1$에서 $n=6l+3$ ($l=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이므로

$n=3, 9$

(b) $\alpha^m=i$, $\beta^n=1$일 때

$\alpha^m=i$에서 $m=8k+6$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이므로

$m=6$

$\beta^n=1$에서 $n=6l$ (l은 자연수) 꼴이므로

$n=6$

(a), (b)에서 $m+n$의 최댓값은

$10+9=19$ 답 19

1-2 (i) $\alpha^2=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$

$=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha^3=\alpha^2\times\alpha=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$=\frac{(-\sqrt{3}i-1)(-\sqrt{3}i+1)}{4}$

$=\frac{3i^2-1}{4}=-1$

이므로

$\alpha^4=\alpha^3\times\alpha=-1\times\alpha=-\alpha$

$\alpha^5=\alpha^3\times\alpha^2=-1\times\alpha^2=-\alpha^2$

$\alpha^6=(\alpha^3)^2=(-1)^2=1$

즉, α^n의 값으로는 α, α^2, -1, $-\alpha$, $-\alpha^2$, 1이 이 순서대로 반복된다.

(ii) $\beta^2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=\frac{1+2i+i^2}{1-2i+i^2}=-1$이므로

$\beta^3=\beta^2\times\beta=-1\times\beta=-\beta$

$\beta^4=(\beta^2)^2=(-1)^2=1$

즉, β^n의 값으로는 β, -1, $-\beta$, 1이 이 순서대로 반복된다.

(i), (ii)에서 $\alpha^n+\beta^n=0$이 성립하려면

$\alpha^n=-1$, $\beta^n=1$ 또는 $\alpha^n=1$, $\beta^n=-1$

이어야 한다.

(a) $\alpha^n=-1$, $\beta^n=1$일 때

$\alpha^n=-1$에서 $n=6k+3$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이고

$\beta^n=1$에서 $n=4l$ (l은 자연수) 꼴이다.

그런데 $6k+3$은 홀수이고 $4l$은 짝수이므로 $\alpha^n+\beta^n=0$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(b) $\alpha^n=1$, $\beta^n=-1$일 때

$\alpha^n=1$에서 $n=6k$ (k는 자연수) 꼴이고

$\beta^n=-1$에서 $n=4l+2$ ($l=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이다.

즉, n은 6의 배수이면서 4로 나누었을 때의 나머지가 2인 수이므로 50 이하의 자연수 n은

$n=6, 18, 30, 42$

따라서 50 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은

$6+18+30+42=96$ 답 96

2-1 $z=(x+i)x-(y-i)y=(x^2-y^2)+(x+y)i$

조건 (가)에서 $z^2<0$이면 z의 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니므로

$x^2-y^2=0$, $x+y\neq0$

$(x+y)(x-y)=0$, $x+y\neq0$

$x-y=0$ $\quad\therefore x=y$

즉, $z=2xi$이므로 $\bar{z}=-2xi$

조건 (나)에서

$z\bar{z}=2xi\times(-2xi)=-4x^2i^2=4x^2=36$

$x^2=9$ $\quad\therefore x=3$ ($\because x>0$)

따라서 $y=x=3$이므로

$xy=3\times3=9$ 답 ③

2-2 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$z+\bar{z}=2$에서

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=2$

$\therefore a=1$

$\therefore z=1+bi$

이때 $z^4=(z^2)^2$이 음의 실수이면 z^2의 실수부분은 0, 허수부분은 0이 아니므로

$z^2=(1+bi)^2=1+2bi+b^2i^2$

$=1+2bi-b^2=(1-b^2)+2bi$

에서

$1-b^2=0$, $2b\neq0$

$(1+b)(1-b)=0$, $b\neq0$

$\therefore b=\pm1$

따라서 $z=1+i$, $\bar{z}=1-i$ 또는 $z=1-i$, $\bar{z}=1+i$이므로

$z\bar{z}=(1+i)(1-i)=1-i^2=1-(-1)=2$ 답 ①

서술형 What & How

p.78~81

1 $x(1+2i)+y(-1-i)=\overline{2-6i}$에서

$x+2xi-y-yi=2+6i$

$(x-y)+(2x-y)i=2+6i$ …… ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=2,\ 2x-y=6$ …… ❷

두 식을 연립하여 풀면

$x=4,\ y=2$ …… ❸

$\therefore\ xy=4\times2=8$ …… ❹

답 8

2 $\overline{a(2-3i)+b(-1-2i)}=3+i$에서

$a(2-3i)+b(-1-2i)=3-i$

$2a-3ai-b-2bi=3-i$

$(2a-b)+(-3a-2b)i=3-i$ …… ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a-b=3,\ -3a-2b=-1$ …… ❷

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$ …… ❸

$\therefore\ ab=1\times(-1)=-1$ …… ❹

답 -1

채점기준	배점
❶ 등식의 좌변과 우변을 정리하여 나타내기	2
❷ 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b에 대한 연립방정식 세우기	2
❸ a, b의 값 각각 구하기	2
❹ ab의 값 구하기	1

3 $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{2i}{2}=i$ …… ❶

$\therefore\ f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)=f(i)=i^{40}+\dfrac{1}{i^{40}}$

$=(i^4)^{10}+\dfrac{1}{(i^4)^{10}}$

$=1+1=2$ …… ❷

답 2

4 $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1-2i+i^2}{2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4=\left\{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^2=(-i)^2=-1,$

$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8=\left\{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4\right\}^2=(-1)^2=1$ …… ❶

$\therefore\ f\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{12}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{16}$

$=\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8\times\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4+\left\{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8\right\}^2$

$=1+1\times(-1)+1$

$=1$ …… ❷

답 1

채점기준	배점
❶ $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$, $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4$, $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8$의 값을 각각 구하기	3
❷ $f\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$의 값 구하기	2

5 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$(1-2i)z+3i\overline{z}=3-5i$에서

$(1-2i)(a+bi)+3i(a-bi)=3-5i$

$a+bi-2ai+2b+3ai+3b=3-5i$

$a+5b+(a+b)i=3-5i$ …… ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+5b=3,\ a+b=-5$ …… ❷

두 식을 연립하여 풀면

$a=-7,\ b=2$ …… ❸

따라서 $z=-7+2i$, $\overline{z}=-7-2i$이므로 …… ❹

$z\overline{z}=(-7+2i)(-7-2i)$

$=49-4i^2=49+4$

$=53$ …… ❺

답 53

6 $z=(1+i)x^2-(7+2i)x-3i+12$

$=x^2+x^2i-7x-2xi-3i+12$

$=(x^2-7x+12)+(x^2-2x-3)i$

이므로

$\overline{z}=(x^2-7x+12)-(x^2-2x-3)i$ …… ❶

$z=-\overline{z}$에서 $z+\overline{z}=0$이므로

$z+\overline{z}=2(x^2-7x+12)=0,\ 2(x-3)(x-4)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=4$ …… ❷

$x=3$이면 $z=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$x=4$이면 $z=0+(16-8-3)i=5i$ …… ❸

따라서 구하는 실수 x의 값은 4이다. …… ❹

답 4

채점기준	배점
❶ z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 정리하고 $\overline{z}$를 x에 대한 식으로 나타내기	2
❷ $z=-\overline{z}$를 만족시키는 x의 값 구하기	2
❸ ❷에서 구한 x의 값이 $z\neq0$을 만족시키는지 확인하기	2
❹ x의 값 구하기	1

7 $abc\neq0$이므로 a, b, c는 0이 아닌 실수이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$이므로 $b<0$, $c>0$ …… ❶

즉, $a+b<0$, $b-c<0$, $c-a>0$이므로 …… ❷

$|a+b|-\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{(c-a)^2}$

$=|a+b|-|b-c|-|c-a|$

$=-(a+b)+(b-c)-(c-a)$

$=-a-b+b-c-c+a$

$=-2c$ …… ❸

답 $-2c$

8 서로 다른 세 양의 실수 x, y, z에 대하여 $y-x\neq0$, $y-z\neq0$이고, $\sqrt{y-x}\sqrt{y-z}=-\sqrt{(y-x)(y-z)}$이므로

$y-x<0$, $y-z<0$ …… ❶

즉, $x-y>0$이므로 …… ❷

$\sqrt{(x-y)^2}-\sqrt{(y-z)^2}-\sqrt{x^2}$

$=|x-y|-|y-z|-|x|$

$=x-y+(y-z)-x$

$=-z$ …… ❸

답 $-z$

채점기준	배점
❶ 주어진 조건을 만족시키는 $y-x$, $y-z$의 부호 각각 구하기	2
❷ $x-y$의 부호 구하기	2
❸ 절댓값의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기	2

실전 문제 | 1회

p.82~85

01 $\overline{z_1}=1-2i$, $\overline{z_2}=2-i$이므로

$\overline{z_1}\times\overline{z_2}-z_2z_3$

$=(1-2i)(2-i)-(2+i)(-3+2i)$

$=2-i-4i+2i^2-(-6+4i-3i+2i^2)$

$=-5i-(-8+i)$

$=8-6i$

따라서 $a=8$, $b=-6$이므로

$a+b=8+(-6)=2$ 답 ⑤

02 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$z+\overline{z}=2$에서

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=2$ $\quad\therefore a=1$

즉, $z=1+bi$이므로

$z^2=(1+bi)^2=1+2bi+b^2i^2$

$=(1-b^2)+2bi$

z^2의 허수부분이 4이므로 $2b=4$ $\quad\therefore b=2$

따라서 $z=1+2i$, $\overline{z}=1-2i$이므로

$z\overline{z}=(1+2i)(1-2i)=1-4i^2=1+4=5$ 답 ①

03 $z=(1+i)x^2+(5-i)x+6-6i$

$=(x^2+5x+6)+(x^2-x-6)i$

z^2이 음의 실수이므로 z의 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니다.

$\therefore x^2+5x+6=0$, $x^2-x-6\neq0$

$x^2+5x+6=0$에서 $(x+2)(x+3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-3$ …… ㉠

$x^2-x-6\neq0$에서 $(x+2)(x-3)\neq0$

$\therefore x\neq-2$이고 $x\neq3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=-3$ 답 ②

참고 $x=-3$이면 $z=6i$이므로

$z^2=-36<0$

04 $z\overline{z}=30$에서 $\overline{z}=\dfrac{30}{z}$이므로 $z+\overline{z}=6$에서

$z+\dfrac{30}{z}=6$

양변에 z를 곱하면

$z^2+30=6z$ $\quad\therefore z^2-6z=-30$

$\therefore z^2-6z+3=-27$ 답 ②

다른풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$z+\overline{z}=6$에서

$a+bi+a-bi=6$, $2a=6$ $\quad\therefore a=3$

$z\overline{z}=30$에서

$(a+bi)(a-bi)=30$, $a^2+b^2=30$

$9+b^2=30$, $b^2=21$ $\quad\therefore b=\pm\sqrt{21}$

따라서 $z=3\pm\sqrt{21}i$이므로

$z^2-6z+3=(3\pm\sqrt{21}i)^2-6(3\pm\sqrt{21}i)+3$

$=-12\pm6\sqrt{21}i-18\mp6\sqrt{21}i+3$ (복호동순)

$=-27$

05 $\dfrac{1}{Z}=\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2}=\dfrac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2}$에서 $Z=\dfrac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$

이때

$Z_1Z_2=(2-5i)(1-i)=2-2i-5i+5i^2=-3-7i$,

$Z_1+Z_2=(2-5i)+(1-i)=3-6i$

이므로

$Z=\dfrac{-3-7i}{3-6i}=\dfrac{(-3-7i)(3+6i)}{(3-6i)(3+6i)}$

$=\dfrac{-9-18i-21i-42i^2}{9-36i^2}$

$=\dfrac{33-39i}{45}=\dfrac{11}{15}-\dfrac{13}{15}i$

따라서 $a=\dfrac{11}{15}$, $b=-\dfrac{13}{15}$이므로

$a+b=\dfrac{11}{15}-\dfrac{13}{15}=-\dfrac{2}{15}$ 답 ②

06 $\dfrac{\overline{z}^5+3}{z}+\dfrac{z^5-3}{\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}^6+3\overline{z}+z^6-3z}{z\overline{z}}$

이때 $z=1+i$, $\overline{z}=1-i$에서

$z\overline{z}=(1+i)(1-i)=1-i^2=1-(-1)=2$,

$z^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$,

$\overline{z}^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

이므로

$\dfrac{\overline{z}^6+3\overline{z}+z^6-3z}{z\overline{z}}=\dfrac{(\overline{z}^2)^3+3\overline{z}+(z^2)^3-3z}{2}$

$=\dfrac{(-2i)^3+3(1-i)+(2i)^3-3(1+i)}{2}$

$=\dfrac{-8i^3+3-3i+8i^3-3-3i}{2}$

$=\dfrac{-6i}{2}=-3i$ 답 ①

07 $z=a+bi$에서 $\bar{z}=a-bi$이므로

① $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$ (실수)

② $z^2+\bar{z}^2=(a+bi)^2+(a-bi)^2$
$=(a^2+2abi+b^2i^2)+(a^2-2abi+b^2i^2)$
$=2a^2+2b^2i^2=2a^2-2b^2$ (실수)

③ $(z-\bar{z})^2=\{(a+bi)-(a-bi)\}^2$
$=(2bi)^2=4b^2i^2=-4b^2$ (실수)

④ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$,
$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$이므로
$(1-z)(1-\bar{z})=1-(z+\bar{z})+z\bar{z}=1-2a+a^2+b^2$ (실수)

⑤ $\dfrac{\bar{z}}{z}=\dfrac{a-bi}{a+bi}=\dfrac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}$
$=\dfrac{a^2-2abi+b^2i^2}{a^2-b^2i^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

$a\neq0$, $b\neq0$에서 $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\neq0$이므로 $\dfrac{\bar{z}}{z}$는 허수이다.

따라서 항상 허수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

08 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$(1+2i)+z=(1+2i)+(a+bi)$
$=(a+1)+(b+2)i$
조건 (가)에서 $(1+2i)+z$가 양의 실수이므로
$a+1>0$, $b+2=0$
$\therefore a>-1$, $b=-2$
$z=a-2i$, $\bar{z}=a+2i$이므로 조건 (나)에서
$z\bar{z}=(a-2i)(a+2i)=a^2-4i^2=a^2+4=8$
$a^2=4$ $\quad\therefore a=2$ ($\because a>-1$)
따라서 $z=2-2i$, $\bar{z}=2+2i$이므로
$\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\dfrac{(2-2i)+(2+2i)}{2}=2$ 답 ④

09 $i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$이므로
$(i+i)+(i^2+2i^2)+(i^3+3i^3)+\cdots+(i^{20}+20i^{20})$
$=(i+i^2+i^3+\cdots+i^{20})+(i+2i^2+3i^3+\cdots+20i^{20})$
$=\{(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$
$+\cdots+i^{16}(i+i^2+i^3+i^4)\}$
$+\{(i+2i^2+3i^3+4i^4)+i^4(5i+6i^2+7i^3+8i^4)$
$+\cdots+i^{16}(17i+18i^2+19i^3+20i^4)\}$
$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$
$+\cdots+(17i-18-19i+20)$
$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)$
$=(2-2i)\times5=10-10i$
따라서 $a=10$, $b=-10$이므로
$a-b=10-(-10)=20$ 답 ⑤

10 $z^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\dfrac{1+2i+i^2}{2i^2}=\dfrac{2i}{-2}=-i$
$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=i^2=-1$
$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$
즉, $z^{8k+4}=-1$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)이므로 $z^n=-1$을 만족시키는 자연수 n은
4, 12, 20, 28, $\cdots$
따라서 20 이하의 자연수 n은 4, 12, 20이므로 구하는 합은
$4+12+20=36$ 답 ④

11 $z^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$
$=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
이므로
$z^3=z^2\times z=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1-3i^2}{4}=1$
$\therefore z^{17}+\dfrac{1}{z^{17}}=(z^3)^5\times z^2+\dfrac{1}{(z^3)^5\times z^2}=z^2+\dfrac{1}{z^2}$
$=z^2+z$ $\left(\because z^3=1\text{에서 } \dfrac{1}{z^2}=z\right)$
$=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-1$ 답 ②

참고 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z=-1+\sqrt{3}i$, $2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면 $(2z+1)^2=(\sqrt{3}i)^2$
$4z^2+4z+1=-3$ $\quad\therefore z^2+z+1=0$
양변에 $z-1$을 곱하면
$(z-1)(z^2+z+1)=0$, $z^3-1=0$ $\quad\therefore z^3=1$

12 ㄱ. $z_1=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z_2}=z_1=a+bi$이므로
$z_2=a-bi$
$\therefore z_1z_2=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$
즉, z_1z_2는 실수이다. (참)

ㄴ. $z_1=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z_2}=z_1=a+bi$이므로
$z_2=a-bi$
이때 $z_1+z_2=0$이므로
$z_1+z_2=(a+bi)+(a-bi)=2a=0$ $\quad\therefore a=0$
즉, $z_1=bi$, $z_2=-bi$이므로
$z_1z_2=bi\times(-bi)=-b^2i^2=b^2\geq0$ (참)

ㄷ. z_1, z_2가 허수이므로 $z_1=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$),
$z_2=c+di$ (c, d는 실수, $d\neq0$)라 하면
$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
z_1+z_2가 실수이므로 $b+d=0$
$\therefore d=-b$
즉, $z_2=c-bi$이므로
$z_1z_2=(a+bi)(c-bi)=ac-abi+bci-b^2i^2$
$=(ac+b^2)+(-ab+bc)i$
z_1z_2가 실수이므로
$-ab+bc=0$, $b(-a+c)=0$
$-a+c=0$ ($\because b\neq0$) $\quad\therefore a=c$
즉, $z_2=a-bi$이므로 $z_1=\bar{z_2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

13 $z=1-i$이므로 $z^n+(z-2)^n=0$에서

$(1-i)^n+(-1-i)^n=0$

$(1-i)^n=-(-1-i)^n$

$\frac{(1-i)^n}{(-1-i)^n}=-1$, $\left(\frac{1-i}{-1-i}\right)^n=-1$

이때

$\frac{1-i}{-1-i}=\frac{(1-i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{-1+i+i-i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$

이므로 $i^n=-1$

이것을 만족시키는 자연수 n은 $4k+2$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이므로 40 이하의 자연수 n은 2, 6, 10, $\cdots$, 38의 10개이다. 답 ①

14 (i) $\alpha^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$

$=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha^3=\alpha^2\times\alpha=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$=\frac{(\sqrt{3}i-1)(\sqrt{3}i+1)}{4}=\frac{3i^2-1}{4}=-1$

이므로

$\alpha^4=\alpha^3\times\alpha=-1\times\alpha=-\alpha$

$\alpha^5=\alpha^4\times\alpha=-\alpha\times\alpha=-\alpha^2$

$\alpha^6=(\alpha^3)^2=(-1)^2=1$

즉, α^m의 값으로는 α, α^2, -1, $-\alpha$, $-\alpha^2$, 1이 이 순서대로 반복된다.

(ii) $\beta^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i+i^2}{2}=i$이므로

$\beta^3=\beta^2\times\beta=i\times\beta=\beta i$

$\beta^4=(\beta^2)^2=i^2=-1$

$\beta^5=\beta^4\times\beta=-1\times\beta=-\beta$

$\beta^6=(\beta^2)^3=i^3=-i$

$\beta^7=\beta^6\times\beta=-i\times\beta=-\beta i$

$\beta^8=(\beta^4)^2=(-1)^2=1$

즉, β^n의 값으로는 β, i, βi, -1, $-\beta$, $-i$, $-\beta i$, 1이 이 순서대로 반복된다.

(i), (ii)에서 $\alpha^m\beta^n=-1$이 성립하려면

$\alpha^m=-1$, $\beta^n=1$ 또는 $\alpha^m=1$, $\beta^n=-1$

이어야 한다.

(a) $\alpha^m=-1$, $\beta^n=1$일 때

$\alpha^m=-1$에서 $m=6k+3$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이므로

$m=3, 9, 15$

$\beta^n=1$에서 $n=8l$ (l은 자연수) 꼴이므로

$n=8, 16$

즉, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3\times2=6$

(b) $\alpha^m=1$, $\beta^n=-1$일 때

$\alpha^m=1$에서 $m=6k$ (k는 자연수) 꼴이므로

$m=6, 12, 18$

$\beta^n=-1$에서 $n=8l+4$ ($l=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이므로

$n=4, 12, 20$

즉, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3\times3=9$

(a), (b)에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6+9=15$ 답 ⑤

15 서로 다른 세 양수 a, b, c에 대하여 $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-c}}=-\sqrt{\frac{a-b}{b-c}}$이므로

$a-b>0$, $b-c<0$

즉, $b-a<0$, $c-b>0$이므로

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}-\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{a-b}}\times\sqrt{\frac{b-a}{c-b}}+\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}}$

$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}i}-\frac{\sqrt{c-b}i}{\sqrt{a-b}}\times\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{c-b}}+\frac{\sqrt{b}i}{\sqrt{b}}$

$=\frac{1}{i}-\frac{\sqrt{c-b}i}{\sqrt{a-b}}\times\frac{\sqrt{a-b}i}{\sqrt{c-b}}+i$

$=\frac{i}{i^2}-i^2+i=-i-(-1)+i=1$ 답 ③

다른풀이 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}-\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{a-b}}\times\sqrt{\frac{b-a}{c-b}}+\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}}$

$=-\sqrt{\frac{a}{-a}}-\sqrt{\frac{b-c}{a-b}}\times\sqrt{\frac{b-a}{c-b}}+\sqrt{\frac{-b}{b}}$

$=-i+\sqrt{\frac{b-c}{a-b}\times\frac{b-a}{c-b}}+i$

$=1$

16 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$(2-i)^2z+(\bar{z}+15)i+17=0$에서

$(2-i)^2(a+bi)+(a-bi+15)i+17=0$

$(3-4i)(a+bi)+(a-bi+15)i+17=0$

$3a+3bi-4ai+4b+ai+b+15i+17=0$

$(3a+5b+17)+(-3a+3b+15)i=0$

두 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a+5b+17=0$, $-3a+3b+15=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

따라서 $z=1-4i$, $\bar{z}=1+4i$이므로

$\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{(1-4i)+(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}=\frac{2}{1-16i^2}=\frac{2}{17}$ 답 ③

17 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $(z-\bar{z})i=\{(a+bi)-(a-bi)\}i=2bi\times i=-2b$ (실수)

ㄴ. $z+\bar{w}=0$에서 $\bar{w}=-z=-(a+bi)=-a-bi$이므로

$w=-a+bi=-(a-bi)=-\bar{z}$

$\therefore$ $\bar{z}+w=0$ (실수)

ㄷ. ㄴ에서 $\bar{z}+w=0$, 즉 $w=-\bar{z}$이므로

$\frac{w}{\bar{z}i}=\frac{-\bar{z}}{\bar{z}i}=-\frac{1}{i}=-\frac{i}{i^2}=i$ (허수)

ㄹ. $(z\bar{w})^2=\{z\times(-z)\}^2=(-z^2)^2=z^4$

이므로 $(z\bar{w})^2$은 항상 실수라고 할 수는 없다.

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

18 $i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$ …… ❶

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{i}{i^2}+(-1)+\frac{i}{i^4}+1=-i-1+i+1=0$

이므로 …… ❷

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)$

$=\left(i+\frac{1}{i}\right)+\left(i^2+\frac{1}{i^2}\right)+\left(i^3+\frac{1}{i^3}\right)+\cdots+\left(i^{30}+\frac{1}{i^{30}}\right)$

$=(i+i^2+i^3+\cdots+i^{30})+\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{30}}\right)$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+i^{24}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{28}(i+i^2)$

$+\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots+\frac{1}{i^{24}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$

$+\frac{1}{i^{28}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}\right)$

$=(i-1)+(-i-1)$

$=-2$ …… ❸

답 -2

채점기준	배점
❶ $i+i^2+i^3+i^4$의 값 구하기	2
❷ $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}$의 값 구하기	2
❸ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)$의 값 구하기	4

19 조건 (가)에서 $\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2>0$이므로 $\frac{\bar{z}}{z}$는 0이 아닌 실수이다.

즉, $\frac{\bar{z}}{z}=c$ ($c\neq0$인 실수)라 하면 $\bar{z}=cz$ …… ❶

조건 (나)에서 z는 허수부분이 양수인 복소수이므로 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b>0$)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$\bar{z}=cz$에서 $a-bi=c(a+bi)$, $a-bi=ac+bci$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=ac$, $-b=bc$

$-b=bc$에서 $c=-1$ ($\because b\neq0$)

$a=ac$에서 $a=-a$, $2a=0$ $\quad\therefore a=0$ …… ❷

즉, $z=bi$이므로

$z+z^2+z^3=bi+(bi)^2+(bi)^3=bi+b^2i^2+b^3i^3$

$=bi-b^2-b^3i=-b^2+(b-b^3)i$

조건 (다)에서 $z+z^2+z^3$의 실수부분은 -16이므로

$-b^2=-16$, $b^2=16$ $\quad\therefore b=4$ ($\because b>0$) …… ❸

따라서 $z=4i$이므로

$z^4=(4i)^4=4^4i^4=256$ …… ❹

답 256

채점기준	배점
❶ $\frac{\bar{z}}{z}$가 0이 아닌 실수임을 설명하고 z와 $\bar{z}$ 사이의 관계식 세우기	2
❷ $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b>0$)로 나타내고 ❶의 등식에 대입하여 a의 값 구하기	3
❸ b의 값 구하기	2
❹ z^4의 값 구하기	2

참고 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

$z^2=(a^2-b^2)+2abi$

$z^2>0$이므로 실수부분은 양수, 허수부분은 0이다. 즉,

$a^2-b^2>0$, $2ab=0$

$2ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

이때 $a=0$이면 $a^2-b^2>0$에서 $b^2<0$이므로 이것을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않는다.

$\therefore b=0$

즉, $z=a$(실수)이고, $z^2=a^2>0$이므로 $a\neq0$

따라서 z는 0이 아닌 실수이다.

실전 문제 | 2회

p.86~89

01 $(1+2i)(3-i)+\frac{2+i}{1-2i}$

$=3-i+6i-2i^2+\frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$=5+5i+\frac{2+4i+i+2i^2}{1-4i^2}$

$=5+5i+\frac{5i}{5}=5+5i+i=5+6i$

따라서 $a=5$, $b=6$이므로 $ab=5\times6=30$ 답 ②

02 $\overline{(1+2i)}(x+yi)=-7-11i$에서

$(1-2i)(x+yi)=-7-11i$

$x+yi-2xi-2yi^2=-7-11i$

$(x+2y)+(y-2x)i=-7-11i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=-7$, $y-2x=-11$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-5$

$\therefore xy=3\times(-5)=-15$ 답 ③

03 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z(1-i)=(a+bi)(1-i)=a-ai+bi-bi^2$

$=(a+b)-(a-b)i$

$z(1-i)$가 실수이려면 허수부분이 0이어야 하므로

$a-b=0$ $\quad\therefore a=b$

또, $\bar{z}=a-bi$이므로

$\bar{z}+1+2i=a-bi+1+2i=(a+1)+(-b+2)i$

$\bar{z}+1+2i$가 실수이려면 허수부분이 0이어야 하므로

$-b+2=0$ $\quad\therefore b=2$

따라서 $z=2+2i$, $\bar{z}=2-2i$이므로

$(1-i)\bar{z}=(1-i)(2-2i)$

$=2-2i-2i+2i^2=-4i$ 답 ①

04 $z=(1+i)x^2+(-3+2i)x+(2-3i)$

$=(x^2-3x+2)+(x^2+2x-3)i$

z^2이 실수이려면 z는 실수이거나 실수부분이 0인 허수이어야 한다.

(i) z가 실수인 경우

z의 허수부분이 0이므로

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(ii) z가 실수부분이 0인 허수인 경우

z의 실수부분은 0, 허수부분은 0이 아니므로

$x^2-3x+2=0,\ x^2+2x-3\neq0$

$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ …… ㉠

$x^2+2x-3\neq0$에서 $(x+3)(x-1)\neq0$

$\therefore x\neq-3$이고 $x\neq1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 모든 실수 x의 값의 합은 $-3+1+2=0$

답 ③

참고 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$

z^2이 실수이려면 z^2의 허수부분이 0이어야 하므로 $2ab=0$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$

즉, $\underbrace{z=bi}_{\text{실수부분이 0인 허수}}$ 또는 $\overbrace{z=a}^{\text{실수}}$ 꼴이어야 한다.

05 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$z+3\bar{z}=8+2i$에서 $(a+bi)+3(a-bi)=8+2i$

$a+bi+3a-3bi=8+2i,\ 4a-2bi=8+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4a=8,\ -2b=2\qquad\therefore a=2,\ b=-1$

따라서 $z=2-i$이므로

$$z+\frac{5}{z}=2-i+\frac{5}{2-i}=2-i+\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$
$$=2-i+\frac{5(2+i)}{4-i^2}=2-i+\frac{5(2+i)}{5}$$
$$=2-i+2+i=4$$

답 ④

06 $$\frac{\bar{z}}{z^3}+\frac{\bar{z}^2}{z^2}+\frac{\bar{z}^3}{z}=\frac{z\bar{z}+z^2\bar{z}^2+z^3\bar{z}^3}{z^4}=\frac{z\bar{z}+(z\bar{z})^2+(z\bar{z})^3}{(z^2)^2}$$

이때 $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$에서 $\bar{z}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$이므로

$$z\bar{z}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\times\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{1-i^2}{2}=1$$

또, $z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$$\frac{z\bar{z}+(z\bar{z})^2+(z\bar{z})^3}{(z^2)^2}=\frac{1+1^2+1^3}{(-i)^2}=\frac{3}{i^2}=-3$$

답 ③

07 $z\neq0$이므로 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $a\neq0$ 또는 $b\neq0$)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이고

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

ㄱ. $(1+z)(1+\bar{z})=1+(z+\bar{z})+z\bar{z}=1+2a+(a^2+b^2)$

이므로 $(1+z)(1+\bar{z})$는 실수이다. (참)

ㄴ. $\bar{z}=-z$에서 $z+\bar{z}=0,\ 2a=0\qquad\therefore a=0$

즉, $z=bi$이고 $z\neq0$에서 $b\neq0$이므로 z는 허수이다. (참)

ㄷ. $z=i,\ \bar{z}=-i$이면 $\bar{z}^2=(-i)^2=i^2=-1$이지만 z는 허수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

08 $z^2+z=(a+bi)^2+(a+bi)$

$=a^2+2abi+b^2i^2+a+bi$

$=(a^2+a-b^2)+(2ab+b)i$

z^2+z가 실수이므로 z^2+z의 허수부분이 0이다. 즉,

$2ab+b=0,\ b(2a+1)=0,\ 2a+1=0\ (\because b\neq0)$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore z=-\frac{1}{2}+bi$

ㄱ. $\bar{z}=-\frac{1}{2}-bi$이므로

$$z\bar{z}=\left(-\frac{1}{2}+bi\right)\left(-\frac{1}{2}-bi\right)=\frac{1}{4}-b^2i^2$$
$$=\frac{1}{4}+b^2>\frac{1}{4}\ (\because b\neq0)\ \text{(참)}$$

ㄴ. $z+\bar{z}=\left(-\frac{1}{2}+bi\right)+\left(-\frac{1}{2}-bi\right)=-1$ (거짓)

ㄷ. $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=1$이면 ㄴ에서 $z+\bar{z}=-1$이므로

$$\frac{\bar{z}^2}{z}+\frac{z^2}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}^3+z^3}{z\bar{z}}=\frac{(\bar{z}+z)^3-3\bar{z}z(\bar{z}+z)}{z\bar{z}}$$
$$=\frac{(-1)^3-3\times1\times(-1)}{1}=2\ \text{(거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

09 $i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$이므로

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$

$=i(1+i)+i^2(1+i)+i^3(1+i)+\cdots+i^{18}(1+i)$

$=(1+i)(i+i^2+i^3+\cdots+i^{18})$

$=(1+i)\{(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$
$+\cdots+i^{16}(i+i^2)\}$

$=(1+i)(i+i^2)=(i+1)(i-1)$

$=i^2-1=-2$

답 ①

10 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{2}=-i$이고

$-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4$

$=-i+i^2-i^3+i^4$

$=-i+(-1)-(-i)+1=0$

이므로

$f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(46)$

$$=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{46}$$

$$=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^2+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^3+\cdots+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{23}$$

$=-i+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{23}$

$=-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4$
$+(-i)^4\{-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4\}$
$+\cdots+(-i)^{20}\{-i+(-i)^2+(-i)^3\}$

$=0+0+0+\cdots+\{-i+(-1)+i\}$

$=-1$

답 ①

11 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$이므로 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-2}}\right)^n=i$에서

$(-i)^n=i$

이때

$(-i)^1=-i,$

$(-i)^2=i^2=-1,$

$(-i)^3=-i^3=-(-i)=i,$

$(-i)^4=i^4=1$

이므로 $(-i)^n=i$를 만족시키는 자연수 n은 $4k+3$ ($k=0$, 1, 2, …) 꼴이다.

따라서 15 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, 15이므로 그 합은

$3+7+11+15=36$ 답 ④

12 $z=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}i}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+\sqrt{5}i)}{(\sqrt{3}-\sqrt{5}i)(\sqrt{3}+\sqrt{5}i)}$

$=\dfrac{\sqrt{15}+5i+3i+\sqrt{15}i^2}{3-5i^2}=\dfrac{8i}{8}=i$

이고

$w=\dfrac{z(1+\bar{z})}{\sqrt{2}}=\dfrac{i(1-i)}{\sqrt{2}}=\dfrac{i-i^2}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},$

$w^2=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1+2i+i^2}{2}=i,$

$w^4=(w^2)^2=i^2=-1,$

$w^8=(w^4)^2=(-1)^2=1$

이므로 $w^n=-1$을 만족시키는 자연수 n은 $8k+4$ ($k=0$, 1, 2, …) 꼴이다.

따라서 50 이하의 자연수 n은 4, 12, 20, 28, 36, 44의 6개이다.

답 ②

13 $z^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$

$=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2\times z=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$=\dfrac{(-\sqrt{3}i-1)(-\sqrt{3}i+1)}{4}=\dfrac{3i^2-1}{4}=-1$

$z^4=z^3\times z=-1\times z=-z$

$z^5=z^3\times z^2=-1\times z^2=-z^2$

$z^6=(z^3)^2=(-1)^2=1$

즉, $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=z+z^2-1-z-z^2+1=0$이므로

$z+z^2+z^3+\cdots+z^{999}$

$=(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)+z^6(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$

$+\cdots+z^{996}(z+z^2+z^3)$

$=0+0+0+\cdots+(z+z^2+z^3)$ ($\because z^{996}=(z^6)^{166}=1^{166}=1$)

$=z+z^2+z^3$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}-1$

$=-1-\sqrt{3}i$ 답 ⑤

다른풀이 $z=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z=1-\sqrt{3}i$, $2z-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $(2z-1)^2=(-\sqrt{3}i)^2$

$4z^2-4z+1=-3$, $4z^2-4z+4=0$

$\therefore z^2-z+1=0$ …… ㉠

양변에 $z+1$을 곱하면 $(z+1)(z^2-z+1)=0$

$z^3+1=0$ $\therefore z^3=-1$

따라서 $z^4=-z$, $z^5=-z^2$, $z^6=1$이므로

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$, $z^2=z-1$ ($\because$ ㉠)

$\therefore z+z^2+z^3+\cdots+z^{999}=z+z^2+z^3$

$=z+(z-1)+(-1)=2z-2$

$=2\times\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}-2=-1-\sqrt{3}i$

14 ㄱ. $\sqrt{-5}\sqrt{-5}=\sqrt{5}i\times\sqrt{5}i=5i^2=-5$ (참)

ㄴ. $\sqrt{3}\sqrt{-6}=\sqrt{3}\times\sqrt{6}i=\sqrt{18}i$ (거짓)

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{4}{i}=\dfrac{4i}{i^2}=-4i$ (거짓)

ㄹ. $\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{12}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{12}{2}}i=\sqrt{6}i=\sqrt{-6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

다른풀이 ㄱ. $\sqrt{-5}\sqrt{-5}=-\sqrt{(-5)\times(-5)}=-\sqrt{25}$

$=-5$ (참)

ㄴ. $\sqrt{3}\sqrt{-6}=\sqrt{3\times(-6)}=\sqrt{-18}=\sqrt{18}i$ (거짓)

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{-3}}=-\sqrt{\dfrac{48}{-3}}=-\sqrt{-16}=-4i$ (거짓)

ㄹ. $\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{-12}{2}}=\sqrt{-6}$ (참)

15 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이고 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $a>0$, $b<0$

$\therefore \sqrt{ab}-\sqrt{3b}\sqrt{3b}-\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{9b^2}+\sqrt{(-3b)^2}$

$=\sqrt{ab}-\sqrt{-3b}i\times\sqrt{-3b}i-\sqrt{ab}+\sqrt{(3b)^2}+\sqrt{(-3b)^2}$

$=-(-3b)i^2+|3b|+|-3b|$

$=-3b+(-3b)+(-3b)=-9b$ 답 ①

참고 $\sqrt{3b}\sqrt{3b}=-\sqrt{(3b)^2}=-|3b|=3b$

16 $z=3-x(\sqrt{3}+i)=(3-\sqrt{3}x)-xi$

z^2이 음의 실수이므로 z는 실수부분이 0인 허수이다. 즉, z의 실수부분은 0, 허수부분은 0이 아니므로

$3-\sqrt{3}x=0$, $-x\neq0$

$\sqrt{3}x=3$, $x\neq0$ $\therefore x=\sqrt{3}$

따라서 $z=-\sqrt{3}i$이므로

$z^2=(-\sqrt{3}i)^2=3i^2=-3$

$z^4=(z^2)^2=(-3)^2=9$

$\therefore z^4+6z^2=9+6\times(-3)=-9$ 답 -9

17 $z=\dfrac{\sqrt{6}+i}{\sqrt{6}-i}$

$=\dfrac{(\sqrt{6}+i)^2}{(\sqrt{6}-i)(\sqrt{6}+i)}$

$=\dfrac{6+2\sqrt{6}i+i^2}{6-i^2}$

$=\dfrac{5+2\sqrt{6}i}{7}$

이므로 $\bar{z}=\dfrac{5-2\sqrt{6}i}{7}$

$\therefore z-\bar{z}=\dfrac{5+2\sqrt{6}i}{7}-\dfrac{5-2\sqrt{6}i}{7}$

$=\dfrac{4\sqrt{6}}{7}i$

답 ①

18 $z=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{2i}{2}=i$ ······ ❶

이고 $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$, $\dfrac{1}{i^2}=-1$, $\dfrac{1}{i^3}=\dfrac{i}{i^4}=i$, $\dfrac{1}{i^4}=1$이므로

$\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{3}{z^3}+\cdots+\dfrac{90}{z^{90}}$

$=\dfrac{1}{i}+\dfrac{2}{i^2}+\dfrac{3}{i^3}+\cdots+\dfrac{90}{i^{90}}$

$=(-i-2+3i+4)+(-5i-6+7i+8)+\cdots+(-89i-90)$

$=(2+2i)+(2+2i)+\cdots+(-89i-90)$

$=(2+2i)\times 22+(-89i-90)$

$=44+44i-89i-90$

$=-46-45i$ ······ ❷

따라서 $x=-46$, $y=-45$이므로

$x-y=-46-(-45)=-1$ ······ ❸

답 -1

채점기준	배점
❶ z의 값 구하기	2
❷ $\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\cdots+\frac{90}{z^{90}}$의 값 구하기	4
❸ x, y의 값과 $x-y$의 값 구하기	1

19 조건 (가)에서 $z=a+bi$ (a, b는 양수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

조건 (나)에서 $z^2+\bar{z}=0$이므로

$(a+bi)^2+(a-bi)=0$

$a^2+2abi+b^2i^2+a-bi=0$

$(a^2-b^2+a)+(2ab-b)i=0$ ······ ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2+a=0$, $2ab-b=0$

$2ab-b=0$에서 $b(2a-1)=0$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}$ ($\because b>0$)

이것을 $a^2-b^2+a=0$에 대입하면

$\dfrac{1}{4}-b^2+\dfrac{1}{2}=0$, $b^2=\dfrac{3}{4}$ $\quad\therefore b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because b>0$) ······ ❷

$\therefore z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ······ ❸

$z^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$

$=\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2\times z$

$=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$=\dfrac{(\sqrt{3}i-1)(\sqrt{3}i+1)}{4}$

$=\dfrac{3i^2-1}{4}=-1$

$z^4=z^3\times z=-1\times z=-z$

$z^5=z^4\times z=(-z)\times z=-z^2$

$z^6=(z^3)^2=(-1)^2=1$

즉, z^n (n은 자연수)의 값으로는 z, z^2, -1, $-z$, $-z^2$, 1이 이 순서대로 반복되므로 z^n의 값이 정수가 되는 자연수 n은 3의 배수이다. ······ ❹

따라서 100 이하의 자연수 n은 3, 6, 9, …, 99의 33개이다. ······ ❺

답 33

채점기준	배점
❶ $z=a+bi$ (a, b는 양수)로 놓고 $z^2+\bar{z}=0$에 대입하여 정리하기	2
❷ a, b의 값 각각 구하기	3
❸ z의 값 구하기	1
❹ z를 거듭제곱하여 z^n이 정수가 되는 자연수 n의 규칙 알아내기	2
❺ 100 이하의 자연수 n의 개수 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.90~92

1 $x+y=(2+i)+(2-i)=4$

$xy=(2+i)(2-i)=4-i^2=4-(-1)=5$

$\therefore x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-(xy)^2$

$=(4^2-2\times 5)^2-5^2=36-25=11$

답 ③

2 $x+y=(1-2i)+(1+2i)=2$

$xy=(1-2i)(1+2i)=1-4i^2=1+4=5$

$\therefore x^3+x^2+y^3+y^2$

$=(x^3+y^3)+(x^2+y^2)$

$=\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}+\{(x+y)^2-2xy\}$

$=(2^3-3\times 5\times 2)+(2^2-2\times 5)$

$=8-30+4-10=-28$

답 ①

3 $(1-i)^{2n}=\{(1-i)^2\}^n=(1-2i+i^2)^n$
$=(-2i)^n=\{2\times(-i)\}^n=2^n(-i)^n$
이므로 $(1-i)^{2n}=2^n i$에서
$2^n(-i)^n=2^n i \quad \therefore (-i)^n=i$
이때
$(-i)^1=-i,\ (-i)^2=i^2=-1,$
$(-i)^3=-i^3=-(-i)=i,\ (-i)^4=i^4=1$
이므로 $(-i)^n=i$를 만족시키는 자연수 n은 $4k+3$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 꼴이다.
따라서 100 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, $\cdots$, 99의 25개이다.

답 25

4 $(1+i)^{2n}=\{(1+i)^2\}^n=(1+2i+i^2)^n=(2i)^n=2^n i^n$
이므로 $(1+i)^{2n}=(-2)^n$에서
$2^n i^n=(-2)^n,\ \dfrac{2^n i^n}{(-2)^n}=1$
$\left(\dfrac{2i}{-2}\right)^n=1 \quad \therefore (-i)^n=1$
이때
$(-i)^1=-i,\ (-i)^2=i^2=-1,$
$(-i)^3=-i^3=-(-i)=i,\ (-i)^4=i^4=1$
이므로 $(-i)^n=1$을 만족시키는 자연수 n은 $4k$ (k는 자연수) 꼴이다.
따라서 50 이하의 자연수 n은 4, 8, 12, $\cdots$, 48의 12개이다.

답 12

5 $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1+2i+i^2}{2}=i$
$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^2=i^2=-1$
$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6=\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^3=i^3=-i$
$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8=\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4\right\}^2=(-1)^2=1$
이고
$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$
이때 $\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n\right\}^2=4$에서
$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$ 또는 $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$
(i) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$일 때
$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=1,\ i^n=-1$이어야 한다.
$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=1$에서 $m=8k$ (k는 자연수) 꼴이므로
$m=8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 40,\ 48$
$i^n=-1$에서 $n=4l+2$ ($l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 꼴이므로
$n=2,\ 6,\ 10,\ \cdots,\ 46$
따라서 $m+n$의 최댓값은 $48+46=94$
(ii) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$일 때
$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-1,\ i^n=1$이어야 한다.
$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-1$에서 $m=8k+4$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 꼴이므로
$m=4,\ 12,\ 20,\ 28,\ 36,\ 44$
$i^n=1$에서 $n=4l$ (l은 자연수) 꼴이므로
$n=4,\ 8,\ 12,\ \cdots,\ 48$
따라서 $m+n$의 최댓값은 $44+48=92$
(i), (ii)에서 $m+n$의 최댓값은 94이다.

답 94

6 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$
$=\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\times\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$
$=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$
$=\dfrac{(\sqrt{3}i-1)(\sqrt{3}i+1)}{4}$
$=\dfrac{3i^2-1}{4}=-1$
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6=\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3\right\}^2=(-1)^2=1$
이고
$(-1)^1=-1,\ (-1)^2=1$
이때 $\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m+(-1)^n\right\}^2=4$에서
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m+(-1)^n=2$ 또는 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m+(-1)^n=-2$
(i) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m+(-1)^n=2$일 때
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m=1,\ (-1)^n=1$이어야 한다.
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m=1$에서 $m=6k$ (k는 자연수) 꼴이므로
$m=6,\ 12,\ 18$
$(-1)^n=1$에서 n은 짝수이므로
$n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 20$
따라서 $m+n$의 최댓값은 $18+20=38$
(ii) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m+(-1)^n=-2$일 때
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m=-1,\ (-1)^n=-1$이어야 한다.
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m=-1$에서 $m=6k+3$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 꼴이므로
$m=3,\ 9,\ 15$
$(-1)^n=-1$에서 n은 홀수이므로
$n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 19$
따라서 $m+n$의 최댓값은 $15+19=34$
(i), (ii)에서 $m+n$의 최댓값은 38이다.

답 38

2 이차방정식과 이차함수

교과서 예제 p.95, 97

01 (1) $x^2-7x+10=0$에서 $(x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$ (실근)

(2) $6x^2+x-1=0$에서 $(3x-1)(2x+1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ (실근)

(3) $16x^2+24x+9=0$에서 $(4x+3)^2=0$

$\therefore x=-\frac{3}{4}$ (실근)

(4) $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (실근)

(5) $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times6}}{1}$

$=2\pm\sqrt{-2}=2\pm\sqrt{2}i$ (허근)

답 (1) $x=2$ 또는 $x=5$, 실근 (2) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$, 실근

(3) $x=-\frac{3}{4}$, 실근 (4) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, 실근

(5) $x=2\pm\sqrt{2}i$, 허근

02 **보기**에 주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=1^2-4\times1\times2=-7<0$

ㄴ. $\frac{D}{4}=(-1)^2-3\times6=-17<0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=2^2-4\times1=0$

ㄹ. $D=(-3)^2-4\times1\times(-5)=29>0$

ㅁ. $\frac{D}{4}=(-6)^2-1\times36=0$

ㅂ. $D=(-1)^2-4\times2\times(-2)=17>0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로 ㄹ, ㅂ

(2) 중근을 가지면 $D=0$이므로 ㄷ, ㅁ

(3) 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이므로 ㄱ, ㄴ

답 (1) ㄹ, ㅂ (2) ㄷ, ㅁ (3) ㄱ, ㄴ

03 이차방정식 $x^2+9x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9^2-4\times1\times k=81-4k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=81-4k>0$, $4k<81$ $\quad\therefore k<\frac{81}{4}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=81-4k=0$ $\quad\therefore k=\frac{81}{4}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=81-4k<0$ $\quad\therefore k>\frac{81}{4}$

답 (1) $k<\frac{81}{4}$ (2) $k=\frac{81}{4}$ (3) $k>\frac{81}{4}$

04 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta=-\frac{6}{1}=-6$

(2) $\alpha\beta=\frac{-1}{1}=-1$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-6)^2-2\times(-1)=38$

(4) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-6)^2-4\times(-1)=40$

답 (1) -6 (2) -1 (3) 38 (4) 40

다른풀이 (4) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=38-2\times(-1)=40$

05 (1) $x^2-(1+2)x+1\times2=0$

$\therefore x^2-3x+2=0$

(2) $x^2-\{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}x+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^2-4x+1=0$

(3) $x^2-\{(1+i)+(1-i)\}x+(1+i)(1-i)=0$

$\therefore x^2-2x+2=0$

답 (1) $x^2-3x+2=0$ (2) $x^2-4x+1=0$ (3) $x^2-2x+2=0$

06 (1) $x^2+16=0$에서 $x^2=-16$

$\therefore x=\pm\sqrt{-16}=\pm\sqrt{16}i=\pm4i$

$\therefore x^2+16=(x+4i)(x-4i)$

(2) $x^2-10x+10=0$에서

$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-1\times10}}{1}=5\pm\sqrt{15}$

$\therefore x^2-10x+10=\{x-(5+\sqrt{15})\}\{x-(5-\sqrt{15})\}$

$=(x-5-\sqrt{15})(x-5+\sqrt{15})$

(3) $2x^2-3x+2=0$에서

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times2}}{2\times2}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$

$\therefore 2x^2-3x+2=2\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)$

답 (1) $(x+4i)(x-4i)$ (2) $(x-5-\sqrt{15})(x-5+\sqrt{15})$

(3) $2\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)$

07 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 유리수이고 한 근이 $4-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $4+\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(4-\sqrt{3})+(4+\sqrt{3})=-a$, $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=b$

$8=-a$, $16-3=b$

$\therefore a=-8$, $b=13$

답 $a=-8$, $b=13$

다른풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 유리수이고 한 근이 $x=4-\sqrt{3}$이므로

$x-4=-\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$(x-4)^2=(-\sqrt{3})^2$, $x^2-8x+16=3$

$\therefore x^2-8x+13=0$

$\therefore a=-8$, $b=13$

08 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $3+5i$이므로 다른 한 근은 $3-5i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(3+5i)+(3-5i)=-a$, $(3+5i)(3-5i)=b$
$6=-a$, $9-25i^2=b$
$\therefore a=-6$, $b=34$ 　답 $a=-6$, $b=34$

다른풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $x=3+5i$이므로
$x-3=5i$
양변을 제곱하면 $(x-3)^2=(5i)^2$, $x^2-6x+9=-25$
$\therefore x^2-6x+34=0$ 　$\therefore a=-6$, $b=34$

09 (1) 이차방정식 $x^2-x-12=0$에서
$(x+3)(x-4)=0$ 　$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$
(2) 이차방정식 $-9x^2-24x-16=0$에서
$9x^2+24x+16=0$, $(3x+4)^2=0$
$\therefore x=-\frac{4}{3}$ 　답 (1) -3, 4 (2) $-\frac{4}{3}$

10 (1) 이차방정식 $3x^2-x-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\times3\times(-1)=13>0$
따라서 이차함수 $y=3x^2-x-1$의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.
(2) 이차방정식 $2x^2+2x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-2\times5=-9<0$
따라서 이차함수 $y=2x^2+2x+5$의 그래프와 x축의 교점은 없다.
(3) 이차방정식 $-x^2+x-\frac{1}{4}=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times(-1)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=0$
따라서 이차함수 $y=-x^2+x-\frac{1}{4}$의 그래프와 x축의 교점은 1개이다. 　답 (1) 2 (2) 0 (3) 1

11 이차방정식 $3x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-3k=-3k+1$
이차함수 $y=3x^2-2x+k$의 그래프가 x축과
(1) 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이므로
$\frac{D}{4}=-3k+1>0$, $3k<1$ 　$\therefore k<\frac{1}{3}$
(2) 한 점에서 만나면 $D=0$이므로
$\frac{D}{4}=-3k+1=0$ 　$\therefore k=\frac{1}{3}$
(3) 만나지 않으면 $D<0$이므로
$\frac{D}{4}=-3k+1<0$ 　$\therefore k>\frac{1}{3}$
답 (1) $k<\frac{1}{3}$ (2) $k=\frac{1}{3}$ (3) $k>\frac{1}{3}$

12 이차함수 $y=x^2+8x+k$의 그래프가 x축과 만나야 하므로 이차방정식 $x^2+8x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4^2-1\times k\geq0$, $16-k\geq0$
$\therefore k\leq16$ 　답 $k\leq16$

13 (1) $x^2-8x+13=3x-11$에서
$x^2-11x+24=0$, $(x-3)(x-8)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=8$
(2) $2x^2-10x-17=-4x+3$에서
$2x^2-6x-20=0$, $x^2-3x-10=0$
$(x+2)(x-5)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$
답 (1) 3, 8 (2) -2, 5

14 (1) 이차방정식 $x^2-x-1=2x+5$, 즉 $x^2-3x-6=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\times1\times(-6)=33>0$
따라서 이차함수 $y=x^2-x-1$의 그래프와 직선 $y=2x+5$는 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 이차방정식 $-2x^2+x+7=-x+8$, 즉 $2x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\times1=-1<0$
따라서 이차함수 $y=-2x^2+x+7$의 그래프와 직선 $y=-x+8$은 만나지 않는다.
(3) 이차방정식 $4x^2+6x+11=-6x+2$, 즉 $4x^2+12x+9=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=6^2-4\times9=0$
따라서 이차함수 $y=4x^2+6x+11$의 그래프와 직선 $y=-6x+2$는 한 점에서 만난다. (접한다.)
답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다.
(3) 한 점에서 만난다. (접한다.)

15 이차방정식 $x^2+5x+11=-x+k$, 즉 $x^2+6x+11-k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=3^2-1\times(11-k)=k-2$
이차함수 $y=x^2+5x+11$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가
(1) 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이므로
$\frac{D}{4}=k-2>0$ 　$\therefore k>2$
(2) 한 점에서 만나면 $D=0$이므로
$\frac{D}{4}=k-2=0$ 　$\therefore k=2$
(3) 만나지 않으면 $D<0$이므로
$\frac{D}{4}=k-2<0$ 　$\therefore k<2$
답 (1) $k>2$ (2) $k=2$ (3) $k<2$

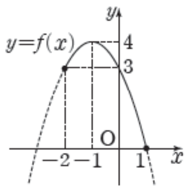
16 이차함수 $y=2x^2-x+5$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 만나야 하므로 이차방정식 $2x^2-x+5=-3x+k$, 즉 $2x^2+2x+5-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-2(5-k)=2k-9\geq0$

$2k\geq9$ $\quad\therefore k\geq\frac{9}{2}$ 답 $k\geq\frac{9}{2}$

17 (1) $f(x)=-x^2-2x+3=-(x^2+2x)+3$
$=-(x^2+2x+1-1)+3$
$=-(x+1)^2+4$

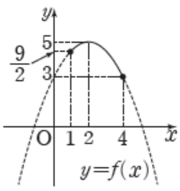
$-2\leq x\leq1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(-2)=3$, $f(-1)=4$, $f(1)=0$
따라서 $-2\leq x\leq1$일 때 함수 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.

(2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+3$
$=-\frac{1}{2}(x^2-4x)+3$
$=-\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)+3$
$=-\frac{1}{2}(x-2)^2+5$

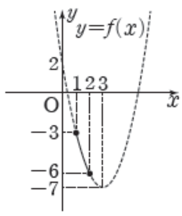
$1\leq x\leq4$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(1)=\frac{9}{2}$, $f(2)=5$, $f(4)=3$
따라서 $1\leq x\leq4$일 때 함수 $f(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 3이다.

(3) $f(x)=x^2-6x+2$
$=x^2-6x+9-9+2$
$=(x-3)^2-7$

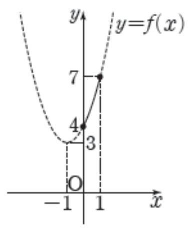
$1\leq x\leq2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(1)=-3$, $f(2)=-6$
따라서 $1\leq x\leq2$일 때 함수 $f(x)$의 최댓값은 -3, 최솟값은 -6이다.

(4) $f(x)=x^2+2x+4$
$=x^2+2x+1-1+4$
$=(x+1)^2+3$

$0\leq x\leq1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(0)=4$, $f(1)=7$
따라서 $0\leq x\leq1$일 때 함수 $f(x)$의 최댓값은 7, 최솟값은 4이다.

답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 0 (2) 최댓값: 5, 최솟값: 3
(3) 최댓값: -3, 최솟값: -6 (4) 최댓값: 7, 최솟값: 4

기출 Best | 1회

p.98~102

01 **보기**에 주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면
ㄱ. $D=(-3)^2-4\times1\times7=-19<0$
ㄴ. $\frac{D}{4}=(-4)^2-3\times1=13>0$
ㄷ. $D=(-1)^2-4\times3\times(-1)=13>0$
ㄹ. $\frac{D}{4}=3^2-9\times1=0$
이차방정식이 허근을 가지면 $D<0$이므로 허근을 갖는 이차방정식은 ㄱ이다. 답 ①

02 이차방정식 $x^2-4kx-2k+26=0$의 한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면
$4-8k-2k+26=0$, $-10k=-30$
$\therefore k=3$
이를 주어진 이차방정식에 대입하면
$x^2-12x-6+26=0$, $x^2-12x+20=0$
$(x-2)(x-10)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=10$
따라서 다른 한 근은 10이다. 답 ④

03 이차방정식 $x^2+2(m-3)x+m^2-15=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(m-3)^2-1\times(m^2-15)>0$
$m^2-6m+9-m^2+15>0$, $-6m+24>0$
$6m<24$ $\quad\therefore m<4$
따라서 자연수 m은 1, 2, 3이므로 모든 자연수 m의 값의 합은
$1+2+3=6$ 답 ①

04 이차방정식 $x^2-(m+2k)x+k^2-4k+2n=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로
$D=(m+2k)^2-4\times1\times(k^2-4k+2n)=0$
$m^2+4mk+4k^2-4k^2+16k-8n=0$
$4k(m+4)+m^2-8n=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$m+4=0$, $m^2-8n=0$
즉, $m=-4$이므로 $m^2-8n=0$에서
$16-8n=0$, $8n=16$ $\quad\therefore n=2$
$\therefore m+n=-4+2=-2$ 답 ①

05 $x^2+(3k-1)x+k+5$가 완전제곱식이면 이차방정식 $x^2+(3k-1)x+k+5=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면
$D=(3k-1)^2-4\times1\times(k+5)=0$
$9k^2-6k+1-4k-20=0$, $9k^2-10k-19=0$
$(9k-19)(k+1)=0$
$\therefore k=\frac{19}{9}$ $(\because k>0)$ 답 ④

06 이차방정식 $2x^2+4x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{4}{2}=-2$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{(-2)^2-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=6$ 답 ①

07 이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+2\alpha+2=0$, $\beta^2+2\beta+2=0$

$\therefore \alpha^2+2\alpha=-2$, $\beta^2+2\beta=-2$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=2$

$\therefore (2\alpha^2+5\alpha+1)(2\beta^2+5\beta+1)$

$=\{2(\alpha^2+2\alpha)+\alpha+1\}\{2(\beta^2+2\beta)+\beta+1\}$

$=\{2\times(-2)+\alpha+1\}\{2\times(-2)+\beta+1\}$

$=(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$

$=2-3\times(-2)+9=17$ 답 ④

08 이차방정식 $x^2-(a^2-3a-18)x-a+3=0$의 두 실근을 k, $-k$ $(k\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$k+(-k)=a^2-3a-18$ …… ㉠

$k\times(-k)=-a+3$ …… ㉡

㉠에서 $(a+3)(a-6)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=6$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$a=-3$일 때, $-k^2=6$ $\therefore k^2=-6$

$a=6$일 때, $-k^2=-3$ $\therefore k^2=3$

그런데 주어진 이차방정식이 실근을 가지므로

$a=6$ 답 ⑤

09 이차방정식 $x^2-(2k+1)x+2k^2-4k-6=0$의 두 근이 연속인 두 자연수이므로 두 근을 α, $\alpha+1$ (α는 자연수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=2k+1$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=2k^2-4k-6$ …… ㉡

㉠에서 $2\alpha=2k$ $\therefore \alpha=k$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$k(k+1)=2k^2-4k-6$, $k^2+k=2k^2-4k-6$

$k^2-5k-6=0$, $(k+1)(k-6)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=6$

이때 $k(=\alpha)$는 자연수이므로 $k=6$ 답 ④

10 이차방정식 $x^2-8x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=2$

따라서

$(\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=8-2=6$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2-8+1=-5$

이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x-5=0$ 답 ①

11 $x^2-4x+7=0$에서

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times7}}{1}=2\pm\sqrt{-3}=2\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2-4x+7=\{x-(2+\sqrt{3}i)\}\{x-(2-\sqrt{3}i)\}$

$=(x-2-\sqrt{3}i)(x-2+\sqrt{3}i)$ 답 ④

12 갑은 상수항 b를 바르게 보고 풀었으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$b=-6\times8=-48$

을은 x의 계수 a를 바르게 보고 풀었으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(4+i)+(4-i)=8$ $\therefore a=-8$

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2-8x-48=0$이므로

$(x+4)(x-12)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=12$

즉, $\alpha=-4$, $\beta=12$ 또는 $\alpha=12$ 또는 $\beta=-4$이므로

$|\alpha|+|\beta|=4+12=16$ 답 ④

13 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이고, $\alpha+\beta=16$

이때 $f(20-12x)=0$이려면

$20-12x=\alpha$ 또는 $20-12x=\beta$

$12x=20-\alpha$ 또는 $12x=20-\beta$

$\therefore x=\frac{20-\alpha}{12}$ 또는 $x=\frac{20-\beta}{12}$

따라서 이차방정식 $f(20-12x)=0$의 두 근의 합은

$\frac{20-\alpha}{12}+\frac{20-\beta}{12}=\frac{40-(\alpha+\beta)}{12}=\frac{40-16}{12}=2$ 답 ③

14 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 유리수이고, 한 근이 $-2+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $-2-\sqrt{5}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2+\sqrt{5})+(-2-\sqrt{5})=-a$ $\therefore a=4$

$(-2+\sqrt{5})(-2-\sqrt{5})=b$ $\therefore b=-1$

$\therefore a+b=4+(-1)=3$ 답 ③

다른풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 유리수이고 한 근이 $x=-2+\sqrt{5}$이므로

$x+2=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $(x+2)^2=(\sqrt{5})^2$, $x^2+4x+4=5$

$\therefore x^2+4x-1=0$

따라서 $a=4$, $b=-1$이므로

$a+b=4+(-1)=3$

15 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 실근이 -2, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{a}{2}=-2+5=3 \qquad \therefore a=-6$

$\frac{b}{2}=-2\times5=-10 \qquad \therefore b=-20$

$\therefore a-b=-6-(-20)=14$ 답 ②

다른풀이 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 실근이 -2, 5이므로

$2(x+2)(x-5)=0 \qquad \therefore 2x^2-6x-20=0$

따라서 $a=-6$, $b=-20$이므로

$a-b=-6-(-20)=14$

16 이차함수 $y=x^2+2(k-1)x+k^2-11$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식

$x^2+2(k-1)x+k^2-11=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-1\times(k^2-11)>0$

$k^2-2k+1-k^2+11>0$, $2k<12 \qquad \therefore k<6$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5이므로 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+2+3+4+5=15$ 답 ②

17 이차함수 $y=x^2-2(k-a)x+k^2-4k+3-b$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 항상 x축에 접하므로 이차방정식

$x^2-2(k-a)x+k^2-4k+3-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-a)\}^2-1\times(k^2-4k+3-b)=0$

$k^2-2ka+a^2-k^2+4k-3+b=0$

$-2ka+a^2+4k-3+b=0$

$2k(-a+2)+a^2-3+b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-a+2=0$, $a^2-3+b=0$

즉, $a=2$이므로 $a^2-3+b=4-3+b=0 \qquad \therefore b=-1$

$\therefore ab=2\times(-1)=-2$ 답 ⑤

18 이차함수 $y=x^2+mx+3$의 그래프와 직선 $y=2x+n$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 4이므로 1, 4는 이차방정식

$x^2+mx+3=2x+n$, 즉 $x^2+(m-2)x+3-n=0$의 두 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$1+4=-m+2$, $1\times4=3-n$

즉, $m=-3$, $n=-1$이므로

$mn=-3\times(-1)=3$ 답 ②

19 이차함수 $y=2x^2-3x-3$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $2x^2-3x-3=x+k$, 즉

$2x^2-4x-3-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2(-3-k)<0$

$4+6+2k<0$, $2k<-10 \qquad \therefore k<-5$

따라서 정수 k의 최댓값은 -6이다. 답 ⑤

20 이차함수 $y=x^2-2kx+k^2-2k-3$의 그래프와 직선 $y=2ax+b$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-2k-3=2ax+b$, 즉

$x^2-2(k+a)x+k^2-2k-3-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+a)\}^2-1\times(k^2-2k-3-b)=0$

$k^2+2ka+a^2-k^2+2k+3+b=0$

$2k(a+1)+a^2+3+b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a+1=0$, $a^2+3+b=0$

즉, $a=-1$이므로

$a^2+3+b=1+3+b=0 \qquad \therefore b=-4$

$\therefore a+b=-1+(-4)=-5$ 답 ①

21 점 $(0, 8)$을 지나는 직선의 y절편은 8이므로 기울기가 m이고 점 $(0, 8)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=mx+8$

이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$의 그래프와 직선 $y=mx+8$이 접하므로 이차방정식 $-\frac{1}{2}x^2+4x=mx+8$, 즉

$x^2+2(m-4)x+16=0$의 판별식을 D라 하면

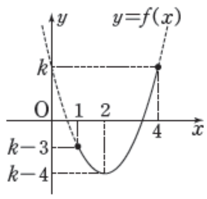
$\frac{D}{4}=(m-4)^2-1\times16=0$, $m^2-8m+16-16=0$

$m^2-8m=0$, $m(m-8)=0$

$\therefore m=8$ ($\because m>0$) 답 ⑤

22 $f(x)=x^2-4x+k=x^2-4x+4-4+k=(x-2)^2+k-4$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1\le x\le4$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 k, $x=2$에서 최솟값 $k-4$를 갖는다.



이때 최댓값이 2이므로 $k=2$

따라서 최솟값은

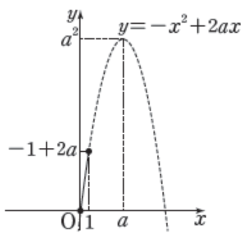
$k-4=2-4=-2$ 답 ③

23 $y=-x^2+2ax=-(x^2-2ax)$

$=-(x^2-2ax+a^2-a^2)$

$=-(x-a)^2+a^2$

$a>1$이므로 $0\le x\le1$에서 함수 $y=-x^2+2ax$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



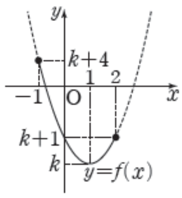
따라서 $0\le x\le1$일 때, 함수 $y=-x^2+2ax$는 $x=1$에서 최댓값 $-1+2a$를 갖는다.

이때 최댓값이 9이므로

$-1+2a=9$, $2a=10$

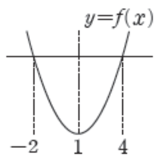
$\therefore a=5$ 답 ①

24 조건 (가)에서 $\frac{-2+4}{2}=1$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고, x^2의 계수가 1이므로
$f(x)=(x-1)^2+k$ (단, k는 실수)
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $-1\le x\le 2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 k를 갖는다.

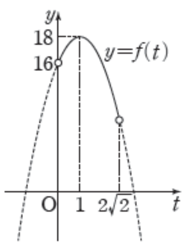


이때 조건 (나)에서 최솟값이 -3이므로
$k=-3$
$\therefore f(x)=(x-1)^2-3=x^2-2x-2$
따라서 $a=-2$, $b=-2$이므로
$ab=-2\times(-2)=4$ 답 ③

참고 조건 (가)에서 $f(-2)=f(4)$이므로 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{-2+4}{2}$, 즉 $x=1$에 대하여 대칭이다.



25 $-x^2+8=0$에서
$x^2=8 \qquad \therefore x=\pm2\sqrt{2}$
즉, 이차함수 $y=-x^2+8$의 그래프는 x축과 두 점 $(2\sqrt{2},\ 0)$, $(-2\sqrt{2},\ 0)$에서 만난다.
따라서 점 B의 x좌표를 t $(0<t<2\sqrt{2})$라 하면 $\mathrm{C}(t,\ -t^2+8)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=2t$, $\overline{\mathrm{BC}}=-t^2+8$
직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $f(t)$라 하면
$f(t)=2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})$
$=2\{2t+(-t^2+8)\}$
$=-2t^2+4t+16$
$=-2(t-1)^2+18$ $(0<t<2\sqrt{2})$
$0<t<2\sqrt{2}$일 때, 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 $t=1$일 때 18이다. 답 ①



기출 Best 2회

p.103~107

01 **보기**에 주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면
ㄱ. $D=(-7)^2-4\times1\times5=29>0$
ㄴ. $\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\times3=0$
ㄷ. $x^2=6(x-2)$에서 $x^2=6x-12$, $x^2-6x+12=0$이므로
$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times12=-3<0$
ㄹ. $D=5^2-4\times3\times1=13>0$
이차방정식이 실근을 가지면 $D\ge0$이므로 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ의 3개이다. 답 ④

02 이차방정식 $4x^2-(4k+1)x+3k+1=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면
$4-(4k+1)+3k+1=0$, $4-k=0$
$\therefore k=4$
이를 주어진 이차방정식에 대입하면
$4x^2-(16+1)x+12+1=0$
$4x^2-17x+13=0$, $(4x-13)(x-1)=0$
$\therefore x=\frac{13}{4}$ 또는 $x=1$
따라서 다른 한 근은 $\alpha=\frac{13}{4}$이므로
$\alpha k=\frac{13}{4}\times4=13$ 답 ③

03 이차방정식 $x^2-2x+2k-7=0$의 판별식을 D라 하면 $D\ge0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(2k-7)\ge0$, $1-2k+7\ge0$
$2k\le8 \qquad \therefore k\le4$
따라서 실수 k의 최댓값은 4이다. 답 ④

04 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+ak^2+a^2+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(k-a)^2-1\times(ak^2+a^2+4)=0$
$k^2-2ka+a^2-ak^2-a^2-4=0$, $k^2-2ka-ak^2-4=0$
$(-2k-k^2)a+k^2-4=0$
이 등식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$-2k-k^2=0$, $k^2-4=0$
$-2k-k^2=0$에서 $-k(k+2)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=-2$ …… ㉠
$k^2-4=0$에서 $k^2=4$
$\therefore k=\pm2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $k=-2$ 답 ①

05 $2x^2+(k-4)x+32$가 완전제곱식이려면 이차방정식 $2x^2+(k-4)x+32=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D=(k-4)^2-4\times2\times32=0$
$k^2-8k+16-256=0$, $k^2-8k-240=0$
$(k+12)(k-20)=0$
$\therefore k=-12$ 또는 $k=20$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$-12+20=8$ 답 ①

06 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=5$

$\therefore \dfrac{2}{\alpha+1}+\dfrac{2}{\beta+1}=\dfrac{2(\beta+1)+2(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

$=\dfrac{2(\alpha+\beta)+4}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{2\times2+4}{5+2+1}=1$

답 ③

07 이차방정식 $x^2+4x-3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+4\alpha-3=0$, $\beta^2+4\beta-3=0$

$\therefore \alpha^2+4\alpha=3$, $\beta^2+4\beta=3$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-3$

$\therefore \dfrac{4\beta}{\alpha^2+4\alpha-5}-\dfrac{4\alpha}{\beta^2+4\beta-5}=\dfrac{4\beta}{3-5}-\dfrac{4\alpha}{3-5}$

$=-2\beta+2\alpha$

$=2(\alpha-\beta)$

이때

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-4)^2-4\times(-3)$

$=28$

이므로 $\alpha-\beta=2\sqrt{7}$ ($\because \alpha-\beta>0$)

$\therefore 2(\alpha-\beta)=2\times2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

답 ⑤

08 이차방정식 $x^2+(a^2-3a-4)x-a+2=0$의 두 실근을 k, $-k$ ($k\neq0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$k+(-k)=-(a^2-3a-4)$ ...... ㉠

$k\times(-k)=-a+2$ ...... ㉡

㉠에서 $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$a=-1$일 때, $-k^2=3$ $\therefore k^2=-3$

$a=4$일 때, $-k^2=-2$ $\therefore k^2=2$

그런데 주어진 이차방정식이 실근을 가지므로

$a=4$

답 ⑤

09 이차방정식 $x^2-(k-6)x+12=0$의 두 근을 α, 3α ($\alpha>0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=k-6$ ...... ㉠

$\alpha\times3\alpha=12$ ...... ㉡

㉡에서 $\alpha^2=4$ $\therefore \alpha=2$ ($\because \alpha>0$)

㉠에서 $k=4\alpha+6=4\times2+6=14$

따라서 이차방정식 $x^2-(k+3)x+2(k-4)=0$, 즉 $x^2-17x+20=0$의 두 근의 곱은 20이다.

답 ④

10 이차방정식 $x^2+7x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-7$, $\alpha\beta=-3$

따라서

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{-7}{-3}=\dfrac{7}{3}$,

$\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$

이므로 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\left(x^2-\dfrac{7}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)=0$

$\therefore 3x^2-7x-1=0$

답 ②

11 $3x^2-x+3=0$에서

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times3\times3}}{2\times3}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{-35}}{6}=\dfrac{1\pm\sqrt{35}i}{6}$

$\therefore 3x^2-x+3=3\left(x-\dfrac{1+\sqrt{35}i}{6}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{35}i}{6}\right)$

답 ④

12 갑은 상수항 b를 바르게 보고 풀었으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{b}{2}=1\times2=2$ $\therefore b=4$

을은 x의 계수 a를 바르게 보고 풀었으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{a}{2}=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6$ $\therefore a=-12$

따라서 주어진 이차방정식은 $2x^2-12x+4=0$이므로

$x^2-6x+2=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=2$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=6^2-4\times2=28$

답 ①

13 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-1$

이때 $f(2x+5)=0$이려면

$2x+5=\alpha$ 또는 $2x+5=\beta$

$2x=\alpha-5$ 또는 $2x=\beta-5$

$\therefore x=\dfrac{\alpha-5}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-5}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+5)=0$의 두 근의 합은

$\dfrac{\alpha-5}{2}+\dfrac{\beta-5}{2}=\dfrac{(\alpha+\beta)-10}{2}=\dfrac{4-10}{2}=-3$

두 근의 곱은

$\dfrac{\alpha-5}{2}\times\dfrac{\beta-5}{2}=\dfrac{\alpha\beta-5(\alpha+\beta)+25}{4}=\dfrac{-1-5\times4+25}{4}=1$

즉, $p=-3$, $q=1$이므로

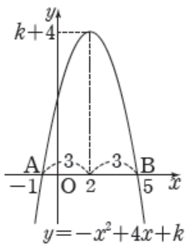
$p+q=-3+1=-2$

답 ①

14 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이고, 한 근이 $6-2i$이므로 다른 한 근은 $6+2i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(6-2i)+(6+2i)=-a \quad \therefore a=-12$
$(6-2i)(6+2i)=b \quad \therefore b=40$
$\therefore a+b=-12+40=28$ 답 ①

다른풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $x=6-2i$이므로
$x-6=-2i$
양변을 제곱하면 $(x-6)^2=(-2i)^2$
$x^2-12x+36=-4 \quad \therefore x^2-12x+40=0$
따라서 $a=-12$, $b=40$이므로
$a+b=-12+40=28$

15 $y=-x^2+4x+k=-(x^2-4x)+k$
$=-(x^2-4x+4-4)+k=-(x-2)^2+k+4$
이므로 이차함수 $y=-x^2+4x+k$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, $\overline{\text{AB}}=6$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $2-3=-1$, $2+3=5$이다.



즉, 이차방정식 $-x^2+4x+k=0$의 두 실근이 -1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$-1\times5=-k \quad \therefore k=5$ 답 ⑤

다른풀이1 두 점 A, B의 x좌표는 각각 -1, 5이다. 즉, 이차함수 $y=-x^2+4x+k$의 그래프가 점 A$(-1, 0)$을 지나므로
$0=-1-4+k \quad \therefore k=5$

다른풀이2 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 이차방정식 $-x^2+4x+k=0$의 두 실근이고
$\beta-\alpha=\overline{\text{AB}}=6$
또, 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-k$
따라서 $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서
$4^2=(-6)^2+4\times(-k)$, $16=36-4k$, $4k=20$
$\therefore k=5$

16 이차함수 $y=x^2+(2k-1)x+k^2+3$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(2k-1)^2-4\times1\times(k^2+3)<0$
$4k^2-4k+1-4k^2-12<0$, $-4k-11<0$
$4k>-11 \quad \therefore k>-\dfrac{11}{4}$
따라서 정수 k의 최솟값은 -2이다. 답 ⑤

17 이차함수 $y=x^2+(6k+a)x+9k^2-6k-b$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 항상 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+(6k+a)x+9k^2-6k-b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(6k+a)^2-4\times1\times(9k^2-6k-b)=0$
$36k^2+12ka+a^2-36k^2+24k+4b=0$
$12ka+a^2+24k+4b=0$, $12k(a+2)+a^2+4b=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$a+2=0$, $a^2+4b=0$
즉, $a=-2$이므로 $a^2+4b=4+4b=0 \quad \therefore b=-1$
$\therefore a+b=-2+(-1)=-3$ 답 ③

18 이차함수 $y=x^2+mx+1$의 그래프와 직선 $y=x+n$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 3이므로 1, 3은 이차방정식
$x^2+mx+1=x+n$, 즉 $x^2+(m-1)x+1-n=0$의 두 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$1+3=-m+1$, $1\times3=1-n$
즉, $m=-3$, $n=-2$이므로
$m+n=-3+(-2)=-5$ 답 ③

19 이차함수 $y=-x^2+8x+6$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식
$-x^2+8x+6=2x+k$, 즉 $x^2-6x+k-6=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\times(k-6)>0$
$9-k+6>0 \quad \therefore k<15$
따라서 자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 14의 14개이다. 답 ④

20 이차함수 $y=4x^2-4ax+a^2+4a$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 실수 a의 값에 관계없이 항상 접하므로 이차방정식
$4x^2-4ax+a^2+4a=mx+n$, 즉
$4x^2-(4a+m)x+a^2+4a-n=0$의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(4a+m)\}^2-4\times4\times(a^2+4a-n)=0$
$16a^2+8am+m^2-16a^2-64a+16n=0$
$8am+m^2-64a+16n=0$
$8a(m-8)+m^2+16n=0$
이 등식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$m-8=0$, $m^2+16n=0$
즉, $m=8$이므로 $m^2+16n=0$에서
$64+16n=0 \quad \therefore n=-4$
$\therefore m+n=8+(-4)=4$ 답 ⑤

21 이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로
$3=-4+2a+b \quad \therefore b=-2a+7$
이차함수 $y=-x^2+ax-2a+7$의 그래프와 직선 $y=-x+5$가 접하므로 이차방정식 $-x^2+ax-2a+7=-x+5$, 즉
$x^2+(-1-a)x+2a-2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1-a)^2-4\times1\times(2a-2)=0$
$1+2a+a^2-8a+8=0$, $a^2-6a+9=0$
$(a-3)^2=0 \quad \therefore a=3$

따라서 $b=-2a+7=-2\times3+7=1$이므로

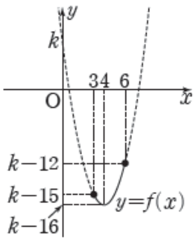
$ab=3\times1=3$ 답 ①

22 $f(x)=x^2-8x+k$

$=x^2-8x+16-16+k$

$=(x-4)^2+k-16$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $3\le x\le6$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 최댓값 $k-12$, $x=4$에서 최솟값 $k-16$을 갖는다.



이때 최댓값과 최솟값의 합이 -18이므로

$(k-12)+(k-16)=-18$

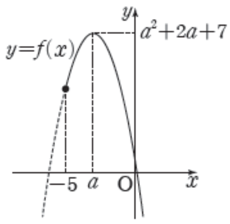
$2k-28=-18$, $2k=10$ $\therefore k=5$ 답 ④

23 $f(x)=-x^2+2ax+2a+7$

$=-(x^2-2ax+a^2-a^2)+2a+7$

$=-(x-a)^2+a^2+2a+7$ $(-5<a<0)$

$-5<a<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x\ge-5$일 때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값 a^2+2a+7을 갖는다.



이때 최댓값이 10이므로

$a^2+2a+7=10$, $a^2+2a-3=0$

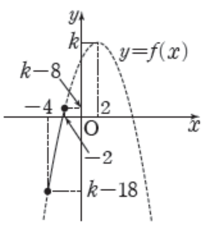
$(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ ($\because -5<a<0$) 답 ②

24 이차함수 $f(x)$의 x^2의 계수는 $-\frac{1}{2}$이고, 조건 ㈏에서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+k$ (단, k는 상수)

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $-4\le x\le-2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $k-8$, $x=-4$에서 최솟값 $k-18$을 갖는다.



이때 최댓값이 1이므로

$k-8=1$ $\therefore k=9$

따라서 최솟값은

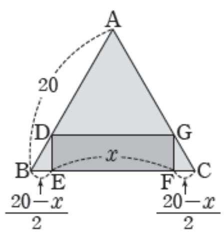
$k-18=9-18=-9$ 답 ①

25 오른쪽 그림에서 $\overline{BE}=\overline{CF}=\frac{20-x}{2}$

직각삼각형 BED에서 $\angle DBE=60^\circ$이므로

$\overline{DE}=\tan60^\circ\ \overline{BE}=\sqrt{3}\times\frac{20-x}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(20-x)$



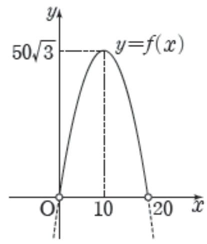
직사각형 DEFG의 넓이를 $f(x)$라 하면

$f(x)=\overline{EF}\times\overline{DE}=x\times\frac{\sqrt{3}}{2}(20-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(-x^2+20x)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\{-(x-10)^2+100\}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-10)^2+50\sqrt{3}$ $(0<x<20)$

$0<x<20$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직사각형 DEFG의 넓이의 최댓값은 $x=10$일 때 $50\sqrt{3}$이다.



$\therefore a=10$, $M=50\sqrt{3}$

$\therefore \frac{M}{a}=\frac{50\sqrt{3}}{10}=5\sqrt{3}$ 답 ④

변형유형 집중공략

p.108~109

1-1 α, β가 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$, $\beta^2-\beta+1=0$

$\therefore \alpha^2=\alpha-1$, $\beta^2=\beta-1$

즉, $f(\alpha^2)=-5\alpha+2$, $f(\beta^2)=-5\beta+2$에서

$f(\alpha-1)=-5\alpha+2$, $f(\beta-1)=-5\beta+2$

이므로 α, β는 이차방정식 $f(x-1)=-5x+2$의 두 근이다.

$f(x-1)=-5x+2$에서

$(x-1)^2+p(x-1)+q=-5x+2$

$x^2-2x+1+px-p+q+5x-2=0$

$\therefore x^2+(p+3)x-p+q-1=0$ …… ㉠

α, β가 ㉠의 두 근이면서 $x^2-x+1=0$의 두 근이므로 ㉠이 $x^2-x+1=0$과 일치한다. 즉,

$p+3=-1$, $-p+q-1=1$

따라서 $p=-4$이므로 $4+q-1=1$ $\therefore q=-2$

$\therefore pq=-4\times(-2)=8$ 답 8

1-2 α, β가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$

$\therefore \alpha^2=-\alpha-1$, $\beta^2=-\beta-1$

또, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$이므로

$\alpha=-\beta-1$, $\beta=-\alpha-1$

즉, $f(\alpha^2)=3\beta-1$, $f(\beta^2)=3\alpha-1$에서

$f(\alpha^2)=f(-\alpha-1)=f(\beta)=3\beta-1$

$f(\beta^2)=f(-\beta-1)=f(\alpha)=3\alpha-1$

이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=3x-1$의 두 근이다.

α, β는 이차방정식 $f(x)=3x-1$, 즉 $f(x)-3x+1=0$의 근이면서 $x^2+x+1=0$의 근이고, 이차함수 $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)-3x+1=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+x+1$

$\therefore f(x)=x^2+4x$

$\therefore f(3)=9+12=21$ 답 ④

다른풀이 이차함수 $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+px+q$ (p, q는 실수)

라 하면 $f(x)=3x-1$에서

$x^2+px+q=3x-1$

$x^2+(p-3)x+q+1=0$ …… ㉠

α, β는 ㉠의 두 근이면서 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로 ㉠이

$x^2+x+1=0$과 일치한다. 즉,

$p-3=1$, $q+1=1$

$\therefore p=4$, $q=0$

따라서 $f(x)=x^2+4x$이므로

$f(3)=9+12=21$

2-1 이차함수 $y=4x^2+kx-7$의 그래프와 x축이 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로 이차방정식 $4x^2+kx-7=0$의 두 실근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면

$\beta-\alpha=4$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{k}{4}$, $\alpha\beta=-\frac{7}{4}$

따라서 $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서

$\left(-\frac{k}{4}\right)^2=(-4)^2+4\times\left(-\frac{7}{4}\right)$, $\frac{k^2}{16}=9$

$k^2=144$ $\quad\therefore k=\pm12$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$12\times(-12)=-144$ 답 -144

2-2 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면 α, β는 이차방정식 $9x^2-15x+k=0$의 두 실근이고

$\beta-\alpha=\overline{AB}=3$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$, $\alpha\beta=\frac{k}{9}$

따라서 $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서

$\left(\frac{5}{3}\right)^2=(-3)^2+4\times\frac{k}{9}$, $25=81+4k$

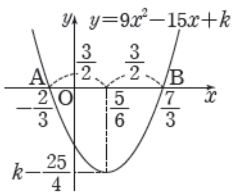
$4k=-56$ $\quad\therefore k=-14$ 답 ②

다른풀이 $y=9x^2-15x+k=9\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+k$

$=9\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}-\frac{25}{36}\right)+k$

$=9\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+k-\frac{25}{4}$

이므로 이차함수 $y=9x^2-15x+k$의 그래프는 직선 $x=\frac{5}{6}$에 대하여 대칭이고, $\overline{AB}=3$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{5}{6}-\frac{3}{2}=-\frac{2}{3}$,



$\frac{5}{6}+\frac{3}{2}=\frac{7}{3}$이다.

즉, 이차방정식 $9x^2-15x+k=0$의 두 실근이 $-\frac{2}{3}$, $\frac{7}{3}$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{k}{9}=-\frac{2}{3}\times\frac{7}{3}$ $\quad\therefore k=-14$

서술형 What & How

p.110~113

1 이차방정식 $x^2-x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-5$ …… ❶

따라서

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\times(-5)=11$,

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-5)^2=25$ …… ❷

이므로 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-11x+25=0$ …… ❸

답 $x^2-11x+25=0$

2 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$ …… ❶

따라서

$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{\beta^3+\alpha^3}{\alpha^3\beta^3}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$

$=\frac{2^3-3\times(-2)\times2}{(-2)^3}=-\frac{5}{2}$,

$\frac{1}{\alpha^3}\times\frac{1}{\beta^3}=\frac{1}{\alpha^3\beta^3}=\frac{1}{(\alpha\beta)^3}=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}$ …… ❷

이므로 $\frac{1}{\alpha^3}$, $\frac{1}{\beta^3}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 8인 이차방정식은

$8\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{8}\right)=0$ $\quad\therefore 8x^2+20x-1=0$ …… ❸

답 $8x^2+20x-1=0$

채점기준	배점
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	2
❷ $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$, $\frac{1}{\alpha^3}\times\frac{1}{\beta^3}$의 값 구하기	3
❸ $\frac{1}{\alpha^3}$, $\frac{1}{\beta^3}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 8인 이차방정식 구하기	2

3 (1) $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로 조건 ㈎에서

$f(x)=(x+3)^2+k$ (k는 실수) …… ❶

조건 ㈏에서 이차방정식 $f(x)=-4$가 중근을 가지므로

$(x+3)^2+k=-4$, $x^2+6x+9+k+4=0$

즉, $x^2+6x+k+13=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1\times(k+13)=0$ …… ❷

$9-k-13=0$ $\quad\therefore k=-4$ …… ❸

$\therefore f(x)=(x+3)^2-4=x^2+6x+5$ ...... ❹

(2) $f(x)=x^2+6x+5=(x+5)(x+1)$ ...... ❺

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점의 좌표는 $(-5, 0)$, $(-1, 0)$이다. ...... ❻

답 (1) $f(x)=x^2+6x+5$ (2) $(-5, 0)$, $(-1, 0)$

4 조건 (가)에서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이고, 함수 $f(x)$의 x^2의 계수가 -1이므로

$f(x)=-(x-4)^2+k$ (k는 실수) ...... ❶

조건 (나)에서 이차방정식 $f(x)=2$가 중근을 가지므로

$-(x-4)^2+k=2$, $-(x^2-8x+16)+k=2$

즉, $x^2-8x+18-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\times(18-k)=0$ ...... ❷

$16-18+k=0$ $\therefore k=2$ ...... ❸

따라서 $f(x)=-(x-4)^2+2$이므로 ...... ❹

$f(6)=-2^2+2=-2$ ...... ❺

답 -2

채점기준	배점
❶ $f(x)$를 실수 k를 포함한 식으로 나타내기	2
❷ 이차방정식 $f(x)=2$의 판별식 D에 대하여 등식 $D=0$ 세우기	2
❸ k의 값 구하기	1
❹ $f(x)$ 구하기	1
❺ $f(6)$의 값 구하기	1

5 이차함수 $y=x^2+3x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+3x+3=2x+k$, 즉

$x^2+x+3-k=0$ ...... ❶

의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times(3-k)<0$ ...... ❷

$1-12+4k<0$, $4k<11$ $\therefore k<\frac{11}{4}$ ...... ❸

따라서 자연수 k는 1, 2이므로 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+2=3$ ...... ❹

답 3

6 이차함수 $y=-3x^2-7x+1$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나므로 이차방정식 $-3x^2-7x+1=-x+k$, 즉

$3x^2+6x+k-1=0$ ...... ❶

의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-3(k-1)\geq0$ ...... ❷

$9-3k+3\geq0$, $3k\leq12$ $\therefore k\leq4$ ...... ❸

따라서 자연수 k의 최댓값은 4이다. ...... ❹

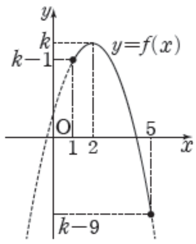
답 4

채점기준	배점
❶ 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하여 이차방정식 세우기	2
❷ ❶의 이차방정식의 판별식 D에 대하여 부등식 $D\geq0$ 세우기	2
❸ k의 값의 범위 구하기	1
❹ 자연수 k의 최댓값 구하기	1

7 $f(1)=f(3)$에서 $\frac{1+3}{2}=2$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, x^2의 계수가 -1이므로

$f(x)=-(x-2)^2+k$ (k는 상수) ...... ❶

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1\leq x\leq5$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최솟값 $k-9$를 갖는다. ...... ❷



이때 최솟값이 -4이므로

$k-9=-4$ $\therefore k=5$ ...... ❸

$\therefore f(x)=-(x-2)^2+5=-x^2+4x+1$ ...... ❹

따라서 $a=4$, $b=1$이므로

$ab=4\times1=4$ ...... ❺

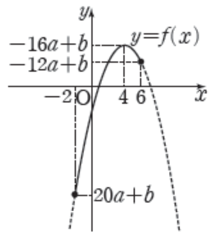
답 4

8 $f(x)=ax^2-8ax+b=a(x^2-8x)+b$

$=a(x^2-8x+16-16)+b$

$=a(x-4)^2-16a+b$ $(a<0)$ ...... ❶

즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이고 위로 볼록하므로 오른쪽 그림과 같고, $-2\leq x\leq6$일 때 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $-16a+b$, $x=-2$에서 최솟값 $20a+b$를 갖는다. ...... ❷



이때 최댓값이 5, 최솟값이 -13이므로

$-16a+b=5$, $20a+b=-13$ ...... ❸

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2}$, $b=-3$ ...... ❹

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-3}{-\frac{1}{2}}=6$ ...... ❺

답 6

채점기준	배점
❶ $f(x)=a(x-p)^2+q$ 꼴로 식 정리하기	2
❷ $-2\leq x\leq6$일 때, $f(x)$의 최댓값, 최솟값을 상수 a, b를 이용하여 나타내기	3
❸ 최댓값과 최솟값에 대하여 연립방정식 세우기	1
❹ a, b의 값 구하기	1
❺ $\frac{b}{a}$의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.114~118

01 이차방정식 $x^2+8x+9-a=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-1\times(9-a)<0$, $16-9+a<0$

$\therefore a<-7$

따라서 정수 a의 최댓값은 -8이다. 답 ②

02 이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-5$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\alpha}{\beta-1}=\frac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{(-3)^2-2\times(-5)-(-3)}{-5-(-3)+1}$$
$$=-22$$

답 ④

03 이차식 $x^2-2(k+a)x+k^2+k+b$가 완전제곱식이면 이차방정식 $x^2-2(k+a)x+k^2+k+b=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+a)\}^2-1\times(k^2+k+b)=0$

$k^2+2ka+a^2-k^2-k-b=0$, $2ka+a^2-k-b=0$

$k(2a-1)+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-1=0$, $a^2-b=0$

$2a-1=0$에서 $2a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$a^2-b=0$에서 $\frac{1}{4}-b=0$ $\quad\therefore b=\frac{1}{4}$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$$

답 ③

04 이차방정식 $x^2+2kx-3=0$의 두 실근을 α, β라 하면

$|\alpha-\beta|=4$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=-3$

따라서 $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서

$(-2k)^2=4^2+4\times(-3)$

$4k^2=4$, $k^2=1$ $\quad\therefore k=1$ $(\because k>0)$

답 ①

다른풀이 이차방정식 $x^2+2kx-3=0$의 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=-2k$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+4)=-3$ …… ㉡

㉠에서 $2\alpha+4=-2k$

$\therefore k=-\alpha-2$ …… ㉢

㉡에서 $\alpha^2+4\alpha+3=0$, $(\alpha+3)(\alpha+1)=0$

$\therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=-1$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 각각 대입하면

$\alpha=-3$일 때, $k=3-2=1$

$\alpha=-1$일 때, $k=1-2=-1$

이때 $k>0$이므로 $k=1$

05 α, β가 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$

따라서

$$\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)-\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}$$
$$=3-\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$$
$$\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta-1-1+\frac{1}{\alpha\beta}$$
$$=5-2+\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$$

이므로 $\alpha-\frac{1}{\beta}$, $\beta-\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 5인 이차방정식은

$5\left(x^2-\frac{12}{5}x+\frac{16}{5}\right)=0$ $\quad\therefore 5x^2-12x+16=0$

따라서 $a=-12$, $b=16$이므로

$a+b=-12+16=4$

답 ④

06 이차방정식 $x^2-(m^2-8)x+3m+5=0$의 계수가 실수이고, 한 근이 $m+i$이므로 다른 한 근은 $m-i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(m+i)+(m-i)=m^2-8$ …… ㉠

$(m+i)(m-i)=3m+5$ …… ㉡

㉠에서 $2m=m^2-8$, $m^2-2m-8=0$

$(m+2)(m-4)=0$ $\quad\therefore m=-2$ 또는 $m=4$ …… ㉢

㉡에서 $m^2+1=3m+5$, $m^2-3m-4=0$

$(m+1)(m-4)=0$ $\quad\therefore m=-1$ 또는 $m=4$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $m=4$

답 ⑤

07 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 계수가 실수이고, 한 근이

$$\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2(1-i)}{1-i^2}=1-i$$

이므로 다른 한 근은 $1+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-i)+(1+i)=-p$ $\quad\therefore p=-2$

$(1-i)(1+i)=q$ $\quad\therefore q=2$

따라서 α, β는 이차방정식 $x^2+2x-2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-2$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(-2)^2-2\times(-2)=8$$

답 ②

08 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+kx+k=0$의 두 실근이고

$\beta-\alpha=\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=k$

따라서 $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서

$(-k)^2=(-2\sqrt{3})^2+4k$, $k^2=12+4k$

$k^2-4k-12=0$, $(k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=6$ ($\because k>0$) 답 ④

09 이차방정식 $(b+c)x^2+2ax+b-c=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(b+c)(b-c)=0$, $a^2-(b^2-c^2)=0$

$a^2-b^2+c^2=0$ $\quad\therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다. 답 ④

10 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b는 실수)이라 하자.

갑은 상수항 b를 바르게 보고 풀었으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$b=-2\times3=-6$

을은 x의 계수 a를 바르게 보고 풀었으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})=-2$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $x^2+2x-6=0$이므로

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-6)}}{1}=-1\pm\sqrt{7}$ 답 ③

11 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (가)에서

$f(\alpha)=\frac{1}{\beta}=\alpha$, $f(\beta)=\frac{1}{\alpha}=\beta$ ($\because$ ㉠)

이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=x$의 두 근이다.

즉, α, β는 이차방정식 $f(x)-x=0$의 두 근이면서

$x^2-3x+1=0$의 두 근이므로 실수 k에 대하여

$f(x)-x=k(x^2-3x+1)$

$\therefore f(x)=kx^2+(-3k+1)x+k$

조건 (나)에서

$f(1)=k+(-3k+1)+k=2$

$-k+1=2$ $\quad\therefore k=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+4x-1$이므로

$f(2)=-4+8-1=3$ 답 ④

참고 α, β는 이차방정식 $f(x)-x=0$의 두 근이므로 실수 k에 대하여

$f(x)-x=k(x-\alpha)(x-\beta)$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이므로

$x^2-3x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore f(x)-x=k(x^2-3x+1)$

12 $y=2x^2+kx+2k-1$에서 $2x^2+kx+2k-1-y=0$

$k(x+2)+2x^2-1-y=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x+2=0$, $2x^2-1-y=0$

즉, $x=-2$이므로

$2x^2-1-y=8-1-y=0$ $\quad\therefore y=7$

따라서 이차함수 $y=2x^2+kx+2k-1$의 그래프는 항상 점 $(-2, 7)$을 지나므로 점 P의 좌표는 $(-2, 7)$이다. 답 ②

13 이차함수 $y=x^2+2ax-2a+15$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2ax-2a+15=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-1\times(-2a+15)=0$, $a^2+2a-15=0$

$(a+5)(a-3)=0$ $\quad\therefore a=-5$ 또는 $a=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차함수 $y=-9x^2+6x-3a-16$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $-9x^2+6x-3a-16=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=3^2-(-9)\times(-3a-16)<0$, $9+9(-3a-16)<0$

$1+(-3a-16)<0$, $-3a-15<0$, $3a>-15$

$\therefore a>-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$ 답 ⑤

14 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=x+3$의 두 교점의 x좌표가 각각 -2, 2이므로 이차방정식

$x^2+ax+b=x+3$, 즉 $x^2+(a-1)x+b-3=0$의 두 근이 -2, 2이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+2=-(a-1)$ $\quad\therefore a=1$

$-2\times2=b-3$ $\quad\therefore b=-1$

$\therefore a+b=1+(-1)=0$ 답 ①

15 이차함수 $y=-x^2-x+2a$의 그래프가 직선 $y=-4x+a+1$보다 항상 아래쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 하므로 이차방정식

$-x^2-x+2a=-4x+a+1$, 즉 $x^2-3x-a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times(-a+1)<0$

$9+4a-4<0$, $4a<-5$ $\quad\therefore a<-\frac{5}{4}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다. 답 ①

16 이차함수 $y=x^2-x-3$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접하므로 이차방정식 $x^2-x-3=x+k$, 즉 $x^2-2x-3-k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1\times(-3-k)=0$

$1+3+k=0 \quad \therefore k=-4$

이차함수 $y=-x^2+3x+m$의 그래프와 직선 $y=x-4$가 접하므로 이차방정식 $-x^2+3x+m=x-4$, 즉 $x^2-2x-4-m=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-1\times(-4-m)=0$

$1+4+m=0 \quad \therefore m=-5$

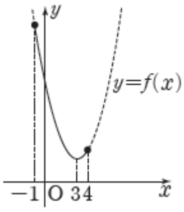
$\therefore km=-4\times(-5)=20$

답 ⑤

17 모든 실수 x에 대하여 $f(3+x)=f(3-x)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, x^2의 계수가 양수이므로 아래로 볼록하다.

따라서 $-1\le x\le 4$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $f(-1)$, $x=3$에서 최솟값 $f(3)$을 갖는다.

$\therefore f(3)<f(4)<f(-1)$



답 ②

참고 $-1\le x\le 4$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값을 갖고, 수직선에서 -1과 4 중 3에서 더 멀리 떨어져 있는 수는 -1이므로 $x=-1$에서 최댓값을 갖는다.

18 $f(x)=x^2-8x+a+6=(x-4)^2+a-10$

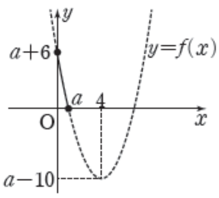
이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

(i) $0<a<4$일 때

$0\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 a^2-7a+6을 갖는다. 이때 최솟값이 0이어야 하므로

$a^2-7a+6=0$, $(a-1)(a-6)=0$

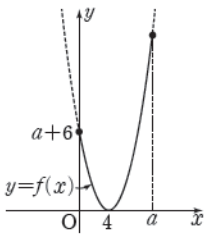
$\therefore a=1 \ (\because 0<a<4)$



(ii) $a\ge 4$일 때

$0\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값 $a-10$을 갖는다. 이때 최솟값이 0이어야 하므로

$a-10=0 \quad \therefore a=10$



(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$1+10=11$

답 ①

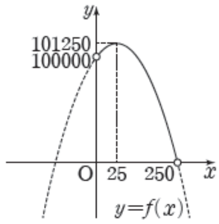
19 사탕 한 개의 가격이 $(200+x)$원일 때, 한 달 판매량은 $(500-2x)$개이므로 사탕의 한 달 총 판매액을 $f(x)$원이라 하면

$f(x)=(200+x)(500-2x)$

$=-2x^2+100x+100000$

$=-2(x-25)^2+101250$

$0<x<250$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 사탕의 한 달 총 판매액의 최댓값은 $x=25$일 때 101250원이다.



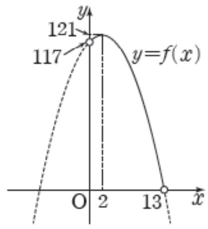
답 ⑤

20 새로 만든 직사각형의 가로의 길이는 $(13-x)$ cm, 세로의 길이는 $(9+x)$ cm이므로 넓이를 $f(x)$ cm^2라 하면

$f(x)=(13-x)(9+x)=-x^2+4x+117$

$=-(x-2)^2+121 \ (0<x<13)$

$0<x<13$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 새로 만든 직사각형의 넓이의 최댓값은 $x=2$일 때 121 cm^2이다.



답 ②

21 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4b=0 \quad \therefore a^2=4b$

즉, a^2은 4의 배수이므로 a는 짝수이고, a, b는 10 미만의 자연수이므로

$a=2$일 때 $b=1$,

$a=4$일 때 $b=4$,

$a=6$일 때 $b=9$ ...... ㉠

또, 이차방정식 $x^2+bx+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2-4a>0 \quad \therefore 4a<b^2$ ...... ㉡

㉠ 중에서 ㉡을 만족시키는 10 미만의 자연수 a, b는

$a=6$, $b=9$

$\therefore a+b=6+9=15$

답 15

22 $-x^2+6x=0$에서 $-x(x-6)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=6$

즉, 이차함수 $y=-x^2+6x$의 그래프는 x축과 두 점 $(0, 0)$, $(6, 0)$에서 만난다.

함수 $y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$의 그래프의 축은 직선 $x=3$이므로 점 A의 x좌표를 $t \ (0<t<3)$라 하면 점 B의 x좌표는 $6-t$이고

$\overline{AB}=(6-t)-t=6-2t$

또, $D(t, -t^2+6t)$이므로 $\overline{AD}=-t^2+6t$

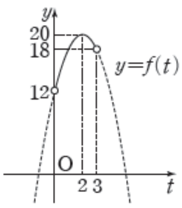
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=2(\overline{AD}+\overline{AB})=2\{(-t^2+6t)+(6-2t)\}$

$=-2t^2+8t+12$

$=-2(t-2)^2+20 \ (0<t<3)$

$0<t<3$일 때, 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 $t=2$일 때, 20이다.



답 ④

23 α, β가 이차방정식 $x^2-2x-6=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2 \qquad \therefore \alpha=2-\beta,\ \beta=2-\alpha$ …… ❶

즉, $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$에서

$f(\alpha)=2(2-\alpha)=4-2\alpha$

$f(\beta)=2(2-\beta)=4-2\beta$

이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=4-2x$, 즉

$f(x)-4+2x=0$의 두 근이다. …… ❷

α, β는 이차방정식 $f(x)-4+2x=0$의 두 근이면서

$x^2-2x-6=0$의 두 근이므로

$f(x)-4+2x=k(x-\alpha)(x-\beta)$

$=k(x^2-2x-6)$ (k는 0이 아닌 상수)

$\therefore f(x)=k(x^2-2x-6)-2x+4$ …… ❸

이때 $f(-1)=9$이므로

$f(-1)=k(1+2-6)+2+4=9$, $-3k=3$

$\therefore k=-1$ …… ❹

따라서

$f(x)=-(x^2-2x-6)-2x+4$

$=-x^2+10$

이므로

$f(4)=-16+10=-6$ …… ❺

답 -6

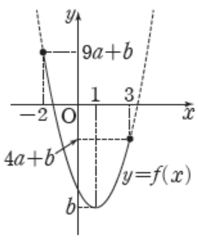
채점기준	배점
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 사이의 관계식 구하기	1
❷ α, β가 이차방정식 $f(x)-4+2x=0$의 두 근임을 설명하기	2
❸ $f(x)$의 최고차항의 계수를 상수 k로 놓고 $f(x)$의 식 구하기	3
❹ k의 값 구하기	2
❺ $f(x)$를 구하여 $f(4)$의 값 구하기	1

24 조건 ㈎에서 $\dfrac{-3+5}{2}=1$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. 즉,

$f(x)=a(x-1)^2+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$) …… ❶

(i) $a>0$일 때

$-2\le x\le 3$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $9a+b$, $x=1$에서 최솟값 b를 갖는다.



조건 ㈏에서 최댓값이 3, 최솟값이 -6이므로

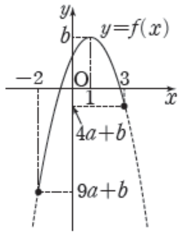
$9a+b=3$, $b=-6 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x-1)^2-6=x^2-2x-5$ …… ❷

이때 이차방정식 $x^2-2x-5=-2x+6$, 즉 $x^2=11$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x+6$은 서로 다른 두 점에서 만난다. 즉, 조건 ㈐를 만족시키지 않는다. …… ❸

(ii) $a<0$일 때

$-2\le x\le 3$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 b, $x=-2$에서 최솟값 $9a+b$를 갖는다.



조건 ㈏에서 최댓값이 3, 최솟값이 -6이므로

$b=3$, $9a+b=-6 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-(x-1)^2+3$

$=-x^2+2x+2$ …… ❹

이때 이차방정식 $-x^2+2x+2=-2x+6$, 즉 $x^2-4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\times4=0$

이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-2x+6$과 접한다. 즉, 조건 ㈐를 만족시킨다. …… ❺

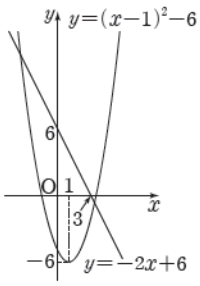
(i), (ii)에서 $f(x)=-(x-1)^2+3$이므로

$f(2)=-1^2+3=2$ …… ❻

답 2

채점기준	배점
❶ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭임을 설명하고 $f(x)$의 식 세우기	2
❷ $a>0$일 때, 최댓값과 최솟값을 이용하여 $f(x)$ 구하기	2
❸ ❷에서 구한 $f(x)$가 조건 ㈐를 만족시키는지 확인하기	1
❹ $a<0$일 때, 최댓값과 최솟값을 이용하여 $f(x)$ 구하기	2
❺ ❹에서 구한 $f(x)$가 조건 ㈐를 만족시키는지 확인하기	1
❻ $f(2)$의 값 구하기	1

참고 (i)에서 함수 $y=(x-1)^2-6$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-2x+6$과 서로 다른 두 점에서 만난다.



실전 문제 | 2회

p.119~123

01 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이므로

$x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근의 합은

$-1+2=1$

답 ④

02 이차방정식 $x^2-2(k-3)x+k^2-5=0$이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-3)\}^2-1\times(k^2-5)\ge0$

$k^2-6k+9-k^2+5\ge0,\ -6k+14\ge0$

$6k\le14\qquad\therefore\ k\le\frac{7}{3}$

따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤ $\frac{8}{3}$이다. 답 ⑤

03 $z=3-2i$에 대하여 $\bar{z}=3+2i$이므로

$z+\bar{z}=(3-2i)+(3+2i)=6$

$z\bar{z}=(3-2i)(3+2i)=9-4i^2=13$

따라서 6, 13을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-6)(x-13)=0$

$\therefore\ x^2-19x+78=0$ 답 ⑤

04 α, β가 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=5$

즉, $f(\alpha)=f(\beta)=\alpha\beta=5$에서

$f(\alpha)-5=0,\ f(\beta)-5=0$

이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)-5=0$의 두 근이다.

α, β는 이차방정식 $f(x)-5=0$의 두 근이면서 $x^2-2x+5=0$의 두 근이므로

$f(x)-5=k(x-\alpha)(x-\beta)$

$=k(x^2-2x+5)$ (k는 0이 아닌 상수)

$\therefore\ f(x)=k(x^2-2x+5)+5$

이때 $f(1)=-3$이므로

$f(1)=k(1-2+5)+5=-3,\ 4k=-8$

$\therefore\ k=-2$

따라서 $f(x)=-2(x^2-2x+5)+5=-2x^2+4x-5$이므로

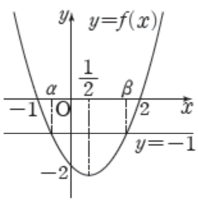
$f(\alpha+\beta)=f(2)=-8+8-5=-5$ 답 ①

참고 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근이 α, β이므로

$x^2-2x+5=(x-\alpha)(x-\beta)$

05 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 2이고, $\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이다.

이때 이차방정식 $f(x)=-1$의 실근은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점의 x좌표와 같으므로 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 2개가 존재한다. 이차방정식 $f(x)=-1$의 실근을 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$은 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로



$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \alpha+\beta=1$

즉, 이차방정식 $f(x)=-1$의 모든 실근의 합은 1이다. 답 ④

다른풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 2이므로

$f(x)=a(x+1)(x-2)$ (a는 0이 아닌 상수)

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)=-2$이므로

$f(0)=-2a=-2\qquad\therefore\ a=1$

$\therefore\ f(x)=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

이때 이차방정식 $f(x)=-1$에서

$x^2-x-2=-1,\ x^2-x-1=0$

판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5>0$

따라서 이차방정식 $f(x)=-1$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 두 실근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

06 $2x^2+xy-y^2-x+2y+k$에서

$2x^2+(y-1)x-y^2+2y+k\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때 x에 대한 이차방정식 $2x^2+(y-1)x-y^2+2y+k=0$에서

$x=\frac{-(y-1)\pm\sqrt{(y-1)^2-4\times2(-y^2+2y+k)}}{2\times2}$

$=\frac{-(y-1)\pm\sqrt{9y^2-18y+1-8k}}{4}$

이므로 ㉠이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 근호 안의 식이 완전제곱식이어야 한다. 즉, 이차방정식 $9y^2-18y+1-8k=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-9)^2-9(1-8k)=0,\ 81-9(1-8k)=0$

$9-(1-8k)=0,\ 8+8k=0,\ 8k=-8$

$\therefore\ k=-1$ 답 ③

참고 $k=-1$일 때, ㉠에서

$2x^2+(y-1)x-y^2+2y-1=2x^2+(y-1)x-(y^2-2y+1)$

$=2x^2+(y-1)x-(y-1)^2$

$=\{2x-(y-1)\}\{x+(y-1)\}$

$=(2x-y+1)(x+y-1)$

07 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+2\alpha+3=0,\ \beta^2+2\beta+3=0$

$\therefore\ \alpha^2=-2\alpha-3,\ \beta^2=-2\beta-3\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=3$

㉠에서 $\alpha^2=-2\alpha-3$의 양변에 α를 곱하면

$\alpha^3=-2\alpha^2-3\alpha$

$=-2(-2\alpha-3)-3\alpha$ ($\because$ ㉠)

$=\alpha+6\qquad\cdots\cdots$ ㉡

$\therefore\ \alpha^3+\alpha^2+4\alpha-3=(\alpha+6)+(-2\alpha-3)+4\alpha-3$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=3\alpha$

같은 방법으로 $\beta^3+\beta^2+4\beta-3=3\beta$이므로

$\frac{1}{\alpha^3+\alpha^2+4\alpha-3}+\frac{1}{\beta^3+\beta^2+4\beta-3}$

$=\frac{1}{3\alpha}+\frac{1}{3\beta}=\frac{\beta+\alpha}{3\alpha\beta}=\frac{-2}{3\times3}=-\frac{2}{9}$ 답 ②

08 이차방정식 $2x^2-12x-k=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$|\alpha|+|\beta|=12$ ······ ㉠

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$ ······ ㉡

$\alpha\beta=-\dfrac{k}{2}$ ······ ㉢

㉠의 양변을 제곱하면

$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=144$

$\therefore\ \alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=144$ ······ ㉣

이때 $\alpha\beta\ge0$이면

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=144$, $(\alpha+\beta)^2=144$

$\therefore\ \alpha+\beta=\pm12$

이는 ㉡을 만족시키지 않으므로 $\alpha\beta<0$

즉, ㉣에서

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=144$, $(\alpha-\beta)^2=144$

$\therefore\ \alpha-\beta=-12$ ($\because\ \alpha-\beta<0$) ······ ㉤

㉡, ㉤을 연립하여 풀면 $\alpha=-3$, $\beta=9$

따라서 ㉢에서

$k=-2\alpha\beta=-2\times(-3)\times9=54$ 답 ⑤

다른풀이 ㉣에서

$(\alpha^2+\beta^2)+2|\alpha\beta|=144$, $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=144$

$6^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=144$, $-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=108$

$\therefore\ -\alpha\beta+|\alpha\beta|=54$

이때 $\alpha\beta\ge0$이면 $-\alpha\beta+|\alpha\beta|=-\alpha\beta+\alpha\beta=0$이므로 등식이 성립하지 않는다. 즉, $\alpha\beta<0$이므로

$-\alpha\beta+|\alpha\beta|=-\alpha\beta+(-\alpha\beta)=54$, $-2\alpha\beta=54$

$\therefore\ \alpha\beta=-27$

따라서 ㉢에서

$k=-2\alpha\beta=-2\times(-27)=54$

09 $f(x)=x^2+mx+n$ (m, n은 실수)이라 하면 조건 ㈎에서

$n=8$

$\therefore\ f(x)=x^2+mx+8$

조건 ㈏에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-4$

이때 $f(\alpha)+f(\beta)=4$이므로

$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\beta)&=(\alpha^2+m\alpha+8)+(\beta^2+m\beta+8)\\&=(\alpha^2+\beta^2)+m(\alpha+\beta)+16\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+m(\alpha+\beta)+16\\&=4^2-2\times(-4)+4m+16=4\end{aligned}$$

$4m+40=4$, $4m=-36$ $\therefore\ m=-9$

따라서 $f(x)=x^2-9x+8$이므로

$f(2)=4-18+8=-6$ 답 ③

다른풀이 $\alpha+\beta=4$이므로 $f(\alpha)+f(\beta)=4$에

$\alpha=4-\beta$를 대입하면 $f(4-\beta)+f(\beta)=4$

$\beta=4-\alpha$를 대입하면 $f(\alpha)+f(4-\alpha)=4$

즉, α, β는 이차방정식 $f(x)+f(4-x)=4$의 두 근이므로

$f(x)+f(4-x)=4$에서

$x^2+mx+8+(4-x)^2+m(4-x)+8=4$

$2x^2-8x+4m+28=0$

$\therefore\ x^2-4x+2m+14=0$ ······ ㉠

α, β는 ㉠의 두 근이면서 $x^2-4x-4=0$의 두 근이므로

㉠이 $x^2-4x-4=0$과 일치한다. 즉,

$2m+14=-4$, $2m=-18$ $\therefore\ m=-9$

따라서 $f(x)=x^2-9x+8$이므로

$f(2)=4-18+8=-6$

10 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 만나는 한 점의 x좌표가 $2-\sqrt{6}$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{6}$이다. 이때 a, b가 유리수이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{6}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{6})+(2+\sqrt{6})=-a$ $\therefore\ a=-4$

$(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})=b$ $\therefore\ b=-2$

따라서 $f(x)=x^2-4x-2$이므로

$f(-3)=9+12-2=19$ 답 ②

11 이차함수 $y=-2x^2+3x+2$의 그래프와 직선 $y=-5x+k$가 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식 $-2x^2+3x+2=-5x+k$, 즉 $2x^2-8x+k-2=0$은 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

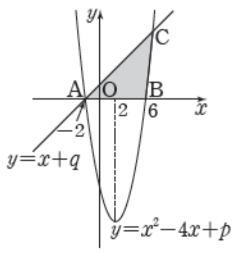
$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-2(k-2)\ge0$

$16-2k+4\ge0$, $2k\le20$ $\therefore\ k\le10$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 10의 10개이다. 답 ③

12 $y=x^2-4x+p=(x-2)^2+p-4$

이므로 함수 $y=x^2-4x+p$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.



이때 $\overline{AB}=8$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각

$2-4=-2$, $2+4=6$

즉, 이차방정식 $x^2-4x+p=0$의 두 실근이 -2, 6이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p=-2\times6=-12$

또, 직선 $y=x+q$가 점 A$(-2, 0)$을 지나므로

$0=-2+q$ $\therefore\ q=2$

함수 $y=x^2-4x-12$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x-12=x+2$에서

$x^2-5x-14=0$, $(x+2)(x-7)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=7$

즉, 점 C의 x좌표는 7이고, 점 C는 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로 C(7, 9)

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 9=36$ 답 ⑤

다른풀이 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$\overline{AB}=8$이므로 $\beta-\alpha=8$ …… ㉠

또, α, β는 이차방정식 $x^2-4x+p=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$ …… ㉡

$\alpha\beta=p$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=-2$, $\beta=6$

$\therefore p=\alpha\beta=-2\times 6=-12$

13 직선 $y=bx+3$이 점 $(4,\ -5)$를 지나므로

$-5=4b+3,\ 4b=-8 \qquad \therefore b=-2$

이차함수 $y=ax^2+(-4a-4)x+11$의 그래프가 직선 $y=-2x+3$과 접하므로 이차방정식

$ax^2+(-4a-4)x+11=-2x+3$, 즉

$ax^2+2(-2a-1)x+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a-1)^2-a\times 8=0,\ 4a^2+4a+1-8a=0$

$4a^2-4a+1=0,\ (2a-1)^2=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$ 답 ③

14 이차함수 $y=x^2+2ax+a^2+4a$의 그래프와 접하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 이차방정식

$x^2+2ax+a^2+4a=mx+n$, 즉

$x^2+(2a-m)x+a^2+4a-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a-m)^2-4\times 1\times(a^2+4a-n)=0$

$4a^2-4am+m^2-4a^2-16a+4n=0$

$-4a(m+4)+m^2+4n=0$

이 등식이 실수 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$m+4=0,\ m^2+4n=0$

$\therefore m=-4,\ n=-4$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-4x-4$ 답 ①

15 ㄱ. α, β는 이차방정식 $x^2=-2x+k$, 즉 $x^2+2x-k=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$ (참)

ㄴ. 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2=-2x+k$, 즉 $x^2+2x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\times(-k)>0$

$1+k>0 \qquad \therefore k>-1$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-k$

ㄴ에서 $k>-1$이므로 $-k<1$

$\therefore \alpha\beta=-k<1$ (참)

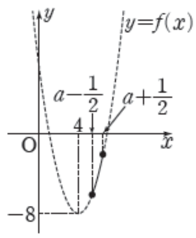
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

16 $f(x)=x^2-8x+8=(x-4)^2-8$

$-\frac{1}{2}\le x-a\le\frac{1}{2}$에서 $a-\frac{1}{2}\le x\le a+\frac{1}{2}$

이때 $a\ge\frac{9}{2}$이므로 $a-\frac{1}{2}\ge 4$

따라서 $a-\frac{1}{2}\le x\le a+\frac{1}{2}$일 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=a+\frac{1}{2}$에서 최댓값, $x=a-\frac{1}{2}$에서 최솟값을 갖는다.



이때 최댓값과 최솟값의 차가 4이므로

$f\left(a+\frac{1}{2}\right)-f\left(a-\frac{1}{2}\right)=4$

$\left(a+\frac{1}{2}-4\right)^2-8-\left\{\left(a-\frac{1}{2}-4\right)^2-8\right\}=4$

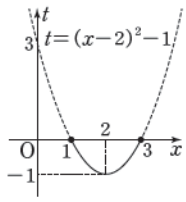
$\left(a-\frac{7}{2}\right)^2-\left(a-\frac{9}{2}\right)^2=4,\ a^2-7a+\frac{49}{4}-\left(a^2-9a+\frac{81}{4}\right)=4$

$2a-8=4,\ 2a=12 \qquad \therefore a=6$ 답 ④

17 $x^2-4x+3=t$로 놓으면 $t=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

$1\le x\le 3$일 때, 함수 $t=(x-2)^2-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $t=(x-2)^2-1$은 $x=1$ 또는 $x=3$에서 최댓값 0, $x=2$에서 최솟값 -1을 갖는다.

즉, $1\le x\le 3$일 때 $-1\le t\le 0$이다.

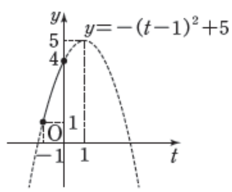


따라서 주어진 함수는

$y=-(x^2-4x+3)^2+2(x^2-4x+3)+4\ (1\le x\le 3)$

$=-t^2+2t+4=-(t-1)^2+5\ (-1\le t\le 0)$

$-1\le t\le 0$일 때, 함수 $y=-(t-1)^2+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=-(t-1)^2+5$는 $t=0$에서 최댓값 4, $t=-1$에서 최솟값 1을 갖는다.



따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$4+1=5$ 답 ③

18 조건 (가)에서 $f(x)=ax^2+bx-5$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)라 하자.

조건 (나)에서

$f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)-5-(ax^2+bx-5)$

$=a(x^2+2x+1)+bx+b-5-ax^2-bx+5$

$=ax^2+2ax+a+b-ax^2$

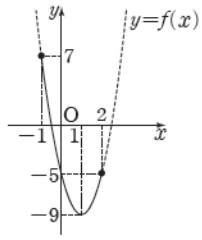
$=2ax+a+b=8x-4$

즉, $2a=8$, $a+b=-4$이므로

$a=4$, $b=-8$

$\therefore f(x)=4x^2-8x-5=4(x-1)^2-9$

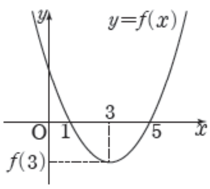
$-1\le x\le 2$일 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 7, $x=1$에서 최솟값 -9를 갖는다.



따라서 $M=7$, $m=-9$이므로

$M-m=7-(-9)=16$ 답 ④

19 ㄱ. 조건 (나)에서 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점은 점 $(3, f(3))$이고 그래프는 아래로 볼록하다. 즉, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 조건 (가)에서



$f(1)=f(5)=0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서

$f(x)=a(x-3)^2+k$ (a, k는 상수, $a>0$)

조건 (가)에서

$f(5)=4a+k=0 \qquad \therefore k=-4a$

$\therefore f(x)=a(x-3)^2-4a$

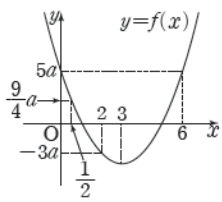
$\qquad =a\{(x-3)^2-4\} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

따라서 $f(2)=-3a$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}a$, $f(6)=5a$이고

$-3a<\frac{9}{4}a<5a$이므로

$f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(6)$ (참)



ㄷ. $f(0)=5$이면 ㉠에서

$f(0)=5a=5 \qquad \therefore a=1$

즉, $f(x)=(x-3)^2-4=x^2-6x+5$이므로 $f(x)=3x$에서

$x^2-6x+5=3x \qquad \therefore x^2-9x+5=0$

이때 근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식 $f(x)=3x$의 두 근의 합은 9이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

20 두 점 A, B의 x좌표는 $x^2-8x-2=-x^2+4x+12$에서

$2x^2-12x-14=0$, $x^2-6x-7=0$

$(x+1)(x-7)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=7$

따라서 두 점 P, Q의 x좌표를 t라 하면 $-1<t<7$이고

$\mathrm{P}(t, t^2-8t-2)$, $\mathrm{Q}(t, -t^2+4t+12)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=(-t^2+4t+12)-(t^2-8t-2)$

$\qquad =-2t^2+12t+14$ $(-1<t<7)$

사각형 APBQ의 넓이를 $f(t)$라 하면

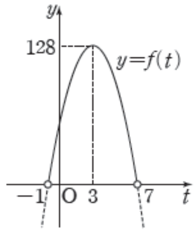
$f(t)=\triangle\mathrm{APQ}+\triangle\mathrm{BQP}$

$\qquad =\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\{t-(-1)\}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times(7-t)$

$\qquad =\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\{(t+1)+(7-t)\}=4\overline{\mathrm{PQ}}$

$\qquad =4(-2t^2+12t+14)=-8(t-3)^2+128$

$-1<t<7$일 때, 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 사각형 APBQ의 넓이의 최댓값은 $t=3$일 때 128이다.



답 ②

21 $f(t)=-5t^2+30t+80$이라 하면

ㄱ. 2초 후 물체의 지면으로부터의 높이는

$f(2)=-20+60+80=120$(m) (참)

ㄴ. t초 후 물체가 지면에 도달하면 물체의 높이가 0 m이므로

$f(t)=0$에서 $-5t^2+30t+80=0$

$t^2-6t-16=0$, $(t+2)(t-8)=0$

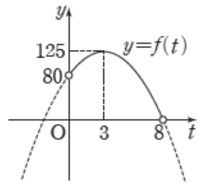
$\therefore t=8$ ($\because t\ge 0$)

즉, 물체는 쏘아 올린 지 8초 후 지면에 도달한다. (참)

ㄷ. $f(t)=-5t^2+30t+80$

$\qquad =-5(t-3)^2+125$ $(0<t<8)$

$0<t<8$일 때, 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 지면으로부터의 물체의 최대 높이는 $t=3$일 때 125 m이다. 즉, 이 물체는 140 m 높이까지 도달할 수 없다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

22 $y=-x^2+ax+a+3$에서

$-x^2+ax+a+3-y=0$, $a(x+1)-x^2+3-y=0$

이 등식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x+1=0$, $-x^2+3-y=0$

$\therefore x=-1$, $y=2$

즉, 이차함수 $y=-x^2+ax+a+3$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $\mathrm{P}(-1, 2)$를 지난다.

또, 이 이차함수의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 점 P에서 접하므로 점 P는 직선 $y=-3x+k$ 위의 점이다. 즉,

$2=3+k \qquad \therefore k=-1$

$\therefore y=-3x-1$

이차함수 $y=-x^2+ax+a+3$의 그래프와 직선 $y=-3x-1$이 접하므로 이차방정식 $-x^2+ax+a+3=-3x-1$, 즉 $x^2-(a+3)x-a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+3)\}^2-4\times1\times(-a-4)=0$

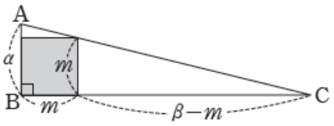
$a^2+6a+9+4a+16=0$, $a^2+10a+25=0$

$(a+5)^2=0 \qquad \therefore a=-5$

$\therefore ak=-5\times(-1)=5$ 답 5

23 이차방정식 $x^2-8x+10=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=10$ …… ❶



위의 그림과 같이 정사각형의 한 변의 길이를 m이라 하면

$m:\alpha=(\beta-m):\beta$, $\beta m=\alpha(\beta-m)$, $\beta m=\alpha\beta-\alpha m$

$\alpha m+\beta m=\alpha\beta$, $(\alpha+\beta)m=\alpha\beta$

$\therefore m=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}$ …… ❷

즉, 정사각형의 넓이는 $\left(\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$

둘레의 길이는 $\dfrac{5}{4}\times4=5$ …… ❸

$\dfrac{25}{16}$, 5를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 16인 이차방정식은

$16\left(x-\dfrac{25}{16}\right)(x-5)=0$, $(16x-25)(x-5)=0$

$\therefore 16x^2-105x+125=0$ …… ❹

따라서 $p=-105$, $q=125$이므로

$p+q=-105+125=20$ …… ❺

답 20

채점기준	배점
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	1
❷ 정사각형의 한 변의 길이를 m으로 놓고, 삼각형에서 닮음을 이용하여 m의 값 구하기	2
❸ 정사각형의 넓이와 둘레의 길이 구하기	1
❹ 정사각형의 넓이와 둘레의 길이를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 16인 이차방정식 구하기	2
❺ p, q의 값을 구하고 $p+q$의 값 구하기	1

24 (1) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 10이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$\beta-\alpha=10$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=k$ …… ❶

따라서 $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서

$8^2=(-10)^2+4k$, $4k=-36$

$\therefore k=-9$ …… ❷

(2) $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 이차방정식 $f(2x-1)=0$의 해는

$2x-1=\alpha$ 또는 $2x-1=\beta$

$2x=\alpha+1$ 또는 $2x=\beta+1$

$\therefore x=\dfrac{\alpha+1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+1}{2}$ …… ❸

이는 이차함수 $y=f(2x-1)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표와 같으므로 두 점 사이의 거리는

$\dfrac{\beta+1}{2}-\dfrac{\alpha+1}{2}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}=\dfrac{10}{2}=5$ …… ❹

답 (1) -9 (2) 5

채점기준	배점
❶ 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β로 놓고 관계식 세우기	2
❷ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 k의 값 구하기	2
❸ 방정식 $f(2x-1)=0$의 해를 α, β로 나타내기	2
❹ 이차함수 $y=f(2x-1)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리 구하기	2

다른풀이 (2) $f(x)=x^2-8x-9$이므로

$f(2x-1)=(2x-1)^2-8(2x-1)-9=4x^2-20x$

이차함수 $y=f(2x-1)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 $4x^2-20x=0$에서

$4x(x-5)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=5$

따라서 구하는 거리는 $5-0=5$

수능형 기출문제 & 변형문제

p.124~128

1 이차방정식 $x^2+k(2p-3)x-(p^2-2)k+q+2=0$이 1을 근으로 가지므로 $x=1$을 대입하면

$1+k(2p-3)-(p^2-2)k+q+2=0$

$2kp-3k-kp^2+2k+q+3=0$, $2kp-k-kp^2+q+3=0$

$k(2p-1-p^2)+q+3=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2p-1-p^2=0$, $q+3=0$

$\therefore p=1$, $q=-3$

$\therefore p+q=1+(-3)=-2$ 답 ②

2 이차방정식 $x^2+(2k-1)x+(k+3)p-q+2=0$이 1을 근으로 가지므로 $x=1$을 대입하면

$1+2k-1+(k+3)p-q+2=0$, $2k+kp+3p-q+2=0$

$k(2+p)+3p-q+2=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2+p=0$, $3p-q+2=0$

$\therefore p=-2$, $q=-4$

$\therefore pq=-2\times(-4)=8$ 답 ③

3 α, β는 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 직선 $y=x+6$의 교점의 x좌표이므로 이차방정식 $ax^2=x+6$, 즉 $ax^2-x-6=0$의 두 실근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{1}{a}$, $\alpha\beta=-\dfrac{6}{a}$ …… ㉠

$A(\alpha, \alpha+6)$, $B(\beta, \beta+6)$에서 $\overline{CH}=\alpha+6$, $\overline{BH}=\beta+6$이므로

$\overline{BC}=\overline{BH}-\overline{CH}=(\beta+6)-(\alpha+6)=\beta-\alpha$

이때 $\overline{BC}=\dfrac{7}{2}$이므로 $\beta-\alpha=\dfrac{7}{2}$

따라서 $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서

$\left(\frac{1}{a}\right)^2=\left(-\frac{7}{2}\right)^2+4\times\left(-\frac{6}{a}\right)$

$\frac{1}{a^2}=\frac{49}{4}-\frac{24}{a}$, $4=49a^2-96a$, $49a^2-96a-4=0$

$(49a+2)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

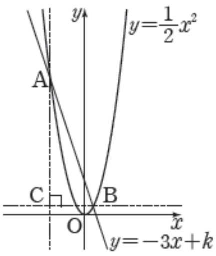
㉠에서 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=-3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times(-3)=\frac{25}{4}$ 답 ②

4 α, β는 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$의 교점의 x좌표이므로 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2=-3x+k$, 즉 $x^2+6x-2k=0$의 두 실근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=-2k$ ······ ㉠

오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 C라 하자. 직선 AB의 기울기가 -3이므로 $\overline{BC}=t\ (t>0)$라 하면 $\overline{AC}=3t$이고, 직각삼각형 ACB에서



$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$이므로

$(3t)^2+t^2=(10\sqrt{10})^2$, $9t^2+t^2=1000$, $10t^2=1000$

$t^2=100 \qquad \therefore t=10\ (\because t>0)$

즉, $\overline{BC}=10$이므로 $\beta-\alpha=10$

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서

$(-6)^2=(-10)^2+4\times(-2k)$

$36=100-8k$, $8k=64 \qquad \therefore k=8$

㉠에서 $\alpha\beta=-16$이므로

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$
$$=\frac{(-6)^2-2\times(-16)}{(-16)^2}=\frac{17}{64}$$
답 ②

5 세 이차함수의 최고차항의 계수의 절댓값이 같으므로 $f(x)$, $h(x)$의 최고차항의 계수를 $a\ (a>0)$라 하면 $g(x)$의 최고차항의 계수는 $-a$이다.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 -1, 1이므로

$f(x)=a(x+1)(x-1)$

이차방정식 $g(x)=0$의 두 실근은 -2, 1이므로

$g(x)=-a(x+2)(x-1)$

이차방정식 $h(x)=0$의 두 실근은 1, 2이므로

$h(x)=a(x-1)(x-2)$

$f(x)+g(x)+h(x)=0$에서

$a(x+1)(x-1)-a(x+2)(x-1)+a(x-1)(x-2)=0$

$a(x-1)(x+1-x-2+x-2)=0$

$(x-1)(x-3)=0\ (\because a>0)$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 이차방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$의 모든 근의 합은

$1+3=4$ 답 ④

6 세 이차함수의 최고차항의 계수의 절댓값이 같으므로 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $a\ (a>0)$라 하면 $g(x)$, $h(x)$의 최고차항의 계수는 $-a$이다.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 -2, 2이므로

$f(x)=a(x+2)(x-2)$

이차방정식 $g(x)=0$의 두 실근은 -1, 2이므로

$g(x)=-a(x+1)(x-2)$

이차방정식 $h(x)=0$의 두 실근은 2, 4이므로

$h(x)=-a(x-2)(x-4)$

$f(x)+g(x)=h(x)$에서 $f(x)+g(x)-h(x)=0$이므로

$a(x+2)(x-2)-a(x+1)(x-2)+a(x-2)(x-4)=0$

$a(x-2)(x+2-x-1+x-4)=0$

$(x-2)(x-3)=0\ (\because a>0)$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 이차방정식 $f(x)+g(x)=h(x)$의 모든 근의 곱은

$2\times3=6$ 답 ⑤

7 x_1, x_2는 이차방정식 $x^2-4x+4=n$, 즉 $x^2-4x+4-n=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=4$, $x_1x_2=4-n$

$x_1<x_2$라 하면

(i) $n\le4$일 때,

$x_1x_2=4-n\ge0$이므로 $0\le x_1<x_2$

$\therefore \frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4}{2}=2$

즉, $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수이므로 자연수 n은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

(ii) $n>4$일 때,

$x_1x_2=4-n<0$이므로 $x_1<0<x_2$

$\therefore \frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{-x_1+x_2}{2}$

이때

$(-x_1+x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$
$=4^2-4(4-n)=4n$

이므로

$-x_1+x_2=2\sqrt{n}\ (\because x_2>x_1$에서 $-x_1+x_2>0)$

$\therefore \frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{-x_1+x_2}{2}=\frac{2\sqrt{n}}{2}=\sqrt{n}$

$\sqrt{n}$이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 $n\ (n>4)$은 3^2, 4^2, 5^2, $\cdots$, 10^2의 8개이다.

(i), (ii)에서 자연수 n은 12개이다. 답 12

참고1 이차방정식 $x^2-4x+4=n$, 즉 $x^2-4x+4-n=0$의 판별식을 D라 하면

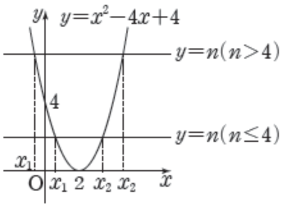
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times(4-n)=n>0$

이므로 이차함수 $y=x^2-4x+4$의 그래프와 직선 $y=n$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

참고2 이차함수 $y=x^2-4x+4$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$n\le4$이면 $0\le x_1<x_2$

$n>4$이면 $x_1<0<x_2$



8 α, β는 이차방정식 $x^2-7x+8=x+n$, 즉 $x^2-8x+8-n=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=8-n$

$\alpha<\beta$라 하면

(i) $n\le8$일 때,

$\alpha\beta=8-n\ge0$이므로 $0\le\alpha<\beta$

$\therefore \frac{|\alpha|+|\beta|}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{8}{2}=4$

즉, $\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}$의 값이 자연수이므로 자연수 n은 1, 2, 3, $\cdots$, 8의 8개이다.

(ii) $n>8$일 때,

$\alpha\beta=8-n<0$이므로 $\alpha<0<\beta$

$\therefore \frac{|\alpha|+|\beta|}{2}=\frac{-\alpha+\beta}{2}$

이때

$(-\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8^2-4(8-n)$

$=4n+32=4(n+8)$

이므로

$-\alpha+\beta=2\sqrt{n+8}$ ($\because$ $\beta>\alpha$에서 $-\alpha+\beta>0$)

$\therefore \frac{|\alpha|+|\beta|}{2}=\frac{-\alpha+\beta}{2}=\frac{2\sqrt{n+8}}{2}=\sqrt{n+8}$

$\sqrt{n+8}$이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n $(n>8)$은 5^2-8, 6^2-8, 7^2-8, $\cdots$, 10^2-8의 6개이다.

(i), (ii)에서 자연수 n은 14개이다. 답 14

참고1 이차방정식 $x^2-7x+8=x+n$, 즉 $x^2-8x+8-n=0$의 판별식을 D라 하면 자연수 n에 대하여

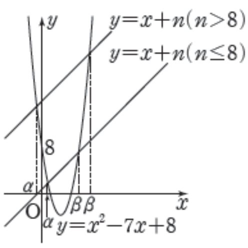
$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\times(8-n)=n+8>0$

이므로 이차함수 $y=x^2-7x+8$의 그래프와 직선 $y=x+n$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

참고2 이차함수 $y=x^2-7x+8$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 점 $(0, 8)$을 지나므로

$n\le8$이면 $0\le\alpha<\beta$

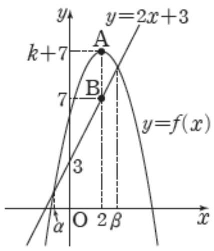
$n>8$이면 $\alpha<0<\beta$



9 $f(x)=-x^2+4x+k+3=-(x-2)^2+k+7$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 A$(2, k+7)$을 꼭짓점으로 하고 위로 볼록한 포물선이다.

이때 직선 $y=2x+3$이 점 B$(2, 7)$을 지나고, 양수 k에 대하여 $k+7>7$이므로 점 A는 점 B보다 위쪽에 있다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+3$은 위의 그림과 같으므로 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $k+7$, $x=\alpha$에서 최솟값 $f(\alpha)$를 갖는다. 이때 최댓값이 10이므로

$k+7=10$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore f(x)=-x^2+4x+6$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x+6=2x+3$에서

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

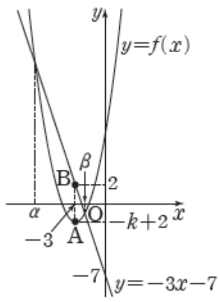
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ $\quad\therefore \alpha=-1$, $\beta=3$

따라서 $\alpha\le x\le\beta$, 즉 $-1\le x\le3$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(\alpha)=f(-1)=-1-4+6=1$ 답 ①

10 $f(x)=x^2+6x-k+11=(x+3)^2-k+2$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 A$(-3, -k+2)$를 꼭짓점으로 하고 아래로 볼록한 포물선이다. 이때 직선 $y=-3x-7$이 점 B$(-3, 2)$를 지나고, 양수 k에 대하여 $-k+2<2$이므로 점 B는 점 A보다 위쪽에 있다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-3x-7$은 위의 그림과 같으므로 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최댓값 $\alpha^2+6\alpha-k+11$, $x=-3$에서 최솟값 $-k+2$를 갖는다. 이때 최댓값과 최솟값의 차가 16이므로

$(\alpha^2+6\alpha-k+11)-(-k+2)=16$

$\alpha^2+6\alpha+9=16$, $\alpha^2+6\alpha-7=0$

$(\alpha+7)(\alpha-1)=0$ $\quad\therefore \alpha=-7$ ($\because$ $\alpha<-3$)

점 $(\alpha, f(\alpha))$, 즉 점 $(-7, f(-7))$은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-3x-7$의 교점이므로

$f(-7)=49-42-k+11=-3\times(-7)-7$

$\therefore k=4$, $f(-7)=14$

따라서 $f(x)=x^2+6x+7$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-3x-7$의 교점의 x좌표는

$x^2+6x+7=-3x-7$에서

$x^2+9x+14=0$, $(x+7)(x+2)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=-2$

즉, $\alpha=-7$, $\beta=-2$이고 $f(\beta)=f(-2)=4-12+7=-1$

$\therefore \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{14}{-1}=-14$ 답 -14

3 여러 가지 방정식

교과서 예제

p.131, 133

01 (1) $8x^3+1=0$에서 $(2x)^3+1^3=0$

$(2x+1)(4x^2-2x+1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$

(2) $x^3+64=0$에서 $x^3+4^3=0$

$(x+4)(x^2-4x+16)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

(3) $x^4-81=0$에서 $(x^2-9)(x^2+9)=0$

$(x+3)(x-3)(x^2+9)=0$

$\therefore x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

(4) $x^3-25x=0$에서 $x(x^2-25)=0$

$x(x+5)(x-5)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm5$

답 (1) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$

(2) $x=-4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}i$

(3) $x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

(4) $x=0$ 또는 $x=\pm5$

02 (1) $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$이라 하면

$P(1)=1-6+11-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$

$=(x-1)(x-2)(x-3)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(2) $P(x)=x^3-3x^2+x+5$라 하면

$P(-1)=-1-3-1+5=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & -3 & 1 & 5 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=2\pm i$

(3) $P(x)=x^4+3x^3-6x-4$라 하면

$P(-1)=1-3+6-4=0$

$P(-2)=16-24+12-4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & 3 & 0 & -6 & -4 \\ & & -1 & -2 & 2 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 2 & -2 & -4 & \boxed{0} \\ & & -2 & 0 & 4 & \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x+2)(x^2-2)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=-1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

(4) $P(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$라 하면

$P(1)=1+1-1+1-2=0$

$P(-2)=16-8-4-2-2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ & & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} \\ & & -2 & 0 & -2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x^2+1)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\pm i$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(2) $x=-1$ 또는 $x=2\pm i$

(3) $x=-1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

(4) $x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=\pm i$

03 (1) $(x^2+1)^2-(x^2+1)-2=0$에서 $x^2+1=X$로 놓으면

$X^2-X-2=0$, $(X+1)(X-2)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=2$

(i) $X=-1$일 때

$x^2+1=-1$, $x^2=-2$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{2}i$

(ii) $X=2$일 때

$x^2+1=2$, $x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm1$

(i), (ii)에서 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

(2) $(x^2-6x)^2+2(x^2-6x)=15$에서 $x^2-6x=X$로 놓으면

$X^2+2X=15$, $X^2+2X-15=0$

$(X+5)(X-3)=0$ $\quad\therefore X=-5$ 또는 $X=3$

(i) $X=-5$일 때

$x^2-6x=-5$, $x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

(ii) $X=3$일 때

$x^2-6x=3$, $x^2-6x-3=0$

$\therefore x=3\pm2\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=3\pm2\sqrt{3}$

(3) $x^4-x^2-20=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2-X-20=0$, $(X+4)(X-5)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=5$

즉, $x^2=-4$ 또는 $x^2=5$이므로

$x=\pm2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$

(4) $x^4-22x^2+9=0$에서

$(x^4-6x^2+9)-16x^2=0$, $(x^2-3)^2-(4x)^2=0$

$\{(x^2-3)+4x\}\{(x^2-3)-4x)\}=0$

$(x^2+4x-3)(x^2-4x-3)=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{7}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

답 (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$
(2) $x=1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=3\pm2\sqrt{3}$
(3) $x=\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=\pm2i$
(4) $x=-2\pm\sqrt{7}$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

04 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-2$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$

(3) $\alpha\beta\gamma=1$

(4) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3$

답 (1) -2 (2) -3 (3) 1 (4) -3

05 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta+\gamma=6$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$

(3) $\alpha\beta\gamma=-3$

(4) $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{6}{-3}==-2$

답 (1) 6 (2) 2 (3) -3 (4) -2

06 (1) -2, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$을 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+2)\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}=0$

$(x+2)(x^2-4x+1)=0$

$\therefore x^3-2x^2-7x+2=0$

(2) 2, $3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$를 근으로 갖고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x-2)\{x-(3+\sqrt{2})\}\{x-(3-\sqrt{2})\}=0$

$(x-2)(x^2-6x+7)=0$

$\therefore x^3-8x^2+19x-14=0$

(3) -1, $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+1)\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}=0$

$(x+1)(x^2-2x+5)=0$

$\therefore x^3-x^2+3x+5=0$

(4) 1, $3+i$, $3-i$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x-1)\{x-(3+i)\}\{x-(3-i)\}=0$

$(x-1)(x^2-6x+10)=0$

$\therefore x^3-7x^2+16x-10=0$

답 (1) $x^3-2x^2-7x+2=0$ (2) $x^3-8x^2+19x-14=0$
(3) $x^3-x^2+3x+5=0$ (4) $x^3-7x^2+16x-10=0$

다른풀이 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $x^3-\{(-2)+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}x^2$
$+\{(-2)\times(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\times(-2)\}x$
$-(-2)\times(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^3-2x^2-7x+2=0$

(2) $x^3-\{2+(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\}x^2$
$+\{2\times(3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\times2\}x$
$-2\times(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^3-8x^2+19x-14=0$

(3) $x^3-\{(-1)+(1+2i)+(1-2i)\}x^2$
$+\{(-1)\times(1+2i)+(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\times(-1)\}x$
$-(-1)\times(1+2i)(1-2i)=0$

$\therefore x^3-x^2+3x+5=0$

(4) $x^3-\{1+(3+i)+(3-i)\}x^2$
$+\{1\times(3+i)+(3+i)(3-i)+(3-i)\times1\}x$
$-1\times(3+i)(3-i)=0$

$\therefore x^3-7x^2+16x-10=0$

07 삼차방정식 $x^3-4x^2+ax+b=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 $1+\sqrt{2}$도 근이다. 또, 나머지 한 근이 2이므로

$x^3-4x^2+ax+b=(x-2)\{x-(1-\sqrt{2})\}\{x-(1+\sqrt{2})\}$
$=(x-2)(x^2-2x-1)$
$=x^3-4x^2+3x+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=3$, $b=2$ 답 $a=3$, $b=2$

다른풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$a=2\times(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\times2$
$=(2-2\sqrt{2})+(1-2)+(2+2\sqrt{2})=3$

$-b=2(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-2$ $\therefore b=2$

08 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다. 또, 나머지 한 근이 -3이므로

$x^3+x^2+ax+b=(x+3)\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$
$=(x+3)(x^2-2x+2)$
$=x^3+x^2-4x+6$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-4$, $b=6$ 답 $a=-4$, $b=6$

다른풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-3(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\times(-3)$
$=(-3-3i)+(1-i^2)+(-3+3i)=-4$

$-b=-3(1+i)(1-i)=-6$ $\therefore b=6$

09 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$, $\omega^3=1$, $\overline{\omega}^3=1$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

(5) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

(6) $\omega^3=1$에서 $\omega^{20}=(\omega^3)^6\times\omega^2=\omega^2,\ \omega^{16}=(\omega^3)^5\times\omega=\omega$이므로

$\omega^{20}+\omega^{16}+1=\omega^2+\omega+1=0$

(7) $\omega^3=1$에서 $\omega^{50}=(\omega^3)^{16}\times\omega^2=\omega^2,\ \frac{1}{\omega^2}=\omega$이고,

$\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+\omega=-1$이므로

$$\omega^{50}+\frac{1}{\omega^{50}}=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=-1$$

답 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) 0 (7) -1

10 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0,\ (x+1)(x^2-x+1)=0$

이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 근이다.

$\therefore\ \omega^2-\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0,\ \omega^3=-1,\ \overline{\omega}^3=-1,$

$\omega^6=1,\ \overline{\omega}^6=1$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

(5) $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=\omega$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{\omega}{\omega}=1$$

(6) $\omega^3=-1,\ \omega^6=1$에서

$\omega^{20}=(\omega^6)^3\times\omega^2=\omega^2$

$\omega^{16}=(\omega^6)^2\times\omega^4=\omega^4=\omega^3\times\omega=-\omega$

이므로

$\omega^{20}+\omega^{16}+1=\omega^2-\omega+1=0$

(7) $\omega^3=-1,\ \omega^6=1$에서

$\omega^{100}=(\omega^6)^{16}\times\omega^4=\omega^4=\omega^3\times\omega=-\omega$

$\omega^2-\omega+1=0$에서 $-\omega^2-1=-\omega$이므로

$$\omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}=-\omega-\frac{1}{\omega}=\frac{-\omega^2-1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 0 (5) 1 (6) 0 (7) -1

다른풀이 (7) $\omega^{100}+\frac{1}{\omega^{100}}=-\omega-\frac{1}{\omega}=-\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)=-1$

11 (1) $\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x-1)^2=5$

$x^2+x^2-2x+1=5,\ 2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

이것을 ㉢에 각각 대입하면

$x=-1$일 때 $y=-2$

$x=2$일 때 $y=1$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-2x+3$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+3(-2x+3)^2=4$

$x^2+3(4x^2-12x+9)=4$

$13x^2-36x+23=0,\ (x-1)(13x-23)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=\frac{23}{13}$

이것을 ㉢에 각각 대입하면

$x=1$일 때 $y=1$

$x=\frac{23}{13}$일 때 $y=-\frac{7}{13}$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{23}{13} \\ y=-\frac{7}{13} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=-15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x(-x+2)=-15,\ -x^2+2x=-15$

$x^2-2x-15=0,\ (x+3)(x-5)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=5$

이것을 ㉢에 각각 대입하면

$x=-3$일 때 $y=5$

$x=5$일 때 $y=-3$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\frac{23}{13} \\ y=-\frac{7}{13} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

12 (1) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=36 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(2x-y)=0$

$\therefore\ y=x$ 또는 $y=2x$

(ⅰ) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+x^2=36$, $x^2=36$ $\quad\therefore x=\pm 6$

$x=6$, $x=-6$을 $y=x$에 각각 대입하면

$x=6$일 때 $y=6$

$x=-6$일 때 $y=-6$

(ⅱ) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x\times 2x+(2x)^2=36$, $x^2-2x^2+4x^2=36$

$3x^2=36$, $x^2=12$ $\quad\therefore x=\pm 2\sqrt{3}$

$x=2\sqrt{3}$, $x=-2\sqrt{3}$을 $y=2x$에 각각 대입하면

$x=2\sqrt{3}$일 때 $y=4\sqrt{3}$

$x=-2\sqrt{3}$일 때 $y=-4\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=4\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-4\sqrt{3} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3xy+3y^2=21 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+3y)(x-y)=0$

$\therefore x=-3y$ 또는 $x=y$

(ⅰ) $x=-3y$를 ㉡에 대입하면

$(-3y)^2+3\times(-3y)\times y+3y^2=21$

$9y^2-9y^2+3y^2=21$

$3y^2=21$, $y^2=7$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{7}$

$y=\sqrt{7}$, $y=-\sqrt{7}$을 $x=-3y$에 각각 대입하면

$y=\sqrt{7}$일 때 $x=-3\sqrt{7}$

$y=-\sqrt{7}$일 때 $x=3\sqrt{7}$

(ⅱ) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+3y^2+3y^2=21$, $7y^2=21$, $y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$을 $x=y$에 각각 대입하면

$y=\sqrt{3}$일 때 $x=\sqrt{3}$

$y=-\sqrt{3}$일 때 $x=-\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-2xy-8y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=17 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2y)(x-4y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=4y$

(ⅰ) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2+y^2=17$, $4y^2+y^2=17$, $5y^2=17$, $y^2=\dfrac{17}{5}$

$\therefore y=\pm\dfrac{\sqrt{85}}{5}$

$y=\dfrac{\sqrt{85}}{5}$, $y=-\dfrac{\sqrt{85}}{5}$를 $x=-2y$에 각각 대입하면

$y=\dfrac{\sqrt{85}}{5}$일 때 $x=-\dfrac{2\sqrt{85}}{5}$

$y=-\dfrac{\sqrt{85}}{5}$일 때 $x=\dfrac{2\sqrt{85}}{5}$

(ⅱ) $x=4y$를 ㉡에 대입하면

$(4y)^2+y^2=17$, $16y^2+y^2=17$, $17y^2=17$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm 1$

$y=1$, $y=-1$을 $x=4y$에 각각 대입하면

$y=1$일 때 $x=4$

$y=-1$일 때 $x=-4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-\dfrac{2\sqrt{85}}{5} \\ y=\dfrac{\sqrt{85}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{85}}{5} \\ y=-\dfrac{\sqrt{85}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=4\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-4\sqrt{3} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-3\sqrt{7} \\ y=\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=-\dfrac{2\sqrt{85}}{5} \\ y=\dfrac{\sqrt{85}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{85}}{5} \\ y=-\dfrac{\sqrt{85}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$

기출 Best | 1회

p.134~137

01 $x^3-x^2-12x=0$에서

$x(x^2-x-12)=0$, $x(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

따라서 해가 아닌 것은 ① -4, ④ 3이다. 답 ①, ④

02 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면

$P(1)=1-2-5+6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x+2)(x-3)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

즉, $\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=3$이므로

$\alpha-\beta-\gamma=-2-1-3=-6$ 답 ③

03 $P(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$이라 하면
$P(1)=1+5+5-5-6=0$
$P(-1)=1-5+5+5-6=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\ & & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline -1 & 1 & 6 & 11 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & -5 & -6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+5x+6)$
$\qquad\quad =(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$
따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은
$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$
이때 가장 큰 근은 1, 가장 작은 근은 -3이므로
$\alpha=1$, $\beta=-3$
$\therefore \alpha+\beta=1+(-3)=-2$ 답 ②

04 $(x^2+2x+3)^2-2(x^2+2x+3)-8=0$에서
$x^2+2x+3=X$로 놓으면
$X^2-2X-8=0$, $(X+2)(X-4)=0$
$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$
(i) $X=-2$일 때
$x^2+2x+3=-2$에서 $x^2+2x+5=0$
판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=1^2-1\times5=-4<0$
이므로 $x^2+2x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
즉, 두 허근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 5이므로
$n=5$
(ii) $X=4$일 때
$x^2+2x+3=4$에서 $x^2+2x-1=0$
판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=1^2-1\times(-1)=2>0$
이므로 $x^2+2x-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
즉, 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 -1이므로
$m=-1$
(i), (ii)에서 $m-n=-1-5=-6$ 답 ①

05 $x^4-x^2-6=0$에서 $x^2=X$로 놓으면
$X^2-X-6=0$, $(X+2)(X-3)=0$
$\therefore X=-2$ 또는 $X=3$
즉, $x^2=-2$ 또는 $x^2=3$이므로
$x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$
$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(-\sqrt{2}i)^2+(\sqrt{2}i)^2+(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2$
$\qquad =-2+(-2)+3+3$
$\qquad =2$ 답 ②

06 삼차방정식 $x^3+ax^2+x-6=0$의 한 근이 -2이므로
$-8+4a-2-6=0$, $4a=16$ $\quad\therefore a=4$
따라서 주어진 방정식은 $x^3+4x^2+x-6=0$
$P(x)=x^3+4x^2+x-6$이라 하면 $P(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & -2 & -4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x^2+2x-3)$
$\qquad\quad =(x+2)(x+3)(x-1)$
따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은
$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$
이때 가장 작은 실근은 -3이므로 $b=-3$
$\therefore a-b=4-(-3)=7$ 답 ④
참고 $P(x)=0$의 한 근이 -2이므로 $P(-2)=0$

07 사차방정식 $2x^4-x^3+kx^2-5x+6=0$의 한 근이 -1이므로
$2+1+k+5+6=0$ $\quad\therefore k=-14$
따라서 주어진 방정식은
$2x^4-x^3-14x^2-5x+6=0$
$P(x)=2x^4-x^3-14x^2-5x+6$이라 하면
$P(-1)=0$, $P(-2)=32+8-56+10+6=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -1 & -14 & -5 & 6 \\ & & -2 & 3 & 11 & -6 \\ \hline -2 & 2 & -3 & -11 & 6 & \boxed{0} \\ & & -4 & 14 & -6 & \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x+2)(2x^2-7x+3)$
$\qquad\quad =(x+1)(x+2)(2x-1)(x-3)$
따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은
$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$
가장 큰 실근은 3이므로 $M=3$
$\therefore k+M=-14+3=-11$ 답 ⑤

08 $P(x)=x^3-(a+1)x^2+a$라 하면
$P(1)=1-(a+1)+a=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -a-1 & 0 & a \\ & & 1 & -a & -a \\ \hline & 1 & -a & -a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-ax-a)$
$P(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2-ax-a=0$
이때 방정식 $P(x)=0$이 중근을 가져야 하므로
(i) 방정식 $x^2-ax-a=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$1-a-a=0$, $-2a=-1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

(ii) 방정식 $x^2-ax-a=0$이 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4\times1\times(-a)=0,\ a^2+4a=0$

$a(a+4)=0 \quad \therefore a=-4$ 또는 $a=0$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+(-4)+0=-\frac{7}{2}$ 답 ②

09 $x^4+ax^2+a^2-3a-4=0$에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2+at+a^2-3a-4=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 사차방정식이 중근인 실근과 서로 다른 두 허근을 가지므로 t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근 중 하나는 0, 나머지 하나는 음수이다.

㉠이 0을 근으로 가지므로 ㉠에 $t=0$을 대입하면

$a^2-3a-4=0,\ (a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 한 근은 0, 다른 한 근은 음수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-a<0 \quad \therefore a>0 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $a=4$ 답 ③

참고 $x^2=t$로 놓았으므로 이차방정식 ㉠의 두 근을 t_1, t_2라 하면 주어진 사차방정식의 네 근은 $\sqrt{t_1}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_2}$이다.

10 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x-6=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3+2x^2+3x-6=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

양변에 $x=-3$을 대입하면

$-27+18-9-6=(-3-\alpha)(-3-\beta)(-3-\gamma)$

$-24=-(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$

$\therefore (3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)=24$ 답 ⑤

다른풀이 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x-6=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=6$

$\therefore (3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$

$=27+9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$

$=27+9\times(-2)+3\times3+6=24$

11 삼차방정식 $x^3+ax^2+6x+b=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $\frac{2}{1-i}=1+i$이므로 $1-i$도 근이다. 또, 나머지 한 근을 α라 하면

$x^3+ax^2+6x+b=(x-\alpha)\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$

$=(x-\alpha)(x^2-2x+2)$

$=x^3+(-\alpha-2)x^2+(2\alpha+2)x-2\alpha$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-\alpha-2,\ 6=2\alpha+2,\ b=-2\alpha$

$6=2\alpha+2$에서 $2\alpha=4 \quad \therefore \alpha=2$

따라서 $a=-2-2=-4$, $b=-2\times2=-4$이므로

$a+b=-4+(-4)=-8$ 답 ①

참고 $\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{1-i^2}=1+i$

다른풀이 삼차방정식 $x^3+ax^2+6x+b=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다. 또, 나머지 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha+\alpha(1+i)=6$

$2+2\alpha=6 \quad \therefore \alpha=2$

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근은 2, $1+i$, $1-i$이므로

$-a=2+(1+i)+(1-i)=4 \quad \therefore a=-4$

$-b=2(1+i)(1-i)=4 \quad \therefore b=-4$

$\therefore a+b=-4+(-4)=-8$

12 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$(x+2)(x+4)(x-2)=\frac{3}{2}x^3$

$2(x+2)(x+4)(x-2)=3x^3$

$x^3-8x^2+8x+32=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$P(x)=x^3-8x^2+8x+32$라 하면

$P(4)=64-128+32+32=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -8 & 8 & 32 \\ & & 4 & -16 & -32 \\ \hline & 1 & -4 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-4)(x^2-4x-8)$

$P(x)=0$에서 $x=4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{3}$

이때 x는 자연수이므로 $x=4$

따라서 처음 정육면체의 부피는

$4^3=64(\text{cm}^3)$ 답 ②

13 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 근이다. 즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1+\overline{\omega}}=\frac{(1+\overline{\omega})+(1+\omega)}{(1+\omega)(1+\overline{\omega})}=\frac{2+(\omega+\overline{\omega})}{1+(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$

$=\frac{2+1}{1+1+1}=1$ 답 ④

14 $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \therefore x^3=1$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$

$\therefore 1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+1+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^4}+\frac{1}{\omega^6}$

$=1+\omega^2+\omega+1+1+\omega+\omega^2+1 \left(\because \frac{1}{\omega^4}=\frac{1}{\omega}=\omega^2\right)$

$=2(\omega^2+\omega+1)+2$

$=2$ 답 ⑤

15 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 근이다.

$\therefore \omega^2-\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0,\ \omega^3=-1,\ \overline{\omega}^3=-1$

또, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega\overline{\omega}=1$이므로 $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega},\ \omega=\dfrac{1}{\overline{\omega}}$이므로

$\omega^2+\overline{\omega}^2=\dfrac{1}{\overline{\omega}^2}+\dfrac{1}{\omega^2}$ (참)

ㄷ. $\omega+\overline{\omega}=1$에서 $1-\omega=\overline{\omega}$

또, $\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}=\dfrac{\overline{\omega}+\omega}{\omega\overline{\omega}}=\dfrac{1}{1}=1$이므로

$(1-\omega)^n=\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}$에서 $\overline{\omega}^n=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\overline{\omega}^3=-1$에서 $\overline{\omega}^6=1$이므로 ㉠을 만족시키는 n은 6의 배수이다. 즉, 100 이하의 자연수 n은 6, 12, 18, $\cdots$, 96의 16개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

16 $\begin{cases} 2x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(2x-1)+(2x-1)^2=7,\ 3x^2-3x-6=0$

$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때 x는 양수이므로 $x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=3$

$\therefore x+y=2+3=5$

답 ④

17 $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3xy+4y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-3y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-3y^2+4y^2=8,\ 2y^2=8,\ y^2=4 \quad \therefore y=\pm 2$

$y=2,\ y=-2$를 $x=y$에 각각 대입하면

$y=2$일 때 $x=2$

$y=-2$일 때 $x=-2$

$\therefore xy=2\times 2=-2\times(-2)=4$

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$(3y)^2-3\times 3y\times y+4y^2=8,\ 4y^2=8,\ y^2=2$

$\therefore y=\pm\sqrt{2}$

$y=\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$를 $x=3y$에 각각 대입하면

$y=\sqrt{2}$일 때 $x=3\sqrt{2}$

$y=-\sqrt{2}$일 때 $x=-3\sqrt{2}$

$\therefore xy=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=-3\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=6$

(i), (ii)에서 xy의 최댓값은 6이다.

답 ③

18 두 연립방정식의 공통인 해는

$\begin{cases} x+2y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $x=2-2y$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(2-2y)y=-4,\ 2y-2y^2+4=0$

$y^2-y-2=0,\ (y+1)(y-2)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=2$

이것을 ㉢에 각각 대입하면

$y=-1$일 때 $x=4$

$y=2$일 때 $x=-2$

(i) $x=4,\ y=-1$을 $x^2-ay^2=18,\ ax+by=1$에 각각 대입하면

$16-a=18 \quad \therefore a=-2$

$4a-b=1,\ -8-b=1 \quad \therefore b=-9$

(ii) $x=-2,\ y=2$를 $x^2-ay^2=18,\ ax+by=1$에 각각 대입하면

$4-4a=18,\ -4a=14 \quad \therefore a=-\dfrac{7}{2}$

$-2a+2b=1,\ 7+2b=1,\ 2b=-6 \quad \therefore b=-3$

이때 $a,\ b$는 정수이므로 (i), (ii)에서 $a=-2,\ b=-9$

$\therefore ab=-2\times(-9)=18$

답 ⑤

19 $\begin{cases} x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=6$

$x^2+2(x^2-2kx+k^2)-6=0$

$3x^2-4kx+2k^2-6=0$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로 이 이차방정식은 중근을 가져야 한다. 즉, 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-3(2k^2-6)=0,\ 4k^2-6k^2+18=0$

$-2k^2+18=0,\ k^2=9$

$\therefore k=3\ (\because k>0)$

답 ③

20 직육면체의 부피가 72이므로

$6xy=72 \quad \therefore xy=12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

모든 모서리의 길이의 합이 52이므로

$4(x+y+6)=52,\ x+y+6=13$

$\therefore y=7-x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x(7-x)=12,\ 7x-x^2=12$

$x^2-7x+12=0,\ (x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

이것을 ㉡에 각각 대입하면

$x=3$일 때 $y=4$

$x=4$일 때 $y=3$

이때 $x>y$이므로 $x=4$, $y=3$

$\therefore x^2+y=16+3=19$ 답 ③

기출 Best 2회

p.138~141

01 $x^3-27=0$에서 $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 해가 아닌 것은 ① -3, ⑤ $-3+3\sqrt{3}i$이다. 답 ①, ⑤

02 $P(x)=x^3-8x^2+17x-10$으로 놓으면

$P(1)=1-8+17-10=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -8 & 17 & -10 \\ & & 1 & -7 & 10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-7x+10)$

$\qquad\quad=(x-1)(x-2)(x-5)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

즉, $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=5$이므로

$\alpha-\beta+\gamma=1-2+5=4$ 답 ①

03 $P(x)=x^4-5x^3+10x^2-10x+4$라 하면

$P(1)=0$, $P(2)=16-40+40-20+4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -5 & 10 & -10 & 4 \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 6 & -4 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 4 & \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x^2-2x+2)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm i$

즉, 1을 제외한 나머지 세 근은 2, $1+i$, $1-i$이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2^2+(1+i)^2+(1-i)^2=4$ 답 ①

04 $x(x+1)(x+2)(x+3)=8$에서

$\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-8=0$

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)-8=0$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$X(X+2)-8=0$, $X^2+2X-8=0$

$(X+4)(X-2)=0 \qquad \therefore X=-4$ 또는 $X=2$

(i) $X=-4$일 때

$x^2+3x=-4$에서 $x^2+3x+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=3^2-4\times1\times4=-7<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=2$일 때

$x^2+3x=2$에서 $x^2+3x-2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=3^2-4\times1\times(-2)=17>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 -3이다.

(i), (ii)에서 주어진 사차방정식의 모든 실근의 합은 -3이다.

답 ③

05 $x^4-7x^2+9=0$에서

$x^4-6x^2+9-x^2=0$, $(x^2-3)^2-x^2=0$

$\{(x^2-3)+x\}\{(x^2-3)-x\}=0$

$(x^2+x-3)(x^2-x-3)=0$

$x^2+x-3=0$ 또는 $x^2-x-3=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

따라서 모든 양의 실근의 곱은

$\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\times\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}=\dfrac{(\sqrt{13}-1)(\sqrt{13}+1)}{4}$

$=\dfrac{13-1}{4}=3$ 답 ③

06 삼차방정식 $x^3+kx^2-(3k-1)x-2=0$의 한 근이 2이므로

$8+4k-2(3k-1)-2=0$, $8+4k-6k+2-2=0$

$-2k+8=0$, $-2k=-8 \qquad \therefore k=4$

따라서 주어진 방정식은 $x^3+4x^2-11x-2=0$

$P(x)=x^3+4x^2-11x-2$라 하면

$P(2)=8+16-22-2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 4 & -11 & -2 \\ & & 2 & 12 & 2 \\ \hline & 1 & 6 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2+6x+1)$

$P(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x^2+6x+1=0$

이때 2가 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2+6x+1=0$의 근이므로 나머지 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 -6이다. 답 ①

07 사차방정식 $x^4-3x^3+x^2+kx-30=0$의 한 근이 -2이므로

$16+24+4-2k-30=0$, $2k=14 \qquad \therefore k=7$

따라서 주어진 방정식은 $x^4-3x^3+x^2+7x-30=0$

$P(x)=x^4-3x^3+x^2+7x-30$이라 하면

$P(-2)=0$, $P(3)=81-81+9+21-30=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -3 & 1 & 7 & -30 \\ & & -2 & 10 & -22 & 30 \\ \hline 3 & 1 & -5 & 11 & -15 & \boxed{0} \\ & & 3 & -6 & 15 & \\ \hline & 1 & -2 & 5 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x-3)(x^2-2x+5)$

$P(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=3$ 또는 $x^2-2x+5=0$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 실근은 $x=-2$ 또는 $x=3$이므로

$\alpha=3$

또, 허근 β, γ는 $x^2-2x+5=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\beta\gamma=5$

$\therefore k+\alpha+\beta\gamma=7+3+5=15$ 답 ⑤

참고 $x^2-2x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\times5=-4<0$이므로 허근을 갖는다.

08 $P(x)=x^3+(3k-1)x-3k$라 하면

$P(1)=1+(3k-1)-3k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 3k-1 & -3k \\ & & 1 & 1 & 3k \\ \hline & 1 & 1 & 3k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+x+3k)$

$P(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2+x+3k=0$

이때 방정식 $P(x)=0$이 중근을 가져야 하므로

(i) 방정식 $x^2+x+3k=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+1+3k=0$, $3k=-2$ $\quad\therefore k=-\dfrac{2}{3}$

(ii) 방정식 $x^2+x+3k=0$이 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+x+3k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times3k=0$, $12k=1$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{12}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{12}=-\dfrac{7}{12}$ 답 ②

09 $x^4-ax^2+a^2-4a-12=0$에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2-at+a^2-4a-12=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

주어진 사차방정식이 중근인 실근과 서로 다른 두 허근을 가지므로 t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근 중 하나는 0, 나머지 하나는 음수이다.

㉠이 0을 근으로 가지므로 ㉠에 $t=0$을 대입하면

$a^2-4a-12=0$, $(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 한 근은 0, 다른 한 근은 음수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=a<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $a=-2$ 답 ②

10 삼차방정식 $x^3+2x^2-5x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

x^3+2x^2-5x+3

$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

$2=-(\alpha+\beta+\gamma)$, 즉 $\alpha+\beta+\gamma=-2$이므로

$\alpha+\beta=-2-\gamma$, $\beta+\gamma=-2-\alpha$, $\gamma+\alpha=-2-\beta$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)$

이때 ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$(-2-\alpha)(-2-\beta)(-2-\gamma)=-8+8+10+3=13$ 답 ④

다른풀이 삼차방정식 $x^3+2x^2-5x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=-3$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)$

$=-8-4(\alpha+\beta+\gamma)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=-8-4\times(-2)-2\times(-5)-(-3)=13$

11 삼차방정식 $x^3-2x^2+ax+b=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다. 또, 나머지 한 근이 α이므로

$x^3-2x^2+ax+b=(x-\alpha)\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}$

$=(x-\alpha)(x^2-4x+5)$

$=x^3+(-\alpha-4)x^2+(4\alpha+5)x-5\alpha$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-2=-\alpha-4$, $a=4\alpha+5$, $b=-5\alpha$

$-2=-\alpha-4$에서 $\alpha=-2$이므로

$a=4\times(-2)+5=-3$

$b=-5\times(-2)=10$

$\therefore \alpha+a+b=-2+(-3)+10=5$ 답 ⑤

다른풀이 삼차방정식 $x^3-2x^2+ax+b=0$의 계수가 모두 실수이고 $2+i$가 한 근이므로 $2-i$도 근이다. 나머지 한 근이 α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+i)+(2-i)+\alpha=2$, $4+\alpha=2$ $\quad\therefore \alpha=-2$

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근은 -2, $2+i$, $2-i$이므로

$a=-2(2+i)+(2+i)(2-i)+(2-i)\times(-2)=-3$

$-b=-2(2+i)(2-i)=-10$ $\quad\therefore b=10$

$\therefore \alpha+a+b=-2+(-3)+10=5$

12 네 귀퉁이를 잘라 내어 만든 상자의 가로의 길이는 $(14-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(12-2x)$ cm, 높이는 x cm이고, 상자의 부피가 160 cm^3이므로

$x(14-2x)(12-2x)=160$

$x(7-x)(6-x)=40$, $x^3-13x^2+42x-40=0$

$P(x)=x^3-13x^2+42x-40$이라 하면

$P(2)=8-52+84-40=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -13 & 42 & -40 \\ & & 2 & -22 & 40 \\ \hline & 1 & -11 & 20 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-11x+20)$

$P(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{11\pm\sqrt{41}}{2}$

이때 x는 $0<x<6$인 자연수이므로 $x=2$ 답 ②

13 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 근이다. 즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \dfrac{2}{1-\omega}+\dfrac{2}{1-\overline{\omega}}=\dfrac{2(1-\overline{\omega})+2(1-\omega)}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}$

$=\dfrac{4-2(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}=\dfrac{4-2\times(-1)}{1-(-1)+1}$

$=2$ 답 ⑤

14 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다. 즉,

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

$\therefore \dfrac{1}{\omega+1}+\dfrac{1}{\omega^2+1}+\dfrac{1}{\omega^3+1}+\cdots+\dfrac{1}{\omega^{30}+1}$

$=10\left(\dfrac{1}{\omega+1}+\dfrac{1}{\omega^2+1}+\dfrac{1}{\omega^3+1}\right)$

$=10\left(\dfrac{1}{-\omega^2}+\dfrac{1}{-\omega}+\dfrac{1}{2}\right)=10\left(-\omega-\omega^2+\dfrac{1}{2}\right)$

$=10\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=15$ 답 ③

15 $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$, $\omega^3=1$, $\overline{\omega}^3=1$

또, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$2\omega^5+\omega^4-\omega^2=2\omega^2+\omega-\omega^2=\omega^2+\omega=-1$ (참)

ㄴ. $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2=-\omega-1$,

$\omega+\overline{\omega}=-1$에서 $\omega=-\overline{\omega}-1$이므로

$\omega-\omega^2+\omega^3-\omega^4+\omega^5-\omega^6+\omega^7-\omega^8+\omega^9$

$=\omega-\omega^2+\omega^3-\omega^3(\omega-\omega^2+\omega^3)+\omega^6(\omega-\omega^2+\omega^3)$

$=\omega-\omega^2+1-(\omega-\omega^2+1)+(\omega-\omega^2+1)$

$=\omega-\omega^2+1=\omega-(-\omega-1)+1=2\omega+2$

$=2(-\overline{\omega}-1)+2=-2\overline{\omega}$ (거짓)

ㄷ. $\omega+\overline{\omega}=-1$에서 $-\omega-1=\overline{\omega}$이므로

$\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(-\omega-1)^n$에서 $(-\overline{\omega})^n=\overline{\omega}^n$,

$(-1)^n\times\overline{\omega}^n=\overline{\omega}^n$ $\quad\therefore (-1)^n=1$

즉, n은 짝수이므로 100 이하의 자연수 n은 2, 4, 6, $\cdots$, 100의 50개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

16 $\begin{cases} 2x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-2x$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x\times(-2x)+(-2x)^2=12$, $x^2-2x^2+4x^2=12$

$3x^2=12$, $x^2=4$ $\quad\therefore x=\pm2$

$x=2$, $x=-2$를 ㉢에 각각 대입하면

$x=2$일 때 $y=-4$

$x=-2$일 때 $y=4$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-4$ 또는 $\alpha=-2$, $\beta=4$이므로

$\alpha^2+\beta^2=4+16=20$ 답 ④

17 $\begin{cases} x^2-4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-(2y)^2=0$, $(x+2y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=2y$

(ⅰ) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$(-2y)^2-(-2y)\times y+2y^2=16$, $4y^2+2y^2+2y^2=16$

$8y^2=16$, $y^2=2$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{2}$

$y=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$를 $x=-2y$에 각각 대입하면

$y=\sqrt{2}$일 때 $x=-2\sqrt{2}$

$y=-\sqrt{2}$일 때 $x=2\sqrt{2}$

$\therefore xy=-2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-4$

(ⅱ) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2-2y\times y+2y^2=16$

$4y^2-2y^2+2y^2=16$, $4y^2=16$

$y^2=4$ $\quad\therefore y=\pm2$

$y=2$, $y=-2$를 $x=2y$에 각각 대입하면

$y=2$일 때 $x=4$

$y=-2$일 때 $x=-4$

$\therefore xy=4\times2=-4\times(-2)=8$

(ⅰ), (ⅱ)에서 xy의 최댓값은 8, 최솟값은 -4이므로

$M=8$, $m=-4$

$\therefore M-m=8-(-4)=12$ 답 ②

18 두 연립방정식의 공통인 해는

$\begin{cases} x+y=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=-x-5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x(-x-5)=6$, $-x^2-5x-6=0$

$x^2+5x+6=0$, $(x+3)(x+2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$

이를 ㉢에 각각 대입하면

$x=-3$일 때 $y=-2$

$x=-2$일 때 $y=-3$

(i) $x=-3$, $y=-2$를 $x^2+y^2=a$, $2ax+by=-2$에 각각 대입하면

$9+4=a \quad \therefore a=13$

$-6a-2b=-2$, $3a+b=1$, $39+b=1 \quad \therefore b=-38$

(ii) $x=-2$, $y=-3$을 $x^2+y^2=a$, $2ax+by=-2$에 각각 대입하면

$4+9=a \quad \therefore a=13$

$-4a-3b=-2$, $-52-3b=-2$, $-3b=50$

$\therefore b=-\dfrac{50}{3}$

이때 a, b는 정수이므로 (i), (ii)에서 $a=13$, $b=-38$

$\therefore a+b=13+(-38)=-25$

답 ①

19 $\begin{cases} -4x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=4x+a \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(4x+a)+(4x+a)^2=7$

$x^2+4x^2+ax+16x^2+8ax+a^2=7$

$21x^2+9ax+a^2-7=0$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로 이 이차방정식은 중근을 가져야 한다. 즉, 판별식을 D라 하면

$D=(9a)^2-4\times21(a^2-7)=0$, $81a^2-84(a^2-7)=0$

$27a^2-28(a^2-7)=0$, $-a^2+196=0$, $a^2=196$

$\therefore a=14$ ($\because a>0$)

답 ⑤

20 카드의 긴 변의 길이를 x, 짧은 변의 길이를 y라 하면 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 $3y$, 세로의 길이는 $x+y$이고 넓이가 1080이므로

$3y(x+y)=1080$

$\therefore y(x+y)=360 \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 카드의 긴 변 2개의 길이의 합과 같으므로

$2x=3y \quad \therefore x=\dfrac{3}{2}y \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$y\left(\dfrac{3}{2}y+y\right)=360$, $\dfrac{5}{2}y^2=360$, $y^2=144$

$\therefore y=12$ ($\because y>0$)

$y=12$를 ㉡에 대입하면

$x=\dfrac{3}{2}\times12=18$

따라서 카드 한 장의 둘레의 길이는

$2(x+y)=2\times(18+12)=60$

답 ③

변형유형 집중공략

p.142~143

1-1 $x^4+ax^2+a^2-a-20=0$에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2+at+a^2-a-20=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

주어진 사차방정식이 중근인 실근과 서로 다른 두 허근을 가지므로 t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근 중 하나는 0, 나머지 하나는 음수이다.

㉠이 0을 근으로 가지므로 ㉠에 $t=0$을 대입하면

$a^2-a-20=0$, $(a+4)(a-5)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=5 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠의 한 근은 0, 다른 한 근은 음수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-a<0 \quad \therefore a>0 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢에서 $a=5$

답 ⑤

1-2 $x^4-ax^2+a^2-10a-24=0$에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2-at+a^2-10a-24=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

주어진 사차방정식이 중근인 실근과 그 중근이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지므로 t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근 중 하나는 0, 나머지 하나는 양수이다.

㉠이 0을 근으로 가지므로 ㉠에 $t=0$을 대입하면

$a^2-10a-24=0$, $(a+2)(a-12)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=12 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠의 한 근은 0, 다른 한 근은 양수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=a>0 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢에서 $a=12$

답 12

2-1 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$, $\omega^3=1$, $\overline{\omega}^3=1$

또, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\omega^3=1$에서 $\dfrac{1}{\omega}=\omega^2$이므로

$\omega^{10}+\dfrac{1}{\omega^{10}}=\omega+\dfrac{1}{\omega}=\omega+\omega^2=-1$

$\therefore \left(\omega^{10}+\dfrac{1}{\omega^{10}}\right)^{10}=(-1)^{10}=1$

$\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=(\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1)-2\overline{\omega}=-2\overline{\omega}$이므로

$(\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1)^6=(-2\overline{\omega})^6=(-2)^6\overline{\omega}^6=64$

$\therefore \left(\omega^{10}+\dfrac{1}{\omega^{10}}\right)^{10}+(\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1)^6=1+64=65$

답 65

2-2 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2-\omega+1=0$, $\omega^3=-1$, $\omega^6=1$

또, $\omega^3=-1$에서 $\frac{1}{\omega}=-\omega^2$, $\omega^6=1$에서 $\frac{1}{\omega^5}=\omega$이므로

$\omega+\frac{1}{\omega}=\omega-\omega^2=1$

$\omega^3+\frac{1}{\omega^3}=-1+(-1)=-2$

$\omega^5+\frac{1}{\omega^5}=-\omega^2+\omega=1$

이고,

$\omega+\frac{1}{\omega}=\omega^7+\frac{1}{\omega^7}=\omega^{13}+\frac{1}{\omega^{13}}=\omega^{19}+\frac{1}{\omega^{19}}=1$

$\omega^3+\frac{1}{\omega^3}=\omega^9+\frac{1}{\omega^9}=\omega^{15}+\frac{1}{\omega^{15}}=-2$

$\omega^5+\frac{1}{\omega^5}=\omega^{11}+\frac{1}{\omega^{11}}=\omega^{17}+\frac{1}{\omega^{17}}=1$

이므로

$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)+\left(\omega^5+\frac{1}{\omega^5}\right)+\cdots+\left(\omega^{19}+\frac{1}{\omega^{19}}\right)$

$=\{1+(-2)+1\}+\{1+(-2)+1\}+\{1+(-2)+1\}+1$

$=1$

답 1

서술형 What & How p.144~147

1 $x^3-x^2-kx+k=0$에서

$x^2(x-1)-k(x-1)=0$, $(x-1)(x^2-k)=0$ …… ❶

이 삼차방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2-k=0$이 두 개의 허근을 가져야 한다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\times1\times(-k)<0$, $4k<0$

$\therefore k<0$ …… ❷

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다. …… ❸

답 -1

2 $x^3-2x^2+kx-2k=0$에서

$x^2(x-2)+k(x-2)=0$, $(x-2)(x^2+k)=0$ …… ❶

이 삼차방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+k=0$이 두 개의 허근을 가져야 한다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\times1\times k<0$, $-4k<0$

$\therefore k>0$ …… ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. …… ❸

답 1

채점기준	배점
❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해하기	2
❷ 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가질 조건을 설명하고 k의 값의 범위 구하기	3
❸ 정수 k의 최솟값 구하기	1

3 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-2=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다. …… ❶

또, 나머지 한 근을 α라 하면

$x^3+ax^2+bx-2=(x-\alpha)\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$

$=(x-\alpha)(x^2-2x+2)$

$=x^3+(-\alpha-2)x^2+(2\alpha+2)x-2\alpha$ …… ❷

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-\alpha-2$, $b=2\alpha+2$, $-2=-2\alpha$

$-2=-2\alpha$에서 $\alpha=1$

따라서

$a=-1-2=-3$, $b=2\times1+2=4$

이고, 삼차방정식의 나머지 두 근은 $1-i$, 1이다. …… ❸

답 $a=-3$, $b=4$, 나머지 두 근: $1-i$, 1

4 삼차방정식 $x^3+ax^2+3x+b=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $1+2i$이므로 $1-2i$도 근이다. …… ❶

또, 나머지 한 근을 α라 하면

$x^3+ax^2+3x+b=(x-\alpha)\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$

$=(x-\alpha)(x^2-2x+5)$

$=x^3+(-\alpha-2)x^2+(2\alpha+5)x-5\alpha$ …… ❷

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-\alpha-2$, $3=2\alpha+5$, $b=-5\alpha$

$3=2\alpha+5$에서 $2\alpha=-2$ $\quad\therefore \alpha=-1$

따라서

$a=-(-1)-2=-1$, $b=-5\times(-1)=5$

이고, 삼차방정식의 나머지 두 근은 $1-2i$, -1이다. …… ❸

답 $a=-1$, $b=5$, 나머지 두 근: $1-2i$, -1

채점기준	배점
❶ 주어진 한 허근의 켤레복소수가 주어진 삼차방정식의 근임을 설명하기	1
❷ 나머지 한 근을 α로 놓고 항등식 세우기	2
❸ a, b의 값과 나머지 두 근 각각 구하기	3

5 $x^3=1$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$ …… ❶

(1) $\omega^7+\omega^{15}+\omega^{23}=(\omega^3)^2\times\omega+(\omega^3)^5+(\omega^3)^7\times\omega^2$

$=\omega^2+\omega+1=0$ …… ❷

(2) $\omega^{3008}=(\omega^3)^{1002}\times\omega^2=\omega^2$이고, $\omega^3=1$에서 $\frac{1}{\omega^2}=\omega$이므로

$\omega^{3008}+\frac{1}{\omega^{3008}}=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=-1$ …… ❸

답 (1) 0 (2) -1

6 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2-\omega+1=0$, $\omega^3=-1$, $\omega^6=1$ …… ❶

$\therefore \omega^{200}-\omega-\frac{\omega^{100}}{1+\omega^2}=(\omega^6)^{33}\times\omega^2-\omega-\frac{(\omega^6)^{16}\times\omega^3\times\omega}{\omega}$

$=\omega^2-\omega+1=0$ …… ❷

답 0

채점기준	배점
❶ $\omega^2-\omega+1$, ω^3, ω^6의 값 각각 구하기	2
❷ $\omega^{200}-\omega-\dfrac{\omega^{100}}{1+\omega^2}$의 값 구하기	3

7 $\begin{cases} 4x^2-3xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2-34=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(4x+y)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=-4x$ …… ❶

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2-34=0$, $2x^2=34$, $x^2=17$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{17}$

$x=\sqrt{17}$, $x=-\sqrt{17}$을 $y=x$에 각각 대입하면

$x=\sqrt{17}$일 때 $y=\sqrt{17}$

$x=-\sqrt{17}$일 때 $y=-\sqrt{17}$ …… ❷

(ii) $y=-4x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(-4x)^2-34=0$, $17x^2=34$, $x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$를 $y=-4x$에 각각 대입하면

$x=\sqrt{2}$일 때 $y=-4\sqrt{2}$

$x=-\sqrt{2}$일 때 $y=4\sqrt{2}$ …… ❸

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{17} \\ y=\sqrt{17} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{17} \\ y=-\sqrt{17} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-4\sqrt{2} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=4\sqrt{2} \end{cases}$ …… ❹

답 $\begin{cases} x=\sqrt{17} \\ y=\sqrt{17} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{17} \\ y=-\sqrt{17} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-4\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=4\sqrt{2} \end{cases}$

8 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy=24 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$ …… ❶

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2=24$, $3y^2=24$, $y^2=8$ $\quad\therefore y=\pm2\sqrt{2}$

$y=2\sqrt{2}$, $y=-2\sqrt{2}$를 $x=y$에 각각 대입하면

$y=2\sqrt{2}$일 때 $x=2\sqrt{2}$

$y=-2\sqrt{2}$일 때 $x=-2\sqrt{2}$ …… ❷

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+2\times2y\times y=24$, $4y^2+4y^2=24$, $8y^2=24$

$y^2=3$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$을 $x=2y$에 각각 대입하면

$y=\sqrt{3}$일 때 $x=2\sqrt{3}$

$y=-\sqrt{3}$일 때 $x=-2\sqrt{3}$ …… ❸

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

…… ❹

답 $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

채점기준	배점
❶ $x^2-3xy+2y^2=0$의 좌변을 인수분해하여 x, y 사이의 관계식 구하기	2
❷ $x=y$일 때의 해 구하기	2
❸ $x=2y$일 때의 해 구하기	2
❹ 주어진 연립방정식의 해 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.148~151

01 $P(x)=2x^3-x-14$라 하면

$P(2)=16-2-14=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 0 & -1 & -14 \\ & & 4 & 8 & 14 \\ \hline & 2 & 4 & 7 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(2x^2+4x+7)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 두 허근 α, β는 이차방정식

$2x^2+4x+7=0$의 두 허근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{4}{2}=-2$ 답 ③

02 $(x^2-x-1)(x^2-x-7)+5=0$에서 $x^2-x=X$로 놓으면

$(X-1)(X-7)+5=0$, $X^2-8X+12=0$

$(X-2)(X-6)=0$ $\quad\therefore X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$일 때

$x^2-x=2$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $X=6$일 때

$x^2-x=6$, $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=3$이므로

$x_1x_2+x_3x_4=-2\times(-1)+2\times3=8$ 답 ④

03 $x^4+2x^3-22x^2+2x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-22+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-22=0$

$\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right\}+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-22=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-24=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+2X-24=0$, $(X+6)(X-4)=0$

양수 x에 대하여 $X>0$이므로 $X=4$

즉, $x+\dfrac{1}{x}=4$이므로

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4^3-3\times4=52$ 답 ③

04 $P(x)=x^3-(a+8)x^2+10ax-2a^2$이라 하면

$P(a)=a^3-a^2(a+8)+10a^2-2a^2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

a	1	$-a-8$	$10a$	$-2a^2$
		a	$-8a$	$2a^2$
	1	-8	$2a$	0

$\therefore P(x)=(x-a)(x^2-8x+2a)$

$P(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x^2-8x+2a=0$

방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-8x+2a=0$이 a가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

(i) $x^2-8x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-1\times2a>0$, $16-2a>0$

$-2a>-16$ $\quad\therefore a<8$

(ii) $x^2-8x+2a=0$이 $x=a$를 근으로 갖지 않아야 하므로

$a^2-8a+2a\neq0$, $a(a-6)\neq0$

$\therefore a\neq0$이고 $a\neq6$

(i), (ii)에서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 7의 6개이다. 답 ②

05 $P(x)=x^4-4x^3+(a-11)x^2+(2a-6)x+a$라 하면

$P(-1)=1+4+a-11-2a+6+a=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-4	$a-11$	$2a-6$	a
		-1	5	$-a+6$	$-a$
-1	1	-5	$a-6$	a	0
		-1	6	$-a$	
	1	-6	a	0	

$\therefore P(x)=(x+1)^2(x^2-6x+a)$

$P(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x^2-6x+a=0$

방정식 $P(x)=0$의 서로 다른 실근이 2개이어야 하므로

(i) $x^2-6x+a=0$이 -1이 아닌 중근을 갖는 경우

$x^2-6x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-1\times a=0$ $\quad\therefore a=9$

(ii) $x^2-6x+a=0$이 -1과 다른 한 실근을 갖는 경우

$x=-1$을 근으로 가지므로

$1+6+a=0$ $\quad\therefore a=-7$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$9+(-7)=2$ 답 ①

참고 (i) $a=9$일 때,

$P(x)=(x+1)^2(x^2-6x+9)=(x+1)^2(x-3)^2$

(ii) $a=-7$일 때,

$P(x)=(x+1)^2(x^2-6x-7)=(x+1)^3(x-7)$

06 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 근이다. 즉,

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$$\therefore \frac{\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}=\frac{(\omega+\omega^2+1)+\omega+\omega^2}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$$

$$=\frac{-1}{1-(-1)+1}=-\frac{1}{3}$$ 답 ②

07 사차방정식 $x^4-6x^3+px^2+qx-15=0$의 계수가 모두 실수이고 한 근이 $2-i$이므로 $2+i$도 근이다. 이때 $2+i=\alpha$라 하면 나머지 두 근은 β, γ이므로

$x^4-6x^3+px^2+qx-15$

$=\{x-(2-i)\}\{x-(2+i)\}(x-\beta)(x-\gamma)$

$=(x^2-4x+5)\{x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma\}$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 상수항을 비교하면

$-15=5\beta\gamma$ $\quad\therefore \beta\gamma=-3$

양변의 x^3항을 비교하면

$-6x^3=-4x\times x^2+x^2\times\{-(\beta+\gamma)x\}$

$-6x^3=\{-4-(\beta+\gamma)\}x^3$

즉, $-6=-4-(\beta+\gamma)$이므로 $\beta+\gamma=2$

$\therefore x^4-6x^3+px^2+qx-15$

$=(x^2-4x+5)(x^2-2x-3)$

$=(x^2-4x+5)(x+1)(x-3)$

따라서 방정식 $x^4-6x^3+px^2+qx-15=0$의 근은 $x=2-i$ 또는 $x=2+i$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로

$\beta=-1$, $\gamma=3$ 또는 $\beta=3$, $\gamma=-1$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(2+i)^2+(-1)^2+3^2$

$=4+4i+i^2+1+9$

$=13+4i$ 답 ④

참고 $(2-i)+(2+i)=4$, $(2-i)(2+i)=4-i^2=5$

이므로 $2-i$, $2+i$를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-4x+5=0$이다. 즉, 이차식 x^2-4x+5는 사차식 $x^4-6x^3+px^2+qx-15$의 인수이다.

08 ㄱ. $P(x)=x^3-2x^2+3x-2$라 하면

$P(1)=1-2+3-2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-x+2)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 허근 α는 이차방정식

$x^2-x+2=0$의 근이므로

$\alpha^2-\alpha+2=0 \qquad \therefore \alpha^2-\alpha=-2$ (거짓)

ㄴ. $x^4-7x^2+1=0$에서

$x^4+2x^2+1-9x^2=0$, $(x^2+1)^2-(3x)^2=0$

$\{(x^2+1)+3x\}\{(x^2+1)-3x\}=0$

$\therefore (x^2+3x+1)(x^2-3x+1)=0$

근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근의 합은 -3, $x^2-3x+1=0$의 두 근의 합은 3이므로 사차방정식 $x^4-7x^2+1=0$의 모든 근의 합은

$-3+3=0$ (참)

ㄷ. $Q(x)=x^4+ax^3-6x^2-4ax+8$이라 하면

$Q(2)=16+8a-24-8a+8=0$

$Q(-2)=16-8a-24+8a+8=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & a & -6 & -4a & 8 \\ & & 2 & 2a+4 & 4a-4 & -8 \\ \hline -2 & 1 & a+2 & 2a-2 & -4 & \boxed{0} \\ & & -2 & -2a & 4 & \\ \hline & 1 & a & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore Q(x)=(x+2)(x-2)(x^2+ax-2)$

$Q(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x^2+ax-2=0$

이때 이차방정식 $x^2+ax-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\times1\times(-2)=a^2+8>0$ ($\because a^2\ge0$)

이므로 이차방정식 $x^2+ax-2=0$은 실수 a의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, 사차방정식 $Q(x)=0$은 실수 a의 값에 관계없이 항상 실근만을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

09 삼차방정식 $x^3-8x^2+9x+10=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3-8x^2+9x+10=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1-8-9+10=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)$

$-8=-(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$

$\therefore (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=8$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-8+9+10=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=12$

$\therefore (1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)$

$=(1+\alpha)(1-\alpha)(1+\beta)(1-\beta)(1+\gamma)(1-\gamma)$

$=\{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\}\{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\}$

$=8\times12=96$ 답 ⑤

다른풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=8$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=9$, $\alpha\beta\gamma=-10$

$\therefore (1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)$

$=\{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\}\{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\}$

$=\{1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma\}$

$\times\{1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma\}$

$=(1+8+9-10)\times\{1-8+9-(-10)\}$

$=96$

10 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=3 \\ x+y=6 \end{cases}$의 해가 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=b \\ x^2+y^2=26 \end{cases}$의 해이므로 두 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=3 \\ x+y=6 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+y=b \\ x^2+y^2=26 \end{cases}$은 공통인 해를 갖고, 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=26 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=6-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(6-x)^2=26$

$2x^2-12x+36=26$, $2x^2-12x+10=0$

$x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

이를 ㉢에 각각 대입하면

$x=1$일 때 $y=5$

$x=5$일 때 $y=1$

(i) $x=1$, $y=5$를 $ax-y=3$, $2x+y=b$에 각각 대입하면

$a-5=3 \qquad \therefore a=8$

$2+5=b \qquad \therefore b=7$

(ii) $x=5$, $y=1$을 $ax-y=3$, $2x+y=b$에 각각 대입하면

$5a-1=3$, $5a=4 \qquad \therefore a=\frac{4}{5}$

$10+1=b \qquad \therefore b=11$

이때 a, b는 자연수이므로 (i), (ii)에서 $a=8$, $b=7$

$\therefore a-b=8-7=1$ 답 ①

11 $\begin{cases} x^2-y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+y)^2-(x+y)=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $x+y=A$로 놓으면 $A^2-A=20$

$A^2-A-20=0$, $(A+4)(A-5)=0$

$\therefore A=-4$ 또는 $A=5$

즉, $x+y=-4$ 또는 $x+y=5$이므로

(i) $x+y=-4$일 때

$y=-x-4$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2-(-x-4)^2=5$, $x^2-(x^2+8x+16)=5$

$-8x-16=5$, $-8x=21 \qquad \therefore x=-\frac{21}{8}$

이를 ㉢에 대입하면 $y=\frac{21}{8}-4=-\frac{11}{8}$

(ii) $x+y=5$일 때

$y=-x+5$ …… ㉣

㉣을 ㉠에 대입하면

$x^2-(-x+5)^2=5$, $x^2-(x^2-10x+25)=5$

$10x-25=5$, $10x=30$ $\quad\therefore x=3$

이를 ㉣에 대입하면 $y=-3+5=2$

이때 x, y는 정수이므로 (i), (ii)에서 $x=3$, $y=2$

$\therefore xy=3\times2=6$ 답 ③

참고 ㉡에서 $(x+y)^2-(x+y)-20=0$

$\{(x+y)+4\}\{(x+y)-5\}=0$

$(x+y+4)(x+y-5)=0$

과 같이 바로 인수분해할 수도 있다.

12 $\begin{cases}2x+y=6 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x^2-y^2=k & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=-2x+6$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2x^2-(-2x+6)^2=k$

$2x^2-(4x^2-24x+36)=k$, $-2x^2+24x-36=k$

$2x^2-24x+36+k=0$ …… ㉣

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로 이차방정식 ㉣은 중근을 갖는다. 즉, ㉣의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-12)^2-2(36+k)=0$

$144-2(36+k)=0$, $72-(36+k)=0$

$36-k=0$ $\quad\therefore k=36$

이를 ㉣에 대입하면

$2x^2-24x+72=0$, $x^2-12x+36=0$

$(x-6)^2=0$ $\quad\therefore x=6$

이를 ㉢에 대입하면

$y=-2\times6+6=-6$

따라서 $\alpha=6$, $\beta=-6$이므로

$k+\alpha+\beta=36+6+(-6)=36$ 답 ④

13 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2-\omega+1=0$, $\omega^3=-1$, $\omega^6=1$

$f(n)=\frac{\omega^{2n}+1}{\omega^n}$에서

$f(1)=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{\omega}{\omega}=1$

$f(2)=\frac{\omega^4+1}{\omega^2}=\frac{-\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

$f(3)=\frac{\omega^6+1}{\omega^3}=\frac{1+1}{-1}=-2$

$f(4)=\frac{\omega^8+1}{\omega^4}=\frac{\omega^2+1}{-\omega}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$

$f(5)=\frac{\omega^{10}+1}{\omega^5}=\frac{\omega^4+1}{-\omega^2}=\frac{-\omega+1}{-\omega^2}=\frac{-\omega^2}{-\omega^2}=1$

$f(6)=\frac{\omega^{12}+1}{\omega^6}=\frac{1+1}{1}=2$

$f(7)=\frac{\omega^{14}+1}{\omega^7}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=f(1)$

$f(8)=\frac{\omega^{16}+1}{\omega^8}=\frac{\omega^4+1}{\omega^2}=f(2)$

$\vdots$

즉, $f(n)$의 값으로는 1, -1, -2, -1, 1, 2가 이 순서대로 반복되므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=16\{1+(-1)+(-2)+(-1)+1+2\}$
$\quad+1+(-1)+(-2)+(-1)$

$=-3$ 답 ③

14 $P(x)=x^4+(-a^2-a+4)x^2+a^3-4a^2$이라 하면

$P(a)=a^4-a^4-a^3+4a^2+a^3-4a^2=0$

$P(-a)=a^4-a^4-a^3+4a^2+a^3-4a^2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

a	1	0	$-a^2-a+4$	0	a^3-4a^2
		a	a^2	$-a^2+4a$	$-a^3+4a^2$
$-a$	1	a	$-a+4$	$-a^2+4a$	0
		$-a$	0	a^2-4a	
	1	0	$-a+4$	0	

$\therefore P(x)=(x-a)(x+a)(x^2-a+4)$

$P(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=-a$ 또는 $x^2-a+4=0$

사차방정식 $P(x)=0$이 실근과 허근을 모두 가지므로 이차방정식 $x^2-a+4=0$은 서로 다른 두 허근을 가져야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2-a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\times1\times(-a+4)<0$

$-a+4>0$ $\quad\therefore a<4$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다. 답 ③

15 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

ㄱ. $\omega^3=1$에서 $\omega^2=\frac{1}{\omega}$, $\omega=\frac{1}{\omega^2}$이므로

$f(3)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}=\omega^2+\omega+1=0$ (참)

ㄴ. $f(3k+1)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\frac{1}{\omega^4}+\frac{1}{\omega^5}+\frac{1}{\omega^6}$
$\quad+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-2}}+\frac{1}{\omega^{3k-1}}+\frac{1}{\omega^{3k}}+\frac{1}{\omega^{3k+1}}$

$=\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)+\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)$
$\quad+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-3}}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)+\frac{1}{\omega^{3k+1}}$

$=0+0+\cdots+0+\frac{1}{\omega^{3k+1}}=\frac{1}{\omega}\neq1$ (거짓)

ㄷ. 자연수 k에 대하여 $f(3k+1)=\frac{1}{\omega}$ ($\because$ ㄴ)

$$f(3k+2)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\frac{1}{\omega^4}+\frac{1}{\omega^5}+\frac{1}{\omega^6}+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-2}}+\frac{1}{\omega^{3k-1}}+\frac{1}{\omega^{3k}}+\frac{1}{\omega^{3k+1}}+\frac{1}{\omega^{3k+2}}$$

$$=f(3k+1)+\frac{1}{\omega^{3k+2}}=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=-1$$

$$f(3k)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\frac{1}{\omega^4}+\frac{1}{\omega^5}+\frac{1}{\omega^6}+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-2}}+\frac{1}{\omega^{3k-1}}+\frac{1}{\omega^{3k}}$$

$$=\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)+\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-3}}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)$$

$$=0$$

이때 $\{f(n)\}^2+f(n)=0$에서 $f(n)\{f(n)+1\}=0$

$\therefore f(n)=0$ 또는 $f(n)=-1$

즉, $n=3k$ 또는 $n=3k+2$이므로

(i) $n=3k$일 때

n은 3의 배수이므로 3, 6, 9, 12, 15, 18의 6개이다.

(ii) $n=3k+2$일 때

n은 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수이므로 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20의 7개이다.

(i), (ii)에서 20 이하의 자연수 n의 개수는

$6+7=13$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

참고 $f(3k+2)=f(2)=-1$이므로 (ii)에서 2도 포함시켜야 한다.

16 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x cm라 하면 높이는 $(x+3)$ cm이므로 원기둥의 부피는

$\pi x^2(x+3)(\text{cm}^3)$

반구의 반지름의 길이도 x cm이므로 반구의 부피는

$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{2}{3}\pi x^3(\text{cm}^3)$

용기의 전체 부피가 $\frac{76}{3}\pi$ cm^{3}이므로

$\pi x^2(x+3)+\frac{2}{3}\pi x^3=\frac{76}{3}\pi$, $x^2(x+3)+\frac{2}{3}x^3=\frac{76}{3}$

$3x^2(x+3)+2x^3=76$, $5x^3+9x^2-76=0$

$P(x)=5x^3+9x^2-76$이라 하면

$P(2)=40+36-76=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

2	5	9	0	-76
		10	38	76
	5	19	38	0

$\therefore P(x)=(x-2)(5x^2+19x+38)$

$P(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $5x^2+19x+38=0$

이때 $5x^2+19x+38=5\left(x+\frac{19}{10}\right)^2+\frac{399}{20}>0$이므로

$x=2$

따라서 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 2 cm이다. 답 ②

17 작은 정사각형과 큰 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x cm, y cm $(x<y)$라 하면 두 정사각형의 둘레의 길이의 합이 72 cm이므로

$4x+4y=72$, $x+y=18$

$\therefore y=18-x$ ...... ㉠

두 정사각형의 넓이의 합이 212 cm^{2}이므로

$x^2+y^2=212$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(18-x)^2=212$

$x^2+324-36x+x^2=212$, $2x^2-36x+112=0$

$x^2-18x+56=0$, $(x-4)(x-14)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=14$

이것을 ㉠에 각각 대입하면

$x=4$일 때 $y=14$

$x=14$일 때 $y=4$

이때 $x<y$이므로 $x=4$, $y=14$

따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 4 cm이므로 넓이는

$4^2=16(\text{cm}^2)$ $\therefore k=16$ 답 16

18 조건 (가)에서

$P(-i)=(-i)^4+a\times(-i)^2+b=1-a+b=0$

$\therefore -a+b=-1$ ...... ㉠ ...... ❶

조건 (나)에서

$P(-2)=16+4a+b=-25$

$\therefore 4a+b=-41$ ...... ㉡ ...... ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-8$, $b=-9$

$\therefore P(x)=x^4-8x^2-9$ ...... ❸

$P(x)=0$, 즉 $x^4-8x^2-9=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2-8X-9=0$, $(X+1)(X-9)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=9$

즉, $x^2=-1$ 또는 $x^2=9$이므로

$x=\pm i$ 또는 $x=\pm 3$ ...... ❹

따라서 방정식 $P(x)=0$의 모든 실근의 곱은

$-3\times 3=-9$ ...... ❺

답 -9

채점기준	배점
❶ 조건 (가)를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	1
❷ 조건 (나)를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	1
❸ 실수 a, b의 값과 $P(x)$ 구하기	2
❹ 방정식 $P(x)=0$ 풀기	2
❺ 방정식 $P(x)=0$의 모든 실근의 곱 구하기	1

19 $P(x)=x^3-9x^2+(k+18)x-3k$라 하면

$P(3)=27-81+3(k+18)-3k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -9 & k+18 & -3k \\ & & 3 & -18 & 3k \\ \hline & 1 & -6 & k & \boxed{0} \end{array}$$

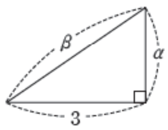
$\therefore P(x)=(x-3)(x^2-6x+k)$ …… ❶

$P(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x^2-6x+k=0$

방정식 $P(x)=0$의 한 실근은 3이므로 나머지 두 실근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 근이다. 이때 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$ $\quad\therefore \beta=6-\alpha$ …… ㉠

또, 3, α, β는 직각삼각형의 세 변의 길이이고 빗변의 길이가 3보다 크므로



$\beta^2=\alpha^2+3^2$

$\therefore \alpha^2-\beta^2=-9$ …… ㉡ …… ❷

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha^2-(6-\alpha)^2=-9$, $\alpha^2-(36-12\alpha+\alpha^2)=-9$

$-36+12\alpha=-9$, $12\alpha=27$ $\quad\therefore \alpha=\frac{9}{4}$

이를 ㉠에 대입하면 $\beta=\frac{15}{4}$ …… ❸

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$k=\alpha\beta=\frac{9}{4}\times\frac{15}{4}=\frac{135}{16}$

$\therefore 16k=135$ …… ❹

답 135

채점기준	배점
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하기	2
❷ 나머지 두 실근에 대한 연립방정식 세우기	2
❸ ❷의 연립방정식 풀기	2
❹ k의 값과 $16k$의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.152~155

01 $P(x)=x^3-3x^2+4x+8$이라 하면

$P(-1)=-1-3-4+8=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & -3 & 4 & 8 \\ & & -1 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-4x+8)$

즉, 삼차방정식 $P(x)=0$의 허근 α는 이차방정식 $x^2-4x+8=0$의 한 허근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\alpha}$도 이 이차방정식의 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=4$, $\alpha\overline{\alpha}=8$

$\therefore \left(1-\frac{4}{\alpha}\right)\left(1-\frac{4}{\overline{\alpha}}\right)+\left(1-\frac{8}{\alpha}\right)\left(1-\frac{8}{\overline{\alpha}}\right)$

$=\left\{1-\left(\frac{4}{\alpha}+\frac{4}{\overline{\alpha}}\right)+\frac{16}{\alpha\overline{\alpha}}\right\}+\left\{1-\left(\frac{8}{\alpha}+\frac{8}{\overline{\alpha}}\right)+\frac{64}{\alpha\overline{\alpha}}\right\}$

$=\left\{1-\frac{4(\overline{\alpha}+\alpha)}{\alpha\overline{\alpha}}+\frac{16}{\alpha\overline{\alpha}}\right\}+\left\{1-\frac{8(\overline{\alpha}+\alpha)}{\alpha\overline{\alpha}}+\frac{64}{\alpha\overline{\alpha}}\right\}$

$=\left(1-\frac{4\times4}{8}+\frac{16}{8}\right)+\left(1-\frac{8\times4}{8}+\frac{64}{8}\right)$

$=1+5=6$

답 ②

02 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=63$에서

$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}=63$

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-63=0$

$x^2+5x=X$로 놓으면

$(X+4)(X+6)-63=0$, $X^2+10X-39=0$

$(X+13)(X-3)=0$ $\quad\therefore X=-13$ 또는 $X=3$

(i) $X=-13$일 때

$x^2+5x=-13$에서 $x^2+5x+13=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=5^2-4\times1\times13=-27<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=3$일 때

$x^2+5x=3$에서 $x^2+5x-3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=5^2-4\times1\times(-3)=37>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 -5, 곱은 -3이다.

(i), (ii)에서 주어진 사차방정식의 모든 실근의 합은 -5, 곱은 -3이므로

$a=-5$, $\beta=-3$

$\therefore a\beta=-5\times(-3)=15$

답 ④

03 $P(x)=x^3-6x^2+(k+8)x-2k$라 하면

$P(2)=8-24+2(k+8)-2k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -6 & k+8 & -2k \\ & & 2 & -8 & 2k \\ \hline & 1 & -4 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-4x+k)$

$P(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x^2-4x+k=0$

삼차방정식 $P(x)=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2-4x+k=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times k<0$, $4-k<0$

$\therefore k>4$

답 ⑤

04 삼차방정식 $P(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=18$

$P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$, $P(\gamma)=0$이므로 $P(3x+1)=0$이려면

$3x+1=\alpha$ 또는 $3x+1=\beta$ 또는 $3x+1=\gamma$

$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\gamma-1}{3}$

따라서 삼차방정식 $P(3x+1)=0$의 세 근의 합은

$$\frac{\alpha-1}{3}+\frac{\beta-1}{3}+\frac{\gamma-1}{3}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-3}{3}$$
$$=\frac{18-3}{3}=5$$

답 ⑤

05 $P(x)=x^3-3x^2+8x-12$라 하면

$P(2)=8-12+16-12=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 8 & -12 \\ & & 2 & -2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-x+6)$

$P(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x^2-x+6=0$

$\alpha=2$라 하면 β, γ는 이차방정식 $x^2-x+6=0$의 두 근이다. 즉,

$\beta^2-\beta+6=0$, $\gamma^2-\gamma+6=0$이므로

$\beta^2-\beta+3=-3$, $\gamma^2-\gamma+3=-3$

$\therefore (\alpha^2-\alpha+3)(\beta^2-\beta+3)(\gamma^2-\gamma+3)$

$=(4-2+3)\times(-3)\times(-3)$

$=45$

답 ③

06 삼차방정식 $x^3+px^2+11x+q=0$의 계수가 모두 실수이고 방정식의 한 근이 $1-2i$이므로 $1+2i$도 근이다. 이때 나머지 한 실근을 α라 하면

$$\begin{aligned} x^3+px^2+11x+q&=(x-\alpha)\{x-(1-2i)\}\{x-(1+2i)\} \\ &=(x-\alpha)(x^2-2x+5) \\ &=x^3+(-2-\alpha)x^2+(2\alpha+5)x-5\alpha \end{aligned}$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$p=-2-\alpha$, $11=2\alpha+5$, $q=-5\alpha$

$11=2\alpha+5$에서 $2\alpha=6$ $\quad\therefore \alpha=3$

$p=-2-3=-5$, $q=-5\times3=-15$

$\therefore p-q=-5-(-15)=10$

답 ②

07 $f(1)=1$, $f(2)=\dfrac{1}{2}$, $f(3)=\dfrac{1}{3}$, $f(4)=\dfrac{1}{4}$에서

$f(1)=1$, $2f(2)=1$, $3f(3)=1$, $4f(4)=1$

이므로 1, 2, 3, 4는 사차방정식 $xf(x)=1$, 즉 $xf(x)-1=0$의 네 근이다.

$\therefore xf(x)-1=k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

(k는 0이 아닌 실수)

이때 양변에 $x=0$을 대입하면

$-1=k\times(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4)$

$-1=24k$ $\quad\therefore k=-\dfrac{1}{24}$

$\therefore xf(x)-1=-\dfrac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

즉, $g(x)=-\dfrac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$이므로

$g(7)=-\dfrac{1}{24}\times6\times5\times4\times3=-15$

답 ④

참고 $f(x)$는 삼차식이므로 방정식 $xf(x)=1$은 사차방정식이다.

08 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-4=0$의 한 근이 1이므로

$1+a+b-4=0$ $\quad\therefore b=-a+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

즉, 주어진 삼차방정식은 $x^3+ax^2+(-a+3)x-4=0$

$P(x)=x^3+ax^2+(-a+3)x-4$라 하면

$P(1)=1+a+(-a+3)-4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & -a+3 & -4 \\ & & 1 & a+1 & 4 \\ \hline & 1 & a+1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)\{x^2+(a+1)x+4\}$

$P(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2+(a+1)x+4=0$

삼차방정식 $P(x)=0$의 1이 아닌 나머지 두 근을 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+(a+1)x+4=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a+1)$, $\alpha\beta=4$

또, $\alpha^2+\beta^2=28$이므로 $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$에서

$(a+1)^2=28+2\times4=36$

$a+1=6$ 또는 $a+1=-6$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

㉠에서 $b=-5+3=-2$이므로

$ab=5\times(-2)=-10$

답 ④

09 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 근이다. 즉,

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

이고, 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega^3=1$에서 $\omega=\dfrac{1}{\omega^2}$이므로

$\omega^{20}+\dfrac{1}{\omega^{20}}=\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=-1$ (거짓)

ㄴ. $(\omega-1)(\overline{\omega}-1)=\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1$

$=1-(-1)+1=3$ (참)

ㄷ. $\omega^2+\omega+1=0$에서

$\omega+1=-\omega^2$, $\omega^2+1=-\omega$, $\omega^2+\omega=-1$이므로

$(\omega+1)^{2n}+(\omega^2+1)^{2n}+(\omega^2+\omega)^{2n}$

$=(-\omega^2)^{2n}+(-\omega)^{2n}+(-1)^{2n}$

$=\{(-\omega^2)^2\}^n+\{(-\omega)^2\}^n+1$

$=(\omega^4)^n+(\omega^2)^n+1$

$=\omega^n+\omega^{2n}+1$

$\omega^{2n}+\omega^n+1=0$을 만족시키는 자연수 n을 찾아 보면

$n=1$일 때, $\omega^2+\omega+1=0$

$n=2$일 때, $\omega^4+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

$n=3$일 때, $\omega^6+\omega^3+1=1+1+1=3$

⋮

즉, n이 3의 배수가 아닐 때 $\omega^{2n}+\omega^n+1=0$이다.

40 이하의 자연수 중 3의 배수는 3, 6, 9, ⋯, 39의 13개이므로 3의 배수가 아닌 자연수 n의 개수는

$40-13=27$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ①

10 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 α, β는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 허근이다.

$\therefore \alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$, $\alpha^3=1$, $\beta^3=1$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

이때 $\beta^3=1$에서 $\beta^2=\frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta=1$에서 $\alpha=\frac{1}{\beta}$이므로

$f(1)=\alpha+\beta=-1$

$f(2)=\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+\frac{1}{\beta}=\alpha^2+\alpha=-1$

$f(3)=\alpha^3+\beta^3=1+1=2$

$f(4)=\alpha^4+\beta^4=\alpha+\beta=f(1)$

$f(5)=\alpha^5+\beta^5=\alpha^2+\beta^2=f(2)$

$f(6)=\alpha^6+\beta^6=\alpha^3+\beta^3=f(3)$

⋮

즉, $f(n)$의 값으로는 -1, -1, 2가 이 순서대로 반복되므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=33\{(-1)+(-1)+2\}+(-1)$

$=-1$ 답 ②

11 조건 (나)에서 $\alpha^2=-3-4i$가 허수이므로 α도 허수이다.

사차방정식 $f(x)=0$의 모든 계수가 실수이므로 α, 3α가 방정식 $f(x)=0$의 근이면 $\overline{\alpha}$, $3\overline{\alpha}$도 근이다. 즉,

$f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-3\alpha)(x-3\overline{\alpha})$

$\therefore f(0)=-\alpha\times(-\overline{\alpha})\times(-3\alpha)\times(-3\overline{\alpha})$

$=9\alpha^2\overline{\alpha}^2=9\alpha^2\overline{\alpha^2}$

$=9(-3-4i)(-3+4i)=225$ 답 ③

참고 두 복소수 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)에 대하여

$\overline{z_1z_2}=\overline{(a+bi)(c+di)}$

$=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{z_1}\times\overline{z_2}=\overline{(a+bi)}\times\overline{(c+di)}$

$=(a-bi)\times(c-di)$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\therefore \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$

즉, $\overline{z}^2=\overline{z}\times\overline{z}=\overline{z\times z}=\overline{z^2}$이다.

12 $\begin{cases} x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+a$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(-x+a)+(-x+a)^2=6$

$x^2-x^2+ax+x^2-2ax+a^2-6=0$

$x^2-ax+a^2-6=0$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이 이차방정식이 중근을 가져야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2-ax+a^2-6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4\times1\times(a^2-6)=0$

$a^2-4(a^2-6)=0$, $-3a^2+24=0$, $3a^2=24$

$\therefore a^2=8$ 답 ③

13 $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2-y^2=8$, $0=8$

즉, 해가 존재하지 않는다.

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$(3y)^2-y^2=8$, $8y^2=8$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$

$y=1$, $y=-1$을 $x=3y$에 각각 대입하면

$y=1$일 때 $x=3$

$y=-1$일 때 $x=-3$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

$\therefore |x|+|y|=3+1=4$ 답 ④

14 $\begin{cases} xy=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{6} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\frac{y+x}{xy}=\frac{7}{6}$, $\frac{y+x}{3}=\frac{7}{6}$, $x+y=\frac{7}{2}$

$\therefore y=\frac{7}{2}-x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x\left(\frac{7}{2}-x\right)=3$, $\frac{7}{2}x-x^2=3$, $7x-2x^2=6$

$2x^2-7x+6=0$, $(2x-3)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

이것을 ㉢에 각각 대입하면

$x=\frac{3}{2}$일 때 $y=2$

$x=2$일 때 $y=\frac{3}{2}$

이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=2$, $\beta=\frac{3}{2}$

따라서 이차방정식 $\alpha x^2+\beta x+1=0$의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\frac{3}{2}}{2}=-\frac{3}{4}$ 답 ①

15 처음 양식장의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=100 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+2)(y+2)=xy+32 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $xy+2x+2y+4=xy+32$

$x+y=14 \quad \therefore y=14-x \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100$, $x^2+196-28x+x^2=100$

$2x^2-28x+96=0$, $x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0 \quad \therefore x=6$ 또는 $x=8$

이를 ㉢에 각각 대입하면

$x=6$일 때 $y=8$

$x=8$일 때 $y=6$

이때 $x>y$이므로 $x=8$, $y=6$

따라서 처음 양식장의 가로의 길이와 세로의 길이의 비는

$8:6=4:3$ 답 ③

16 $(x^2+6x+8)(x^2+6x+11)+2=0$에서 $x^2+6x=X$로 놓으면

$(X+8)(X+11)+2=0$

$X^2+19X+90=0$, $(X+9)(X+10)=0$

$(x^2+6x+9)(x^2+6x+10)=0$

$(x+3)^2(x^2+6x+10)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x^2+6x+10=0$

이때 이차방정식 $x^2+6x+10=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1\times10=-1<0$

이므로 이차방정식 $x^2+6x+10=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 사차방정식 $(x^2+6x+8)(x^2+6x+11)+2=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. 답 ②

17 물의 높이는 $(x-1)$ cm이므로 물의 부피는

$\pi(x+3)^2(x-1)$ cm^3

즉, $\pi(x+3)^2(x-1)=25\pi$이므로

$(x+3)^2(x-1)=25$, $(x^2+6x+9)(x-1)=25$

$x^3-x^2+6x^2-6x+9x-9=25$

$\therefore x^3+5x^2+3x-34=0$

$P(x)=x^3+5x^2+3x-34$라 하면

$P(2)=8+20+6-34=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 5 & 3 & -34 \\ & & 2 & 14 & 34 \\ \hline & 1 & 7 & 17 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2+7x+17)$

$P(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x^2+7x+17=0$

이때 $x^2+7x+17=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0$이므로

$x=2$ 답 ②

18 $x^4+3x^2+4=0$에서 $x^4+4x^2+4-x^2=0$

$(x^2+2)^2-x^2=0$, $\{(x^2+2)+x\}\{(x^2+2)-x\}=0$

$(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

$\therefore x^2+x+2=0$ 또는 $x^2-x+2=0 \quad \cdots\cdots$ ❶

사차방정식 $x^4+3x^2+4=0$의 네 근이 α, $\bar{\alpha}$, β, $\bar{\beta}$이고 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 한 근을 α라 하면 $\bar{\alpha}$도 근이다. 즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\bar{\alpha}=2$

β, $\bar{\beta}$는 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta\bar{\beta}=2 \quad \cdots\cdots$ ❷

$\therefore \alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}=2+2=4 \quad \cdots\cdots$ ❸

답 4

채점기준	배점
❶ 주어진 사차방정식의 좌변을 인수분해하여 x에 대한 이차방정식 구하기	2
❷ $\alpha\bar{\alpha}$, $\beta\bar{\beta}$의 값 각각 구하기	4
❸ $\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}$의 값 구하기	1

19 $P(1)=1+a+2+2a-3-3a=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a+2 & 2a-3 & -3a \\ & & 1 & a+3 & 3a \\ \hline & 1 & a+3 & 3a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)\{x^2+(a+3)x+3a\}$

$=(x-1)(x+3)(x+a) \quad \cdots\cdots$ ❶

$P(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-a$이므로

$P\left(a+\frac{2}{a}\right)=0$이려면

$a+\frac{2}{a}=1$ 또는 $a+\frac{2}{a}=-3$ 또는 $a+\frac{2}{a}=-a \quad \cdots\cdots$ ❷

$a\neq0$이므로

(i) $a+\frac{2}{a}=1$일 때

양변에 a를 곱하면

$a^2+2=a \quad \therefore a^2-a+2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times2=-7<0$이므로 ㉠은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 즉, ㉠을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a+\frac{2}{a}=-3$일 때

양변에 a를 곱하면

$a^2+2=-3a$, $a^2+3a+2=0$, $(a+1)(a+2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-2$

(iii) $a+\frac{2}{a}=-a$일 때

양변에 a를 곱하면

$a^2+2=-a^2$, $2a^2+2=0$ $\quad\therefore a^2=-1$

이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다. ······ ❸

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+(-2)=-3$ ······ ❹

답 -3

채점기준	배점
❶ $P(x)$를 인수분해하기	2
❷ $a+\frac{2}{a}$의 값 구하기	2
❸ 각 경우에 대하여 실수 a의 값 구하기	3
❹ 모든 실수 a의 값의 합 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제 p.156~160

1 $P(x)=x^3-3x^2+4x-2$라 하면

$P(1)=1-3+4-2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$

$P(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2-2x+2=0$

따라서 삼차방정식 $P(x)=0$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 한 근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 이 이차방정식의 근이다. 즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=2$, $\omega\overline{\omega}=2$

$\omega(\overline{\omega}-1)=\omega\overline{\omega}-\omega=2-\omega=\overline{\omega}$이므로

$\{\omega(\overline{\omega}-1)\}^n=256$에서 $\overline{\omega}^n=256$

이때 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 근은

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times2}=1\pm i$

이므로 $\omega=1+i$, $\overline{\omega}=1-i$라 하면

$\overline{\omega}^2=(1-i)^2=-2i$, $\overline{\omega}^4=(\overline{\omega}^2)^2=(-2i)^2=4i^2=-4$

$\overline{\omega}^8=(\overline{\omega}^4)^2=(-4)^2=16$, $\overline{\omega}^{16}=(\overline{\omega}^8)^2=16^2=256$

$\therefore n=16$ 답 16

참고 $\omega=1-i$, $\overline{\omega}=1+i$라 할 때도

$\overline{\omega}^2=(1+i)^2=2i$, $\overline{\omega}^4=(\overline{\omega}^2)^2=(2i)^2=4i^2=-4$

$\overline{\omega}^8=(\overline{\omega}^4)^2=(-4)^2=16$, $\overline{\omega}^{16}=(\overline{\omega}^8)^2=16^2=256$

$\therefore n=16$

2 $P(x)=x^3-4x^2+8x-8$이라 하면

$P(2)=8-16+16-8=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 8 & -8 \\ & & 2 & -4 & 8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-2x+4)$

따라서 삼차방정식 $P(x)=0$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 한 근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 이 이차방정식의 근이다.

$\therefore \omega^2-2\omega+4=0$, $\overline{\omega}^2-2\overline{\omega}+4=0$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=2$, $\omega\overline{\omega}=4$

$\frac{1}{2}\omega(\overline{\omega}-2)=\frac{1}{2}(\omega\overline{\omega}-2\omega)=\frac{1}{2}(4-2\omega)=2-\omega=\overline{\omega}$이므로

$\left\{\frac{1}{2}\omega(\overline{\omega}-2)\right\}^n=-512$에서 $\overline{\omega}^n=-512$

이때 $\overline{\omega}^2-2\overline{\omega}+4=0$의 양변에 $\overline{\omega}+2$를 곱하면

$(\overline{\omega}+2)(\overline{\omega}^2-2\overline{\omega}+4)=0$, $\overline{\omega}^3+8=0$

$\therefore \overline{\omega}^3=-8$

따라서 $\overline{\omega}^9=(\overline{\omega}^3)^3=(-8)^3=-512$이므로

$n=9$ 답 9

3 $P(x)=x^3-x^2-kx+k$라 하면

$P(1)=1-1-k+k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -k & k \\ & & 1 & 0 & -k \\ \hline & 1 & 0 & -k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-k)$

$P(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2=k$

삼차방정식 $P(x)=0$의 두 근 α, β 중 실수가 하나뿐이므로 $k<0$이고, $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$이다.

(i) $\alpha=1$일 때

$\alpha^2=-2\beta$에서 $1=-2\beta$ $\quad\therefore \beta=-\frac{1}{2}$

이는 α, β 중 실수가 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\beta=1$일 때

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\alpha^2=-2$

또, α, γ는 이차방정식 $x^2=k$의 두 근이므로 $\alpha^2=k$, $\gamma^2=k$

$\therefore k=-2$

(i), (ii)에서 $\beta=1$이고, $\gamma^2=\alpha^2=-2$이므로

$\beta^2+\gamma^2=1^2+(-2)=-1$ 답 ⑤

4 $P(x)=x^3+3x^2+kx+3k$라 하면

$P(-3)=-27+27-3k+3k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & k & 3k \\ & & -3 & 0 & -3k \\ \hline & 1 & 0 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+3)(x^2+k)$

$P(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x^2=-k$

삼차방정식 $P(x)=0$의 두 근 α, β 중 실수가 하나뿐이므로 $-k<0$, 즉 $k>0$이고, $\alpha=-3$ 또는 $\beta=-3$이다.

(i) $\alpha=-3$일 때

$\beta^2=6(\alpha+2)$에서 $\beta^2=-6$

또, β, γ는 이차방정식 $x^2=-k$의 두 근이므로

$\beta^2=-k$, $\gamma^2=-k$

즉, $-6=-k$이므로 $k=6$

(ii) $\beta=-3$일 때

$\beta^2=6(\alpha+2)$에서 $9=6(\alpha+2)$, $\frac{3}{2}=\alpha+2$

$\therefore \alpha=-\frac{1}{2}$

이는 α, β 중 실수가 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=-3$이고, $\beta^2=\gamma^2=-6$이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(-3)^2+(-6)+(-6)$

$=-3$

답 ⑤

5 $x^4+(2a+1)x^3+(3a+2)x^2+(a+2)x=0$에서

$x\{x^3+(2a+1)x^2+(3a+2)x+(a+2)\}=0$

$P(x)=x^3+(2a+1)x^2+(3a+2)x+(a+2)$라 하면

$P(-1)=-1+(2a+1)-(3a+2)+(a+2)=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2a+1 & 3a+2 & a+2 \\ & & -1 & -2a & -a-2 \\ \hline & 1 & 2a & a+2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2+2ax+a+2)$

사차방정식 $xP(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x^2+2ax+a+2=0$

이때 주어진 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로

(i) $x^2+2ax+a+2=0$이 0도 -1도 아닌 중근을 갖는 경우

$x=0$을 근으로 갖지 않으므로 $a+2\neq0$

$\therefore a\neq-2$ …… ㉠

$x=-1$을 근으로 갖지 않으므로

$1-2a+a+2\neq0$ $\therefore a\neq3$ …… ㉡

또, 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-1\times(a+2)=0$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a=-1$ 또는 $a=2$

(ii) $x^2+2ax+a+2=0$이 0을 한 근으로 갖고 -1이 아닌 다른 한 실근을 갖는 경우

$x=0$을 한 근으로 가지므로

$a+2=0$ $\therefore a=-2$

따라서 이차방정식 $x^2-4x=0$, 즉 $x(x-4)=0$은 0과 4를 근으로 가지므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $x^2+2ax+a+2=0$이 -1을 한 근으로 갖고 0이 아닌 다른 한 실근을 갖는 경우

$x=-1$을 한 근으로 가지므로

$1-2a+a+2=0$ $\therefore a=3$

따라서 이차방정식 $x^2+6x+5=0$, 즉 $(x+1)(x+5)=0$은 -1과 -5를 근으로 가지므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 실수 a는 -1, 2, -2, 3이므로 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1\times2\times(-2)\times3=12$

답 12

6 $x^4+(a-2)x^3+(-a+3)x^2+(-2a-6)x=0$에서

$x\{x^3+(a-2)x^2+(-a+3)x+(-2a-6)\}=0$

$P(x)=x^3+(a-2)x^2+(-a+3)x+(-2a-6)$이라 하면

$P(2)=8+4(a-2)+2(-a+3)+(-2a-6)=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & a-2 & -a+3 & -2a-6 \\ & & 2 & 2a & 2a+6 \\ \hline & 1 & a & a+3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2+ax+a+3)$

사차방정식 $xP(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x^2+ax+a+3=0$

이때 주어진 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로

(i) $x^2+ax+a+3=0$이 0도 2도 아닌 중근을 갖는 경우

$x=0$을 근으로 갖지 않으므로

$a+3\neq0$ $\therefore a\neq-3$ …… ㉠

$x=2$를 근으로 갖지 않으므로

$4+2a+a+3\neq0$, $3a\neq-7$

$\therefore a\neq-\frac{7}{3}$ …… ㉡

또, 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\times1\times(a+3)=0$, $a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=6$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a=-2$ 또는 $a=6$

(ii) $x^2+ax+a+3=0$이 0을 한 근으로 갖고 2가 아닌 다른 한 실근을 갖는 경우

$x=0$을 한 근으로 가지므로

$a+3=0$ $\therefore a=-3$

따라서 이차방정식 $x^2-3x=0$, 즉 $x(x-3)=0$은 0과 3을 근으로 가지므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $x^2+ax+a+3=0$이 2를 한 근으로 갖고 0이 아닌 다른 한 실근을 갖는 경우

$x=2$를 한 근으로 가지므로

$4+2a+a+3=0,\ 3a=-7 \qquad \therefore a=-\frac{7}{3}$

따라서 이차방정식 $x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}=0$, 즉 $3x^2-7x+2=0$, $(x-2)(3x-1)=0$은 2와 $\frac{1}{3}$을 근으로 가지므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 실수 a는 $-2,\ 6,\ -3,\ -\frac{7}{3}$이므로 모든 실수 a의 값의 곱은

$-2\times6\times(-3)\times\left(-\frac{7}{3}\right)=-84$ 답 -84

7 주어진 두 연립방정식의 해가 일치하므로 두 연립방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases} 2x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서

$x+y=\frac{1}{2} \qquad \therefore y=-x+\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2=-1,\ x^2-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=-1$

$x-\frac{1}{4}=-1 \qquad \therefore x=-\frac{3}{4}$

이를 ㉢에 대입하면 $y=\frac{5}{4}$

$x=-\frac{3}{4},\ y=\frac{5}{4}$를 $3x+y=a,\ x-y=b$에 각각 대입하면

$a=-\frac{9}{4}+\frac{5}{4}=-1,\ b=-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=-2$

$\therefore ab=-1\times(-2)=2$ 답 ②

다른풀이 ㉠에서 $x+y=\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots ㉣$

㉡에서 $(x+y)(x-y)=-1$이므로

$\frac{1}{2}(x-y)=-1,\ x-y=-2 \qquad \cdots\cdots ㉤$

$\therefore b=-2$

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $x=-\frac{3}{4},\ y=\frac{5}{4}$

이를 $3x+y=a$에 대입하면 $a=-\frac{9}{4}+\frac{5}{4}=-1$

$\therefore ab=-1\times(-2)=2$

8 주어진 두 연립방정식의 해가 일치하므로 두 연립방정식의 해는 연립방정식

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=x-1$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-(x-1)^2=7,\ x^2-(x^2-2x+1)=7$

$2x-1=7,\ 2x=8 \qquad \therefore x=4$

이를 ㉢에 대입하면 $y=3$

$x=4,\ y=3$을 $x+ay=16,\ y=-x+b$에 각각 대입하면

$4+3a=16,\ 3a=12 \qquad \therefore a=4$

$3=-4+b \qquad \therefore b=7$

$\therefore a+b=4+7=11$ 답 11

다른풀이 ㉡에서 $(x+y)(x-y)=7$이므로 ㉠을 대입하면

$x+y=7$ $\cdots\cdots ㉣$

$\therefore b=x+y=7$

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $x=4,\ y=3$

이를 $x+ay=16$에 대입하면

$4+3a=16,\ 3a=12 \qquad \therefore a=4$

$\therefore a+b=4+7=11$

9 $\begin{cases} x+y+xy=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y-xy=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3x+3y=12$

$\therefore x+y=4$, 즉 $y=4-x$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$4+x(4-x)=8,\ 4x-x^2=4,\ x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$

이를 ㉢에 대입하면 $y=4-2=2$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=4+4=8$ 답 ①

10 $\begin{cases} x+y-xy=-6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+3y-xy=14 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡−㉠을 하면 $2x+2y=20$

$\therefore x+y=10$, 즉 $y=10-x$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$10-x(10-x)=-6,\ x^2-10x+16=0$

$(x-2)(x-8)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=8$

이를 ㉢에 각각 대입하면

$x=2$일 때 $y=8$

$x=8$일 때 $y=2$

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=2,\ \beta=8$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha}=\frac{8}{2}=4$ 답 ②

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.162~165

01 $-2(A+B)+B=-2A-2B+B$
$=-2A-B$
$=-2(2a^2-3a+ab-b^2)-(2b^2+3a-2ab)$
$=-4a^2+6a-2ab+2b^2-2b^2-3a+2ab$
$=-4a^2+3a$

답 ①

02 $\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{1-i^2}$
$=\frac{2(1+i)}{1-(-1)}=1+i$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로

$a+b=1+1=2$

답 ②

03 $x^4-81y^4=(x^2)^2-(9y^2)^2$
$=(x^2-9y^2)(x^2+9y^2)$
$=\{x^2-(3y)^2\}(x^2+9y^2)$
$=(x-3y)(x+3y)(x^2+9y^2)$

따라서 x^4-81y^4의 인수가 아닌 것은 ⑤ $(x+3y)(x^2-9y^2)$이다.

답 ⑤

04 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $3+i$이므로 다른 한 근은 $3-i$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(3+i)+(3-i)=6$ $\quad\therefore a=-6$

$b=(3+i)(3-i)=9-i^2=9-(-1)=10$

$\therefore a+b=-6+10=4$

답 ①

05 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}$ ...... ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$243=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9+a_{10}$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면

$-242=2a_1+2a_3+2a_5+2a_7+2a_9$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-121$

답 ②

06 $(3x^2+2x)^2-2(3x^2+2x)-8=0$에서 $3x^2+2x=t$로 놓으면

$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

(i) $t=-2$일 때

$3x^2+2x=-2$에서 $3x^2+2x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=1^2-3\times2=-5<0$

이므로 이차방정식 $3x^2+2x+2=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

즉, 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은 $\frac{2}{3}$이다.

(ii) $t=4$일 때

$3x^2+2x=4$에서 $3x^2+2x-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-3\times(-4)=13>0$

이므로 이차방정식 $3x^2+2x-4=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 사차방정식의 두 허근의 곱은 $\frac{2}{3}$이다.

답 ④

07 $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+2y^2=56 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-2y)(x-3y)=0$

$\therefore x=2y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2+2y\times y+2y^2=56$

$8y^2=56$, $y^2=7$

$\therefore y=\pm\sqrt{7}$

$y=-\sqrt{7}$, $y=\sqrt{7}$을 $x=2y$에 각각 대입하면

$y=-\sqrt{7}$일 때 $x=-2\sqrt{7}$

$y=\sqrt{7}$일 때 $x=2\sqrt{7}$

(ii) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$(3y)^2+3y\times y+2y^2=56$

$14y^2=56$, $y^2=4$

$\therefore y=\pm2$

$y=-2$, $y=2$를 $x=3y$에 각각 대입하면

$y=-2$일 때 $x=-6$

$y=2$일 때 $x=6$

(i), (ii)에서 $\alpha=\pm2\sqrt{7}$, $\beta=\pm\sqrt{7}$

또는 $\alpha=\pm6$, $\beta=\pm2$ (복호동순)

따라서 $\alpha\beta$의 최댓값은 $2\sqrt{7}\times\sqrt{7}=14$

답 ⑤

08 $(182\sqrt{182}+13\sqrt{13})\times(182\sqrt{182}-13\sqrt{13})$
$=(182\sqrt{182})^2-(13\sqrt{13})^2$
$=182^3-13^3=(13\times14)^3-13^3$
$=13^3\times(14^3-1)$
$=13^3\times(14-1)\times(14^2+14\times1+1^2)$
$=13^3\times13\times211=13^4\times211$

$\therefore m=211$

답 ①

09 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

두 근의 합이 16이므로 $\alpha+\beta=16$

$f(424-8x)=0$에서

$424-8x=\alpha$ 또는 $424-8x=\beta$

$\therefore x=\frac{424-\alpha}{8}$ 또는 $x=\frac{424-\beta}{8}$

따라서 이차방정식 $f(424-8x)=0$의 두 근의 합은

$\frac{424-\alpha}{8}+\frac{424-\beta}{8}=\frac{848-(\alpha+\beta)}{8}$

$=\frac{848-16}{8}=104$

답 ⑤

10 실린더 A, B에 담긴 액체의 높이를 각각 $h_A(\mathrm{m})$, $h_B(\mathrm{m})$라 하고, 액체의 밀도를 각각 $\rho_A(\mathrm{kg/m^3})$, $\rho_B(\mathrm{kg/m^3})$라 하면

실린더 A에 담긴 액체의 높이는 실린더 B에 담긴 액체의 높이의 15배이므로 $h_A=15h_B$

실린더 A에 담긴 액체의 밀도는 실린더 B에 담긴 액체의 밀도의 $\frac{3}{5}$배이므로 $\rho_A=\frac{3}{5}\rho_B$

실린더 A, B에 담긴 액체의 무게에 의한 밑면에서의 압력이 각각 $P_A(\mathrm{N/m^2})$, $P_B(\mathrm{N/m^2})$이므로

$P_A=\rho_A g h_A=\frac{3}{5}\rho_B\times g\times 15h_B$

$=9\rho_B g h_B=9P_B$

$\therefore \frac{P_A}{P_B}=9$

답 ④

11 $x^3=1$에서

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

ㄱ. $\omega^2+\omega+1=0$의 양변을 ω로 나누면

$\omega+1+\frac{1}{\omega}=0$

$\therefore \omega+\frac{1}{\omega}=-1$ (참)

ㄴ. $\frac{\omega}{1+\omega}\times\frac{\overline{\omega}}{1+\omega}=\frac{\omega\overline{\omega}}{\omega^2+2\omega+1}$

$=\frac{\omega\overline{\omega}}{\omega}$ ($\because \omega^2+\omega+1=0$)

$=\overline{\omega}$ (참)

ㄷ. $\omega^2+(\omega^2)^2+(\omega^2)^3=\omega^2+\omega^4+\omega^6$

$=\omega^2+\omega^3\times\omega+(\omega^3)^2$

$=\omega^2+\omega+1=0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

12 조건 (가)에서 $a=2$ 또는 $b=2$ 또는 $c=2$이므로

$a-2=0$ 또는 $b-2=0$ 또는 $c-2=0$

$(a-2)(b-2)(c-2)=0$

$abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8=0$

이때 조건 (나)에서 $\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{2}$, 즉

$abc=2(bc+ca+ab)$이므로

$4(a+b+c)-8=0$, $4(a+b+c)=8$

$\therefore a+b+c=2$

답 ④

다른풀이 a, b, c 중 적어도 하나는 2이므로 임의로 $a=2$라 하면

조건 (나)에서

$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$, $\frac{b+c}{bc}=0$

$\therefore b+c=0$

$\therefore a+b+c=2+0=2$

13 $P(x+1)$을 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 -3이므로

$P(x+1)=(x^2-4)Q(x)-3$

$=(x+2)(x-2)Q(x)-3$

양변에 $x=-2$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(-1)=-3$, $P(3)=-3$

따라서 $P(x)=(x^2-x-1)(ax+b)+2$의 양변에

$x=-1$을 대입하면

$P(-1)=(1+1-1)(-a+b)+2=-3$

$\therefore a-b=5$ ...... ㉠

$x=3$을 대입하면

$P(3)=(9-3-1)(3a+b)+2=-3$, $5(3a+b)=-5$

$\therefore 3a+b=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

$\therefore ab=1\times(-4)=-4$

답 ②

14 (i) $z_1^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{1+2i+i^2}=-i$이므로

$z_1^3=z_1^2\times z_1=-i\times z_1=-z_1 i$

$z_1^4=(z_1^2)^2=(-i)^2=-1$

$z_1^5=z_1^4\times z_1=-1\times z_1=-z_1$

$z_1^6=(z_1^2)^3=(-i)^3=-i^3=-(-i)=i$

$z_1^7=z_1^6\times z_1=i\times z_1=z_1 i$

$z_1^8=(z_1^4)^2=(-1)^2=1$

즉, z_1^n의 값으로는 z_1, $-i$, $-z_1 i$, -1, $-z_1$, i, $z_1 i$, 1이 이 순서대로 반복된다. 또, n이 8의 배수이면 $z_1^n=1$이다.

(ii) $z_2^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$

$=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z_2^3=z_2^2\times z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{1-3i^2}{4}=1$

즉, z_2^n의 값으로는 z_2, z_2^2, 1이 이 순서대로 반복된다. 또, n이 3의 배수이면 $z_2^n=1$이다.

(i), (ii)에서 $z_1^n=z_2^n$이 성립하려면 $z_1^n=z_2^n=1$이어야 하므로 자연수 n은 8과 3의 최소공배수인 24의 배수이어야 한다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 24이다.

답 ③

15 $y=x^2+4x+p=(x+2)^2+p-4$이므로 이차함수 $y=x^2+4x+p$의 그래프는 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이다.
이때 $\overline{AB}=8$이므로 두 점 A, B는 직선 $x=-2$에서 4의 거리만큼 떨어져 있다.
$\therefore$ A$(-6, 0)$, B$(2, 0)$
$\therefore y=x^2+4x+p$
$=(x+6)(x-2)$
$=x^2+4x-12$
$\therefore p=-12$
또, 직선 $y=x+q$가 점 A$(-6, 0)$을 지나므로
$0=-6+q \qquad \therefore q=6$
이차함수 $y=x^2+4x-12$의 그래프와 직선 $y=x+6$의 교점의 x좌표는 $x^2+4x-12=x+6$에서 $x^2+3x-18=0$
$(x+6)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-6$ 또는 $x=3$
$\therefore$ C$(3, 9)$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 8\times 9=36$ 답 ④

16 조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=3$이므로
$f(x)=a(x-3)^2+q$ (a, q는 상수, $a\neq 0$)
라 하면
(i) $a>0$일 때
$-2\le x\le 5$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $25a+q$, $x=3$에서 최솟값 q를 가지므로 조건 (나)에서
$25a+q=12$, $q=-18$
$\therefore a=\frac{6}{5}$
(ii) $a<0$일 때
$-2\le x\le 5$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 q, $x=-2$에서 최솟값 $25a+q$를 가지므로 조건 (나)에서
$q=12$, $25a+q=-18$
$\therefore a=-\frac{6}{5}$
(i), (ii)에서
$f_1(x)=\frac{6}{5}(x-3)^2-18$, $f_2(x)=-\frac{6}{5}(x-3)^2+12$
라 하면 두 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 그래프의 교점의 x좌표 α, β는 이차방정식 $f_1(x)=f_2(x)$의 두 실근이다.
$f_1(x)=f_2(x)$에서
$\frac{6}{5}(x-3)^2-18=-\frac{6}{5}(x-3)^2+12$
$\frac{12}{5}(x-3)^2=30$, $2(x-3)^2=25$
$2x^2-12x-7=0$
이때 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-\frac{7}{2}$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6^2-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)=43$ 답 ②

참고 $2x^2-12x-7=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-6)^2-2\times(-7)=50>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

17 $x^{10}+x^8+x^6+x$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이므로 나머지를 R라 하면
$x^{10}+x^8+x^6+x=(x+1)Q(x)+R$ …… ❶
양변에 $x=-1$을 대입하면
$(-1)^{10}+(-1)^8+(-1)^6+(-1)=R \qquad \therefore R=2$ …… ❷
$\therefore x^{10}+x^8+x^6+x=(x+1)Q(x)+2$ …… ㉠
$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1+1+1+1=2Q(1)+2$
$2Q(1)=2 \qquad \therefore Q(1)=1$
따라서 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 1이다. …… ❸
답 1

채점기준	배점
❶ $x^{10}+x^8+x^6+x$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 R로 놓고 등식 세우기	2
❷ R의 값 구하기	2
❸ $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지 구하기	2

18 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$
조건 (가)에서 $z+\overline{z}=0$이므로
$(a+bi)+(a-bi)=0$
$2a=0 \qquad \therefore a=0$ …… ❶
즉, $z=bi$ $(b\neq 0)$이므로
$z+\frac{1}{z}=bi+\frac{1}{bi}=bi+\frac{i}{bi^2}=bi-\frac{i}{b}=\left(b-\frac{1}{b}\right)i$
조건 (나)에서 $z+\frac{1}{z}$이 실수이므로
$b-\frac{1}{b}=0$, $b^2-1=0$, $b^2=1 \qquad \therefore b=\pm 1$ …… ❷
따라서 $z=i$, $\overline{z}=-i$ 또는 $z=-i$, $\overline{z}=i$이므로
$z\overline{z}=i\times(-i)=1$ …… ❸
답 1

채점기준	배점
❶ $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 조건 (가)를 이용하여 a의 값 구하기	2
❷ 조건 (나)를 이용하여 b의 값 구하기	2
❸ $z\overline{z}$의 값 구하기	2

19 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=6$이고 $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{BC}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$
$\angle PBQ=45^\circ$, $\angle BQP=90^\circ$이므로 삼각형 BQP는 직각이등변삼각형이다. 즉, $\overline{BQ}=x$ $(0<x<3\sqrt{2})$라 하면
$\overline{PQ}=x$, $\overline{BP}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$
이므로 $\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{BP}=6-\sqrt{2}x$
이때 삼각형 APR는 $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AR}=\overline{AP}=6-\sqrt{2}x$ …… ❶

이때 사각형 PQCR의 넓이를 $f(x)$라 하면

$$f(x)=\triangle ABC-\triangle PBQ-\triangle APR$$
$$=\frac{1}{2}\times 6\times 6-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(6-\sqrt{2}x)^2$$
$$=\frac{1}{2}\{36-x^2-(36-12\sqrt{2}x+2x^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(-3x^2+12\sqrt{2}x)=-\frac{3}{2}(x^2-4\sqrt{2}x)$$
$$=-\frac{3}{2}(x-2\sqrt{2})^2+12\ (0<x<3\sqrt{2}) \quad \cdots\cdots ❷$$

따라서 사각형 PQCR의 넓이의 최댓값은 $x=2\sqrt{2}$일 때 12이다. ······ ❸

답 12

채점기준	배점
❶ $\overline{BQ}=x$ $(0<x<3\sqrt{2})$로 놓고, $\overline{PQ}$, $\overline{AR}$의 길이를 각각 x를 사용한 식으로 나타내기	3
❷ 사각형 PQCR의 넓이를 x를 사용한 식으로 나타내기	3
❸ 사각형 PQCR의 넓이의 최댓값 구하기	1

20 $p(x^2-x)+q(x-1)+x^3-x^2=0$에서

$px(x-1)+q(x-1)+x^2(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+px+q)=0$ ······ ❶

이므로 α, β는 방정식 $x^2+px+q=0$의 두 허근이다. 이때 이 이차방정식의 계수가 실수이므로 허수 α, β는 서로의 켤레복소수이다. 즉, $\beta=\overline{\alpha}$

$\alpha=m+ni$ (m, n은 실수, $n\neq 0$)라 하면 $\beta=m-ni$이므로

$\alpha^2=2\beta$에서

$(m+ni)^2=2(m-ni)$

$m^2-n^2+2mni=2m-2ni$

$(m^2-2m-n^2)+(2mn+2n)i=0$

$\therefore m^2-2m-n^2=0,\ 2mn+2n=0$

$2mn+2n=0$에서 $2n(m+1)=0$ $\quad\therefore m=-1$ ($\because n\neq 0$)

$m^2-2m-n^2=0$에서

$1+2-n^2=0,\ n^2=3$ $\quad\therefore n=\pm\sqrt{3}$

$\therefore \alpha=-1+\sqrt{3}i,\ \beta=-1-\sqrt{3}i$ 또는

$\alpha=-1-\sqrt{3}i,\ \beta=-1+\sqrt{3}i$ ······ ❷

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-p=(-1+\sqrt{3}i)+(-1-\sqrt{3}i)$ $\quad\therefore p=2$

$q=(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)$ $\quad\therefore q=4$

$\therefore pq=2\times 4=8$ ······ ❸

답 8

채점기준	배점
❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 일차식과 이차식의 곱으로 인수분해하기	2
❷ $\alpha^2=2\beta$를 이용하여 두 허근 구하기	3
❸ p, q의 값과 pq의 값 구하기	2

실전 모의고사 2회

p.166~169

01 허수는 $2i$, $4+3i$, $\sqrt{2}i$의 3개이다. 답 ③

02 $A=(3x-1)(x^2+2x+3)+7$

$=3x^3+5x^2+7x+4$ 답 ③

03 이차함수 $y=x^2+ax-8$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 두 점 사이의 거리가 6이므로

$\beta-\alpha=6$

또, α, β는 이차방정식 $x^2+ax-8=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=-8$

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서

$(-a)^2=(-6)^2+4\times(-8),\ a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 ①

04 $x^2+x=t$로 놓으면

$(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(t-2)(t-12)+24$

$=t^2-14t+48$

$=(t-6)(t-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ⑤ x^2-x+5이다.

답 ⑤

05 나머지정리에 의하여

$P(1)=2,\ P(-2)=8$

$P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b=2$ ······ ㉡

$P(-2)=-2a+b=8$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=4$

따라서 $R(x)=-2x+4$이므로

$R(4)=-8+4=-4$ 답 ①

06 이차방정식 $2x^2-2x+1=0$에서

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-2\times 1}}{2}=\frac{1\pm i}{2}$$

(i) $\alpha=\frac{1+i}{2}$일 때

$$\alpha^2=\left(\frac{1+i}{2}\right)^2=\frac{1+2i+i^2}{4}=\frac{i}{2},$$
$$\alpha^4=(\alpha^2)^2=\left(\frac{i}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$$

이므로

$$\alpha^4-\alpha^2+\alpha=-\frac{1}{4}-\frac{i}{2}+\frac{1+i}{2}=\frac{1}{4}$$

(ii) $a=\frac{1-i}{2}$일 때

$a^2=\left(\frac{1-i}{2}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{4}=-\frac{i}{2}$,

$a^4=(a^2)^2=\left(-\frac{i}{2}\right)^2=\frac{i^2}{4}=-\frac{1}{4}$

이므로

$a^4-a^2+a=-\frac{1}{4}-\left(-\frac{i}{2}\right)+\frac{1-i}{2}=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $a^4-a^2+a=\frac{1}{4}$ 답 ②

07 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+10=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $1+3i$이므로 $1-3i$도 근이다. 또, 나머지 한 근이 k이므로

$x^3+ax^2+bx+10$

$=(x-k)\{x-(1+3i)\}\{x-(1-3i)\}$

$=(x-k)(x^2-2x+10)$

$=x^3+(-k-2)x^2+(2k+10)x-10k$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-k-2,\ b=2k+10,\ 10=-10k$

$10=-10k$에서 $k=-1$이므로

$a=-(-1)-2=-1,\ b=2\times(-1)+10=8$

$\therefore a+b+k=-1+8+(-1)=6$ 답 ③

다른풀이 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+10=0$의 계수가 실수이고 한 근이 $1+3i$이므로 $1-3i$도 근이다. 또, 나머지 한 근이 k이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k(1+3i)(1-3i)=-10$

$10k=-10 \quad \therefore k=-1$

따라서 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+10=0$의 세 근은 $-1,\ 1+3i,\ 1-3i$이므로

$-1+(1+3i)+(1-3i)=-a$

$\therefore a=-1$

$-1\times(1+3i)+(1+3i)(1-3i)+(1-3i)\times(-1)=b$

$\therefore b=8$

$\therefore a+b+k=-1+8+(-1)=6$

08 $\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-5$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(2x-5)^2=k$

$x^2+4x^2-20x+25-k=0$

$5x^2-20x-k+25=0$

주어진 연립방정식의 해가 오직 한 쌍만 존재하려면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-10)^2-5(-k+25)=0$

$100+5k-125=0,\ 5k=25 \quad \therefore k=5$ 답 ③

09 $5122=x$로 놓으면

$\frac{5122^3-27}{5122\times5125+9}=\frac{x^3-27}{x(x+3)+9}$

$=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2+3x+9}$

$=x-3$

$=5122-3=5119$

따라서 5122^3-27을 $5122\times5125+9$로 나누었을 때의 몫은 5119이다. 답 ②

10 $\overline{AC}=a,\ \overline{CB}=b$라 하면

$a+b=\overline{AB}=8$

두 정육면체의 부피의 합이 200이므로

$a^3+b^3=200$

$(a+b)^3-3ab(a+b)=200$

$8^3-3ab\times8=200,\ 64-3ab=25$

$3ab=39 \quad \therefore ab=13$

따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6a^2+6b^2=6(a^2+b^2)=6\{(a+b)^2-2ab\}$

$=6(8^2-2\times13)=228$ 답 ⑤

11 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$z+\overline{w}=0$에서 $\overline{w}=-z=-(a+bi)=-a-bi$이므로

$w=-a+bi=-(a-bi)=-\overline{z}$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. ㉠에서 $\overline{z}+w=0$ (실수)

ㄴ. $i(z+w)=i\{(a+bi)+(-a+bi)\}$

$=i\times2bi=-2b$ (실수)

ㄷ. $z\overline{w}=(a+bi)(-a-bi)$

$=-a^2+b^2-2abi$

이므로 $z\overline{w}$는 항상 실수라고 할 수는 없다.

ㄹ. $\frac{\overline{z}}{w}=\frac{\overline{z}}{-\overline{z}}=-1$ (실수)

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ⑤

12 $P(x)=x^3+(2a-2)x^2-5ax+2a$라 하면

$P(2)=8+4(2a-2)-10a+2a=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 2a-2 & -5a & 2a \\ & & 2 & 4a & -2a \\ \hline & 1 & 2a & -a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2+2ax-a)$

$P(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x^2+2ax-a=0$

이때 방정식 $P(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 $x^2+2ax-a=0$이 2가 아닌 중근을 갖는 경우

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-1\times(-a)=0,\ a^2+a=0$

$a(a+1)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=-1$

$a=0$이면 $x^2=0 \quad \therefore x=0$ (중근)

$a=-1$이면 $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$ (중근)

즉, 두 경우 모두 2가 아닌 중근을 가지므로 조건을 만족시킨다.

(ii) 이차방정식 $x^2+2ax-a=0$이 2와 다른 한 실근을 갖는 경우

$x=2$를 근으로 가지므로

$4+4a-a=0$, $3a=-4 \quad \therefore a=-\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$0+(-1)+\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{7}{3}$ 답 ②

13 처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면 각 자리의 숫자의 제곱의 합이 85이므로

$x^2+y^2=85$ …… ㉠

일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수보다 63만큼 더 크므로

$10y+x=10x+y+63$, $9y=9x+63$

$\therefore y=x+7$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(x+7)^2=85$, $2x^2+14x-36=0$

$x^2+7x-18=0$, $(x+9)(x-2)=0$

x는 한 자리 자연수이므로 $x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면

$y=2+7=9$

따라서 처음 두 자리 자연수는 29이다. 답 ③

14 $(p+2qi)^2=-32i$에서

$p^2+4pqi+4q^2i^2=-32i$, $(p^2-4q^2)+4pqi=-32i$

p, q가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$p^2-4q^2=0$, $4pq=-32$

$p^2-4q^2=0$에서 $(p+2q)(p-2q)=0$

$\therefore p=-2q$ 또는 $p=2q$

$4pq=-32$에서 $pq=-8$

(i) $p=-2q$일 때

$p=-2q$를 $pq=-8$에 대입하면

$-2q\times q=-8$, $q^2=4 \quad \therefore q=\pm 2$

이를 각각 $p=-2q$에 대입하면

$q=-2$일 때 $p=-2\times(-2)=4$

$q=2$일 때, $p=-2\times 2=-4$

이때 $p>0$이므로 $p=4$, $q=-2$

(ii) $p=2q$일 때

$p=2q$를 $pq=-8$에 대입하면

$2q\times q=-8$, $q^2=-4$

이를 만족시키는 실수 q는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $p=4$, $q=-2$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근은 4, -2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$4+(-2)=-a \quad \therefore a=-2$

$4\times(-2)=b \quad \therefore b=-8$

$\therefore ab=-2\times(-8)=16$ 답 ①

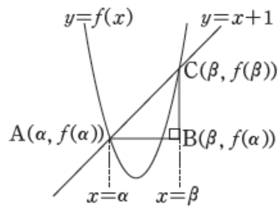
15 α, β는 이차함수 $y=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 두 교점의 x좌표이므로 이차방정식 $x^2-x+k=x+1$, 즉 $x^2-2x+(k-1)=0$의 두 실근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$ …… ㉠

$\alpha\beta=k-1$ …… ㉡

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$ 및 세 점 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\alpha))$, $\mathrm{C}(\beta, f(\beta))$의 위치는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=x+1$의 기울기가 1이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형이다.



$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\beta-\alpha$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 8이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2=8$

$(\beta-\alpha)^2=16 \quad \therefore \beta-\alpha=4 \ (\because \beta-\alpha>0)$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=-1$, $\beta=3$

$\alpha=-1$, $\beta=3$을 ㉡에 대입하면

$-1\times 3=k-1 \quad \therefore k=-2$

따라서 $f(x)=x^2-x-2$이므로

$f(6)=36-6-2=28$ 답 ①

16 조건 (가)에서

$P(x)=Q(x)\{Q(x)-2x^3\}+Q(x)-2x^3$ …… ㉠

㉠에서 나머지 $Q(x)-2x^3$의 차수는 $Q(x)$의 차수보다 작아야 하므로 다항식 $Q(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차식이다.

또, 조건 (나)에서

$Q(1)-3=Q(2)-6=Q(3)-9=0$

이므로 다항식 $Q(x)-3x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어진다. 이때 다항식 $Q(x)-3x$도 최고차항의 계수가 2인 삼차식이므로

$Q(x)-3x=2(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore Q(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+3x$

$Q(0)=2\times(-1)\times(-2)\times(-3)=-12$이므로 ㉠에서

$P(0)=\{Q(0)\}^2+Q(0)=(-12)^2+(-12)=132$

따라서 다항식 $P(x)+Q(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(0)+Q(0)=132+(-12)=120$ 답 ③

17 철수는 상수항 b를 바르게 보고 풀었고, 잘못 푼 이차방정식의 계수도 모두 실수이므로 한 근이 $3-i$이면 다른 한 근은 $3+i$이다.
즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$b=(3-i)(3+i)=9-i^2=10$ …… ❶

영희는 x의 계수 a를 바르게 보고 풀었고, 잘못 푼 이차방정식의 계수도 모두 실수이므로 한 근이 $-1+2i$이면 다른 한 근은 $-1-2i$이다. 즉, 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(-1+2i)+(-1-2i)=-2 \quad \therefore a=2$ …… ❷

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2+2x+10=0$이므로

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times10}=-1\pm3i$ …… ❸

답 $x=-1\pm3i$

채점기준	배점
❶ b의 값 구하기	2
❷ a의 값 구하기	2
❸ 주어진 이차방정식의 올바른 두 근 구하기	2

18 $-i+2i^2-3i^3+4i^4-\cdots+70i^{70}$

$=(-i+2i^2-3i^3+4i^4)+i^4(-5i+6i^2-7i^3+8i^4)$
$+\cdots+i^{68}(-69i+70i^2)$ …… ❶

$=(-i-2+3i+4)+(-5i-6+7i+8)$
$+\cdots+(-69i-70)$

$=(2+2i)+(2+2i)+\cdots+(-69i-70)$

$=(2+2i)\times17+(-69i-70)$

$=-36-35i$ …… ❷

따라서 $a=-36$, $b=-35$이므로

$a+b=-36+(-35)=-71$ …… ❸

답 -71

채점기준	배점
❶ 좌변의 각 항을 4개씩 묶어 나타내기	2
❷ 좌변을 계산하여 간단히 나타내기	3
❸ $a+b$의 값 구하기	1

19 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

$\overline{EB}=x\ (0<x<6)$, $\overline{ED}=y$라 하면

$\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{EB}=6-x$

이때 $\triangle ABC\backsim\triangle AED$이므로

$\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{ED}:\overline{BC}$

$(6-x):6=y:8$, $8(6-x)=6y$, $4(6-x)=3y$

$24-4x=3y \quad \therefore y=8-\frac{4}{3}x$ …… ❶

직사각형 DEBF의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\overline{EB}\times\overline{ED}=x\left(8-\frac{4}{3}x\right)$

$=-\frac{4}{3}x^2+8x$

$=-\frac{4}{3}(x-3)^2+12\ (0<x<6)$ …… ❷

이므로 함수 $S(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 12를 갖는다.

따라서 직사각형 DEBF의 넓이가 최대일 때 선분 BE의 길이는 3이다. …… ❸

답 3

채점기준	배점
❶ $\overline{EB}=x$, $\overline{ED}=y$로 놓고 삼각형의 닮음을 이용하여 y를 x에 대한 식으로 나타내기	3
❷ 직사각형 DEBF의 넓이를 x에 대한 이차함수로 나타내기	2
❸ 직사각형 DEBF의 넓이가 최대일 때 선분 BE의 길이 구하기	2

20 조건 (가)에서 $b(a^2-b^2)+c(a^2-c^2)=bc(b+c)$이므로

$a^2b-b^3+a^2c-c^3=b^2c+bc^2$, $a^2b-b^3+a^2c-c^3-b^2c-bc^2=0$

$(b+c)a^2-(b^3+c^3)-bc(b+c)=0$

$(b+c)a^2-(b+c)(b^2-bc+c^2)-bc(b+c)=0$

$(b+c)\{a^2-(b^2-bc+c^2)-bc\}=0$

$(b+c)(a^2-b^2-c^2)=0$

$a^2-b^2-c^2=0\ (\because b+c>0)$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

즉, 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. …… ❶

이때 조건 (다)에서 $a=5$ …… ❷

조건 (나)에서 $ab+b^2-bc-2ac-2c^2=0$이므로

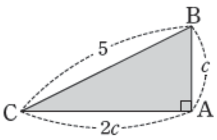
$(b-2c)a+b^2-bc-2c^2=0$

$(b-2c)a+(b+c)(b-2c)=0$

$(b-2c)(a+b+c)=0$

$b-2c=0\ (\because a+b+c>0) \quad \therefore b=2c$ …… ❸

즉, 직각삼각형 ABC는 오른쪽 그림과 같으므로



$5^2=(2c)^2+c^2$, $5c^2=25$

$c^2=5$

$\therefore c=\sqrt{5}\ (\because c>0)$, $b=2\sqrt{5}$ …… ❹

따라서 $\angle A=90^\circ$, $\overline{AB}=\sqrt{5}$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ …… ❺

답 5

채점기준	배점
❶ 조건 (가)를 이용하여 삼각형 ABC의 모양 설명하기	2
❷ 조건 (다)를 이용하여 a의 값 구하기	1
❸ 조건 (나)를 이용하여 b, c 사이의 관계식 구하기	2
❹ 피타고라스 정리를 이용하여 b, c의 값 각각 구하기	1
❺ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	1

실전 모의고사 3회

p.170~173

01 등식 $ax^2+bx+3=x^2-3x+c+1$이 x에 대한 항등식이므로

$a=1$, $b=-3$, $3=c+1$

따라서 $a=1$, $b=-3$, $c=2$이므로

$a+b+c=1+(-3)+2=0$

답 ②

02 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 해는

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times4}}{2\times1}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$$

따라서 $m=3$, $n=7$이므로

$n-m=7-3=4$ 답 ②

03 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서

$18=3^3+3xy\times3$, $9xy=-9$ $\quad\therefore xy=-1$

$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=3^2+2\times(-1)=7$ 답 ①

04 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω, $\overline{\omega}$는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 허근이므로

$\omega^3=-1$, $\overline{\omega}^3=-1$, $\omega^6=1$, $\overline{\omega}^6=1$

이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$$\therefore \frac{\omega^{13}}{1+\omega^7}+\frac{\overline{\omega}^{13}}{1+\overline{\omega}^7}=\frac{\omega}{1+\omega}+\frac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}}$$
$$=\frac{\omega(1+\overline{\omega})+\overline{\omega}(1+\omega)}{(1+\omega)(1+\overline{\omega})}$$
$$=\frac{(\omega+\overline{\omega})+2\omega\overline{\omega}}{1+(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$$
$$=\frac{1+2\times1}{1+1+1}=\frac{3}{3}=1$$
답 ③

05 $x^2y+xy^2+x+y=xy(x+y)+(x+y)$

$\qquad=(xy+1)(x+y)$

이때 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$에서

$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$,

$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$

이므로

$(xy+1)(x+y)=(1+1)\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ 답 ④

06 조건 (가)에서 $P(2+x)=P(2-x)$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(3)=P(1)$

이때 조건 (나)에서 $P(3)=4$이므로

$P(1)=P(3)=4$

$P(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면

$P(1)=a+b=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$P(3)=3a+b=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=4$

따라서 $P(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지는 4이다. 답 ③

07 삼차방정식 $x^3-3x^2+3x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

x^3-3x^2+3x-2

$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

$-3=-(\alpha+\beta+\gamma)$, 즉 $\alpha+\beta+\gamma=3$이므로

$\alpha+\beta=3-\gamma$, $\beta+\gamma=3-\alpha$, $\gamma+\alpha=3-\beta$

$\therefore (\alpha+\beta+1)(\beta+\gamma+1)(\gamma+\alpha+1)$

$\quad=(3-\gamma+1)(3-\alpha+1)(3-\beta+1)$

$\quad=(4-\gamma)(4-\alpha)(4-\beta)$

이때 ㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$(4-\gamma)(4-\alpha)(4-\beta)=64-48+12-2=26$ 답 ②

다른풀이 삼차방정식 $x^3-3x^2+3x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=2$

$\alpha+\beta+\gamma=3$에서

$\alpha+\beta=3-\gamma$, $\beta+\gamma=3-\alpha$, $\gamma+\alpha=3-\beta$이므로

$(\alpha+\beta+1)(\beta+\gamma+1)(\gamma+\alpha+1)$

$=(3-\gamma+1)(3-\alpha+1)(3-\beta+1)$

$=(4-\gamma)(4-\alpha)(4-\beta)$

$=64-16(\alpha+\beta+\gamma)+4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=64-16\times3+4\times3-2=26$

08 $m^2n+2mn+m^2+2m+n+1$

$=(m^2+2m+1)n+(m^2+2m+1)$

$=(m^2+2m+1)(n+1)$

$=(m+1)^2(n+1)$

이때 $175=5^2\times7$이므로

$(m+1)^2(n+1)=5^2\times7$

m, n이 자연수이므로 $m+1=5$, $n+1=7$

따라서 $m=4$, $n=6$이므로

$m+n=4+6=10$ 답 ⑤

09 점 $(0, -8)$을 지나는 직선의 y절편은 -8이므로 직선의 방정식을 $y=ax-8$ ($a>0$)이라 하자.

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-2x$의 그래프와 직선 $y=ax-8$이 접하므로

이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-2x=ax-8$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-(a+2)x+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+2)\}^2-4\times\frac{1}{2}\times8=0$, $(a+2)^2-16=0$

$a^2+4a-12=0$, $(a-2)(a+6)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x-8$ 답 ④

10 이차방정식 $(ab+bc+ca)x^2+2(a+b+c)x+3=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\times3=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}=0$

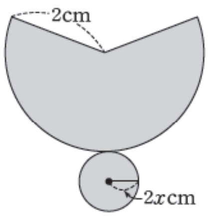
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형은 정삼각형이다. 답 ③

11 주어진 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같다.



부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\times 2x=4\pi x(\text{cm})$

이때 원뿔의 겉넓이가 $4\pi\ \text{cm}^2$이므로

$\pi\times(2x)^2+\frac{1}{2}\times 2\times 4\pi x=4\pi$

$4\pi x^2+4\pi x=4\pi,\ x^2+x-1=0$

$x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+1-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=(-1)^3+3\times(-1)=-4$ 답 ②

12 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=5 \\ x+y=7 \end{cases}$의 해가 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=b \end{cases}$의 해이므로 두 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=5 \\ x+y=7 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=b \end{cases}$는 공통인 해를 갖고, 그 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+y=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=-x+7$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x+7)^2=25,\ 2x^2-14x+24=0$

$x^2-7x+12=0,\ (x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

이를 ㉢에 각각 대입하면

$x=3$일 때 $y=4$

$x=4$일 때 $y=3$

(i) $x=3$, $y=4$를 $ax-y=5$, $x-y=b$에 각각 대입하면

$3a-4=5,\ 3a=9 \qquad \therefore a=3$

$3-4=b \qquad \therefore b=-1$

(ii) $x=4$, $y=3$을 $ax-y=5$, $x-y=b$에 각각 대입하면

$4a-3=5,\ 4a=8 \qquad \therefore a=2$

$4-3=b \qquad \therefore b=1$

이때 a, b는 양수이므로 (i), (ii)에서 $a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$ 답 ④

13 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$,

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i$

이므로

$f(n)=i^{2n}+(-i)^n=(i^2)^n+(-i)^n=(-1)^n+(-i)^n$

$f(1)=-1-i,\ f(2)=1-1=0,$

$f(3)=-1+i,\ f(4)=1+1=2,$

$f(5)=-1-i,\ \cdots$

이므로 $f(n)$의 값으로는 $-1-i$, 0, $-1+i$, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때

$f(1)+f(2)=-1-i,$

$f(1)+f(2)+f(3)=-2,$

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$

이므로 $n=4k+3\ (k=0, 1, 2, \cdots)$ 꼴일 때

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=-2$

따라서 100 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, …, 99의 25개이다.

답 ④

14 $y=(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+12$
$=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}+12$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+12$

$x^2+2x=t$로 놓으면

$y=(t-3)(t-8)+12$
$=t^2-11t+36$

이때 $t=x^2+2x=(x+1)^2-1$이므로 $-4\le x\le -2$일 때, 함수 $t=(x+1)^2-1$은 $x=-4$에서 최댓값 8, $x=-2$에서 최솟값 0을 갖는다.

$\therefore 0\le t\le 8$

따라서 주어진 함수는

$y=t^2-11t+36=\left(t-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{23}{4}\ (0\le t\le 8)$

이므로 $0\le t\le 8$일 때 $t=0$에서 최댓값 36을 갖는다.

$t=0$이면 $x^2+2x=t$에서 $x^2+2x=0,\ x(x+2)=0$

이때 $-4\le x\le -2$이므로 $x=-2$

따라서 주어진 함수는 $x=-2$에서 최댓값 36을 가지므로

$p=-2,\ q=36$

$\therefore \frac{q}{p}=\frac{36}{-2}=-18$ 답 ①

15 다항식 $P(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$ …… ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$P(a)=R(a)$ $\quad\therefore P(a)-R(a)=0$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $P(a)=R(a)$, 같은 방법으로 $P(b)=R(b)$이므로

$$P(a)-R(b)=R(a)-P(b)$$
$$\neq P(b)-R(a) \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $R(x)=px+q$ (p, q는 실수)라 하면 ㉠에서

$P(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+px+q$

양변에 $x=a$, $x=b$를 각각 대입하면

$P(a)=ap+q$, $P(b)=bp+q$

이므로

$$\begin{aligned} aP(b)-bP(a)&=a(bp+q)-b(ap+q)\\ &=abp+aq-abp-bq\\ &=(a-b)q\\ &=(a-b)R(0) \text{ (참)}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

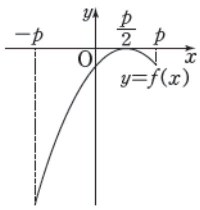
16 $f(x)=-x^2+px-q=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}-q$

조건 (가)에서 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

$\frac{p^2}{4}-q=0$ $\quad\therefore q=\frac{p^2}{4}$ ······ ㉠

$\therefore f(x)=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$

$-p\le x\le p$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-p$에서 최솟값 $f(-p)$를 갖는다.



이때 조건 (나)에서

$f(-p)=-54$

$-\left(-p-\frac{p}{2}\right)^2=-54$, $\left(-\frac{3}{2}p\right)^2=54$

$\frac{9}{4}p^2=54$ $\quad\therefore p^2=24$

이를 ㉠에 대입하면 $q=\frac{24}{4}=6$

$\therefore p^2+q^2=24+6^2=60$

답 ⑤

17 $z=(x-i)(x-4i)+(x^2+2xi)i$

$=x^2-5xi+4i^2+x^2i+2xi^2$

$=(x^2-2x-4)+(x^2-5x)i$ ······ ❶

z가 음의 실수이므로

$x^2-2x-4<0$, $x^2-5x=0$ ······ ❷

$x^2-5x=0$에서 $x(x-5)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=5$

(i) $x=0$일 때

$x=0$을 x^2-2x-4에 대입하면 $-4<0$

(ii) $x=5$일 때

$x=5$를 x^2-2x-4에 대입하면 $25-10-4=11>0$

(i), (ii)에서 $x=0$ ······ ❸

답 0

채점기준	배점
❶ z를 $a+bi$ 꼴로 나타내기	1
❷ z가 음의 실수가 될 조건을 구하기	2
❸ x의 값 구하기	3

18 $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$ ······ ❶

조립제법을 이용하여 $x^3-6x^2+12x-8$을 $x-1$로 반복해서 나누면 나머지가 차례대로 d, c, b의 값이 되고, 마지막의 몫이 a의 값이 된다. ······ ❷

1	1	-6	12	-8
		1	-5	7
1	1	-5	7	-1
		1	-4	
1	1	-4	3	
		1		
	1	-3		

따라서 $a=1$, $b=-3$, $c=3$, $d=-1$이므로 ······ ❸

$a-b-c-d=1-(-3)-3-(-1)=2$ ······ ❹

답 2

채점기준	배점
❶ $(x-2)^3$을 전개하기	1
❷ 조립제법과 a, b, c, d 사이의 관계 설명하기	2
❸ a, b, c, d의 값 각각 구하기	2
❹ $a-b-c-d$의 값 구하기	1

19 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b ($a>0$, $b<0$)라 하면

$A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$

두 점 A, B가 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점이므로 a, b는 이차방정식 $x^2=x+k$, 즉 $x^2-x-k=0$의 두 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=1$, $ab=-k$ ······ ❶

한편, 삼각형 AOC의 넓이 S_1은

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times a\times a^2=\frac{a^3}{2}$

삼각형 BDO의 넓이 S_2는

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times(-b)\times b^2=-\frac{b^3}{2}$ ······ ❷

$S_1-S_2=20$이므로

$\frac{a^3}{2}-\left(-\frac{b^3}{2}\right)=20$, $a^3+b^3=40$

$(a+b)^3-3ab(a+b)=40$, $1^3-3\times(-k)\times1=40$

$1+3k=40$, $3k=39$

$\therefore k=13$ ······ ❸

답 13

채점기준	배점
❶ 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b ($a>0$, $b<0$)로 놓고 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	2
❷ S_1, S_2를 각각 a, b를 사용한 식으로 나타내기	2
❸ $S_1-S_2=20$임을 이용하여 양수 k의 값 구하기	3

20 $\begin{cases} x+y=-2k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=2k^2+k-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x-2k$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(-x-2k)^2=2k^2+k-1$

$2x^2+4kx+2k^2-k+1=0$ …… ㉣ …… ❶

(i) 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 갖는 경우

㉣이 중근을 가져야 하므로 ㉣의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-2(2k^2-k+1)=0,\ 4k^2-4k^2+2k-2=0$

$2k=2 \quad \therefore k=1$

$\therefore m=1$ …… ❷

(ii) 주어진 연립방정식이 실수인 해를 갖지 않는 경우

㉣이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(2k)^2-2(2k^2-k+1)<0,\ 4k^2-4k^2+2k-2<0$

$2k<2 \quad \therefore k<1$

따라서 정수 k의 최댓값은 0이므로 $n=0$ …… ❸

(i), (ii)에서 $m+n=1+0=1$ …… ❹

답 1

채점기준	배점
❶ $y=-x-2k$를 $x^2+y^2=2k^2+k-1$에 대입하여 x에 대한 이차방정식 세우기	2
❷ 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가질 조건을 이용하여 m의 값 구하기	2
❸ 주어진 연립방정식이 실수인 해를 갖지 않을 조건을 이용하여 n의 값 구하기	2
❹ $m+n$의 값 구하기	1

실전 모의고사 4회

p.174~177

01 $A+2X=2B+3X$에서

$X=A-2B$

$=(3x^2+2x-1)-2(x^2-3x+2)$

$=3x^2+2x-1-2x^2+6x-4$

$=x^2+8x-5$

답 ④

02 $\frac{m+7i}{1-2i}=\frac{(m+7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{m+2mi+7i+14i^2}{1-4i^2}$

$=\frac{(m-14)+(2m+7)i}{5}=\frac{m-14}{5}+\frac{2m+7}{5}i$

실수부분과 허수부분의 합이 1이므로

$\frac{m-14}{5}+\frac{2m+7}{5}=1,\ (m-14)+(2m+7)=5$

$3m=12 \quad \therefore m=4$

답 ③

03 이차방정식 $x^2+2kx+k^2+k-3=0$이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-1\times(k^2+k-3)\geq 0$

$-k+3\geq 0 \quad \therefore k\leq 3$

따라서 정수 k의 최댓값은 3이다.

답 ④

04 이차방정식 $x^2-5x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\times1\times1=21>0$

이므로 이 이차방정식의 두 근 α, β는 서로 다른 두 실수이다. 이때 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5>0,\ \alpha\beta=1>0$

이므로 $\alpha>0,\ \beta>0$

$\therefore (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2$

$=(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\beta}$

$=5-2\times\sqrt{1}=3$

답 ①

05 $\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$

$=\{P(x)+Q(x)\}[\{P(x)\}^2-P(x)Q(x)+\{Q(x)\}^2]$

$=(2x^2+x-3)[\{P(x)\}^2-P(x)Q(x)+\{Q(x)\}^2]$

이때 $\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=(2x^2+x-3)R(x)$이므로

$R(x)=\{P(x)\}^2-P(x)Q(x)+\{Q(x)\}^2$

또, $P(1)=1-2-1=-2,\ Q(1)=1+3-2=2$이므로 $R(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$R(1)=\{P(1)\}^2-P(1)Q(1)+\{Q(1)\}^2$

$=(-2)^2-(-2)\times2+2^2=12$

답 ②

06 $x^4-2kx^2+3k+4=0$에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2-2kt+3k+4=0$ …… ㉠

주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 ㉠이 부호가 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$3k+4<0,\ 3k<-4 \quad \therefore k<-\frac{4}{3}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -2이다.

답 ①

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 부호가 다른 두 실근을 가지려면

(i) 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때,

$D=b^2-4ac>0$

(ii) (두 근의 곱)$=\frac{c}{a}<0$

을 모두 만족시켜야 한다. 그런데 $\frac{c}{a}<0$이면 $ac<0$이므로

$D=b^2-4ac>0$임이 보장된다. 즉, (ii)만 구하면 된다.

07 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$(11-i)z+(5-3i)\bar{z}=44$에서

$(11-i)(a+bi)+(5-3i)(a-bi)=44$

$11a+11bi-ai-bi^2+5a-5bi-3ai+3bi^2=44$

$16a-2b+(-4a+6b)i=44$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$16a-2b=44,\ -4a+6b=0$

$\therefore 8a-b=22,\ -2a+3b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=2$

따라서 $z=3+2i,\ \bar{z}=3-2i$이므로

$z\bar{z}=(3+2i)(3-2i)=9-4i^2=13$

답 ④

08 $16=t$로 놓으면

$16^3+16^2-16+2=t^3+t^2-t+2$

우변을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore t^3+t^2-t+2=(t+2)(t^2-t+1)$

따라서 $16^3+16^2-16+2=18\times(16^2-16+1)$이므로

$k=16^2-16+1=241$ 답 ④

09 $(3k+1)x+(-k-2)y=-k+3$에서

$3kx+x-ky-2y+k-3=0$

$k(3x-y+1)+(x-2y-3)=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$3x-y+1=0$, $x-2y-3=0$

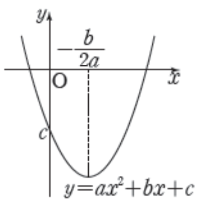
두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=-2$

따라서 주어진 일차방정식이 나타내는 직선은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -2)$를 지나므로

$m=-1$, $n=-2$

$\therefore mn=-1\times(-2)=2$ 답 ④

10 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 축은 직선 $x=-\dfrac{b}{2a}$이고, 그래프는 점 $(0,\ c)$를 지난다.



그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로

$-\dfrac{b}{2a}>0 \qquad \therefore b<0$

그래프와 y축의 교점의 y좌표가 음수이므로 $c<0$

따라서

$\sqrt{a}\sqrt{c}=\sqrt{ac}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=-\sqrt{\dfrac{a}{c}}$,

$\sqrt{b}\sqrt{c}=-\sqrt{bc}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{c}{b}}$

이므로

$\sqrt{\dfrac{a}{c}}\times\sqrt{ac}+\sqrt{\dfrac{c}{b}}\times\sqrt{bc}$

$=-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\times\sqrt{a}\sqrt{c}+\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\times(-\sqrt{b}\sqrt{c})$

$=-(\sqrt{a})^2-(\sqrt{c})^2=-a-c$ 답 ①

참고 $c<0$일 때,

$(\sqrt{c})^2=\sqrt{c}\times\sqrt{c}=-\sqrt{c\times c}$

$=-\sqrt{c^2}=-|c|=-(-c)=c$

11 삼차방정식 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이다. 즉,

$\omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$(-\overline{\omega}-1)^n=\left(\dfrac{\omega}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$에서

$\omega^n=(-\omega)^n$, $\omega^n=(-1)^n\times\omega^n$

$\therefore (-1)^n=1$

따라서 n은 짝수이므로 50 이하의 자연수 n은 $2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 50$의 25개이다. 답 ⑤

12 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $a\neq0$ 또는 $b\neq0$)라 하면

$\overline{z}=a-bi$

ㄱ. $z=\overline{z}$에서 $a+bi=a-bi$, $2bi=0 \qquad \therefore b=0$

$\therefore z=a$

따라서 z는 실수이다. (참)

ㄴ. $zi=\overline{z}$에서 $(a+bi)i=a-bi$

$ai-b=a-bi \qquad \therefore a=-b$

따라서 $\overline{z}=a+ai$이므로

$\overline{z}^2=(a+ai)^2=a^2+2a^2i+a^2i^2=2a^2i$

$a\neq0$이므로 $\overline{z}^2$은 실수부분이 0인 허수이다. (참)

ㄷ. $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이므로

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

13 다항식 $P(x)-1$은 x^2-3x+2, 즉 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 일차식 $x-1$, $x-2$로 각각 나누어떨어진다. 즉,

$P(1)-1=0$, $P(2)-1=0$

$\therefore P(1)=P(2)=1$

$(x-2)P(x-2)$를 $x^2-7x+12$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x-2)P(x-2)=(x^2-7x+12)Q(x)+ax+b$

$=(x-3)(x-4)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=3$, $x=4$를 각각 대입하면

$P(1)=3a+b=1$, $2P(2)=4a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

따라서 구하는 나머지는 $x-2$이다. 답 ①

14 $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy-6=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-3y)(x+y)=0$

$\therefore x=3y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=3y$를 ㉡에 대입하면

$9y^2-3y\times y-6=0$, $6y^2=6$, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$

$y=1$, $y=-1$을 $x=3y$에 각각 대입하면

$y=1$일 때 $x=3$

$y=-1$일 때 $x=-3$

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2-(-y)\times y-6=0$, $y^2+y^2-6=0$

$2y^2=6$, $y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$을 $x=-y$에 각각 대입하면

$y=\sqrt{3}$일 때 $x=-\sqrt{3}$

$y=-\sqrt{3}$일 때 $x=\sqrt{3}$

이때 x, y는 자연수이므로 (i), (ii)에서

$x=3$, $y=1$

$\therefore x+y=3+1=4$

답 ③

15 $(x-1)^2=x^2-2x+1$이므로 x^4+x^2+1을 x^2-2x+1로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x+4 \\ \hline x^2-2x+1 & x^4 \qquad + x^2 \quad +1 \\ & x^4-2x^3+x^2 \\ \hline & \quad 2x^3 \\ & \quad 2x^3-4x^2+2x \\ \hline & \qquad 4x^2-2x+1 \\ & \qquad 4x^2-8x+4 \\ \hline & \qquad\qquad 6x-3 \end{array}$$

따라서 $R(x)=6x-3$이므로

$R(2)=12-3=9$

답 ⑤

16 α, β는 이차함수 $y=x^2+4mx+2m^2$의 그래프와 직선 $y=mx+1$의 두 교점의 x좌표이므로 이차방정식 $x^2+4mx+2m^2=mx+1$, 즉 $x^2+3mx+2m^2-1=0$의 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3m$, $\alpha\beta=2m^2-1$

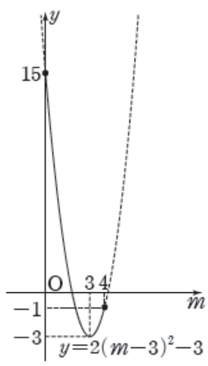
이므로

$$\begin{aligned}(\alpha+4)(\beta+4)&=\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+16\\&=2m^2-1+4\times(-3m)+16\\&=2m^2-12m+15\\&=2(m-3)^2-3\ (0\le m\le 4)\end{aligned}$$

$0\le m\le 4$일 때, 함수 $y=2(m-3)^2-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=2(m-3)^2-3$은 $m=0$에서 최댓값 15를 갖는다.

따라서 $(\alpha+4)(\beta+4)$의 최댓값은 15이다.

답 ⑤



참고 이차방정식

$x^2+4mx+2m^2=mx+1$, 즉

$x^2+3mx+2m^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3m)^2-4\times1\times(2m^2-1)=m^2+4>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, 이차함수 $y=x^2+4mx+2m^2$의 그래프와 직선 $y=mx+1$은 실수 m의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 점에서 만난다.

17 $5x^2+4xy+y^2-2x+1=0$에서

$(4x^2+4xy+y^2)+(x^2-2x+1)=0$

$(2x+y)^2+(x-1)^2=0$ ······ ❶

x, y는 실수이므로 $2x+y=0$, $x-1=0$ ······ ❷

따라서 $x=1$, $y=-2$이므로

$xy=1\times(-2)=-2$ ······ ❸

답 -2

채점기준	배점
❶ 등식의 좌변을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 정리하기	3
❷ 실수의 성질을 이용하여 연립방정식 세우기	1
❸ xy의 값 구하기	1

18 $\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}=\alpha$, $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}=\beta$로 놓으면

$\alpha^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\dfrac{2}{1+2i+i^2}=\dfrac{1}{i}=-i$이므로

$\alpha^4=(\alpha^2)^2=(-i)^2=i^2=-1$

$\alpha^8=(\alpha^4)^2=(-1)^2=1$

또,

$\beta^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^2=\dfrac{3-2\sqrt{3}i+i^2}{4}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{aligned}\beta^3=\beta^2\times\beta&=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{\sqrt{3}-i}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}-i-3i+\sqrt{3}i^2}{4}\\&=-i\end{aligned}$$

이므로

$\beta^6=(\beta^3)^2=(-i)^2=-1$

$\beta^{12}=(\beta^6)^2=(-1)^2=1$ ······ ❶

이때 $\alpha^n+\beta^n=2$이려면 $\alpha^n=1$, $\beta^n=1$이어야 한다. ······ ❷

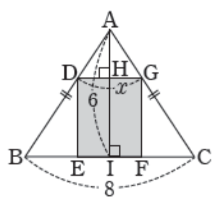
즉, n은 8의 배수이면서 12의 배수이므로 24의 배수이다.

따라서 100 이하의 자연수 n은 24, 48, 72, 96의 4개이다. ······ ❸

답 4

채점기준	배점
❶ $\frac{\sqrt{2}}{1+i}=\alpha$, $\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\beta$로 놓고, $\alpha^n=1$, $\beta^n=1$이 나올 때까지 거듭제곱하기	3
❷ $\alpha^n+\beta^n=2$가 될 조건 구하기	2
❸ 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수 구하기	2

19 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 두 선분 DG, BC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, $\overline{DG}=x$ $(0<x<8)$라 하면 $\triangle ADG\backsim\triangle ABC$이므로



$\overline{DG}:\overline{BC}=\overline{AH}:\overline{AI}$

$x:8=\overline{AH}:6$, $6x=8\overline{AH}$

$\therefore \overline{AH}=\dfrac{3}{4}x$

$\therefore \overline{DE}=\overline{AI}-\overline{AH}=6-\dfrac{3}{4}x$ ······ ❶

직사각형 DEFG의 넓이를 $f(x)$라 하면

$f(x)=x\left(6-\frac{3}{4}x\right)=-\frac{3}{4}(x-4)^2+12\ (0<x<8)$ ...... ❷

$0<x<8$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 12를 가지므로

직사각형 DEFG의 넓이의 최댓값은 12이다. ...... ❸

답 12

채점기준	배점
❶ $\overline{DG}=x$로 놓고, 두 삼각형 ABC, ADG가 닮음임을 이용하여 $\overline{DE}$를 x에 대한 식으로 나타내기	3
❷ 직사각형 DEFG의 넓이를 x에 대한 이차함수로 나타내기	2
❸ 직사각형 DEFG의 넓이의 최댓값 구하기	2

20 $P(x)=x^3-x^2+(3k-7)x+6k-2$로 놓으면

$P(-2)=-8-4-2(3k-7)+6k-2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & 3k-7 & 6k-2 \\ & & -2 & 6 & -6k+2 \\ \hline & 1 & -3 & 3k-1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x^2-3x+3k-1)$ ...... ❶

$P(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x^2-3x+3k-1=0$

방정식 $P(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$x^2-3x+3k-1=0$이 두 허근을 가져야 한다. ...... ❷

따라서 이차방정식 $x^2-3x+3k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times(3k-1)<0,\ 9-12k+4<0$

$12k>13\quad \therefore k>\frac{13}{12}$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다. ...... ❸

답 2

채점기준	배점
❶ 조립제법을 이용하여 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해하기	2
❷ 주어진 삼차방정식이 한 실근과 두 허근을 가질 조건 구하기	3
❸ 정수 k의 최솟값 구하기	2

실전 모의고사 5회

p.178~181

01 $(3x^3+5x-12)(x^4-3x^3+2x^2+4)$의 전개식에서 x^3항은

$3x^3\times4+5x\times2x^2+(-12)\times(-3x^3)$

$=12x^3+10x^3+36x^3$

$=58x^3$

이므로 x^3의 계수는 58이다.

답 ②

02 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-2}}-\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{2}i\sqrt{8}i+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}-\frac{\sqrt{8}i}{\sqrt{2}i}$

$=-4+\frac{1}{i}-2$

$=-4-i-2$

$=-6-i$

따라서 $a=-6,\ b=-1$이므로

$a+b=-6+(-1)=-7$

답 ⑤

03 이차방정식 $ax^2-4x+a-3=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a(a-3)=0,\ 4-a^2+3a=0$

$a^2-3a-4=0,\ (a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

따라서 주어진 방정식은 $4x^2-4x+1=0$이므로

$(2x-1)^2=0\quad \therefore x=\frac{1}{2}$

$\therefore m=\frac{1}{2}$

$\therefore am=4\times\frac{1}{2}=2$

답 ②

04 $a^3-b^3=50$에서 $(a-b)^3+3ab(a-b)=50$

$5^3+3ab\times5=50,\ 15ab=-75$

$\therefore ab=-5$

$\therefore a^2-ab+b^2=(a^2-2ab+b^2)+ab$

$=(a-b)^2+ab$

$=5^2+(-5)=20$

답 ④

05 삼차방정식 $x^3+ax^2-15x+7a=0$의 한 근이 -2이므로

$x=-2$를 대입하면

$-8+4a+30+7a=0,\ 11a=-22$

$\therefore a=-2$

따라서 주어진 방정식은 $x^3-2x^2-15x-14=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -15 & -14 \\ & & -2 & 8 & 14 \\ \hline & 1 & -4 & -7 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-2x^2-15x-14=(x+2)(x^2-4x-7)$

$x^3-2x^2-15x-14=0$에서 $(x+2)(x^2-4x-7)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x^2-4x-7=0$

따라서 주어진 방정식의 -2가 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-4x-7=0$의 근이므로 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 4이다.

답 ①

06 $3x^2-11xy+6y^2+7x-7y+2$

$=3x^2-11xy+7x+6y^2-7y+2$

$=3x^2+(-11y+7)x+(2y-1)(3y-2)$

$=\{3x-(2y-1)\}\{x-(3y-2)\}$

$=(3x-2y+1)(x-3y+2)$

따라서 $a=3,\ b=-2,\ c=1,\ d=-3$이므로

$ab+cd=3\times(-2)+1\times(-3)=-9$

답 ③

07 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 이 방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\omega}$도 근이다. 즉,

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$, $\overline{\omega}^3=1$

이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$이므로
$\omega\overline{\omega}\neq\omega+\overline{\omega}$ (거짓)

ㄴ. $\omega^2+\overline{\omega}^2=(-\omega-1)+(-\overline{\omega}-1)$
$=-(\omega+\overline{\omega})-2$
$=-(-1)-2=-1$ (참)

ㄷ. $(\overline{\omega})^{1000}+\omega^{1001}+(\overline{\omega})^{1002}$
$=\overline{\omega}+\omega^2+1$
$=(-1-\omega)+(-\omega-1)+1$
$=-2\omega-1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

08 $301=x$로 놓으면

$$\frac{301^4-4\times301^2-2\times301-4}{301^3-2\times301^2-2}=\frac{x^4-4x^2-2x-4}{x^3-2x^2-2}$$

이때 $P(x)=x^4-4x^2-2x-4$라 하면

$P(-2)=16-16+4-4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 0 & -4 & -2 & -4 \\ & & -2 & 4 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x^3-2x^2-2)$

$$\therefore \frac{301^4-4\times301^2-2\times301-4}{301^3-2\times301^2-2}$$
$$=\frac{(x+2)(x^3-2x^2-2)}{x^3-2x^2-2}$$
$$=x+2=301+2=303$$

답 ④

09 이차함수 $y=x^2+2kx-2k+3$의 그래프는 직선 $y=2x-7$과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2kx-2k+3=2x-7$, 즉 $x^2+2(k-1)x-2k+10=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(k-1)^2-1\times(-2k+10)=0$

$k^2-2k+1+2k-10=0$

$k^2=9$ $\quad\therefore k=\pm3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, 이차함수 $y=-2x^2+x+k$의 그래프는 직선 $y=-x+2k$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $-2x^2+x+k=-x+2k$, 즉 $2x^2-2x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-2\times k>0$

$1-2k>0$, $2k<1$ $\quad\therefore k<\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-3$ 답 ①

10 ㄱ. $p=q$이면 주어진 방정식은
$2x^2+4px+2p^2=0$, $x^2+2px+p^2=0$
$(x+p)^2=0$ $\quad\therefore x=-p$
이므로 중근을 갖는다. (참)

ㄴ. $p\neq q$일 때, 주어진 방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(p+q)^2-2(p^2+q^2)$
$=-p^2+2pq-q^2$
$=-(p-q)^2<0$
이므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. (거짓)

ㄷ. α, β는 이차방정식 $2x^2+2(p+q)x+p^2+q^2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-(p+q)$, $\alpha\beta=\frac{p^2+q^2}{2}$
이때
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=\{-(p+q)\}^2-2\times\frac{p^2+q^2}{2}$
$=(p+q)^2-(p^2+q^2)$
$=2pq$
이므로
$2x^2+2(\alpha+\beta)x+\alpha^2+\beta^2=0$에서
$2x^2-2(p+q)x+2pq=0$
$2(x-p)(x-q)=0$
$\therefore x=p$ 또는 $x=q$
즉, 이차방정식 $2x^2+2(\alpha+\beta)x+\alpha^2+\beta^2=0$의 두 근은 p, q이다. (참)

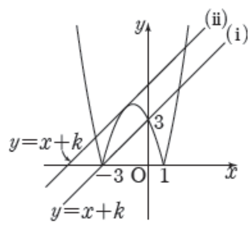
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

11 2^m의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^m$의 $(m+1)$개이므로

$f(2^m)=i^1+i^2+i^{2^2}+\cdots+i^{2^m}$
$=i+(-1)+\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{(m-1)\text{개}}$
$=i+(-1)+1\times(m-1)$
$=(m-2)+i$

따라서 $f(2^m)$의 실수부분은 $m-2$, 허수부분은 1이므로
$g(m)=m-2$, $a=1$
$\therefore a+g(m)=1+(m-2)=m-1$ 답 ②

12



함수 $y=\begin{cases}(x+3)(x-1) & (x<-3 \text{ 또는 } x>1)\\ -(x+3)(x-1) & (-3\leq x\leq1)\end{cases}$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 직선 $y=x+k$와의 교점이 3개이려면

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-3, 0)$을 지나는 경우
$0=-3+k$ $\quad\therefore k=3$

(ⅱ) 이차함수 $y=-(x+3)(x-1)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접하는 경우

이차방정식 $-(x+3)(x-1)=x+k$, 즉

$x^2+3x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times1\times(k-3)=0$

$9-4k+12=0$, $4k=21$

$\therefore k=\frac{21}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$3+\frac{21}{4}=\frac{33}{4}$

답 ①

13 $x^2-(2k+1)x-2k+6=0$의 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k+1$, $\alpha\beta=-2k+6$

두 실근의 차가 2이어야 하므로

$|\alpha-\beta|=2$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$2^2=(2k+1)^2-4(-2k+6)$

$4=4k^2+4k+1+8k-24$, $4k^2+12k-27=0$

$(2k+9)(2k-3)=0$

$\therefore k=-\frac{9}{2}$ 또는 $k=\frac{3}{2}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=-3$

답 ③

14 $z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,

$z^3=z^2\times z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1-3i^2}{4}=1$

이므로

$$\begin{aligned}z^{20}-z^9-3z^2+2&=z^2-1-3z^2+2=-2z^2+1\\&=-2\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+1\\&=2+\sqrt{3}i\end{aligned}$$

답 ④

다른풀이 $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z=-1+\sqrt{3}i$, $2z+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $(2z+1)^2=(\sqrt{3}i)^2$

$4z^2+4z+1=-3$, $4z^2+4z+4=0$

$z^2+z+1=0$

양변에 $z-1$을 곱하면 $(z-1)(z^2+z+1)=0$

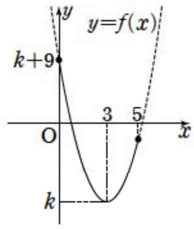
$z^3-1=0$ $\quad\therefore z^3=1$

$$\begin{aligned}\therefore z^{20}-z^9-3z^2+2&=z^2-1-3z^2+2=-2z^2+1\\&=-2(-z-1)+1=2z+3\\&=2\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+3\\&=-1+\sqrt{3}i+3\\&=2+\sqrt{3}i\end{aligned}$$

15 조건 (가)에서 $f(1+\sqrt{3})=f(5-\sqrt{3})$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{(1+\sqrt{3})+(5-\sqrt{3})}{2}=3$에 대하여 대칭이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-3)^2+k$ (k는 상수)

$0\le x\le5$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $k+9$를 갖는다. 이때 조건 (나)에서 최댓값이 4이므로



$k+9=4$ $\quad\therefore k=-5$

따라서 $f(x)=(x-3)^2-5$이므로

$f(-2)=(-5)^2-5=20$

답 ④

16 $P(x)$를 x^3-8로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하면 조건 (가)에서 몫이 $x-1$이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^3-8)(x-1)+R(x)\\&=(x-2)(x^2+2x+4)(x-1)+R(x)\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $P(x)$를 x^2+2x+4로 나눈 나머지는 $x-3$이고 $(x-2)(x^2+2x+4)(x-1)$은 x^2+2x+4로 나누어떨어지므로 $R(x)$를 x^2+2x+4로 나누었을 때의 나머지가 $x-3$이다.

즉, $R(x)$는

$R(x)=a(x^2+2x+4)+x-3$ (a는 상수)

이므로

$P(x)=(x-2)(x^2+2x+4)(x-1)+a(x^2+2x+4)+x-3$

조건 (다)에서 나머지정리에 의하여 $P(-1)=2$이므로

$$\begin{aligned}P(-1)&=(-3)\times(1-2+4)\times(-2)+a(1-2+4)-1-3\\&=2\end{aligned}$$

$3a+14=2$, $3a=-12$ $\quad\therefore a=-4$

$$\begin{aligned}\therefore P(0)&=(-2)\times4\times(-1)+4a-3=4a+5\\&=4\times(-4)+5=-11\end{aligned}$$

답 ⑤

17 $$\begin{aligned}z&=(1+i)a^2-(2+i)a-(3+2i)\\&=a^2+a^2i-2a-ai-3-2i\\&=a^2-2a-3+(a^2-a-2)i\end{aligned}$$

z^2이 양의 실수이므로 z는 0이 아닌 실수이다. 즉, z의 실수부분은 0이 아니고, 허수부분은 0이므로

$a^2-2a-3\neq0$, $a^2-a-2=0$ ······ ❶

$a^2-2a-3\neq0$에서 $(a+1)(a-3)\neq0$

$\therefore a\neq-1$, $a\neq3$ ······ ㉠ ······ ❷

$a^2-a-2=0$에서 $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$ ······ ㉡ ······ ❸

㉠, ㉡에서 $a=2$ ······ ❹

답 2

채점기준	배점
❶ z^2이 양의 실수일 때 z의 조건 구하기	2
❷ z의 실수부분이 0이 아닐 때 a의 조건 구하기	2
❸ z의 허수부분이 0일 때 a의 값 구하기	1
❹ a의 값 구하기	1

18 이차식 $x^2+(4k+m)x+4k^2+k+n$이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2+(4k+m)x+4k^2+k+n=0$이 중근을 가져야 한다. …… ❶

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4k+m)^2-4\times1\times(4k^2+k+n)=0$

$16k^2+8km+m^2-16k^2-4k-4n=0$

$8km+m^2-4k-4n=0$

$4k(2m-1)+m^2-4n=0$ …… ❷

이 등식이 k에 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2m-1=0,\ m^2-4n=0$ …… ❸

$\therefore\ m=\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{16}$

$\therefore\ \frac{m}{n}=\frac{1}{2}\div\frac{1}{16}=8$ …… ❹

답 8

채점기준	배점
❶ 주어진 이차식이 완전제곱식이 될 조건 구하기	2
❷ (주어진 이차식)$=0$의 판별식 $D=0$을 (k에 대한 식)$=0$의 꼴로 정리하기	2
❸ ❷의 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 조건 구하기	1
❹ $m,\ n,\ \frac{m}{n}$의 값 구하기	2

19 $x^3=1$에서 $x^3-1=0,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다. 즉,

$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$ …… ❶

이때

$$f(1)=\frac{1+\omega}{1+\omega}=1,\ f(2)=\frac{1+\omega+\omega^2}{1+\omega^2}=0$$

$$f(3)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3}{1+\omega^3}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$f(4)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4}{1+\omega^4}=\frac{0+1+\omega}{1+\omega}=1$$

$$f(5)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5}{1+\omega^5}=\frac{(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)}{1+\omega^2}=0$$

$$f(6)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6}{1+\omega^6}=\frac{(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

⋮

즉, $f(n)$의 값으로는 $1,\ 0,\ \frac{1}{2}$이 이 순서대로 반복된다. …… ❷

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$

$=\left(1+0+\frac{1}{2}\right)\times16+(1+0)=25$ …… ❸

답 25

채점기준	배점
❶ 삼차방정식 $x^3=1$의 허근 ω에 대한 관계식 구하기	2
❷ $f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots$의 값을 직접 구하여 규칙 찾기	3
❸ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$의 값 구하기	2

20 n^3+2n^2+5가 $n-2$의 배수이므로 n^3+2n^2+5는 $n-2$로 나누어떨어져야 한다.

$(n^3+2n^2+5)\div(n-2)$를 계산하면

$$\begin{array}{r|l} & n^2+4n+8 \\ \hline n-2 & n^3+2n^2\qquad+5 \\ & n^3-2n^2 \\ \hline & \qquad 4n^2 \\ & \qquad 4n^2-8n \\ \hline & \qquad\qquad 8n+5 \\ & \qquad\qquad 8n-16 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 21 \end{array}$$

$\therefore\ n^3+2n^2+5=(n-2)(n^2+4n+8)+21$ …… ❶

이때 n^3+2n^2+5가 $n-2$로 나누어떨어지려면 21이 $n-2$로 나누어떨어져야 한다. 즉, $n-2$는 21의 양의 약수이다. …… ❷

$n-2=1$ 또는 $n-2=3$ 또는 $n-2=7$ 또는 $n-2=21$

$\therefore\ n=3$ 또는 $n=5$ 또는 $n=9$ 또는 $n=23$ …… ❸

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+5+9+23=40$ …… ❹

답 40

채점기준	배점
❶ $(n^3+2n^2+5)\div(n-2)$를 계산하여 몫과 나머지에 대한 등식으로 나타내기	2
❷ $n-2$가 21의 양의 약수임을 설명하기	3
❸ 자연수 n의 값 모두 구하기	1
❹ 모든 자연수 n의 값의 합 구하기	1

MEMO

MEMO

MEMO