

정답 및 해설

고등 내신 1등급을 위한 기출문제집

100발 100중

고등 기출
문제집

공통 수학 | 2상

2학기·중간



내신에 날개를 달아 주는 100발 100중!

I 도형의 방정식

1 평면좌표와 직선의 방정식

교과서 예제

p.7, 9

- 01 (1) 3 (2) 11 (3) 8
 02 (1) $2\sqrt{10}$ (2) $2\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{26}$ (4) 10
 03 (1) 5 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 3 04 8
 05 (1) (4, -1) (2) $(\frac{15}{7}, \frac{6}{7})$ (3) (3, 0)
 06 $a=5, b=-1$ 07 (4, 3)
 08 (1) (2, 1) (2) (1, -2) (3) $(-\frac{1}{3}, 0)$
 09 $a=-1, b=3$
 10 (1) $y=2x+5$ (2) $y=-3x+12$ (3) $y=2$ (4) $x=3$
 11 (1) $y=-x+5$ (2) $y=-2x-4$ (3) $x=-2$ (4) $y=6$
 12 $\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=1$ 13 (1, 1)
 14 (1) -1 (2) $\frac{2}{3}$ 14 (1) $\frac{2}{3}$ (2) -6
 16 $y=2x-7$ 15 $y=-4x-2$
 18 (1) $\sqrt{5}$ (2) 2 (3) 1
 19 $x+2y-7=0$ 또는 $x+2y+3=0$
 20 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

기출 Best | 1회

p.10~13

- 01 ④ 02 ② 03 ④ 04 ⑤ 05 ②
 06 ⑤ 07 ③ 08 ② 09 ③ 10 ②
 11 ④ 12 ③ 13 ② 14 ② 15 ①
 16 ③ 17 ⑤ 18 ③ 19 ③ 20 ①

기출 Best | 2회

p.14~17

- 01 ⑤ 02 ⑤ 03 ② 04 ② 05 ③
 06 ① 07 ④ 08 ② 09 ③ 10 ②
 11 ① 12 ② 13 ④ 14 ④ 15 ②
 16 ② 17 ③ 18 ⑤ 19 ① 20 ②

변형유형 집중공략

p.18~19

- 1-1 ⑤ 1-2 36 2-1 ⑤ 2-2 ③

서술형 What & How

p.20~23

- 1 -6 2 2 3 -2 4 9
 5 3 6 -8 7 -25 8 2

실전 문제 | 1회

p.24~28

- 01 ① 02 ③ 03 ④ 04 ③ 05 ⑤
 06 ①, ③ 07 ④ 08 ③ 09 ① 10 ⑤
 11 ④ 12 ③ 13 ⑤ 14 ④ 15 ①
 16 ③ 17 ③ 18 ② 19 ① 20 ③
 21 ③ 22 ① 23 -3 24 3

실전 문제 | 2회

p.29~33

- 01 ② 02 ③ 03 ⑤ 04 ① 05 ⑤
 06 ① 07 ⑤ 08 ③ 09 ③ 10 ④
 11 ③ 12 ⑤ 13 ⑤ 14 ② 15 ④
 16 ① 17 ③ 18 ④ 19 ① 20 ①
 21 ① 22 ④ 23 9 24 12

수능형 기출문제 & 변형문제

p.34~38

- 1 ③ 2 ② 3 ② 4 ④ 5 ①
 6 ③ 7 14 8 10 9 ⑤ 10 ⑤

2 원의 방정식

교과서 예제

p.41

- 01 (1) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$ (2) $x^2+y^2=5$
 02 (1) $(x-3)^2+(y+2)^2=5$ (2) $x^2+(y-1)^2=13$
 03 (1) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ (2) $(x+4)^2+(y-1)^2=16$
 (3) $(x+5)^2+(y+5)^2=25$
 04 (1) 중심의 좌표: (-2, 0), 반지름의 길이: 2
 (2) 중심의 좌표: (0, 4), 반지름의 길이: 5
 (3) 중심의 좌표: (1, -3), 반지름의 길이: 4
 05 $k < 25$
 06 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
 (2) 한 점에서 만난다. (접한다.)
 07 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다.
 08 (1) $-4 < k < 4$ (2) $k = \pm 4$ (3) $k < -4$ 또는 $k > 4$
 09 $y = -x \pm 2\sqrt{2}$
 10 $3x+4y=25$
 11 $2x+3y-13=0$ 또는 $3x-2y+13=0$

기출 Best | 1회

p.42~45

- 01 ① 02 ④ 03 ③ 04 ④ 05 ⑤
 06 ⑤ 07 ①, ⑤ 08 ① 09 ④ 10 ⑤
 11 ③ 12 ⑤ 13 ⑤ 14 ② 15 ②
 16 ③ 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20 ④
 21 ②

기출 Best | 2회

p.46~49

- 01 ① 02 ⑤ 03 ④ 04 ① 05 ①
 06 ⑤ 07 ⑤ 08 ① 09 ① 10 ③
 11 ③ 12 ① 13 ② 14 ① 15 ②
 16 ⑤ 17 ② 18 ④ 19 ⑤ 20 ①
 21 ②

변형유형 집중공략

p.50~51

- 1-1 ② 1-2 ① 2-1 ② 2-2 ⑤

서술형 What & How

p.52~55

- 1 1 2 13 3 12 4 10
 5 3 6 21 7 3 8 32

실전 문제 | 1회

p.56~60

- 01 ① 02 ⑤ 03 ③ 04 ② 05 ③
 06 ④ 07 ④ 08 ② 09 ① 10 ⑤
 11 ④ 12 ① 13 ⑤ 14 ④ 15 ③
 16 ① 17 ③ 18 ② 19 ① 20 ①
 21 ① 22 ④ 23 5 24 10

실전 문제 | 2회

p.61~65

- 01 ① 02 ④ 03 ② 04 ② 05 ③
 06 ① 07 ③ 08 ④ 09 ④ 10 ①
 11 ③ 12 ② 13 ⑤ 14 ② 15 ③
 16 ④ 17 ① 18 ② 19 ⑤ 20 ①
 21 ③ 22 ① 23 -5 24 40

수능형 기출문제 & 변형문제

p.66~70

- 1 1 2 ③ 3 ④ 4 ② 5 ④
 6 ① 7 23 8 4 9 ④ 10 ②

3 도형의 이동

교과서 예제

p.73, 75

- 01 (1) (6, 0) (2) (2, 2) 02 (1) (7, 1) (2) (1, 3)
 03 (1) $x-3y+7=0$ (2) $(x+2)^2+y^2=4$
 04 (1) $2x-y+8=0$ (2) $(x+5)^2+(y-6)^2=16$
 05 $a=-1, b=2$
 06 (1) (3, 4) (2) (-3, -4) (3) (-3, 4) (4) (-4, 3)
 07 (1) (-1, 5) (2) (1, -5) (3) (1, 5) (4) (-5, -1)
 08 $a=3, b=1$
 09 (1) $2x-y-4=0$ (2) $2x-y+4=0$ (3) $2x+y+4=0$
 (4) $x+2y-4=0$
 10 (1) $(x-2)^2+(y-4)^2=9$ (2) $(x+2)^2+(y+4)^2=9$
 (3) $(x+2)^2+(y-4)^2=9$ (4) $(x+4)^2+(y-2)^2=9$
 11 $3x-y+4=0$ 12 $(x+3)^2+(y+5)^2=9$
 13 (1) $3x-y+7=0$ (2) $3x-y-11=0$ (3) 같지 않다.
 14 $5\sqrt{2}$ 15 (3, -1)
 16 (-5, 2)

기출 Best | 1회

p.76~79

- 01 ④ 02 ① 03 ② 04 ④ 05 ⑤
 06 ④ 07 ④ 08 ② 09 ③ 10 ④
 11 ② 12 ② 13 ⑤ 14 ② 15 ④
 16 ③ 17 ⑤ 18 ⑤ 19 ③

기출 Best | 2회

p.80~83

- 01 ① 02 ③ 03 ③ 04 ② 05 ④
 06 ① 07 ② 08 ③ 09 ② 10 ③
 11 ② 12 ① 13 ⑤ 14 ③ 15 ③
 16 ② 17 ⑤ 18 ① 19 ④

변형유형 집중공략

p.84~85

- 1-1 ④ 1-2 4 2-1 ③ 2-2 ⑤

서술형 What & How

p.86~89

- 1 4 2 4 3 -3 4 -8 5 1
6 3 7 1 8 -16

실전 문제 | 1회

p.90~93

- 01 ④ 02 ② 03 ① 04 ⑤ 05 ②
06 ② 07 ④ 08 ② 09 ② 10 ③
11 ① 12 ② 13 ① 14 ④ 15 ①
16 ⑤ 17 ③ 18 6 19 8

실전 문제 | 2회

p.94~97

- 01 ⑤ 02 ⑤ 03 ① 04 ④ 05 ②
06 ① 07 ③ 08 ③ 09 ④ 10 ④
11 ① 12 ③ 13 ④ 14 ② 15 ②
16 ② 17 ④ 18 18 19 7

수능형 기출문제 & 변형문제

p.98~102

- 1 ④ 2 ⑤ 3 12 4 6 5 140
6 30 7 ④ 8 ① 9 ③ 10 ②

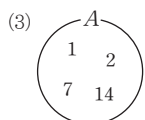
II 집합과 명제

1 집합

교과서 예제

p.105, 107

- 01 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×
02 (1) ∈ (2) ∉ (3) ∉ (4) ∈
03 (1) $A = \{1, 2, 7, 14\}$ (2) $A = \{x | x \text{는 } 14 \text{의 양의 약수}\}$



- 04 (1) 무 (2) 유 (3) 유, 공 (4) 무

- 05 (1) 4 (2) 7 06 (1) $B \subset A$ (2) $A \subset B$

- 07 (1) $\emptyset$ (2) $\{2\}, \{4\}, \{6\}$ (3) $\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}$
(4) $\{2, 4, 6\}$

- 08 (1) $A = B$ (2) $A \neq B$

- 09 (1) 16 (2) 15 (3) 8 (4) 4

- 10 (1) $\{a, b, c, d, e, f\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

- 11 (1) $\{5, 7\}$ (2) $\{2, 3\}$

- 12 (1) 서로소이다. (2) 서로소가 아니다.

- 13 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ 14 $\{1, 3, 4, 5, 7\}$

- 15 (1) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ (2) $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

- 16 (1) $\{b, c, d\}$ (2) $\{2, 4, 8, 16\}$

- 17 (1) A (2) $\emptyset$ (3) U (4) A (5) U (6) $\emptyset$

- 18 (1) $\{2, 7, 9\}$ (2) $\{6, 8\}$

- 19 (1) $\{4, 6\}$ (2) $\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$

- 20 4

기출 Best | 1회

p.108~112

- 01 ② 02 ④ 03 ③ 04 ⑤ 05 ④
06 ③ 07 ② 08 ③ 09 ④ 10 ⑤
11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14 ④ 15 ④
16 ④ 17 ② 18 ① 19 ⑤ 20 ⑤
21 ① 22 ① 23 ③ 24 ③

기출 Best | 2회

p.113~117

- 01 ⑤ 02 ① 03 ② 04 ③ 05 ②
06 ① 07 ② 08 ④ 09 ③ 10 ⑤
11 ⑤ 12 ② 13 ③ 14 ③ 15 ②
16 ③ 17 ① 18 ① 19 ③ 20 ③
21 ③ 22 ② 23 ② 24 ①

변형유형 집중공략

p.118~119

- 1-1 -1 1-2 ② 2-1 7 2-2 5

서술형 What & How

p.120~123

- 1 4 2 -4 3 2 4 9 5 7
6 4 7 64 8 32

실전 문제 | 1회

p.124~128

01 ②	02 ③	03 ①	04 ③	05 ①
06 ④	07 ②	08 ②	09 ③	10 ③
11 ②	12 ⑤	13 ④	14 ④	15 ②
16 ④	17 ⑤	18 ⑤	19 ②	20 ②
21 ②	22 5	23 19		

실전 문제 | 2회

p.129~133

01 ②	02 ③	03 ②	04 ①	05 ③
06 ③	07 ③	08 ②	09 ④	10 ②
11 ③	12 ④	13 ④	14 ④	15 ②
16 ③	17 ②	18 ⑤	19 ⑤	20 ③
21 ②	22 32	23 8		

수능형 기출문제 & 변형문제

p.134~138

1 ⑤	2 ③	3 ④	4 ③	5 22
6 24	7 22	8 46	9 ②	10 ①

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 | 1회

p.140~143

01 ③	02 ⑤	03 ③	04 ②	05 ①
06 ⑤	07 ③	08 ③	09 ②	10 ⑤
11 ②	12 ③	13 ①	14 ④	15 ③
16 ②	17 -5	18 10	19 110	20 11

실전 모의고사 | 2회

p.144~147

01 ⑤	02 ④	03 ③	04 ③	05 ⑤
06 ①	07 ②	08 ⑤	09 ②	10 ①
11 ①	12 ④	13 ④	14 ⑤	15 ②
16 ③	17 350	18 4	19 24	20 13

실전 모의고사 | 3회

p.148~151

01 ④	02 ③	03 ①	04 ④	05 ④
06 ②	07 ③	08 ①	09 ①	10 ③
11 ⑤	12 ①	13 ⑤	14 ③	15 ③
16 ③	17 -21	18 11	19 5	20 9

실전 모의고사 | 4회

p.152~155

01 ②	02 ④	03 ④	04 ③	05 ②
06 ④	07 ②	08 ④	09 ③	10 ⑤
11 ③	12 ④	13 ⑤	14 ①	15 ②
16 ③	17 -3	18 -10	19 4	20 -1

실전 모의고사 | 5회

p.156~159

01 ③	02 ③	03 ⑤	04 ①	05 ③
06 ③	07 ①	08 ②	09 ③	10 ⑤
11 ④	12 ⑤	13 ①	14 ②	15 ③
16 ④	17 2	18 2	19 8	20 10

I 도형의 방정식

1 평면좌표와 직선의 방정식

교과서 예제

p.7, 9

- 01 (1) $\overline{AB} = |5-2| = 3$
 (2) $\overline{AB} = |7-(-4)| = 11$
 (3) $\overline{OA} = |-8| = 8$ 답 (1) 3 (2) 11 (3) 8

- 02 (1) $\overline{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
 (2) $\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 (3) $\overline{AB} = \sqrt{\{3-(-2)\}^2 + (6-5)^2} = \sqrt{26}$
 (4) $\overline{OA} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$
답 (1) $2\sqrt{10}$ (2) $2\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{26}$ (4) 10

- 03 (1) $\frac{1 \times (-3) + 2 \times 9}{1+2} = 5$
 (2) $\frac{5 \times (-3) + 3 \times 9}{5+3} = \frac{3}{2}$
 (3) $\frac{9 + (-3)}{2} = 3$ 답 (1) 5 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 3

- 04 선분 AB의 중점의 좌표가 2이므로
 $\frac{-4+a}{2} = 2, -4+a=4 \quad \therefore a=8$ 답 8

- 05 (1) $\left(\frac{3 \times 5 + 1 \times 1}{3+1}, \frac{3 \times (-2) + 1 \times 2}{3+1}\right) \quad \therefore (4, -1)$
 (2) $\left(\frac{2 \times 5 + 5 \times 1}{2+5}, \frac{2 \times (-2) + 5 \times 2}{2+5}\right) \quad \therefore \left(\frac{15}{7}, \frac{6}{7}\right)$
 (3) $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right) \quad \therefore (3, 0)$
답 (1) (4, -1) (2) $\left(\frac{15}{7}, \frac{6}{7}\right)$ (3) (3, 0)

- 06 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+(-3)}{2}, \frac{5+b}{2}\right)$
 이때 중점의 좌표가 (1, 2)이므로
 $\frac{a+(-3)}{2} = 1, \frac{5+b}{2} = 2$
 $a-3=2, 5+b=4$
 $\therefore a=5, b=-1$ 답 $a=5, b=-1$

- 07 $4\overline{AP} = 3\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$
 즉, 점 P는 선분 AB를 3 : 4로 내분하는 점이므로
 $P\left(\frac{3 \times (-4) + 4 \times 10}{3+4}, \frac{3 \times (-5) + 4 \times 9}{3+4}\right)$
 $\therefore P(4, 3)$ 답 (4, 3)

- 08 (1) $\left(\frac{2+(-1)+5}{3}, \frac{4+(-3)+2}{3}\right) \quad \therefore (2, 1)$
 (2) $\left(\frac{-2+6+(-1)}{3}, \frac{3+(-5)+(-4)}{3}\right) \quad \therefore (1, -2)$
 (3) $\left(\frac{-3+0+2}{3}, \frac{1+4+(-5)}{3}\right) \quad \therefore \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$
답 (1) (2, 1) (2) (1, -2) (3) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

- 09 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (2, 2)이므로
 $\frac{a+3+4}{3} = 2, \frac{2+1+b}{3} = 2$
 $a+7=6, 3+b=6$
 $\therefore a=-1, b=3$ 답 $a=-1, b=3$

- 10 (1) $y-1=2\{x-(-2)\} \quad \therefore y=2x+5$
 (2) 점 (4, 0)을 지나고 기울기가 -3인 직선이므로
 $y-0=-3(x-4) \quad \therefore y=-3x+12$
답 (1) $y=2x+5$ (2) $y=-3x+12$
 (3) $y=2$ (4) $x=3$

- 11 (1) $y-3=\frac{1-3}{4-2}(x-2) \quad \therefore y=-x+5$
 (2) $y-2=\frac{-2-2}{-1-(-3)}\{x-(-3)\} \quad \therefore y=-2x-4$
 (3) 두 점 (-2, 4), (-2, 8)을 지나는 직선은 y축에 평행하므로 구하는 직선의 방정식은 $x=-2$
 (4) 두 점 (-5, 6), (3, 6)을 지나는 직선은 x축에 평행하므로 구하는 직선의 방정식은 $y=6$
답 (1) $y=-x+5$ (2) $y=-2x-4$ (3) $x=-2$ (4) $y=6$

- 12 답 $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 1$

- 13 $(k+1)x + (1-k)y - 2 = 0$ 에서
 $kx + x + y - ky - 2 = 0 \quad \therefore (x+y-2) + k(x-y) = 0$
 이 등식이 k의 값에 관계없이 성립하려면
 $x+y-2=0, x-y=0$
 두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=1$
 따라서 구하는 점의 좌표는 (1, 1)이다. 답 (1, 1)

- 14 (1) $-3=2a-1$ 이므로 $2a=-2 \quad \therefore a=-1$
 (2) $-3(2a-1)=-1$ 이므로
 $-6a+3=-1, -6a=-4$
 $\therefore a=\frac{2}{3}$ 답 (1) -1 (2) $\frac{2}{3}$

- 15 (1) $\frac{1}{a} = -\frac{3}{-2} \neq \frac{4}{5}$ 이므로 $\frac{1}{a} = \frac{3}{2} \quad \therefore a = \frac{2}{3}$
 (2) $1 \times a + (-3) \times (-2) = 0$ 이므로
 $a+6=0 \quad \therefore a=-6$ 답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) -6

- 16 직선 $6x-3y+1=0$, 즉 $y=2x+\frac{1}{3}$ 의 기울기가 2이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 2이다.
따라서 점 $(3, -1)$ 을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은
 $y-(-1)=2(x-3) \quad \therefore y=2x-7$ 답 $y=2x-7$

- 17 직선 $x-4y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ 의 기울기가 $\frac{1}{4}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면
 $\frac{1}{4}m=-1 \quad \therefore m=-4$
따라서 점 $(-1, 2)$ 를 지나고 기울기가 -4 인 직선의 방정식은
 $y-2=-4\{x-(-1)\}$
 $\therefore y=-4x-2$ 답 $y=-4x-2$

- 18 (1) $\frac{|2 \times (-1) - 4 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
(2) $\frac{|5 \times 8 + 12 \times (-2) + 10|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{26}{13} = 2$
(3) $\frac{|5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1$ 답 (1) $\sqrt{5}$ (2) 2 (3) 1

- 19 직선 $x+2y+5=0$ 에 평행한 직선의 방정식은
 $x+2y+a=0$ (단, $a \neq 5$)
점 $(-2, 2)$ 와 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로
 $\frac{|-2+2 \times 2+a|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$
 $|2+a|=5, 2+a=-5$ 또는 $2+a=5$
 $\therefore a=-7$ 또는 $a=3$
따라서 구하는 직선의 방정식은
 $x+2y-7=0$ 또는 $x+2y+3=0$
답 $x+2y-7=0$ 또는 $x+2y+3=0$

- 20 직선 $3x+y-2=0$ 위의 한 점 $(0, 2)$ 와 직선 $3x+y+3=0$ 사이의 거리를 구하면
 $\frac{|3 \times 0 + 2 + 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

기출 Best | 1회

p.10~13

- 01 $\overline{AB}=\sqrt{10}$ 에서 $\overline{AB}^2=10$
 $(2-a)^2+(4-5)^2=10, 4-4a+a^2+1=10$
 $a^2-4a-5=0, (a+1)(a-5)=0$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=5$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은
 $-1+5=4$ 답 ④

- 02 점 P가 y축 위의 점이므로 $P(0, b)$ 라 하면
 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$
 $\{0-(-2)\}^2+(b-1)^2=\{0-2\}^2+(b-3)^2$
 $4+b^2-2b+1=4+b^2-6b+9$
 $4b=8 \quad \therefore b=2$
따라서 점 P의 좌표는 $(0, 2)$ 이다. 답 ②

- 03 $\overline{AB}=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+(3-5)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$
 $\overline{BC}=\sqrt{(0-6)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{85}$
 $\overline{CA}=\sqrt{(-2-0)^2+\{5-(-4)\}^2}=\sqrt{85}$
따라서 삼각형 ABC는 $\overline{BC}=\overline{CA}$ 인 이등변삼각형이다. 답 ④

- 04 선분 BC가 x축 위에 있으므로 선분 BC 위를 움직이는 점 P를 $P(a, 0)$ ($-4 \leq a \leq 2$)이라 하면
 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-0)^2+(0-4)^2+\{a-(-4)\}^2$
 $=2a^2+8a+32$
 $=2(a+2)^2+24 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $-4 \leq a \leq 2$ 일 때, 이차함수 $\textcircled{1}$ 은 $a=-2$ 에서 최솟값 24를 갖는다.
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 의 최솟값은 24이다. 답 ⑤

- 05 $B(a, b)$ 라 하고, 선분 AB를 3:2로 내분하는 점을 P라 하면
 $P\left(\frac{3 \times a + 2 \times 2}{3+2}, \frac{3 \times b + 2 \times 3}{3+2}\right) \quad \therefore P\left(\frac{3a+4}{5}, \frac{3b+6}{5}\right)$
이때 $P(5, 9)$ 이므로
 $\frac{3a+4}{5}=5, \frac{3b+6}{5}=9$
 $3a+4=25, 3b+6=45$
 $3a=21, 3b=39 \quad \therefore a=7, b=13$
따라서 점 B의 좌표는 $(7, 13)$ 이다. 답 ②

- 06 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면
 $G\left(\frac{-6+5+7}{3}, \frac{1+2+a}{3}\right) \quad \therefore G\left(2, \frac{3+a}{3}\right)$
무게중심 G가 직선 $y=3x$ 위에 있으므로
 $\frac{3+a}{3}=6, 3+a=18 \quad \therefore a=15$ 답 ⑤

- 07 대각선 AC의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{1+6}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{7}{2}, 2\right)$
 $D(a, b)$ 라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{4+a}{2}, \frac{0+b}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{4+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로
 $\frac{7}{2}=\frac{4+a}{2}, 2=\frac{b}{2}$
 $\therefore a=3, b=4$
따라서 점 D의 좌표는 $(3, 4)$ 이다. 답 ③

08 $\overline{AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overline{AC} = \sqrt{(1-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$

$\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 2\sqrt{5} : \sqrt{5} = 2 : 1$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$ 를 2:1로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 6}{2+1}\right) \therefore D\left(\frac{7}{3}, 4\right)$ 답 ②

09 점 $(-1, -2)$ 를 지나고 기울기가 -3 인 직선의 방정식은

$y - (-2) = -3\{x - (-1)\} \therefore y = -3x - 5$

$y=0$ 을 대입하면

$0 = -3x - 5, 3x = -5 \therefore x = -\frac{5}{3}$

따라서 구하는 직선의 x 절편은 $-\frac{5}{3}$ 이다. 답 ③

10 두 점 $(-1, -3), (-5, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y - (-3) = \frac{1 - (-3)}{-5 - (-1)}\{x - (-1)\}$

$\therefore y = -x - 4$

이 직선이 점 $(a, a+4)$ 를 지나므로

$a+4 = -a-4, 2a = -8 \therefore a = -4$ 답 ②

11 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 두 직선 AB, AC의 기울기가 서로 같아야 한다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-1}{k-5-(-5)} = \frac{1}{k}$

직선 AC의 기울기는 $\frac{k+1-1}{4-(-5)} = \frac{k}{9}$

이므로 $\frac{1}{k} = \frac{k}{9}$

$k^2 = 9 \therefore k = 3 (\because k > 0)$ 답 ④

12 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각

$\left(\frac{-1+(-3)}{2}, \frac{-1+(-3)}{2}\right), \left(\frac{2+6}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$

$\therefore (-2, -2), (4, 3)$

두 점 $(-2, -2), (4, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y - 3 = \frac{3 - (-2)}{4 - (-2)}(x - 4) \therefore y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$

따라서 $a = \frac{5}{6}, b = -\frac{1}{3}$ 이므로

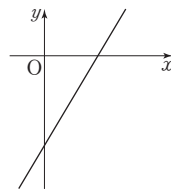
$a + b = \frac{5}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ 답 ③

13 $ax + by + c = 0$ 에서 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

$ab < 0, bc > 0$ 이므로 $-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0$

즉, 직선 $ax + by + c = 0$ 의 기울기가 양수, y 절편이 음수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 직선 $ax + by + c = 0$ 은 제2사분면을 지나지 않는다. 답 ②



14 $(3k+1)x + (k-1)y - 2k + 6 = 0$ 에서

$3kx + x + ky - y - 2k + 6 = 0$

$x - y + 6 + k(3x + y - 2) = 0$

이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x - y + 6 = 0, 3x + y - 2 = 0$

두 식을 연립하여 풀면 $x = -1, y = 5$

따라서 주어진 직선은 실수 k 의 값에 관계없이 점 $(-1, 5)$ 를 항상 지난다. 답 ②

15 두 직선 $x - 2y - 1 = 0, 2x - y - 5 = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x - 2y - 1 + k(2x - y - 5) = 0$ (k 는 실수) ①

직선 ①이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$1 - 6 - 1 + k(2 - 3 - 5) = 0$

$-6 - 6k = 0, 6k = -6 \therefore k = -1$

$k = -1$ 을 ①에 대입하면

$x - 2y - 1 - (2x - y - 5) = 0$

$-x - y + 4 = 0 \therefore y = -x + 4$

즉, $m = -1, n = 4$ 이므로 $m + n = -1 + 4 = 3$ 답 ①

다른풀이 $x - 2y - 1 = 0, 2x - y - 5 = 0$ 을 연립하여 풀면

$x = 3, y = 1$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(3, 1)$ 이다.

따라서 두 점 $(3, 1), (1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y - 1 = \frac{3 - 1}{1 - 3}(x - 3)$

$\therefore y = -x + 4$

즉, $m = -1, n = 4$ 이므로 $m + n = -1 + 4 = 3$

16 두 직선이 평행하려면 $\frac{m-2}{m} = \frac{-1}{3} \neq \frac{4}{3}$

$\frac{m-2}{m} = \frac{-1}{3}$ 에서 $3m - 6 = -m, 4m = 6 \therefore m = \frac{3}{2}$

$\therefore a = \frac{3}{2}$

또, 두 직선이 서로 수직이려면

$(m-2) \times m + (-1) \times 3 = 0, m^2 - 2m - 3 = 0$

$(m+1)(m-3) = 0 \therefore m = -1$ 또는 $m = 3$

$\therefore \beta = 3 (\because \beta > 0)$

$\therefore \frac{\beta}{a} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$ 답 ③

- 17 두 점 (2, 3), (-4, 1)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-3}{-4-2} = \frac{1}{3} \text{이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 } -3 \text{이다.}$$

기울기가 -3이고 x절편이 2, 즉 점 (2, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -3(x-2) \quad \therefore y = -3x+6$$

따라서 구하는 직선의 y절편은 6이다.

답 ⑤

- 18 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right)$, 즉 (3, -1)

$$\text{두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 } \frac{-4-2}{5-1} = -\frac{3}{2}$$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이고 점

(3, -1)을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x-3) \quad \therefore 2x-3y-9=0$$

따라서 $a=2, b=-9$ 이므로

$$a+b=2+(-9)=-7$$

답 ③

- 19 점 (a, 2)에서 두 직선 $x-2y+3=0, 2x+y-2=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|1 \times a - 2 \times 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 \times a + 1 \times 2 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$|a-1| = |2a|$$

$$a-1=2a \text{ 또는 } a-1=-2a$$

$$-a=1 \text{ 또는 } 3a=1$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=\frac{1}{3}$$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$$-1 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

답 ③

- 20 $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$ 에서

$$(2-x)^2 + (0-y)^2 - \{(1-x)^2 + (2-y)^2\} = 5$$

$$4-4x+x^2+y^2-(1-2x+x^2+4-4y+y^2)=5$$

$$-2x+4y-1=5, -2x+4y-6=0$$

$$\therefore x-2y+3=0$$

답 ①

기출 Best | 2회

p.14~17

- 01 $\overline{OA} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\overline{OB} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\{-4-(-2)\}^2 + (3-3)^2} = 2$$

따라서 삼각형 OAB의 둘레의 길이는

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB} = \sqrt{13} + 5 + 2 = 7 + \sqrt{13}$$

답 ⑤

- 02 점 P가 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로 $P(a, -a+2)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

$$(a-2)^2 + \{(-a+2)-1\}^2 = (a-5)^2 + \{(-a+2)-2\}^2$$

$$(a-2)^2 + (-a+1)^2 = (a-5)^2 + (-a)^2$$

$$a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 = a^2 - 10a + 25 + a^2$$

$$-6a + 5 = -10a + 25, 4a = 20 \quad \therefore a = 5$$

따라서 점 P의 좌표는 (5, -3)이다.

답 ⑤

- 03 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로

$$(1-2)^2 + (0-a)^2 + \{1-(-1)\}^2 + (0-3)^2$$

$$= (-1-2)^2 + (3-a)^2$$

$$1 + a^2 + 4 + 9 = 9 + 9 - 6a + a^2$$

$$14 = 18 - 6a, 6a = 4 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

답 ②

- 04 선분 AC가 y축 위에 있으므로 선분 AC 위를 움직이는 점 P를 $P(0, a)$ ($-4 \leq a \leq 5$)라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \{a-(-4)\}^2 + \{(0-4)^2 + (a-2)^2\}$$

$$= a^2 + 8a + 16 + 16 + a^2 - 4a + 4$$

$$= 2a^2 + 4a + 36$$

$$= 2(a+1)^2 + 34 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$-4 \leq a \leq 5$ 일 때, 이차함수 ①은 $a=-1$ 에서 최솟값 34를 갖는다.

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은 34이다.

답 ②

- 05 $P\left(\frac{5 \times 5 + 3 \times (-3)}{5+3}, \frac{5 \times (-1) + 3 \times (-9)}{5+3}\right)$

$$\therefore P(2, -4)$$

$$M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{-9+(-1)}{2}\right) \quad \therefore M(1, -5)$$

$$\therefore \overline{PM} = \sqrt{(1-2)^2 + \{-5-(-4)\}^2} = \sqrt{2}$$

답 ③

- 06 $G(c, d)$ 라 하면 삼각형 GBC의 무게중심의 좌표가 (-1, 2)이므로

$$\frac{c+2+(-3)}{3} = -1, \frac{d+3+4}{3} = 2$$

$$c-1=-3, d+7=6$$

$$\therefore c=-2, d=-1$$

즉, 삼각형 ABC의 무게중심이 $G(-2, -1)$ 이므로

$$\frac{a+2+(-3)}{3} = -2, \frac{b+3+4}{3} = -1$$

$$a-1=-6, b+7=-3$$

$$\therefore a=-5, b=-10$$

$$\therefore a+b=-5+(-10)=-15$$

답 ①

- 07 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+(-5)}{2}, \frac{5+a}{2}\right) \quad \therefore \left(-2, \frac{5+a}{2}\right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+b}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{-3+b}{2}, 2\right)$$

두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$-2 = \frac{-3+b}{2}, \frac{5+a}{2} = 2$$

$$\therefore a = -1, b = -1$$

$$\therefore a+b = -1+(-1) = -2$$

답 ④

08 $\overline{AB} = \sqrt{(-4-1)^2 + (-7-5)^2} = 13$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = 5$$

$\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 13:5로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{13 \times 5 + 5 \times (-4)}{13+5}, \frac{13 \times 2 + 5 \times (-7)}{13+5}\right)$$

$$\therefore D\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -5$$

답 ②

09 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{-5+(-2)}{2}\right) \quad \therefore \left(1, -\frac{7}{2}\right)$$

또, 직선 $2x+y+4=0$, 즉 $y=-2x-4$ 의 기울기는 -2

점 $\left(1, -\frac{7}{2}\right)$ 을 지나고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y - \left(-\frac{7}{2}\right) = -2(x-1)$$

$$y + \frac{7}{2} = -2x + 2$$

$$\therefore 4x + 2y + 3 = 0$$

따라서 $a=4, b=2$ 이므로

$$ab = 4 \times 2 = 8$$

답 ③

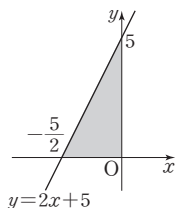
10 두 점 A(2, 9), B(-1, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-9 = \frac{3-9}{-1-2}(x-2) \quad \therefore y=2x+5$$

직선 $y=2x+5$ 는 오른쪽 그림과 같으므로 이 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$$

답 ②



11 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 한 직선 위에 있어야 한다. 즉, 두 직선 AB, AC의 기울기가 서로 같아야 한다.

$$\text{직선 AB의 기울기} = \frac{(2-k)-(-2)}{3-2} = 4-k$$

$$\text{직선 AC의 기울기} = \frac{3-(-2)}{(10-k)-2} = \frac{5}{8-k}$$

이므로

$$4-k = \frac{5}{8-k}$$

$$(4-k)(8-k) = 5, 32-12k+k^2=5$$

$$k^2-12k+27=0, (k-3)(k-9)=0$$

$$\therefore k=3 \text{ 또는 } k=9$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$3+9=12$$

답 ①

12 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각

$$\left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right), \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+7}{2}\right)$$

$$\therefore (-1, -1), (3, 4)$$

두 점 $(-1, -1), (3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1) = \frac{4-(-1)}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$\therefore y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$$

$y=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}, \frac{5}{4}x = -\frac{1}{4} \quad \therefore x = -\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 직선의 x 절편은 $-\frac{1}{5}$ 이다.

답 ②

13 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 의 기울기가 음수이고 y

절편도 음수이므로

$$-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} < 0 \quad \therefore \frac{a}{b} > 0, \frac{c}{b} > 0$$

두 부등식의 각 변을 각각 곱하면 $\frac{ac}{b^2} > 0$ 이므로

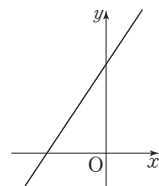
$$ac > 0 (\because b^2 > 0)$$

직선 $bx-cy+a=0$, 즉 $y=\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}$ 에서

$$\frac{b}{c} > 0, \frac{a}{c} > 0 \text{이므로 직선 } bx-cy+a=0 \text{의}$$

기울기는 양수이고 y 절편도 양수이다.

따라서 직선 $bx-cy+a=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



답 ④

14 $(k+1)x + (-2k+1)y + 3k+6=0$ 에서

$$kx+x-2ky+y+3k+6=0$$

$$\therefore (x-2y+3)k + (x+y+6) = 0$$

이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-2y+3=0, x+y+6=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x = -5, y = -1$

즉, P(-5, -1)이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

답 ④

- 15 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x - y - 1 + k(x + y - 2) = 0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 ①이 점 (2, 5)를 지나므로

$$4 - 5 - 1 + k(2 + 5 - 2) = 0$$

$$-2 + 5k = 0, 5k = 2 \quad \therefore k = \frac{2}{5}$$

$k = \frac{2}{5}$ 를 ①에 대입하면

$$2x - y - 1 + \frac{2}{5}(x + y - 2) = 0, \frac{12}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{9}{5} = 0$$

$$\therefore 4x - y - 3 = 0$$

이 직선이 점 (a, 9)를 지나므로

$$4a - 9 - 3 = 0, 4a = 12 \quad \therefore a = 3$$

답 ②

- 16 직선 $ax + 3y + 3 = 0$ 이 직선 $(b - 2)x - 3y + 5 = 0$ 과 평행하므로

$$\frac{a}{b - 2} = \frac{3}{-3} \neq \frac{3}{5}$$

$$\frac{a}{b - 2} = \frac{3}{-3} \text{에서 } -3a = 3(b - 2)$$

$$-a = b - 2 \quad \therefore a + b = 2$$

또, 직선 $ax + 3y + 3 = 0$ 이 직선 $bx + 2y + 1 = 0$ 과 수직이므로

$$ab + 6 = 0 \quad \therefore ab = -6$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$= 2^3 - 3 \times (-6) \times 2 = 44$$

답 ②

- 17 두 점 (a, 2), (-1, -4)를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-4 - 2}{-1 - a} = \frac{-6}{-1 - a} = \frac{6}{a + 1}$$

또, 직선 $ax - 2y = 2$ 의 기울기는 $\frac{a}{2}$ 이므로 직선 $ax - 2y = 2$ 와

평행한 직선의 기울기는 $\frac{a}{2}$

$$\text{즉, } \frac{6}{a + 1} = \frac{a}{2} \text{이므로 } 12 = a^2 + a$$

$$a^2 + a - 12 = 0, (a + 4)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이고 점 (3, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 3)$$

$$\therefore 3x - 2y - 5 = 0$$

답 ③

다른풀이 직선 $ax - 2y = 2$ 의 기울기는 $\frac{a}{2}$ 이므로 이 직선과 평행

한 직선의 기울기는 $\frac{a}{2}$ 이다.

기울기가 $\frac{a}{2}$ 이고 점 (a, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{a}{2}(x - a)$$

이 직선이 점 (-1, -4)를 지나므로

$$-4 - 2 = \frac{a}{2}(-1 - a), -12 = -a - a^2$$

$$a^2 + a - 12 = 0, (a + 4)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 3) \quad \therefore 3x - 2y - 5 = 0$$

- 18 두 점 A(a, 1), B(2, b)를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{b - 1}{2 - a}$

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선의 방정식이 $x + 2y - 1 = 0$, 즉

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{이므로 직선 AB의 기울기는 2이다.}$$

$$\frac{b - 1}{2 - a} = 2$$

$$b - 1 = 2(2 - a) \quad \therefore 2a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또, 선분 AB의 중점의 좌표는 } \left(\frac{a + 2}{2}, \frac{1 + b}{2}\right)$$

이 점은 직선 $x + 2y - 1 = 0$ 위의 점이므로

$$\frac{a + 2}{2} + 2 \times \frac{1 + b}{2} - 1 = 0, a + 2 + 2(1 + b) - 2 = 0$$

$$\therefore a + 2b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 4, b = -3$

$$\therefore a + b = 4 + (-3) = 1$$

답 ⑤

- 19 직선 $y = \frac{4}{3}x + 3$ 의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의

기울기는 $-\frac{3}{4}$ 이다. 기울기가 $-\frac{3}{4}$ 이고 y절편이 양수인 직선의

방정식을

$$y = -\frac{3}{4}x + k \quad (k > 0), \text{ 즉 } 3x + 4y - 4k = 0$$

이라 하면 점 (-1, 4)와 이 직선 사이의 거리가 4이므로

$$\frac{|3 \times (-1) + 4 \times 4 - 4k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4, |13 - 4k| = 20$$

$$13 - 4k = 20 \text{ 또는 } 13 - 4k = -20$$

$$-4k = 7 \text{ 또는 } -4k = -33, \text{ 즉 } k = -\frac{7}{4} \text{ 또는 } k = \frac{33}{4}$$

$$\therefore k = \frac{33}{4} \quad (\because k > 0)$$

따라서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 3$ 에 수직이고 점 (-1, 4)에서의 거리가

4인 직선 중 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{33}{4}$$

$y = 0$ 을 대입하면

$$0 = -\frac{3}{4}x + \frac{33}{4}, \frac{3}{4}x = \frac{33}{4} \quad \therefore x = 11$$

따라서 구하는 직선의 x절편은 11이다.

답 ①

- 20 P(a, b)라 하면 점 P는 직선 $3x+y-2=0$ 위의 점이므로
 $3a+b-2=0$ ㉠
 또, Q(x, y)라 하면 선분 AP를 2:1로 내분하는 점 Q는
 $Q\left(\frac{2 \times a + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times b + 1 \times 1}{2+1}\right)$, 즉 $Q\left(\frac{2a+1}{3}, \frac{2b+1}{3}\right)$ 이므로
 $x = \frac{2a+1}{3}, y = \frac{2b+1}{3}$
 $\therefore a = \frac{3x-1}{2}, b = \frac{3y-1}{2}$ ㉡
 ㉠을 ㉡에 대입하면
 $3 \times \frac{3x-1}{2} + \frac{3y-1}{2} - 2 = 0, 3(3x-1) + (3y-1) - 4 = 0$
 $\therefore 9x+3y-8=0$ 답 ②

변형유형 집중공략

p.18~19

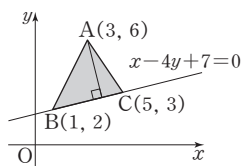
- 1-1 두 직선 $x-2y+2=0, 2x+y-6=0$ 은 한 점에서 만나므로
 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.
 (i) 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우
 (ㄱ) 두 직선 $x-2y+2=0, ax+2y+a=0$ 이 평행한 경우
 $\frac{1}{a} = \frac{-2}{2} \neq \frac{2}{a} \therefore a = -1$
 (ㄴ) 두 직선 $2x+y-6=0, ax+2y+a=0$ 이 평행한 경우
 $\frac{2}{a} = \frac{1}{2} \neq \frac{-6}{a} \therefore a = 4$
 (ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
 $x-2y+2=0, 2x+y-6=0$ 을 연립하여 풀면
 $x=2, y=2$
 따라서 직선 $ax+2y+a=0$ 이 점 (2, 2)를 지나야 하므로
 $2a+4+a=0, 3a=-4 \therefore a = -\frac{4}{3}$
 (i), (ii)에서 $a = -\frac{4}{3}$ 또는 $a = -1$ 또는 $a = 4$ 이므로 모든 실수
 a의 값의 합은
 $-\frac{4}{3} + (-1) + 4 = \frac{5}{3}$ 답 ⑤

- 1-2 서로 다른 세 직선 $ax-4y+9=0, bx-y+5=0,$
 $3x-y+8=0$ 이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누므로 세 직선
 은 모두 평행하다. 즉, 기울기가 모두 같으므로
 $\frac{a}{4} = b = 3 \therefore a=12, b=3$
 $\therefore ab=12 \times 3=36$ 답 36

- 2-1 $BC = \sqrt{(5-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{17}$

이고, 직선 BC의 방정식은

$$y-2 = \frac{3-2}{5-1}(x-1)$$



$$y-2 = \frac{1}{4}(x-1) \therefore x-4y+7=0$$

점 A(3, 6)과 직선 $x-4y+7=0$ 사이의 거리는

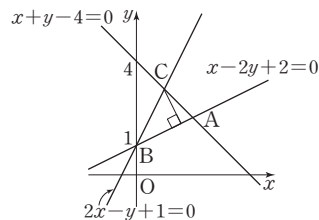
$$\frac{|1 \times 3 - 4 \times 6 + 7|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{14}{\sqrt{17}} = \frac{14\sqrt{17}}{17}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \frac{14\sqrt{17}}{17} = 7$$

답 ⑤

2-2



두 직선 $x+y-4=0, x-2y+2=0$ 의 교점을 A라 하면

$$A(2, 2)$$

두 직선 $x-2y+2=0, 2x-y+1=0$ 의 교점을 B라 하면

$$B(0, 1)$$

두 직선 $x+y-4=0, 2x-y+1=0$ 의 교점을 C라 하면

$$C(1, 3)$$

이때 $\overline{AB} = \sqrt{(0-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$ 이고, 점 C(1, 3)과 직선
 $x-2y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-2 \times 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

답 ③

서술형 What & How

p.20~23

- 1 점 P(a, b)가 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로
 $b=a-2$ ㉠ ①
 또, $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$
 $(a-2)^2 + (b-3)^2 = \{a - (-1)\}^2 + (b-4)^2$
 $a^2 - 4a + 4 + b^2 - 6b + 9 = a^2 + 2a + 1 + b^2 - 8b + 16$
 $-6a + 2b = 4 \therefore 3a - b = -2$ ㉡ ②
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -2, b = -4$
 $\therefore a+b = -2 + (-4) = -6$ ③
답 -6

- 2 점 P(a, b)가 직선 $y = -2x+5$ 위의 점이므로
 $b = -2a+5$ ㉠ ①
 또, $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$
 $(a-3)^2 + (b-4)^2 = (a-5)^2 + (b-2)^2$
 $a^2 - 6a + 9 + b^2 - 8b + 16 = a^2 - 10a + 25 + b^2 - 4b + 4$

$$4a-4b=4 \quad \therefore a-b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{L} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore ab=2 \times 1=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 2

채점기준	배점
① 점 P가 직선 $y=-2x+5$ 위의 점임을 이용하여 a, b 에 대한 등식 세우기	1
② $\overline{AP}=\overline{BP}$ 임을 이용하여 a, b 에 대한 등식 세우기	3
③ a, b 의 값과 ab 의 값 구하기	2

3 선분 AB를 4:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{4 \times 3 + 1 \times (-2)}{4+1}, \frac{4 \times (-7) + 1 \times 3}{4+1} \right) \quad \therefore (2, -5) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 점이 직선 $y=ax-1$ 위의 점이므로

$$-5=2a-1, 2a=-4 \quad \therefore a=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

답 -2

4 선분 AB를 5:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{5 \times 8 + 2 \times 1}{5+2}, \frac{5 \times 5 + 2 \times (-2)}{5+2} \right) \quad \therefore (6, 3) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 점이 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로

$$3=-6+k \quad \therefore k=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

답 9

채점기준	배점
① 선분 AB를 5:2로 내분하는 점의 좌표 구하기	3
② 상수 k 의 값 구하기	2

5 $x-3y+9=0, 3x-2y-1=0$ 을 연립하여 풀면 $x=3, y=4$

이므로 두 직선의 교점의 좌표는 (3, 4) $\cdots \cdots \textcircled{1}$

직선 $x-2y+6=0$ 과 평행한 직선의 방정식을

$$x-2y+k=0 \quad (k \text{는 상수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

라 하면 이 직선이 점 (3, 4)를 지나므로

$$3-8+k=0 \quad \therefore k=5$$

이것을 ①에 대입하면

$$x-2y+5=0 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{5}{2}$ 이므로

$$a+b=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

답 3

6 $x-2y+2=0, 2x+y-6=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=2$$

이므로 두 직선의 교점의 좌표는 (2, 2) $\cdots \cdots \textcircled{1}$

또, 직선 $9x-3y+1=0$, 즉 $y=3x+\frac{1}{3}$ 의 기울기는 3이므로 이

직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ $\cdots \cdots \textcircled{2}$

점 (2, 2)를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-2)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

따라서 $a=-\frac{1}{3}, b=\frac{8}{3}$ 이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{\frac{8}{3}}{-\frac{1}{3}}=-8 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

답 -8

채점기준	배점
① 두 직선 $x-2y+2=0, 2x+y-6=0$ 의 교점의 좌표 구하기	2
② 직선 $9x-3y+1=0$ 과 수직인 직선의 기울기 구하기	2
③ ①의 점을 지나고 기울기가 ②의 기울기인 직선의 방정식 구하기	2
④ a, b 의 값과 $\frac{b}{a}$ 의 값 구하기	1

7 직선 $x-2y+1=0$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선

의 기울기는 -2 이다. 기울기가 -2 인 직선의 방정식을

$$y=-2x+k \quad (k \text{는 상수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

라 하면 원점과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}, |k|=10 \quad \therefore k=\pm 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이것을 ①에 대입하면

$$y=-2x-10 \text{ 또는 } y=-2x+10 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

두 직선의 x 절편은 각각 $-5, 5$ 이므로

$$a=-5 \text{ 또는 } a=5$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-5 \times 5 = -25 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

답 -25

8 직선 $\sqrt{3}x+3y-2=0$ 의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 이 직선에 평행

한 직선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고 y 절편이 a

인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+a$$

$$\therefore \sqrt{3}x+3y-3a=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 (0, 1)과 직선 ① 사이의 거리가 $3\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{|\sqrt{3} \times 0 + 3 \times 1 - 3a|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2}} = 3\sqrt{3}, |3-3a|=18$$

$$3-3a=-18 \text{ 또는 } 3-3a=18$$

$$-3a=-21 \text{ 또는 } -3a=15$$

$$\therefore a=7 \text{ 또는 } a=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$7+(-5)=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 2

채점기준	배점
① 직선 $\sqrt{3}x+3y-2=0$ 에 평행하고 y 절편이 a 인 직선의 방정식 세우기	2
② a 의 값 구하기	2
③ 모든 실수 a 의 값의 합 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.24~28

01 $P(a, 0)$ 이므로

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

$$(a-1)^2 + (0-2)^2 = \{a-(-1)\}^2 + (0-4)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + 4 = a^2 + 2a + 1 + 16$$

$$-4a = 12 \quad \therefore a = -3$$

또, $Q(0, \beta)$ 이므로

$$\overline{AQ} = \overline{BQ} \text{에서 } \overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$$

$$(0-1)^2 + (\beta-2)^2 = \{0-(-1)\}^2 + (\beta-4)^2$$

$$1 + \beta^2 - 4\beta + 4 = 1 + \beta^2 - 8\beta + 16$$

$$4\beta = 12 \quad \therefore \beta = 3$$

$$\therefore a + \beta = -3 + 3 = 0$$

답 ①

02 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-3)^2 + (y-0)^2 + (x-5)^2 + (y-4)^2$$

$$= 3x^2 - 18x + 3y^2 - 12y + 55$$

$$= 3(x-3)^2 + 3(y-2)^2 + 16$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은 $x=3, y=2$ 일 때 최솟값 16을 가지므로

$$a=3, b=2$$

$$\therefore a+b=3+2=5$$

답 ③

03 출발한 지 t 초 후의 갑의 위치는 $(100-4t, 0)$

을의 위치는 $(0, 2t)$

두 사람 사이의 거리는

$$\sqrt{\{(100-4t)-0\}^2 + \{0-2t\}^2}$$

$$= \sqrt{16t^2 - 800t + 10000 + 4t^2}$$

$$= \sqrt{20t^2 - 800t + 10000}$$

$$= \sqrt{20(t-20)^2 + 2000} \text{ (m)}$$

따라서 두 사람 갑, 을 사이의 거리의 최솟값은 $t=20$ 일 때

$$\sqrt{2000} = 20\sqrt{5} \text{ (m)} \text{이다.}$$

답 ④

04 선분 AB를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점을 P라 하면

$$P\left(\frac{t \times 6 + (1-t) \times (-10)}{t + (1-t)}, \frac{t \times (-8) + (1-t) \times 4}{t + (1-t)}\right)$$

$$\therefore P(16t-10, -12t+4)$$

점 P가 제3사분면 위에 있으려면

$$16t-10 < 0 \text{이고 } -12t+4 < 0$$

$$16t-10 < 0 \text{에서 } 16t < 10 \quad \therefore t < \frac{5}{8} \quad \dots\dots ㉠$$

$$-12t+4 < 0 \text{에서 } -12t < -4 \quad \therefore t > \frac{1}{3} \quad \dots\dots ㉡$$

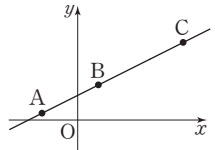
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$\frac{1}{3} < t < \frac{5}{8}$$

답 ③

05 $3\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}:\overline{BC} = 2:3$

$\overline{AB} < \overline{BC}$ 이므로 점 C는 선분 AB의 바깥에 있고, $a > 0$ 이므로 점 C의 위치는 오른쪽 그림과 같다. 즉, 점 B가 선분 AC를 2:3으로 내분하므로



$$B\left(\frac{2 \times a + 3 \times (-5)}{2+3}, \frac{2 \times b + 3 \times 1}{2+3}\right)$$

$$\therefore B\left(\frac{2a-15}{5}, \frac{2b+3}{5}\right)$$

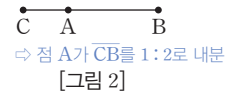
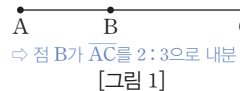
$$\text{이때 } B(3, 5) \text{이므로 } \frac{2a-15}{5} = 3, \frac{2b+3}{5} = 5$$

$$\therefore a = 15, b = 11$$

$$\therefore a+b = 15+11 = 26$$

답 ⑤

참고 $\overline{AB}:\overline{BC} = 2:3$ 에서 $\overline{AB} < \overline{BC}$ 이므로 점 C는 선분 AB의 바깥에 있다. 이때 점 C의 위치는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같다.



06 마름모 ABCD에서 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{16+a}{2}, \frac{8+4}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{16+a}{2}, 6\right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{8+b}{2}, \frac{12+0}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{8+b}{2}, 6\right)$$

$$\text{두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 } \frac{16+a}{2} = \frac{8+b}{2}$$

$$16+a=8+b \quad \therefore b=a+8 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{또, } \overline{AB} = \overline{BC} \text{이므로 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(8-16)^2 + (12-8)^2 = (a-8)^2 + (4-12)^2$$

$$64 + 16 = a^2 - 16a + 64 + 64, a^2 - 16a + 48 = 0$$

$$(a-4)(a-12) = 0 \quad \therefore a=4 \text{ 또는 } a=12$$

이것을 ㉠에 대입하면

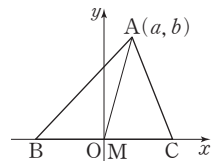
$$a=4 \text{일 때 } b=12$$

$$a=12 \text{일 때 } b=20$$

$$\therefore a+b=4+12=16 \text{ 또는 } a+b=12+20=32$$

따라서 $a+b$ 의 값이 될 수 있는 것은 16 또는 32이다. 답 ①, ③

07 오른쪽 그림과 같이 변 BC를 x 축에 놓고, 변 BC의 중점 M이 원점 O가 되도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓으면 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(-c, 0), (c, 0) (c > 0)$ 으로 나타낼 수 있다.



또, $A(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\}$$

$$= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{이때 } \overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2 \text{이므로}$$

$$2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) = \boxed{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

답 ④

- 08 점 B의 y좌표는 6이므로 B(b, 6)이라 하고, 점 C는 직선 $y=6x$ 위의 점이므로 C(c, 6c)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G는

$$G\left(\frac{3+b+c}{3}, \frac{0+6+6c}{3}\right) \quad \therefore G\left(\frac{b+c+3}{3}, 2+2c\right)$$

이때 점 G의 y좌표가 6이므로

$$2+2c=6, 2c=4 \quad \therefore c=2$$

즉, $G\left(\frac{b+5}{3}, 6\right)$ 이고, 점 G는 직선 $y=6x$ 위의 점이므로

$$6=6 \times \frac{b+5}{3}, 1=\frac{b+5}{3}, b+5=3 \quad \therefore b=-2$$

따라서 B(-2, 6), C(2, 12)이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{\{2-(-2)\}^2 + \{12-6\}^2} = 2\sqrt{13}$$

답 ③

- 09 기울기가 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이고 x절편이 5, 즉 점 (5, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\sqrt{3}(x-5) \quad \therefore \sqrt{3}x-y-5\sqrt{3}=0$$

따라서 $a=\sqrt{3}, b+1=-1$ 이므로 $a=\sqrt{3}, b=-2$

$$\therefore ab=\sqrt{3} \times (-2) = -2\sqrt{3}$$

답 ①

- 10 두 점 (k, 4), (1, 4k²)을 지나는 직선의 기울기가 4이므로

$$\frac{4k^2-4}{1-k}=4, \frac{4(k^2-1)}{1-k}=4, \frac{4(k-1)(k+1)}{1-k}=4$$

$$-4(k+1)=4, k+1=-1$$

$$\therefore k=-2$$

두 점 (-2, 4), (1, 16)을 지나고 기울기가 4인 직선의 방정식은

$$y-4=4\{x-(-2)\} \quad \therefore y=4x+12$$

따라서 직선 $y=4x+12$ 의 x절편은 -3, y절편은 12이므로

$$a=-3, b=12$$

$$\therefore a+b=-3+12=9$$

답 ⑤

- 11 세 점이 한 직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기는 같다. 즉,

$$\frac{-1-2}{a-(-5)} = \frac{(-2a-3)-2}{9-(-5)}, \frac{-3}{a+5} = \frac{-2a-5}{14}$$

$$(a+5)(-2a-5)=-42, -2a^2-15a-25=-42$$

$$2a^2+15a-17=0, (2a+17)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

$$\therefore A(-5, 2), B(1, -1), C(9, -5)$$

이때

$$\overline{AB} = \sqrt{\{1-(-5)\}^2 + \{-1-2\}^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\{9-1\}^2 + \{-5-(-1)\}^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 4$$

즉, 점 B는 선분 AC를 3:4로 내분한다.

따라서 $m=3, n=4$ 이므로

$$\frac{n}{m} = \frac{4}{3}$$

답 ④

- 12 $mx+2y-m-8=0$ 에서

$$m(x-1)+(2y-8)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 직선 ①은 m의 값에 관계없이 항상 점 (1, 4)를 지난다.

(i) 직선 ①이 점 A(-3, 0)을 지날 때,

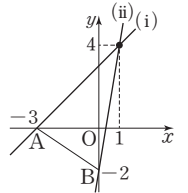
$$-4m-8=0 \quad \therefore m=-2$$

(ii) 직선 ①이 점 B(0, -2)를 지날 때,

$$-m-12=0 \quad \therefore m=-12$$

(i), (ii)에서 직선 ①이 선분 AB와 만나도록

하는 실수 m의 값의 범위는 $-12 \leq m \leq -2$ 이므로 정수 m은 -12, -11, -10, -9, ..., -3, -2의 11개이다. 답 ③



- 13 직선 l이 점 D(1, 1)을 지나므로 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y-1=m(x-1) \quad \therefore y=mx-m+1$$

점 P는 직선 l과 y축의 교점이므로 P(0, -m+1)

또, 점 Q는 직선 l과 직선 $x=4$ 의 교점이므로

$$Q(4, 3m+1)$$

따라서 사각형 OAQP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{(-m+1) + (3m+1)\} \times 4 = 4m+4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 사각형 OAQP와 사각형 PQBC의 넓이의 비가

2:5이므로

$$\square OAQP = \frac{2}{7} \square OABC = \frac{2}{7} \times 4 \times 4 = \frac{32}{7} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$4m+4=\frac{32}{7}, 4m=\frac{4}{7} \quad \therefore m=\frac{1}{7}$$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$ 이므로

$$a=\frac{1}{7}, b=\frac{6}{7}$$

$$\therefore a-b=\frac{1}{7}-\frac{6}{7}=-\frac{5}{7}$$

답 ⑤

- 14 마름모 ABCD에서 직선 AC는 대각선 BD의 수직이등분선이다. 즉, 직선 AC는 대각선 BD의 중점을 지나고, 직선 BD에 수직이다.

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+9}{2}, \frac{5+1}{2}\right) \quad \therefore (5, 3)$$

$$\text{직선 BD의 기울기는 } \frac{1-5}{9-1} = -\frac{1}{2}$$

따라서 직선 AC는 기울기가 2이고 점 (5, 3)을 지나는 직선이므로

$$y-3=2(x-5) \quad \therefore 2x-y-7=0$$

$$\therefore a=2, b=-7$$

$$\therefore a+b=2+(-7)=-5$$

답 ④

- 15 삼각형 OAB에서 $\overline{OA}$ 를 밑변으로, 점 B와 직선 OA 사이의 거리를 높이로 생각하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

$$\overline{OA} = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5}$$

직선 OA의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \quad \therefore x - 2y = 0$$

점 B와 직선 OA 사이의 거리는

$$\frac{|6-2t|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|6-2t|}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|6-2t|}{\sqrt{5}} = |6-2t|$$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 20이므로

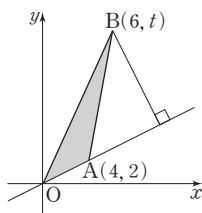
$$|6-2t| = 20$$

$$6-2t=20 \text{ 또는 } 6-2t=-20$$

$$-2t=14 \text{ 또는 } -2t=-26$$

$$\therefore t=13 (\because t>0)$$

답 ①



- 16 두 직선 $x-2y+1=0$, $2x+y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 한 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 $P(x, y)$ 에서 두 직선 $x-2y+1=0$, $2x+y-1=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-2y+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|2x+y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|x-2y+1| = |2x+y-1|$$

$$x-2y+1=2x+y-1 \text{ 또는 } x-2y+1=-(2x+y-1)$$

$$\therefore x+3y-2=0 \text{ 또는 } 3x-y=0$$

따라서 두 직선 $x-2y+1=0$, $2x+y-1=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

- 17 두 직선 $2x+(a-1)y+2a=0$, $ax+y+1=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{a} = \frac{a-1}{1} \neq \frac{2a}{1}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{a-1}{1} \text{에서 } a(a-1)=2$$

$$a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

이때 $a=-1$ 이면 두 직선 $2x-2y-2=0$, $-x+y+1=0$ 은 일치하므로

$$a=2$$

$$\therefore 2x+y+4=0, 2x+y+1=0$$

두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 $2x+y+4=0$,

$2x+y+1=0$ 사이의 거리는 직선 $2x+y+4=0$ 위의 임의의 한 점 $(-2, 0)$ 과 직선 $2x+y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \times (-2) + 0 + 1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

답 ③

- 18 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이라면 세 직선 중 두 직선이 서로 수직이고, 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다. 이때 두 직선 $2x+y=5$, $4x-y=1$ 의 기울기는 각각 -2 , 4 이므로 두 직선은 수직이 아니고, 점 $(1, 3)$ 에서 만난다.

(i) 두 직선 $2x+y=5$, $ax+3y=3$ 이 수직인 경우

$$2 \times a + 1 \times 3 = 0, 2a = -3 \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$$

이때 직선 $-\frac{3}{2}x+3y=3$ 은 점 $(1, 3)$ 을 지나지 않으므로 세 직선은 한 점에서 만나지 않는다.

(ii) 두 직선 $4x-y=1$, $ax+3y=3$ 이 수직인 경우

$$4 \times a + (-1) \times 3 = 0, 4a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{4}$$

이때 직선 $\frac{3}{4}x+3y=3$ 은 점 $(1, 3)$ 을 지나지 않으므로 세 직선은 한 점에서 만나지 않는다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-\frac{3}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

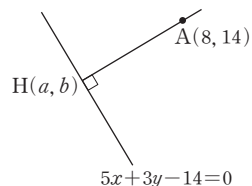
답 ②

- 19 점 $H(a, b)$ 는 직선

$$5x+3y-14=0 \text{ 위의 점이므로}$$

$$5a+3b-14=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{직선 AH의 기울기는 } \frac{b-14}{a-8}, \text{ 직선}$$



$$5x+3y-14=0 \text{의 기울기는 } -\frac{5}{3} \text{이고, 두 직선이 수직이므로}$$

$$\frac{b-14}{a-8} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -1, \frac{b-14}{a-8} = \frac{3}{5}$$

$$5b-70=3a-24$$

$$\therefore 3a-5b+46=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=8$

$$\therefore ab = (-2) \times 8 = -16$$

답 ①

- 20 $P(a, b)$ 라 하면 점 P는 직선 $y=-3x+1$ 위의 점이므로

$$b = -3a+1 \quad \dots\dots ㉠$$

또, $G(x, y)$ 라 하면 삼각형 AOP의 무게중심 G는

$$G\left(\frac{-2+0+a}{3}, \frac{3+0+b}{3}\right), \text{ 즉 } G\left(\frac{-2+a}{3}, \frac{3+b}{3}\right) \text{이므로}$$

$$x = \frac{-2+a}{3}, y = \frac{3+b}{3}$$

$$\therefore a=3x+2, b=3y-3$$

이것을 ㉠에 대입하면 삼각형 AOP의 무게중심 G가 나타내는 도형의 방정식은

$$3y-3 = -3(3x+2)+1$$

$$9x+3y+2=0 \quad \therefore y = -3x - \frac{2}{3}$$

답 ③

- 21 ㄱ. $k=1$ 일 때, 직선 l 의 방정식은

$$3x-y=-8 \quad \therefore y=3x+8$$

즉, 직선 l 은 직선 $y=3x$ 와 평행하다. (참)

$\therefore (2k+1)x + (k-2)y = 3k-11$ 에서
 $2kx + x + ky - 2y - 3k + 11 = 0$
 $(2x + y - 3)k + (x - 2y + 11) = 0$
 이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로
 $2x + y - 3 = 0, x - 2y + 11 = 0$
 두 식을 연립하여 풀면 $x = -1, y = 5$
 즉, 직선 l 은 제2사분면 위의 점 $(-1, 5)$ 를 항상 지나므로
 항상 제2사분면을 지난다. (참)
 ㄷ. 직선 l 과 직선 $x - 2y - 1 = 0$ 이 수직으로 만나려면
 $(2k+1) \times 1 + (k-2) \times (-2) = 0$
 $2k+1-2k+4=0 \quad \therefore 5=0$ (모순)
 즉, 직선 l 과 직선 $x - 2y - 1 = 0$ 이 수직으로 만나도록 하는
 k 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

22 두 직선 $x - y + 1 = 0, x + y - 3 = 0$ 이 한 점에서 만나므로 세 직선이 평행한 경우는 없다.

(i) 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우

(ㄱ) 두 직선 $x + (a+2)y + a - 1 = 0, x - y + 1 = 0$ 이 평행한 경우

$$\frac{1}{1} = \frac{a+2}{-1} \neq \frac{a-1}{1}, a+2 = -1 \quad \therefore a = -3$$

(ㄴ) 두 직선 $x + (a+2)y + a - 1 = 0, x + y - 3 = 0$ 이 평행한 경우

$$\frac{1}{1} = \frac{a+2}{1} \neq \frac{a-1}{-3}, a+2 = 1 \quad \therefore a = -1$$

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

두 직선 $x - y + 1 = 0, x + y - 3 = 0$ 의 교점의 좌표는

$$(1, 2)$$

직선 $x + (a+2)y + a - 1 = 0$ 이 이 점을 지나야 하므로

$$1 + 2(a+2) + a - 1 = 0, 3a + 4 = 0, 3a = -4$$

$$\therefore a = -\frac{4}{3}$$

(i), (ii)에서 $a = -3$ 또는 $a = -1$ 또는 $a = -\frac{4}{3}$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$-3 + (-1) + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{3}$$

답 ①

23 직선 $ax + by - 8 = 0$ 이 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$2a + 2b - 8 = 0 \quad \therefore b = 4 - a \quad \dots\dots ①$$

원점 O 와 직선 $ax + by - 8 = 0$ 사이의 거리가 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 이므로

$$\frac{|-8|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{64}{a^2 + b^2} = \frac{8}{5} \cdot \frac{8}{a^2 + b^2} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 40$$

$\dots\dots ①$

$\dots\dots ②$

⑦을 ⑥에 대입하면

$$a^2 + (4-a)^2 = 40, a^2 + 16 - 8a + a^2 = 40$$

$$2a^2 - 8a - 24 = 0, a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$(a+2)(a-6) = 0 \quad \therefore a = 6 (\because a > 0)$$

이것을 ⑥에 대입하면 $b = -2$

$\dots\dots ③$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{6}{-2} = -3$$

$\dots\dots ④$

답 -3

채점기준	배점
① 직선 $ax + by - 8 = 0$ 이 점 $(2, 2)$ 를 지남을 이용하여 a, b 에 대한 등식 세우기	1
② 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 a, b 에 대한 등식 세우기	2
③ ①, ②를 연립하여 풀고 a, b 의 값 구하기	2
④ $\frac{a}{b}$ 의 값 구하기	1

24 오른쪽 그림과 같이 직선 $y = k$ ($0 < k < 9$)

가 삼각형 ABO 의 넓이를 이등분하므로 직

선 $y = k$ 가 직선 AB 와 만나는 점을 C , y 축

과 만나는 점을 D 라 하면

$$\triangle ABO = 2\triangle ACD \quad \dots\dots ① \quad \dots\dots ①$$

$D(0, k)$ 이므로 $\overline{AD} = 9 - k$

직선 AB 의 방정식은

$$y - 9 = \frac{1-9}{-3-0}(x-0)$$

$$\therefore y = \frac{8}{3}x + 9$$

점 C 의 x 좌표는 $k = \frac{8}{3}x + 9$ 에서

$$k - 9 = \frac{8}{3}x \quad \therefore x = \frac{3}{8}(k - 9)$$

$$\therefore \overline{CD} = 0 - \frac{3}{8}(k - 9) = \frac{3}{8}(9 - k)$$

따라서 삼각형 ACD 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}(9 - k) \times (9 - k)$$

$$= \frac{3}{16}(9 - k)^2 \quad \dots\dots ②$$

이고, 삼각형 ABO 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 3 = \frac{27}{2}$$

$\dots\dots ③$

이므로 ①에서

$$\frac{27}{2} = 2 \times \frac{3}{16}(9 - k)^2, (9 - k)^2 = 36$$

$$9 - k = 6 \text{ 또는 } 9 - k = -6$$

$$k = 3 \text{ 또는 } k = 15$$

$$\therefore k = 3 (\because 0 < k < 9)$$

$\dots\dots ④$

답 3

채점기준	배점
① 직선 $y = k$ 가 삼각형 ABO 의 넓이를 이등분할 조건 설명하기	1
② 직선 $y = k$ 가 직선 AB, y 축과 만나는 점을 각각 C, D 라 할 때, 삼각형 ACD 의 넓이 구하기	3
③ 삼각형 ABO 의 넓이 구하기	1
④ ①의 조건을 이용하여 k 의 값 구하기	2

실전 문제 | 2회

p.29~33

01 $b < c < 2$ 이므로 세 점 A, B,

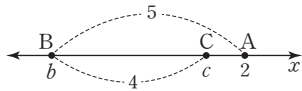
C의 위치는 오른쪽 그림과 같

고, $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$ 이므로

$$2-b=5, c-b=4 \quad \therefore b=-3, c=1$$

$$\therefore bc = -3 \times 1 = -3$$

답 ②



02 삼각형 ABC의 외심을 P(x, y)로 놓으면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ 이므로

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2 \text{에서}$$

$$\{x - (-1)\}^2 + \{y - (-1)\}^2 = \{x - 1\}^2 + \{y - (-3)\}^2$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2 = x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10$$

$$4x - 8y = 8 \quad \therefore x - 2y = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \text{에서}$$

$$\{x - 3\}^2 + \{y - (-1)\}^2 = \{x - 1\}^2 + \{y - (-3)\}^2$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + 10 = x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10$$

$$4x + 4y = 0 \quad \therefore x + y = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x = \frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ 이다. 답 ③

03 P(a, b), A(-3, 2), B(1, 4)라 하면

$$\sqrt{(a+3)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b-4)^2}$$

$$= \overline{AP} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{AB}$$

$$= \sqrt{\{1 - (-3)\}^2 + \{4 - 2\}^2}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다. 답 ⑤

04 A(a, b), B(c, d)라 하면

선분 AB의 중점의 좌표가 (-2, 6)이므로

$$\frac{a+c}{2} = -2, \frac{b+d}{2} = 6$$

$$\therefore a+c = -4, b+d = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 선분 AB를 3:4로 내분하는 점의 좌표가 (-3, 7)이므로

$$\frac{3c+4a}{3+4} = -3, \frac{3d+4b}{3+4} = 7$$

$$\therefore 4a+3c = -21, 4b+3d = 49 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①에서 $a+c = -4$, ②에서 $4a+3c = -21$ 을 연립하여 풀면

$$a = -9, c = 5$$

①에서 $b+d = 12$, ②에서 $4b+3d = 49$ 를 연립하여 풀면

$$b = 13, d = -1$$

따라서 점 A의 x좌표는 -9, 점 B의 y좌표는 -1이므로 그 합은

$$-9 + (-1) = -10$$

답 ①

05 $\triangle OAC = \frac{5}{2} \triangle OAB$ 에서 $2\triangle OAC = 5\triangle OAB$ 이므로

$$\triangle OAB : \triangle OAC = 2 : 5$$

즉, $\triangle OAB : \triangle OBC = 2 : 3$ 이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$$

따라서 점 B는 선분 AC를 2:3으로 내분하는 점이므로

$$B\left(\frac{2 \times a + 3 \times (-5)}{2+3}, \frac{2 \times b + 3 \times 2}{2+3}\right)$$

$$\therefore B\left(\frac{2a-15}{5}, \frac{2b+6}{5}\right)$$

이때 B(1, 4)이므로

$$\frac{2a-15}{5} = 1, \frac{2b+6}{5} = 4 \quad \therefore a = 10, b = 7$$

$$\therefore a+b = 10+7 = 17$$

답 ⑤

06 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 각각 $m:n(m>0,$

$n>0)$ 으로 내분하는 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중

심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다. 즉, 삼각형 PQR의

무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 그 좌표는

$$\left(\frac{2+3+1}{3}, \frac{0+1+5}{3}\right) \quad \therefore (2, 2) \quad \text{답 ①}$$

다른풀이 $\overline{AB}$ 를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 3 + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 1 + 2 \times 0}{1+2}\right) \quad \therefore \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$\overline{BC}$ 를 1:2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 1 + 2 \times 3}{1+2}, \frac{1 \times 5 + 2 \times 1}{1+2}\right) \quad \therefore \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$\overline{CA}$ 를 1:2로 내분하는 점 R의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times 5}{1+2}\right) \quad \therefore \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{4}{3}}{3}, \frac{\frac{1}{3} + \frac{7}{3} + \frac{10}{3}}{3}\right) \quad \therefore (2, 2)$$

07 정삼각형 ABC의 무게중심 O는 선분

AM을 2:1로 내분하는 점이므로

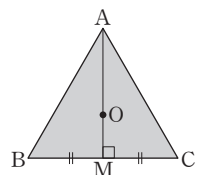
$$\overline{AO} : \overline{OM} = 2 : 1$$

즉, $\overline{AO} : \overline{AM} = 2 : 3$ 이므로

$$2\overline{AM} = 3\overline{AO}$$

$$\therefore \overline{AM} = \frac{3}{2}\overline{AO} = \frac{3}{2}\sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \frac{9\sqrt{5}}{2}$$

답 ⑤



08 수직선 위의 두 점 P, Q에 대하여 $P(\sqrt{5}), Q(\sqrt{7})$ 이라 하면

$$A = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{2} \text{은 } \overline{PQ} \text{의 중점의 좌표이다.}$$

$$B = \frac{4\sqrt{5} + \sqrt{7}}{5} = \frac{1 \times \sqrt{7} + 4 \times \sqrt{5}}{1+4} \text{는 } \overline{PQ} \text{를 } 1:4 \text{로 내분하는 점}$$

의 좌표이다.

$$C = \frac{\sqrt{5} + 3\sqrt{7}}{4} = \frac{3 \times \sqrt{7} + 1 \times \sqrt{5}}{3+1} \text{는 } \overline{PQ} \text{를 } 3:1 \text{로 내분하는 점}$$

의 좌표이다.

A, B, C를 좌표로 하는 점을 각각 A, B, C라 하고 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$$\therefore B < A < C$$

답 ③

09 $M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$, 즉 $M(1, 2)$ 이

므로

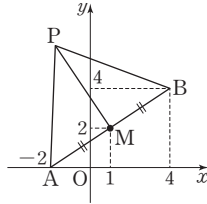
$$\begin{aligned} \overline{AM} &= \sqrt{\{1 - (-2)\}^2 + \{2 - 0\}^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

또, $\overline{PM} = 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= 2(\overline{PM}^2 + \overline{AM}^2) \\ &= 2 \times \{5^2 + (\sqrt{13})^2\} \\ &= 76 \end{aligned}$$

참고 아폴로니우스(Apollonius)의 정리
삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$



답 ③

10 점 $(-4, 6)$ 을 지나고 기울기가 -3 인 직선의 방정식은
 $y - 6 = -3\{x - (-4)\} \quad \therefore y = -3x - 6$

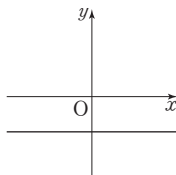
따라서 직선 $y = -3x - 6$ 을 지나지 않는 점은 ④ $(-2, 8)$ 이다.

답 ④

11 $\neg$. $ax + by + c = 0$ 에서 $a = 0$ 이고 $bc > 0$ 이면

$$by + c = 0, by = -c \quad \therefore y = -\frac{c}{b} < 0$$

직선 $y = -\frac{c}{b} \left(-\frac{c}{b} < 0\right)$ 는 x 축에 평행하고 제3사분면과 제4사분면을 지난다. (거짓)

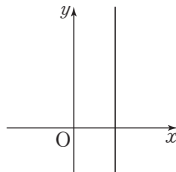


$\vee$. $ax + by + c = 0$ 에서 $b = 0$ 이고 $ac < 0$ 이면

$$ax + c = 0, ax = -c$$

$$\therefore x = -\frac{c}{a} > 0$$

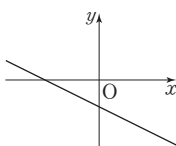
직선 $x = -\frac{c}{a} \left(-\frac{c}{a} > 0\right)$ 는 y 축에 평행하므로 원점을 지나지 않는다. (거짓)



$\therefore a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로

$$ax + by + c = 0, \text{ 즉 } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ 에서 } -\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} < 0$$

즉, 기울기가 음수이고 y 절편도 음수이므로 직선 $ax + by + c = 0$ 은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



(참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

12 $F(6, 0)$ 이라 하고, 직선 $y = \frac{b}{a}x$ 와

$\overline{FD}$ 가 만나는 점을 G라 하면 도형

OABCDE의 넓이는

$$\square OFDE + \square ABCF = 6 \times 6 + 3 \times 2 = 42$$

이므로 사다리꼴 OGDE의 넓이는 21이어야 한다.

따라서 $\overline{GD} = k$ 라 하면

$$\square OGDE = \frac{1}{2} \times (k + 6) \times 6 = 21$$

$$k + 6 = 7 \quad \therefore k = 1$$

즉, $\overline{GD} = 1$ 이므로 $G(6, 5)$ 이고, 직선 OG의 방정식은 $y = \frac{5}{6}x$

$$\therefore a = 6, b = 5$$

$$\therefore a + b = 6 + 5 = 11$$

다른풀이 $F(6, 0)$ 이라 하면 직사각형

ABCF의 넓이는 $3 \times 2 = 6$

이때 직사각형 DEHG의 넓이가 6이

되도록 선분 CD 위에 점 G, 선분 OE

위에 점 H를 잡으면 직선 OG는 도형

OABCDE의 넓이를 이등분한다. 즉,

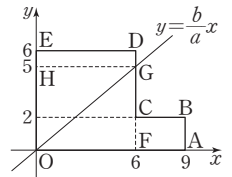
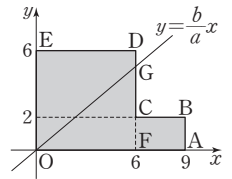
$$\square DEHG = \overline{DE} \times \overline{DG} = 6 \times \overline{DG} = 6$$

이어야 하므로 $\overline{DG} = 1$

따라서 $G(6, 5)$ 이므로 직선 OG의 방정식은 $y = \frac{5}{6}x$

$$\therefore a = 6, b = 5$$

$$\therefore a + b = 6 + 5 = 11$$



답 ⑤

13 직선 $y = mx - 4m + 3$, 즉

$$y = m(x - 4) + 3$$
은 m 의 값

에 관계없이 점 $C(4, 3)$ 을 지

나고, 삼각형 ABC의 넓이를

이등분하므로 선분 AB의 중

점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면

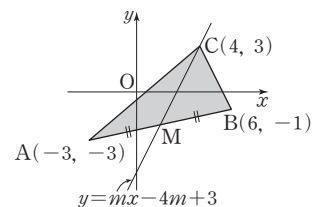
$$M\left(\frac{-3+6}{2}, \frac{-3+(-1)}{2}\right) \quad \therefore M\left(\frac{3}{2}, -2\right)$$

직선 $y = mx - 4m + 3$ 이 점 $M\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ 를 지나므로

$$-2 = \frac{3}{2}m - 4m + 3, -4 = 3m - 8m + 6$$

$$5m = 10 \quad \therefore m = 2$$

답 ⑤



14 점 $(3, 0)$ 을 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 직선의 방정식은

$$y - 0 = m(x - 3) \quad \therefore mx - y - 3m = 0$$

이 직선이 직선 $kx + y + 6 = 0$ 과 수직이므로

$$m \times k + (-1) \times 1 = 0, mk - 1 = 0 \quad \therefore mk = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 두 직선 $mx - y - 3m = 0, kx + y + 6 = 0$ 이 y 축 위에서 만

나므로 두 직선의 y 절편이 서로 같다.

직선 $mx - y - 3m = 0$ 의 y 절편은 $-3m$, 직선 $kx + y + 6 = 0$ 의 y 절편은 -6 이므로

$$-3m = -6 \quad \therefore m = 2 \quad \dots\dots ㉔$$

㉔을 ㉑에 대입하면

$$2k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{2} \quad \text{답 ㉒}$$

- 15 (i) 두 직선 $(2k+3)x + ky - 3 = 0$, $kx + y - 1 = 0$ 이 서로 평행한 경우

$$\frac{2k+3}{k} = \frac{k}{1} \neq \frac{-3}{-1} \quad \dots\dots ㉑$$

$$\frac{2k+3}{k} = \frac{k}{1} \text{에서 } 2k+3 = k^2$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0, (k+1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 3$$

(ㄱ) $k = -1$ 일 때

$$\frac{2 \times (-1) + 3}{-1} = \frac{-1}{1} \neq 3 \text{이므로 ㉑을 만족시키지 않는다.}$$

(ㄴ) $k = 3$ 일 때

$$\frac{2 \times 3 + 3}{3} = \frac{3}{1} = 3 \text{이므로 ㉑을 만족시키지 않는다.}$$

(ㄷ), (ㄹ)에서 $k = -1$

- (ii) 두 직선 $(2k+3)x + ky - 3 = 0$, $kx + y - 1 = 0$ 이 서로 수직인 경우

$$(2k+3) \times k + k \times 1 = 0$$

$$2k^2 + 3k + k = 0, 2k^2 + 4k = 0$$

$$2k(k+2) = 0 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 0$$

(i), (ii)에서 $a = 1$, $b = 2$ 이므로

$$a + b = 1 + 2 = 3 \quad \text{답 ㉔}$$

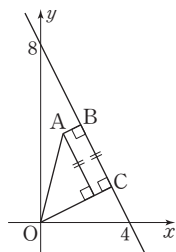
- 16 오른쪽 그림에서 직선 OC는 직선 $y = -2x + 8$ 에 수직이므로 직선 OC의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이고, 방정식은 $y = \frac{1}{2}x$ 이다.

이때 선분 BC의 길이는 점 A와 직선

$$y = \frac{1}{2}x, \text{ 즉 } x - 2y = 0 \text{ 사이의 거리와 같음}$$

므로

$$BC = \frac{|1 - 2 \times 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \quad \text{답 ㉑}$$



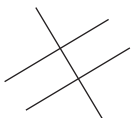
- 17 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우는 다음과 같다.

(i) 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우

(ㄱ) 두 직선 $-2x + y - 3 = 0$, $x - my = 0$ 이

평행한 경우

$$\frac{1}{-2} = \frac{-m}{1} \neq \frac{0}{-3} \quad \therefore m = \frac{1}{2}$$



(ㄴ) 두 직선 $3x - 4y + 2 = 0$, $x - my = 0$ 이 평행한 경우

$$\frac{1}{3} = \frac{-m}{-4} \neq \frac{0}{2} \quad \therefore m = \frac{4}{3}$$

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

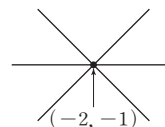
두 직선 $-2x + y - 3 = 0$,

$3x - 4y + 2 = 0$ 의 교점의 좌표는

$$(-2, -1)$$

직선 $x - my = 0$ 이 이 점을 지나야 하므로

$$-2 + m = 0 \quad \therefore m = 2$$



(i), (ii)에서 $m = \frac{1}{2}$ 또는 $m = \frac{4}{3}$ 또는 $m = 2$ 이므로 모든 실수

m 의 값의 곱은

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 2 = \frac{4}{3} \quad \text{답 ㉓}$$

- 18 점 $(2, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 직선의 방정식은 $y - 2 = m(x - 2)$

$$\therefore mx - y - 2m + 2 = 0$$

원점 $(0, 0)$ 과 이 직선 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|-2m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1, |-2m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$4m^2 - 8m + 4 = m^2 + 1 \quad \therefore 3m^2 - 8m + 3 = 0$$

이차방정식 $3m^2 - 8m + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - 3 \times 3 = 7 > 0$$

이므로 이차방정식 $3m^2 - 8m + 3 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 즉, 기울기 m 은 실수이다.

따라서 구하는 두 직선의 기울기의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$ 이다. 답 ㉔

- 19 두 직선 $x + 3y + 1 = 0$, $x + 3y + k = 0$ 사이의 거리는 직선

$x + 3y + 1 = 0$ 위의 임의의 한 점 $(-1, 0)$ 과 직선

$x + 3y + k = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-1 + 3 \times 0 + k|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|k - 1|}{\sqrt{10}}$$

두 직선 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|k - 1|}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}, |k - 1| = 20$$

$$k - 1 = \pm 20 \quad \therefore k = -19 \text{ 또는 } k = 21$$

따라서 구하는 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-19 + 21 = 2$$

답 ㉕

다른풀이 $|k - 1| = 20$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2 - 2k - 399 = 0$$

이차방정식 $k^2 - 2k - 399 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로

모든 실수 k 의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 2이다.

20 곡선 $y=x^2+2x+3$ 에 접하고 기

울기가 -2 인 직선의 방정식을

$y=-2x+a$ (a 는 상수)

라 하면 이차방정식

$$x^2+2x+3=-2x+a, \text{ 즉}$$

$$x^2+4x+3-a=0 \text{은 중근을 갖}$$

는다. 따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-1 \times (3-a)=0$$

$$4-3+a=0 \quad \therefore a=-1$$

따라서 두 직선 $y=-2x-1, y=-2x+k$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이

므로 직선 $y=-2x-1$ 위의 점 $(0, -1)$ 과 직선

$2x+y-k=0$ 사이의 거리는 $\sqrt{5}$ 이다. 즉,

$$\frac{|-1-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

$$|-1-k|=5, -1-k=5 \text{ 또는 } -1-k=-5$$

$$\therefore k=-6 \quad (\because k < -1)$$

다른풀이 곡선 $y=x^2+2x+3$ 에

접하고 기울기가 -2 인 직선의 방

정식은 $y=-2x-1$

이 직선과 곡선 $y=x^2+2x+3$ 의

접점을 P 라 하면 곡선

$y=x^2+2x+3$ 위의 점과 직선

$y=-2x+k$ 사이의 거리의 최솟값은 점 P 와 직선 $y=-2x+k$

사이의 거리이다.

직선 $y=-2x-1$ 과 곡선 $y=x^2+2x+3$ 의 접점 P 의 x 좌표는

$$x^2+2x+3=-2x-1 \text{에서}$$

$$x^2+4x+4=0, (x+2)^2=0 \quad \therefore x=-2$$

이것을 $y=-2x-1$ 에 대입하면 접점 P 의 y 좌표는

$$y=4-1=3 \quad \therefore P(-2, 3)$$

점 P 와 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$

이므로

$$\frac{|2 \times (-2) + 3 - k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \quad \therefore k=-6 \quad (\because k < -1)$$

21 점 $P(3, -1)$ 에서 마름모 위의 한 점까지의 거리의 최솟값은 점

P 와 직선 BC 사이의 거리와 같다.

직선 BC 의 x 절편은 $4, y$ 절편은 -2 이므로 직선 BC 의 방정식은

$$\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1 \quad \therefore x-2y-4=0$$

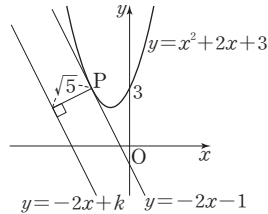
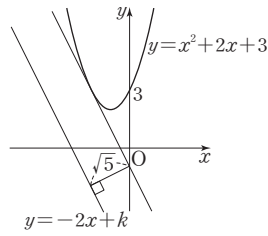
점 P 와 직선 BC 사이의 거리는

$$\frac{|1 \times 3 - 2 \times (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

또, 점 $P(3, -1)$ 에서 마름모 위의 한 점까지의 거리의 최댓값은 선분 PA 의 길이와 같으므로

$$\overline{PA} = \sqrt{(-4-3)^2 + \{0-(-1)\}^2} = 5\sqrt{2}$$



$$\therefore M=5\sqrt{2}$$

$$\therefore Mm=5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{10}$$

답 ①

22 $y=mx-2m+3=0$ 에서 $y=m(x-2)+3$ ㉠

즉, 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 3)$ 을 지난다.

(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 4)$ 를 지날 때,

$$4=-2m+3$$

$$-2m=1 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(4, 0)$ 을 지날 때

$$0=2m+3$$

$$2m=-3 \quad \therefore m=-\frac{3}{2}$$

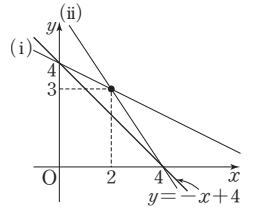
(i), (ii)에서 두 직선이 제1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위는

$$m < -\frac{3}{2} \text{ 또는 } m > -\frac{1}{2}$$

따라서 $a=-\frac{3}{2}, \beta=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$\alpha\beta = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

답 ④



23 두 삼각형 ADE, ABC 는 서로 닮음이고, 넓이의 비가 $1:16$ 이

므로 닮음비는 $1:4$ 이다. ①

따라서 $\overline{AE}:\overline{AC}=1:4$ 이므로 $\overline{AE}:\overline{EC}=1:3$

즉, 점 E 는 선분 AC 를 $1:3$ 으로 내분하므로

$$E\left(\frac{1 \times 10 + 3 \times 2}{1+3}, \frac{1 \times 3 + 3 \times 7}{1+3}\right)$$

$$\therefore E(4, 6)$$

이때 $B(0, 1)$ 이므로 직선 BE 의 방정식은

$$y-1=\frac{6-1}{4-0}(x-0), y=\frac{5}{4}x+1$$

$$\therefore 5x-4y+4=0$$

따라서 $a=5, b=-4$ 이므로

$$a-b=5-(-4)=9$$

답 9

채점기준	배점
① 두 삼각형 ADE, ABC 의 닮음비 구하기	1
② 점 E 의 좌표 구하기	2
③ 직선 BE 의 방정식 구하기	2
④ 상수 a, b 의 값과 $a-b$ 의 값 구하기	1

24 $\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+\{2-(-2)\}^2}=\sqrt{20}$

$$\overline{BC}=\sqrt{(a-4)^2+(0-2)^2}=\sqrt{a^2-8a+20}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(2-a)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{a^2-4a+8}$$

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$ 일 때

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2 \text{에서}$$

$$20=a^2-8a+20, a^2-8a=0$$

$$a(a-8)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=8$$

..... ①

(ii) $\overline{BC} = \overline{CA}$ 일 때

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{에서}$$

$$a^2 - 8a + 20 = a^2 - 4a + 8$$

$$-4a = -12 \quad \therefore a = 3$$

그런데 $a = 3$ 일 때, $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$, $\overline{BC} = \overline{CA} = \sqrt{5}$ 이므로

삼각형이 만들어지지 않는다. ②

(iii) $\overline{CA} = \overline{AB}$ 일 때

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 \text{에서}$$

$$a^2 - 4a + 8 = 20, \quad a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$(a+2)(a-6) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 6 \quad \dots\dots ③$$

(i), (ii), (iii)에서 $a = -2$ 또는 $a = 0$ 또는 $a = 6$ 또는 $a = 8$ 따라서 모든 a 의 값의 합은

$$-2 + 0 + 6 + 8 = 12 \quad \dots\dots ④$$

답 12

채점기준	배점
① $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때 a 의 값 구하기	2
② $\overline{BC} = \overline{CA}$ 일 때 삼각형이 만들어지지 않음을 설명하기	2
③ $\overline{CA} = \overline{AB}$ 일 때 a 의 값 구하기	2
④ 모든 a 의 값의 합 구하기	1

참고 점 $C(a, 0)$ 은 x 축 위의 점이고 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는 $(3, 0)$ 이므로 $a = 3$ 일 때는 삼각형이 만들어지지 않는다.

수능형 기출문제 & 변형문제

p.34~38

1 $\angle ABC$ 의 이등분선이 선분 AC 의 중점을 지나므로 삼각형 ABC 는 $\overline{BA} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이다.

$$\overline{BA} = \sqrt{\{0 - (-3)\}^2 + (a - 0)^2} = \sqrt{9 + a^2}$$

$$\overline{BC} = 1 - (-3) = 4$$

$$\overline{BA} = \overline{BC} \text{에서 } \sqrt{9 + a^2} = 4$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 9 + a^2 = 16$$

$$a^2 = 7 \quad \therefore a = \sqrt{7} \quad (\because a > 0) \quad \text{답 ③}$$

2 $\overline{AO} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$$\overline{AB} = \sqrt{(7-4)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

이때 $\overline{AC}$ 가 $\angle OAB$ 의 이등분선이므로

$$\overline{OC} : \overline{BC} = \overline{AO} : \overline{AB} = 5 : 5 = 1 : 1 \quad \therefore \overline{OC} = \overline{BC}$$

따라서 점 C 는 $\overline{OB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{답 ②}$$

3 $B(c, d)$, $C(e, f)$ 라 하면

선분 BC 의 중점의 좌표가 $(1, 2)$ 이므로

$$\frac{c+e}{2} = 1, \quad \frac{d+f}{2} = 2 \quad \therefore c+e = 2, \quad d+f = 4$$

 $A(a, b)$ 이고, 삼각형 ABC 의 무게중심이 원점이므로

$$\frac{a+c+e}{3} = 0, \quad \frac{b+d+f}{3} = 0$$

$$\therefore a+c+e = 0, \quad b+d+f = 0$$

$$a+c+e = 0 \text{에서 } a+2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$$b+d+f = 0 \text{에서 } b+4 = 0 \quad \therefore b = -4$$

$$\therefore a \times b = -2 \times (-4) = 8$$

답 ②

4 $B(a, b)$, $C(c, d)$ 라 하면

 $A(-1, 3)$ 이고, $\overline{AB}$ 의 중점 M 이 $M(x_1, y_1)$ 이므로

$$\frac{-1+a}{2} = x_1, \quad \frac{3+b}{2} = y_1$$

 $\overline{AC}$ 의 중점이 $N(x_2, y_2)$ 이므로

$$\frac{-1+c}{2} = x_2, \quad \frac{3+d}{2} = y_2$$

$$\text{이때 } x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \text{에서}$$

$$\frac{-1+a}{2} + \frac{-1+c}{2} = \frac{5}{2}, \quad -1+a+(-1+c) = 5$$

$$\therefore a+c = 7$$

$$\text{또, } y_1 + y_2 = 3 \text{에서}$$

$$\frac{3+b}{2} + \frac{3+d}{2} = 3, \quad 3+b+(3+d) = 6$$

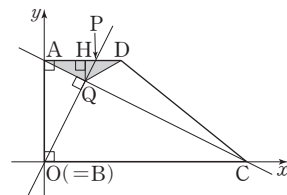
$$\therefore b+d = 0$$

따라서 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+a+c}{3}, \frac{3+b+d}{3}\right)$$

$$\left(\frac{-1+7}{3}, \frac{3+0}{3}\right) \quad \therefore (2, 1) \quad \text{답 ④}$$

5



점 B 를 좌표평면의 원점으로 놓으면 $A(0, 4)$, $C(8, 0)$ 이므로 직선 AC 의 방정식은

$$y - 4 = \frac{0-4}{8-0}(x-0) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 4$$

직선 BP 는 원점을 지나고 직선 AC 에 수직인 직선이므로 직선 BP 의 방정식은 $y = 2x$

 $D(t, 4)$ 라 하면 점 P 는 선분 AD 를 2:1로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{2 \times t + 1 \times 0}{2+1}, 4\right) \quad \therefore P\left(\frac{2}{3}t, 4\right)$$

점 P 는 직선 $y = 2x$ 위의 점이므로

$$4 = 2 \times \frac{2}{3}t \quad \therefore t = 3$$

따라서 $D(3, 4)$ 이므로 $\overline{AD} = 3$ 또, 점 Q 는 두 직선 AC , BP 의 교점이므로 $y = -\frac{1}{2}x + 4$,

$$y = 2x \text{를 연립하여 풀면 } x = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{16}{5}$$

$$\therefore Q\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

점 Q에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{QH} = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5}$$

따라서 삼각형 AQD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{QH} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

답 ①

6 직각삼각형 AOB에서

$$\overline{AB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

두 삼각형 APQ, ABC에서

$$\angle PAQ = \angle BAC$$

$$\angle AQP = \angle ACB$$

이므로 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ (AA 닮음)

이때 $\triangle APQ = \frac{1}{4} \triangle ABC$ 에서 $\triangle APQ : \triangle ABC = 1 : 4$ 이므로

$\triangle APQ$ 와 $\triangle ABC$ 의 닮음비는 1:2이다. 따라서

$$\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

이므로 P(5, 6)

한편, 직선 AB는 기울기가 $\frac{0-6}{8-0} = -\frac{3}{4}$ 이고 y절편이 6인 직선

이므로 직선 AB의 방정식은

$$y = -\frac{3}{4}x + 6$$

직선 l은 직선 AB와 수직이므로 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이고, 점 P(5, 6)

을 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y - 6 = \frac{4}{3}(x - 5) \quad \therefore y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

직선 l의 y절편은 $-\frac{2}{3}$ 이므로 R(0, $-\frac{2}{3}$)

$$\therefore \overline{AR} = 6 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

점 Q는 두 직선 AB, l의 교점이므로 $y = -\frac{3}{4}x + 6$,

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \text{를 연립하여 풀면 } x = \frac{16}{5}, y = \frac{18}{5}$$

$$\therefore Q\left(\frac{16}{5}, \frac{18}{5}\right)$$

점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{QH} = \frac{18}{5}$$

따라서 삼각형 ARQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AR} \times \overline{QH} = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \times \frac{18}{5} = \frac{32}{3}$$

답 ③

7 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α , β 라 하면 선분 PQ를 1:2로 내분하는 점의 x좌표가 1이므로

$$\frac{1 \times \beta + 2 \times \alpha}{1 + 2} = 1$$

$$\therefore 2\alpha + \beta = 3 \quad \dots\dots ㉠$$

또, α , β 는 이차방정식 $x^2 - 2x = 3x + k$, 즉 $x^2 - 5x - k = 0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\alpha\beta = -k \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = -2$, $\beta = 7$

따라서 ㉢에서

$$k = -\alpha\beta = -(-2) \times 7 = 14$$

답 14

8 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α , β 라 하면 선분 AB를 4:3으로 내분하는 점의 x좌표가 2이므로

$$\frac{4 \times \beta + 3 \times \alpha}{4 + 3} = 2$$

$$\therefore 3\alpha + 4\beta = 14 \quad \dots\dots ㉠$$

또, α , β 는 이차방정식 $x^2 + x = 4x + k$, 즉 $x^2 - 3x - k = 0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\alpha\beta = -k \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\alpha = -2, \beta = 5$$

따라서 ㉢에서

$$k = -\alpha\beta = -(-2) \times 5 = 10$$

답 10

9 직선 l의 x절편이 6, y절편이 3이므로 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore x + 2y - 6 = 0$$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 점 A(a, 6)과 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|a + 2 \times 6 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|a + 6|}{\sqrt{5}}$$

정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{81}{5}$ 이므로

$$\left(\frac{|a + 6|}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{81}{5}, \frac{(a + 6)^2}{5} = \frac{81}{5}$$

$$(a + 6)^2 = 81, a + 6 = \pm 9$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

답 ⑤

10 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 직선 $y = ax + 2$ 위의 한 점 (0, 2)와 직선 $y = ax - 2$, 즉 $ax - y - 2 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|a \times 0 - 2 - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{16}{17}$ 이므로

$$\left(\frac{4}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)^2 = \frac{16}{17}, \frac{16}{a^2 + 1} = \frac{16}{17}$$

$$a^2 + 1 = 17, a^2 = 16$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

답 ⑤

2 원의 방정식

교과서 예제

p.41

01 (1) $\{x - (-1)\}^2 + \{y - 2\}^2 = 4^2$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

(2) $x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$

$$\therefore x^2 + y^2 = 5$$

답 (1) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ (2) $x^2 + y^2 = 5$

02 (1) 중심이 점 $(3, -2)$ 인 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + \{y - (-2)\}^2 = r^2$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y+2)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$(2-3)^2 + 2^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$$

(2) $A(2, 4)$, $B(-2, -2)$ 라 하고, 원의 중심을 C 라 하면 점 C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) \quad \therefore C(0, 1)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\overline{AC} = \sqrt{(0-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{13})^2 \quad \therefore x^2 + (y-1)^2 = 13$$

답 (1) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$ (2) $x^2 + (y-1)^2 = 13$

03 (1) 중심이 점 $(2, -3)$ 이고 x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는 3이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + \{y - (-3)\}^2 = 3^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$$

(2) 중심이 점 $(-4, 1)$ 이고 y 축에 접하는 원의 반지름의 길이는 4이므로 구하는 원의 방정식은

$$\{x - (-4)\}^2 + (y-1)^2 = 4^2$$

$$\therefore (x+4)^2 + (y-1)^2 = 16$$

(3) 중심이 점 $(-5, -5)$ 이고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이는 5이므로 구하는 원의 방정식은

$$\{x - (-5)\}^2 + \{y - (-5)\}^2 = 5^2$$

$$\therefore (x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$$

답 (1) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$ (2) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 16$

(3) $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$

04 (1) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ 에서 $x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4$

$$\therefore (x+2)^2 + y^2 = 4$$

따라서 중심의 좌표는 $(-2, 0)$, 반지름의 길이는 2이다.

(2) $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 에서 $x^2 + y^2 - 8y + 16 - 9 = 16$

$$\therefore x^2 + (y-4)^2 = 25$$

따라서 중심의 좌표는 $(0, 4)$, 반지름의 길이는 5이다.

(3) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ 에서

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 6 = 1 + 9$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$$

따라서 중심의 좌표는 $(1, -3)$, 반지름의 길이는 4이다.

답 (1) 중심의 좌표: $(-2, 0)$, 반지름의 길이: 2

(2) 중심의 좌표: $(0, 4)$, 반지름의 길이: 5

(3) 중심의 좌표: $(1, -3)$, 반지름의 길이: 4

05 $x^2 + y^2 + 6x + 8y + k = 0$ 에서

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 + k = 9 + 16$$

$$\therefore (x+3)^2 + (y+4)^2 = 25 - k$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$25 - k > 0 \quad \therefore k < 25$$

답 $k < 25$

06 (1) $x - y + 2 = 0$ 에서 $y = x + 2$

이것을 $x^2 + y^2 = 25$ 에 대입하면

$$x^2 + (x+2)^2 = 25$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 25 \quad \therefore 2x^2 + 4x - 21 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 2 \times (-21) = 46 > 0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $2x - y + 1 = 0$ 에서 $y = 2x + 1$

이것을 $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + (2x+1)^2 + 2x - 8(2x+1) + 12 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 + 2x - 16x - 8 + 12 = 0$$

$$5x^2 - 10x + 5 = 0 \quad \therefore x^2 - 2x + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \times 1 = 0$$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다. (접한다.)

07 (1) 원 $x^2 + y^2 = 16$ 의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r = 4$

원의 중심은 원점이므로 원점과 직선 $x + 2y + 5 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

따라서 $\sqrt{5} < 4$, 즉 $d < r$ 이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$ 에서

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$\therefore (x+4)^2 + (y-3)^2 = 9$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r = 3$

원의 중심은 점 $(-4, 3)$ 이므로 점 $(-4, 3)$ 과 직선

$3x+y-1=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \times (-4) + 3 - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{10}$$

따라서 $\sqrt{10} > 3$, 즉 $d > r$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다.

08 $y=x+k$ 를 $x^2+y^2=8$ 에 대입하면

$$x^2 + (x+k)^2 = 8$$

$$x^2 + x^2 + 2kx + k^2 = 8 \quad \therefore 2x^2 + 2kx + k^2 - 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 8) = -k^2 + 16$$

(1) $D > 0$ 이어야 하므로 $-k^2 + 16 > 0$

$$k^2 - 16 < 0, (k+4)(k-4) < 0$$

$$\therefore -4 < k < 4$$

(2) $D = 0$ 이어야 하므로 $-k^2 + 16 = 0$

$$\therefore k = \pm 4$$

(3) $D < 0$ 이어야 하므로 $-k^2 + 16 < 0$

$$k^2 - 16 > 0, (k+4)(k-4) > 0$$

$$\therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 4$$

답 (1) $-4 < k < 4$ (2) $k = \pm 4$ (3) $k < -4$ 또는 $k > 4$

다른풀이 원 $x^2+y^2=8$ 의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r=2\sqrt{2}$

원의 중심은 원점이므로 원점과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

원과 직선이

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$, 즉 $\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ 에서

$$|k| < 4 \quad \therefore -4 < k < 4$$

(2) 한 점에서 만나려면 $d = r$, 즉 $\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ 에서

$$|k| = 4 \quad \therefore k = \pm 4$$

(3) 만나지 않으려면 $d > r$, 즉 $\frac{|k|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$ 에서

$$|k| > 4 \quad \therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 4$$

09 원 $x^2+y^2=2^2$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm 2\sqrt{(-1)^2 + 1} \quad \therefore y = -x \pm 2\sqrt{2}$$

답 $y = -x \pm 2\sqrt{2}$

10 **답** $3x+4y=25$

11 점점을 $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 점 P 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 13 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 접선이 점 $(-1, 5)$ 를 지나므로

$$-x_1 + 5y_1 = 13 \quad \therefore x_1 = 5y_1 - 13 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또, 점점 $P(x_1, y_1)$ 은 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 13 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$(5y_1 - 13)^2 + y_1^2 = 13, 26y_1^2 - 130y_1 + 156 = 0$$

$$y_1^2 - 5y_1 + 6 = 0, (y_1 - 2)(y_1 - 3) = 0$$

$$\therefore y_1 = 2 \text{ 또는 } y_1 = 3$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y_1 = 2 \text{ 일 때, } x_1 = 5 \times 2 - 13 = -3$$

$$y_1 = 3 \text{ 일 때, } x_1 = 5 \times 3 - 13 = 2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $\textcircled{1}$ 에서

$$-3x + 2y = 13 \text{ 또는 } 2x + 3y = 13$$

$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0 \text{ 또는 } 3x - 2y + 13 = 0$$

답 $2x + 3y - 13 = 0$ 또는 $3x - 2y + 13 = 0$

다른풀이 접선의 기울기를 m 이라 하면 이 직선이 점 $(-1, 5)$ 를 지나므로 접선의 방정식은

$$y - 5 = m(x + 1) \quad \therefore mx - y + m + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $x^2+y^2=13$ 의 중심이 원점이므로 원과 직선 $\textcircled{1}$ 이 접하려면

$$\frac{|m+5|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{13}, |m+5| = \sqrt{13}\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2 + 10m + 25 = 13(m^2 + 1), -12m^2 + 10m + 12 = 0$$

$$6m^2 - 5m - 6 = 0, (3m+2)(2m-3) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } m = \frac{3}{2}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$-\frac{2}{3}x - y + \frac{13}{3} = 0 \text{ 또는 } \frac{3}{2}x - y + \frac{13}{2} = 0$$

$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0 \text{ 또는 } 3x - 2y + 13 = 0$$

기출 Best | 1회

p.42~45

01 $\overline{AB}$ 를 2:5로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 6 + 5 \times (-1)}{2+5}, \frac{2 \times 9 + 5 \times 2}{2+5} \right) \quad \therefore (1, 4)$$

이 점을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = r^2$$

이 원이 점 $A(-1, 2)$ 를 지나므로

$$(-2)^2 + (-2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 8$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$$

답 ①

02 $x^2+y^2-8x+6y+12=0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 13$$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(4, -3)$ 이다.

중심이 점 $(4, -3)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(1, -2)$ 를 지나므로

$$(-3)^2 + 1^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 10$$

$$\therefore (x-4)^2 + (y+3)^2 = 10$$

또, 이 원이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$(a-4)^2 + 3^2 = 10, (a-4)^2 = 1$$

$$a-4 = \pm 1 \quad \therefore a=3 \text{ 또는 } a=5$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$3+5=8$$

답 ④

- 03 원의 중심의 좌표를 $(a, -a)$, 반지름의 길이를 r ($r>0$)라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y+a)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$(1-a)^2 + (0+a)^2 = r^2 \quad \therefore 2a^2 - 2a + 1 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 점 $(0, -7)$ 을 지나므로

$$(0-a)^2 + (-7+a)^2 = r^2 \quad \therefore 2a^2 - 14a + 49 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$12a - 48 = 0, 12a = 48 \quad \therefore a = 4$$

$a=4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$32 - 8 + 1 = r^2, r^2 = 25 \quad \therefore r = 5 \quad (\because r > 0)$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다.

답 ③

- 04 원의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{2+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \quad \therefore C(3, 1)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$$

답 ④

- 05 원의 중심을 P(a, b)라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$(-2-a)^2 + (3-b)^2 = (4-a)^2 + (5-b)^2$$

$$4 + 4a + a^2 + 9 - 6b + b^2 = 16 - 8a + a^2 + 25 - 10b + b^2$$

$$12a + 4b = 28 \quad \therefore 3a + b = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{PB} = \overline{PC} \text{에서 } \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$$

$$(4-a)^2 + (5-b)^2 = a^2 + (7-b)^2$$

$$16 - 8a + a^2 + 25 - 10b + b^2 = a^2 + 49 - 14b + b^2$$

$$-8a + 4b = 8 \quad \therefore 2a - b = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=4$

따라서 원의 반지름의 길이는

$$\overline{PA} = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$$

이므로 구하는 원의 넓이는 10π 이다.

답 ⑤

- 06 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + k = 0$ 에서

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 + k = 1 + 16$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-4)^2 = 17 - k$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$17 - k > 0 \quad \therefore k < 17$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 16이다.

답 ⑤

- 07 중심이 점 $(a+2, a)$ 이고 x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|a|$ 이다.

이때 원의 넓이가 9π 이므로

$$|a|^2 \pi = 9\pi, a^2 = 9 \quad \therefore a = \pm 3$$

$a=3$ 일 때, 중심이 점 $(5, 3)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$a=-3$ 일 때, 중심이 점 $(-1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

답 ①, ⑤

- 08 $x^2 + y^2 + 4x + ky + 16 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + \left(y + \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} - 12$$

이 원의 중심 $\left(-2, -\frac{k}{2}\right)$ 가 제2사분면 위에 있으므로

$$-\frac{k}{2} > 0 \quad \therefore k < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 원이 y 축에 접하므로

$$\frac{k^2}{4} - 12 = (-2)^2, k^2 = 64$$

$$\therefore k = \pm 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $k = -8$

답 ①

- 09 x 축, y 축에 동시에 접하는 원에 대하여 원의 반지름의 길이를 r ($r>0$)라 하면 원의 중심은 제4사분면에 있으므로 $(r, -r)$ 이고, 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(1, -2)$ 를 지나므로

$$(1-r)^2 + (-2+r)^2 = r^2$$

$$1 - 2r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2, r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r-1)(r-5) = 0 \quad \therefore r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 1, 5이므로 두 원의 넓이의 합은

$$\pi \times 1^2 + \pi \times 5^2 = 26\pi$$

답 ④

- 10 점 $O(0, 0)$ 과 원 $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 1$ 의 중심 $(-4, 3)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 선분 OP 의 길이의 최댓값은 $5+1=6$

답 ⑤

- 11 P(a, b)라 하면 점 P는 원 $x^2 + y^2 - 3x = 9$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 - 3a = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

G(x, y)라 하면 점 G는 삼각형 PAB의 무게중심이므로

$$x = \frac{a + (-4) + 1}{3} = \frac{a-3}{3}, y = \frac{b + (-2) + 8}{3} = \frac{b+6}{3}$$

$$\therefore a = 3x + 3, b = 3y - 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ①에 대입하여 정리하면

$$(3x+3)^2 + (3y-6)^2 - 3(3x+3) = 9$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 - (x+1) = 1$$

$$x^2 + 2x + 1 + (y-2)^2 - x - 1 = 1$$

$$x^2 + x + (y-2)^2 = 1$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + (y-2)^2 = 1 + \frac{1}{4} \quad \therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{4}$$

따라서 점 G가 나타내는 도형은 중심이 점 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}\pi$$

답 ③

- 12 원 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이고, 이 원의 중심 $(1, 3)$ 과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-3+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k-2|}{\sqrt{2}}$$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k-2|}{\sqrt{2}} < \sqrt{10}$$

$$|k-2| < 2\sqrt{5}, \quad -2\sqrt{5} < k-2 < 2\sqrt{5}$$

$$\therefore 2-2\sqrt{5} < k < 2+2\sqrt{5}$$

따라서 정수 k 는 $-2, -1, 0, \dots, 6$ 의 9개이다. 답 ⑤

참고 $\sqrt{16} < 2\sqrt{5} = \sqrt{20} < \sqrt{25}$, 즉 $4 < 2\sqrt{5} < 5$ 이므로

$$-3 < 2-2\sqrt{5} < -2, \quad 6 < 2+2\sqrt{5} < 7$$

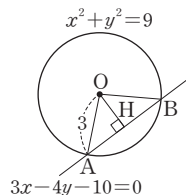
- 13 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $3x-4y-10=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$OH = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 2$$

직각삼각형 OAH에서

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore AB = 2AH = 2\sqrt{5}$$



답 ⑤

- 14 원의 넓이가 5π 이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이다.

원의 중심 $(3, -2)$ 와 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6+2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k+8|}{\sqrt{5}}$$

원과 직선이 접하므로

$$\frac{|k+8|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \quad |k+8| = 5$$

$$k+8 = \pm 5 \quad \therefore k = -13 \text{ 또는 } k = -3$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-13 + (-3) = -16$$

답 ②

- 15 원의 중심의 좌표를 $(a, -4a)$ 라 하면 원의 중심과 두 직선

$2x+y+3=0$, $2x+y-7=0$ 사이의 거리는 모두 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2a-4a+3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|2a-4a-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|-2a+3| = |-2a-7|$$

이때 $-2a+3 = -2a-7$ 을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않으므로

$$-2a+3 = -(-2a-7), \quad 4a = -4 \quad \therefore a = -1$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-1, 4)$ 이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{|-2+4+3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5}$$

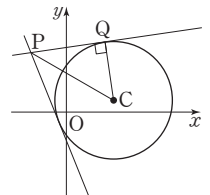
답 ②

- 16 원의 중심을 C라 하면 $C(4, 1)$ 이므로

$$PC = \sqrt{\{4-(-3)\}^2 + \{1-5\}^2} = \sqrt{65}$$

직각삼각형 PCQ에서

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{CP^2 - CQ^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{65})^2 - 5^2} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$



답 ③

- 17 두 점 $A(5, 1)$, $B(-1, -3)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) \quad \therefore C(2, -1)$$

원의 반지름의 길이는

$$AC = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13}$$

원의 중심 $C(2, -1)$ 과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-(-1)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{2}}$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k+3|}{\sqrt{2}} > \sqrt{13}, \quad |k+3| > \sqrt{26}$$

$$k+3 > \sqrt{26} \text{ 또는 } k+3 < -\sqrt{26}$$

$$\therefore k > -3 + \sqrt{26} \text{ 또는 } k < -3 - \sqrt{26}$$

이때 k 는 자연수이므로

$$k > -3 + \sqrt{26} \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{25} < \sqrt{26} < \sqrt{36}, \text{ 즉 } 5 < \sqrt{26} < 6 \text{ 이므로} \\ 2 < -3 + \sqrt{26} < 3 \end{array} \right]$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 3이다. 답 ③

- 18 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 에서 $x^2 + y^2 - 2y + 1 - 3 = 1$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 = 4$$

이 원의 중심 $(0, 1)$ 과 직선 $4x-3y-12=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-3-12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 3$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$$M = 3+2=5, \quad m = 3-2=1$$

$$\therefore Mm = 5 \times 1 = 5$$

답 ④

- 19 직선 $2x+y-3=0$, 즉 $y=-2x+3$ 의 기울기는 -2 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x \pm 2 \times \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} \quad \therefore y=\frac{1}{2}x \pm \sqrt{5}$$

따라서 $m=\frac{1}{2}$, $n=\sqrt{5}$ ($\because n>0$)이므로

$$\frac{n^2}{m^2}=\frac{5}{\frac{1}{4}}=20$$

답 ⑤

- 20 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1, -3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x-3y=10 \quad \therefore x-3y-10=0$$

$$x^2+y^2-4x-2ky+k^2-36=0 \text{에서 } (x-2)^2+(y-k)^2=40$$

직선 $x-3y-10=0$ 이 이 원과 접하므로 원의 중심 $(2, k)$ 와 직선 $x-3y-10=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이

$$\sqrt{40}=2\sqrt{10} \text{과 같다. 즉,}$$

$$\frac{|2-3k-10|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=2\sqrt{10}$$

$$|-3k-8|=20$$

$$-3k-8=-20 \text{ 또는 } -3k-8=20$$

$$-3k=-12 \text{ 또는 } -3k=28 \quad \therefore k=4 \text{ 또는 } k=-\frac{28}{3}$$

$$\therefore k=4 \quad (\because k>0)$$

답 ④

- 21 점점을 $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 원 위의 점

P 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이 직선이 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$$3x_1-y_1=5$$

$$\therefore y_1=3x_1-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

한편 점 $P(x_1, y_1)$ 은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

②을 ③에 대입하면

$$x_1^2+(3x_1-5)^2=5$$

$$10x_1^2-30x_1+25=5, 10x_1^2-30x_1+20=0$$

$$x_1^2-3x_1+2=0, (x_1-1)(x_1-2)=0$$

$$\therefore x_1=1 \text{ 또는 } x_1=2$$

이것을 ②에 대입하면

$$x_1=1 \text{ 일 때, } y_1=3 \times 1-5=-2$$

$$x_1=2 \text{ 일 때, } y_1=3 \times 2-5=1$$

따라서 점점은 $P(1, -2)$ 또는 $P(2, 1)$ 이고, 접선의 방정식은

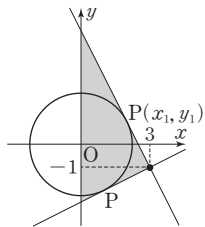
②에서

$$x-2y=5 \text{ 또는 } 2x+y=5$$

두 직선의 y 절편은 각각 $-\frac{5}{2}$, 5 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ 5 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right\} \times 3 = \frac{45}{4}$$

답 ②



- 01 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(1, -3)$, 원 $(x+2)^2+(y-5)^2=16$ 의 반지름의 길이는 4 이므로 중심이 점 $(1, -3)$ 이고 반지름의 길이가 4 인 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+3)^2=16$$

이 원이 점 $(5, k)$ 를 지나므로

$$4^2+(k+3)^2=16, (k+3)^2=0$$

$$\therefore k=-3$$

답 ①

- 02 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=8$

이 원의 중심의 좌표는 $(-1, 2)$ 이다.

중심이 점 $(-1, 2)$ 인 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-2)^2=r^2$$

이 원이 원점을 지나므로

$$1^2+(-2)^2=r^2 \quad \therefore r^2=5$$

따라서 조건을 만족시키는 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-2)^2=5$$

- ⑤ $x=2, y=4$ 를 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 에 대입하면

$$3^2+2^2 \neq 5$$

이므로 점 $(2, 4)$ 는 원 위의 점이 아니다.

답 ⑤

- 03 원의 중심이 x 축 위에 있으므로 $b=0$

원 $(x+a)^2+y^2=c$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$a^2+1=c \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 원이 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로

$$(-2+a)^2+3^2=c$$

$$\therefore a^2-4a+13=c \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=3, c=10$$

$$\therefore a+b+c=3+0+10=13$$

답 ④

- 04 원의 중심을 C 라 하면 점 C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \quad \therefore C(-1, 3)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\overline{AC}=\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$$

따라서 두 점 A, B 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-3)^2=5$$

위의 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$1^2+(y-3)^2=5, (y-3)^2=4$$

$$y-3=\pm 2 \quad \therefore y=1 \text{ 또는 } y=5$$

따라서 원이 y 축과 만나는 두 점의 좌표는 $(0, 1), (0, 5)$ 이므로

이 두 점 사이의 거리는

$$|5-1|=4$$

답 ①

- 05 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 P(a, b)라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$\{a - (-2)\}^2 + \{b - (-4)\}^2 = (a - 6)^2 + (b - 0)^2$$

$$a^2 + 4a + 4 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 12a + 36 + b^2$$

$$16a + 8b = 16 \quad \therefore 2a + b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\overline{PB} = \overline{PC} \text{에서 } \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$$

$$(a - 6)^2 + (b - 0)^2 = (a - 5)^2 + (b - 3)^2$$

$$a^2 - 12a + 36 + b^2 = a^2 - 10a + 25 + b^2 - 6b + 9$$

$$-2a + 6b = -2 \quad \therefore a - 3b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 0$

즉, 삼각형 ABC의 외접원의 중심은 P(1, 0)이고, 반지름의 길이는

$$\overline{PB} = 6 - 1 = 5$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 5 = 10\pi$$

답 ①

- 06 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k^2 - 2k - 3 = 0$ 에서

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = -k^2 + 2k + 8$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-k^2 + 2k + 8 > 0$$

$$k^2 - 2k - 8 < 0, (k + 2)(k - 4) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 4$$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

답 ⑤

- 07 중심이 점 (3, a)이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$$(x - 3)^2 + (y - a)^2 = a^2$$

이 원이 점 (-1, 2)를 지나므로

$$(-4)^2 + (2 - a)^2 = a^2$$

$$16 + 4 - 4a + a^2 = a^2, -4a = -20$$

$$\therefore a = 5$$

답 ⑤

- 08 원의 중심의 좌표를 (a, a+1)이라 하면 y축에 접하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + \{y - (a + 1)\}^2 = a^2$$

$$\therefore (x - a)^2 + (y - a - 1)^2 = a^2$$

이 원이 점 (2, 1)을 지나므로

$$(2 - a)^2 + (-a)^2 = a^2$$

$$(a - 2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

답 ①

- 09 점 (-2, -3)을 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제3사분면에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r (r > 0)라 하면 원의 방정식은

$$(x + r)^2 + (y + r)^2 = r^2$$

이 원이 점 (-2, -3)을 지나므로

$$(-2 + r)^2 + (-3 + r)^2 = r^2$$

$$4 - 4r + r^2 + 9 - 6r + r^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 - 10r + 13 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (-5)^2 - 1 \times 13 = 12 > 0$$

이므로 ⑦의 근 r는 서로 다른 두 실수이다. 또, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ⑦의 두 근의 합은 10, 두 근의 곱은 13 이므로 r는 서로 다른 두 양수이다.

따라서 점 (-2, 3)을 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 원은 2 개이고, 두 원의 반지름의 길이 r의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 10이다.

답 ①

다른풀이 ⑦의 r를 직접 구하면

$$r = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 1 \times 13}}{1} = 5 \pm 2\sqrt{3}$$

$5 - 2\sqrt{3} > 0, 5 + 2\sqrt{3} > 0$ 이므로 두 원의 반지름의 길이의 합은 10이다.

- 10 점 O(0, 0)과 원 $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 4$ 의 중심 (-2, 5) 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$$M = \sqrt{29} + 2, m = \sqrt{29} - 2$$

$$\therefore Mm = (\sqrt{29} + 2)(\sqrt{29} - 2) = 29 - 4 = 25$$

답 ③

- 11 P(x, y)라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 이므로

$$2\overline{AP} = \overline{BP}, 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

$$4\{(x - 2)^2 + (y - 4)^2\} = \{x - (-4)\}^2 + \{y - (-5)\}^2$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 14y + 13 = 0$$

$$\therefore (x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 52$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 (4, 7)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{13}$ 인 원이므로 그 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{13} = 4\sqrt{13}\pi$$

답 ③

- 12 원 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이고, 이 원의 중심 (2, -1)과 직선 $x - 3y + 2k - 3 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 - 3 \times (-1) + 2k - 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|2k + 2|}{\sqrt{10}}$$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|2k + 2|}{\sqrt{10}} < \sqrt{10}, |2k + 2| < 10$$

$$|k + 1| < 5, -5 < k + 1 < 5$$

$$\therefore -6 < k < 4$$

따라서 $\alpha = -6, \beta = 4$ 이므로

$$\alpha + \beta = -6 + 4 = -2$$

답 ①

- 13 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ 에서 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 $C(1, 2)$ 에서 직선 $2x + y - 1 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

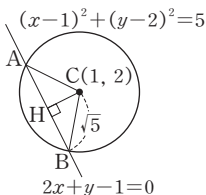
$$CH = \frac{|2 \times 1 + 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 CHB 에서

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore AB = 2BH = 2 \times \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

답 ②



- 14 원 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 17$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{17}$ 이고, 이 원의 중심 $(3, -4)$ 와 직선 $4x + y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{|k + 8|}{\sqrt{17}}$$

원과 직선이 접하므로

$$\frac{|k + 8|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}, |k + 8| = 17$$

$$k + 8 = -17 \text{ 또는 } k + 8 = 17$$

$$k = -25 \text{ 또는 } k = 9$$

$$\therefore k = 9 (\because k > 0)$$

따라서 직선 l 의 방정식은 $4x + y + 9 = 0$ 이므로 x 절편은 $-\frac{9}{4}$ 이다.

답 ①

- 15 원의 중심이 제2사분면 위에 있고 x 축, y 축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심은 점 $(-r, r)$ 이다.

원의 중심 $(-r, r)$ 와 직선 $4x - 3y + 12 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4r - 3r + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-7r + 12|}{5}$$

원과 직선이 접하므로

$$\frac{|-7r + 12|}{5} = r$$

$$|-7r + 12| = 5r$$

$$-7r + 12 = 5r \text{ 또는 } -7r + 12 = -5r$$

$$-12r = -12 \text{ 또는 } -2r = -12$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } r = 6$$

따라서 두 원의 넓이의 합은

$$\pi \times 1^2 + \pi \times 6^2 = 37\pi$$

답 ②

- 16 원 $x^2 + y^2 = 20$ 의 반지름의 길이는

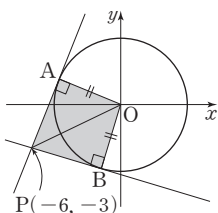
$$2\sqrt{5} \text{이므로}$$

$$OA = 2\sqrt{5}$$

원의 중심이 $O(0, 0)$ 이므로

$$OP = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5}$$

직각삼각형 POA 에서



$$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{5})^2} = 5$$

이때 $\triangle OPA \equiv \triangle OPB$ (RHS 합동)이므로

$$\square APBO = 2\triangle OPA$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times OA \times AP \right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 5 \right) = 10\sqrt{5}$$

답 ⑤

- 17 원의 반지름의 길이는 3이고, 원의 중심 $(2, 1)$ 과 직선

$y = -2x + k$, 즉 $2x + y - k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 2 + 1 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|5 - k|}{\sqrt{5}}$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|5 - k|}{\sqrt{5}} > 3, |5 - k| > 3\sqrt{5}$$

$$5 - k > 3\sqrt{5} \text{ 또는 } 5 - k < -3\sqrt{5}$$

$$k < 5 - 3\sqrt{5} \text{ 또는 } k > 5 + 3\sqrt{5}$$

이때 k 는 자연수이므로

$$k > 5 + 3\sqrt{5} = 5 + \sqrt{45} = 5 + 6.7 \times \dots = 11.7 \times \dots$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 12이다.

답 ②

$$\text{참고 } 6 = \sqrt{36} < 3\sqrt{5} = \sqrt{45} < \sqrt{49} = 7 \text{이므로 } 11 < 5 + 3\sqrt{5} < 12$$

- 18 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ 에서 $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 1 + 1$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

이 원의 중심 $(1, -1)$ 과 직선 $y = x + 2$, 즉 $x - y + 2 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1 - (-1) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 원 위의 점 P 와 직선

$x - y + 2 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d \text{의 최솟값은 } 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$d \text{의 최댓값은 } 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{2} \leq d \leq 3\sqrt{2}$$

따라서 자연수 d 는 2, 3, 4의 3개이고, 각각의 거리에 해당하는 점 P 가 2개씩 있으므로 구하는 점 P 의 개수는

$$3 \times 2 = 6$$

답 ④

- 19 직선 $3x - 2y - 20 = 0$, 즉 $y = \frac{3}{2}x - 10$ 에 평행한 직선의 기울기

$$\text{는 } \frac{3}{2}$$

원 $x^2 + y^2 = 13$ 에 접하고 기울기가 $\frac{3}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{2}x \pm \sqrt{13} \times \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1} \quad \therefore y = \frac{3}{2}x \pm \frac{13}{2}$$

두 직선의 y 절편은 각각 $\frac{13}{2}, -\frac{13}{2}$ 이므로

$$PQ = \frac{13}{2} - \left(-\frac{13}{2}\right) = 13$$

답 ⑤

20 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2 \times x + (-1) \times y = 5 \quad \therefore y = 2x - 5$$

이 직선의 x 절편은 $\frac{5}{2}$, y 절편은 -5 이므로

$$A\left(\frac{5}{2}, 0\right), B(0, -5)$$

$$\therefore \triangle AOB = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$$

답 ①

21 점 $(2, 2)$ 에서 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=7$ 에 그은 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-2=m(x-2) \quad \therefore mx-y-2m+2=0$$

원의 중심 $(2, -1)$ 과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{7}$ 과 같아야 하므로

$$\frac{|2m - (-1) - 2m + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{7}$$

$$\frac{3}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{7}, \quad 3 = \sqrt{7} \times \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $9 = 7(m^2+1)$

$$\frac{9}{7} = m^2 + 1, \quad m^2 = \frac{2}{7} \quad \therefore m = \pm \frac{\sqrt{14}}{7}$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$\frac{\sqrt{14}}{7} \times \left(-\frac{\sqrt{14}}{7}\right) = -\frac{2}{7}$$

답 ②

변형유형 집중공략

p.50~51

1-1 두 원 $(x+3)^2+(y+1)^2=1$,

$x^2+(y-3)^2=9$ 의 중심을 각각 C, D라 하면

$$C(-3, -1), D(0, 3)$$

$$\therefore \overline{CD} = \sqrt{\{0 - (-3)\}^2 + \{3 - (-1)\}^2} = 5$$

점 C에서 $\overline{BD}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BH} = \overline{AC} = 1, \quad \overline{DH} = \overline{BD} - \overline{BH} = 3 - 1 = 2$$

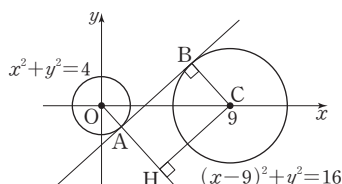
따라서 직각삼각형 CHD에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{DH}^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{CH} = \sqrt{21}$$

답 ②

1-2



원 $x^2+y^2=4$ 의 중심은 $O(0, 0)$, 원 $(x-9)^2+y^2=16$ 의 중심을 C라 하면 $C(9, 0)$ 이므로

$$\overline{OC} = 9$$

점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \overline{BC} = 4, \quad \overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH} = 2 + 4 = 6$$

따라서 직각삼각형 COH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{CH} = 3\sqrt{5}$$

답 ①

2-1 두 점 $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$$

$$\therefore 4x - 3y + 12 = 0$$

오른쪽 그림과 같이 변 AB를 삼각

형 APB의 밑변으로 생각하면

$$\overline{AB} = \sqrt{\{0 - (-3)\}^2 + \{4 - 0\}^2} = 5$$

밑변의 길이가 5로 일정하므로 삼각형 APB의 넓이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때 최소가 된다.

원 $x^2+y^2=4$ 의 중심 $O(0, 0)$ 과 직선 $4x-3y+12=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{12}{5}$$

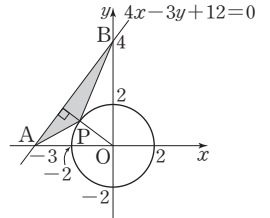
원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은

$$\frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}$$

따라서 삼각형 APB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{2}{5} = 1$$

답 ②



2-2 두 점 $A(8, 0)$, $B(0, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$$

$$\therefore 3x + 4y - 24 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

오른쪽 그림과 같이 변 AB를 삼각

각형 ABP의 밑변으로 생각하면

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-8)^2 + (6-0)^2} = 10$$

또, 원 $x^2+y^2+4x=0$, 즉 $(x+2)^2+y^2=4$ 의 중심 $(-2, 0)$ 과 직선 ① 사이의 거리는

$$\frac{|-6+0-24|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 삼각형 ABP의 높이를 h 라 하면

h 의 최댓값은 $6+2=8$, 최솟값은 $6-2=4$

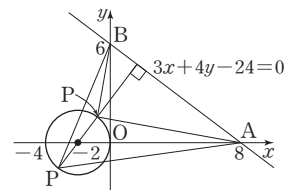
$$\therefore 4 \leq h \leq 8 \quad \cdots \textcircled{2}$$

이때 삼각형 ABP의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times 10 \times h = 5h$$

이므로 ②에서

$$20 \leq 5h \leq 40 \quad \therefore 20 \leq S \leq 40$$



$S=20$ 또는 $S=40$ 일 때 점 P의 개수는 각각 1이고,
 $21 \leq S \leq 39$ 일 때 자연수 S의 값에 대하여 점 P는 2개씩이므로
 점 P의 개수는
 $2 \times 1 + 19 \times 2 = 40$

답 ⑤

서술형 What & How

p.52~55

- 1 $x^2 + y^2 + 2kx + 2y + 2k^2 - 4k + 4 = 0$ 에서
 $x^2 + 2kx + k^2 + y^2 + 2y + 1 + 2k^2 - 4k + 4 = k^2 + 1$
 $\therefore (x+k)^2 + (y+1)^2 = -k^2 + 4k - 3$ ①
 이 방정식이 원을 나타내려면
 $-k^2 + 4k - 3 > 0, k^2 - 4k + 3 < 0$
 $(k-1)(k-3) < 0 \quad \therefore 1 < k < 3$ ②
 원의 넓이가 최대가 되려면 원의 반지름의 길이가 최대이어야 하
 므로 $y = -k^2 + 4k - 3$ 이라 하면
 $y = -(k-2)^2 + 1$
 $1 < k < 3$ 일 때, 이 함수는 $k=2$ 에서 최대이므로 반지름의 길이
 도 최대이다.
 이때 반지름의 길이는
 $\sqrt{1} = 1$ ③

답 1

- 2 $x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + 8a^2 - 6a - 9 = 0$ 에서
 $x^2 - 4ax + 4a^2 + y^2 + 2ay + a^2 + 8a^2 - 6a - 9 = 4a^2 + a^2$
 $\therefore (x-2a)^2 + (y+a)^2 = -3a^2 + 6a + 9$ ①
 이 방정식이 원을 나타내려면
 $-3a^2 + 6a + 9 > 0, a^2 - 2a - 3 < 0$
 $(a+1)(a-3) < 0 \quad \therefore -1 < a < 3$ ②
 원의 넓이가 최대가 되려면 원의 반지름의 길이가 최대이어야 하
 므로 $y = -3a^2 + 6a + 9$ 라 하면
 $y = -3(a-1)^2 + 12$
 $-1 < a < 3$ 일 때, 이 함수는 $a=1$ 에서 최대이므로 반지름의 길
 이도 최대이다.
 이때 반지름의 길이는
 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \therefore r = 2\sqrt{3}$
 또, 원의 중심의 좌표는 $(2a, -a)$, 즉 $(2, -1)$ 이므로
 $m=2, n=-1$ ③
 $\therefore r^2 + m + n = (2\sqrt{3})^2 + 2 + (-1)$
 $= 13$ ④

답 13

채점기준	배점
① 원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 꼴로 정리하기	2
② 원을 나타내기 위한 a의 값의 범위 구하기	2
③ 원의 넓이가 최대가 되도록 하는 r, m, n의 값 구하기	2
④ $r^2 + m + n$ 의 값 구하기	1

- 3 원의 중심이 직선 $y = -2x + 9$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표
 를 $(a, -2a+9)$ 라 하고, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정
 식은
 $(x-a)^2 + \{y - (-2a+9)\}^2 = r^2$
 이 원이 x 축, y 축에 동시에 접하므로
 $r = |a| = |-2a+9|$ ①
 $a = -2a+9$ 또는 $a = -(-2a+9)$
 $3a = 9$ 또는 $a = 2a-9$
 $\therefore a = 3$ 또는 $a = 9$ ②
 따라서 두 원의 반지름의 길이는 $r=3$ 또는 $r=9$ 이므로
 두 원의 반지름의 길이의 합은
 $3+9=12$ ③

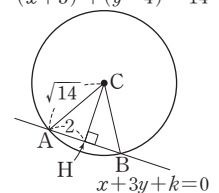
답 12

- 4 원의 중심이 직선 $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$ 위에 있으므로 중심의 좌표를
 $(a, \frac{4}{3}a + \frac{7}{3})$ 이라 하면 이 원이 x 축, y 축에 동시에 접하므로
 $|a| = |\frac{4}{3}a + \frac{7}{3}|$ ①
 $a = \frac{4}{3}a + \frac{7}{3}$ 또는 $a = -(\frac{4}{3}a + \frac{7}{3})$
 $3a = 4a + 7$ 또는 $3a = -4a - 7$
 $-a = 7$ 또는 $7a = -7$
 $\therefore a = -7$ 또는 $a = -1$ ②
 따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(-7, -7)$ 또는 $(-1, 1)$
 이므로 두 점 사이의 거리는
 $\sqrt{\{-1 - (-7)\}^2 + \{1 - (-7)\}^2} = 10$ ③

답 10

채점기준	배점
① 원의 중심의 좌표를 $(a, \frac{4}{3}a + \frac{7}{3})$ 로 놓고 식 세우기	2
② a의 값 구하기	2
③ 두 원의 중심의 좌표를 구하고 두 원의 중심 사이의 거리 구하기	2

- 5 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 27 = 0$ 에서
 $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 + 27 = 25 + 16$
 $\therefore (x+5)^2 + (y-4)^2 = 14$ ①
 이 원과 직선 $x + 3y + k = 0$ 이 만나서 생
 $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 14$
 기는 현의 길이가 4이므로 원과 직선의
 두 교점을 A, B라 하면
 $\overline{AB} = 4$
 원의 중심을 C라 할 때, 원의 중심
 $C(-5, 4)$ 에서 직선
 $x + 3y + k = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면



- $\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$
 따라서 직각삼각형 CAH에서
 $\overline{CH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{(\sqrt{14})^2 - 2^2} = \sqrt{10}$ ②

즉, 점 C(-5, 4)와 직선 $x+3y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|-5+3 \times 4+k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10} \quad \dots\dots ③$$

$$|k+7|=10$$

$$k+7=-10 \text{ 또는 } k+7=10$$

$$k=-17 \text{ 또는 } k=3$$

$$\therefore k=3 (\because k>0) \quad \dots\dots ④$$

답 3

6 $x^2+y^2+6x-4y+10=0$ 에서

$$x^2+6x+9+y^2-4y+4+10=9+4$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2=3 \quad \dots\dots ①$$

이 원의 중심을 C라 할 때, 원의 중심 C(-3, 2)에서 직선 $y=x+k$,

즉 $x-y+k=0$ 에 내린 수선의 발을

H라 하면

$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2} \times 2=1 \text{ 이므로}$$

따라서 직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2} \quad \dots\dots ②$$

즉, 원의 중심 C(-3, 2)와 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|-3-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$$|k-5|=2 \quad \dots\dots ③$$

$$k-5=-2 \text{ 또는 } k-5=2$$

$$\therefore k=3 \text{ 또는 } k=7$$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$$3 \times 7=21 \quad \dots\dots ④$$

답 21

채점기준	배점
① 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 정리하기	1
② 원의 중심을 C, 점 C에서 직선 $y=x+k$ 에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{CH}$ 의 길이 구하기	2
③ 원의 중심과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\overline{CH}$ 의 길이와 같음을 이용하여 등식 세우기	2
④ 모든 실수 k의 값과 k의 값의 곱 구하기	2

7 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=4 \quad \dots\dots ①$$

이 직선이 점 A(-4, 0)을 지나므로

$$-4x_1=4$$

$$\therefore x_1=-1 \quad \dots\dots ②$$

또, 점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=4 \quad \dots\dots ③$$

②을 ③에 대입하면

$$(-1)^2+y_1^2=4, y_1^2=3$$

$$\therefore y_1=\pm\sqrt{3}$$

따라서 점점의 좌표는

$$(-1, -\sqrt{3}) \text{ 또는 } (-1, \sqrt{3}) \quad \dots\dots ②$$

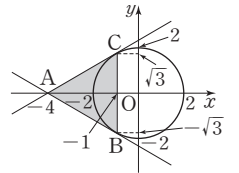
이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\} \times \{-1-(-4)\}$$

$$=3\sqrt{3}$$

$$\therefore k=3 \quad \dots\dots ③$$

답 3



8 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=20 \quad \dots\dots ①$$

이 직선이 점 A(0, 10)을 지나므로

$$10y_1=20 \quad \therefore y_1=2 \quad \dots\dots ②$$

또, 점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=20 \quad \dots\dots ③$$

②을 ③에 대입하면 $x_1^2+2^2=20$

$$x_1^2=16 \quad \therefore x_1=-4 \text{ 또는 } x_1=4$$

따라서 점점의 좌표는

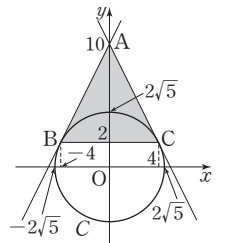
$$(-4, 2) \text{ 또는 } (4, 2) \quad \dots\dots ②$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{4-(-4)\} \times \{10-2\}=32$$

$$\dots\dots ③$$

답 32



채점기준	배점
① 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 로 놓고 접선의 방정식 세우기	1
② 두 점점의 좌표 구하기	3
③ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	2

실전 문제 | 1회

p.56~60

01 $x^2+y^2-8x+4y+k=0$ 에서

$$x^2-8x+16+y^2+4y+4+k=16+4$$

$$\therefore (x-4)^2+(y+2)^2=20-k$$

이 원의 중심의 좌표는 (4, -2)이므로 $a=4, b=-2$

원의 반지름의 길이가 5이므로

$$20-k=5^2 \quad \therefore k=-5$$

$$\therefore a+b+k=4+(-2)+(-5)=-3$$

답 ①

02 $2x^2=x^2+2x+3$ 에서 $x^2-2x-3=0$

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 두 함수 $y=2x^2, y=x^2+2x+3$ 의 그래프의 두 교점의 좌표는

$$(-1, 2), (3, 18)$$

A(-1, 2), B(3, 18)이라 하고, 이 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+18}{2}\right) \quad \therefore C(1, 10)$$

원의 반지름의 길이는

$$\overline{AC} = \sqrt{\{1 - (-1)\}^2 + \{10 - 2\}^2} = 2\sqrt{17}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-10)^2 = 68$$

$$\therefore a=1, b=10, c=68$$

$$\therefore a+b+c=1+10+68=79$$

답 ⑤

03 외접원의 중심을 P(a, b)라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$(-1-a)^2 + (1-b)^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2$$

$$4a=0 \quad \therefore a=0$$

$$\therefore P(0, b)$$

$$\overline{PB} = \overline{PC} \text{에서 } \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$$

$$1^2 + (1-b)^2 = 3^2 + (5-b)^2$$

$$1+1-2b+b^2=9+25-10b+b^2$$

$$8b=32 \quad \therefore b=4$$

따라서 외접원의 중심은 점 P(0, 4)이고, 직선 $y=2x+k$ 가 외접원의 둘레를 이등분하려면 원의 중심 P를 지나야 하므로

$$4=2 \times 0 + k \quad \therefore k=4$$

답 ③

04 $x^2 + y^2 - 2kx - (2k+4)y = 0$ 에서

$$x^2 - 2kx + k^2 + y^2 - 2(k+2)y + (k+2)^2 = k^2 + (k+2)^2$$

$$\therefore (x-k)^2 + \{y-(k+2)\}^2 = 2k^2 + 4k + 4$$

ㄱ. 원의 넓이가 최소하려면 반지름의 길이가 최소이어야 한다.

이때 $2k^2 + 4k + 4 = 2(k+1)^2 + 2$ 이므로 반지름의 길이는

$k=-1$ 일 때 최소이고, 반지름의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이므로

원의 넓이의 최솟값은

$$\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 원의 중심의 좌표가 (k, k+2)이므로 원의 중심은 직선

$$y=x+2 \text{ 위에 있다. (참)}$$

ㄷ. 원이 x축과 접하려면

$$2k^2 + 4k + 4 = |k+2|^2$$

$$2k^2 + 4k + 4 = k^2 + 4k + 4$$

$$k^2=0 \quad \therefore k=0$$

즉, 실수 k는 0의 1개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

05 $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 2k + 30 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 11 - 2k$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$11 - 2k > 0, -2k > -11$$

$$\therefore k < \frac{11}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 원의 중심의 좌표는 (4, 5)이므로 이 원이 제1사분면 위에 있으려면 반지름의 길이는 4보다 작아야 한다. 즉,

$$11 - 2k < 4^2, -2k < 5$$

$$\therefore k > -\frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분을 구하면 } -\frac{5}{2} < k < \frac{11}{2}$$

$$\text{따라서 } \alpha = -\frac{5}{2}, \beta = \frac{11}{2} \text{이므로}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{2} + \frac{11}{2} = 3$$

답 ③

06 y축에 접하는 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$$

이 원이 점 (2, 3)을 지나므로

$$(2-a)^2 + (3-b)^2 = a^2$$

$$\therefore b^2 - 6b - 4a + 13 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 (8, 3)을 지나므로

$$(8-a)^2 + (3-b)^2 = a^2$$

$$\therefore b^2 - 6b - 16a + 73 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } 12a - 60 = 0$$

$$12a = 60 \quad \therefore a = 5$$

a=5를 ①에 대입하면

$$b^2 - 6b - 7 = 0, (b+1)(b-7) = 0$$

$$\therefore b = -1 \text{ 또는 } b = 7$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 (5, -1), (5, 7)이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$|7 - (-1)| = 8$$

답 ④

07 원 $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$, 즉 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$ 의 중심을 C라 하면 C(-3, -2)

또, 네 직선 $x=-3, x=5, y=6, y=2$ 로 둘러싸인 직사각형의 대각선의 교점을 P라 하면

$$P\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{6+2}{2}\right) \quad \therefore P(1, 4)$$

원과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 점 C, P를 모두 지나야 하므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-4 = \frac{4-(-2)}{1-(-3)}(x-1) \quad \therefore y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

답 ④

08 P(a, b)라 하면 점 P는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 PA를 2:1로 내분하는 점을 Q(x, y)라 하면

$$Q\left(\frac{2 \times 6 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times b}{2+1}\right)$$

$$\text{이므로 } x = \frac{12+a}{3}, y = \frac{b}{3}$$

$$\therefore a = 3x - 12, b = 3y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(3x-12)^2 + (3y)^2 = 4$$

$$9(x-4)^2+9y^2=4 \quad \therefore (x-4)^2+y^2=\frac{4}{9}$$

따라서 선분 PA를 2:1로 내분하는 점이 나타내는 도형은 중심이 점 (4, 0)이고 반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$ 인 원이므로 그 넓이는 $\frac{4}{9}\pi$ 이다. 답 ②

09 $x^2+y^2-2x-6y+k=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y-3)^2=10-k$$

이 원의 중심을 C라 하면 C(1, 3)

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 10=5$$

$$\overline{CH}=3$$

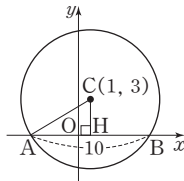
직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CA}^2=\overline{AH}^2+\overline{CH}^2=5^2+3^2=34$$

즉, 원의 반지름의 길이의 제곱이 34이므로

$$10-k=34 \quad \therefore k=-24$$

답 ①



10 직선 $y=ax+b$ 가 이차함수 $y=2x^2$ 의 그래프와 접하므로 이차방정식 $ax+b=2x^2$, 즉 $2x^2-ax-b=0$ 의 판별식을 D라 하면

$$D=(-a)^2-4\times 2\times (-b)=0$$

$$\therefore a^2=-8b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $y=ax+b$ 가 원 $x^2+(y+1)^2=1$ 에 접하므로

원의 중심 (0, -1)과 직선 $y=ax+b$, 즉 $ax-y+b=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 한다. 즉,

$$\frac{|-(-1)+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1, \quad |1+b|=\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$b^2+2b+1=a^2+1$$

$$\therefore a^2-b^2-2b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$-8b-b^2-2b=0, \quad b^2+10b=0$$

$$b(b+10)=0$$

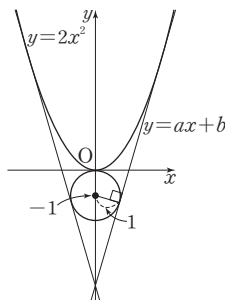
$$\therefore b=0 \text{ 또는 } b=-10$$

이때 $ab \neq 0$ 이므로 $b=-10$

$$b=-10 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a^2=80$$

$$\therefore a^2-b=80-(-10)=90$$

답 ⑤



11 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 방정식은

$$x+2y=5$$

$$x^2+kx+y^2-2y+1=0 \text{에서}$$

$$x^2+kx+\frac{k^2}{4}+y^2-2y+1=\frac{k^2}{4}$$

$$\therefore \left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{k^2}{4}$$

이 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{k}{2}, 1\right)$

직선 $x+2y=5$ 가 점 $\left(-\frac{k}{2}, 1\right)$ 을 지나므로

$$-\frac{k}{2}+2\times 1=5$$

$$-\frac{k}{2}=3 \quad \therefore k=-6$$

답 ④

12 중심이 점 C(1, 2)인 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$$

이 원이 점 P(4, 6)을 지나므로

$$3^2+4^2=r^2 \quad \therefore r^2=25$$

따라서 조건을 만족시키는 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-2)^2=25$$

이 원 위의 점 P(4, 6)에서의 접선 l은 직선 CP에 수직이고,

직선 CP의 기울기는 $\frac{6-2}{4-1}=\frac{4}{3}$ 이므로 접선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$

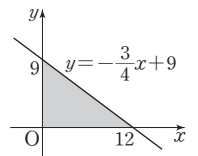
또, 접선 l은 점 P(4, 6)을 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y-6=-\frac{3}{4}(x-4) \quad \therefore y=-\frac{3}{4}x+9$$

직선 l의 x절편은 12, y절편은 9이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 12\times 9=54$$

답 ①



13 원 $x^2+y^2-4x+ay+b=0$ 이 점

O(0, 0)을 지나므로 $b=0$

또, 점 A(8, 4)를 지나므로

$$64+16-32+4a+b=0$$

$$4a=-48 \quad \therefore a=-12$$

원 위의 한 점 P에 대하여 $\angle OAP=90^\circ$

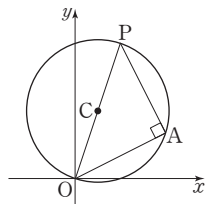
이므로 $\overline{OP}$ 는 삼각형 OAP의 외접원의 지름이다.

원 $x^2+y^2-4x-12y=0$, 즉 $(x-2)^2+(y-6)^2=40$ 의 중심을 C라 하면 C(2, 6)이고, 직선 OP는 원의 중심 C를 지나므로 직선 OP는 직선 OC와 같다.

따라서 직선 OP는 두 점 O(0, 0), C(2, 6)을 지나는 직선이므로 직선 OP의 방정식은

$$y=3x$$

답 ⑤



14 오른쪽 그림과 같이 원의 중심

O(0, 0)에서 직선 $2x+y+k=0$ 에

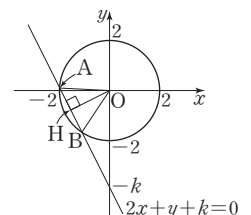
내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH}=\frac{|k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{k}{\sqrt{5}} \quad (\because k>0)$$

원의 반지름의 길이가 2이므로

$$\overline{OA}=\overline{OB}=2$$

삼각형 ABO가 정삼각형이 되려면 $\overline{OH}$ 는 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 높이이어야 하므로



$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \frac{k}{\sqrt{5}} = \sqrt{3} \text{이므로 } k = \sqrt{15}$$

답 ④

- 15 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 의 중심을 C라 하면 $C(a, b)$

이 원이 직선 $x-2y-2=0$ 과 점 $A(4, 1)$ 에서 접하므로 원의 중심 C와 접점 A를 지나는 직선 AC는 직선 $x-2y-2=0$ 과 수직이다. 즉, 직선 AC의 기울기는 -2 이므로

$$\frac{b-1}{a-4} = -2$$

$$-2a+8=b-1 \quad \therefore 2a+b=9 \quad \dots\dots ㉠$$

또, 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이 두 직선 $x+2y-2=0$, $x-2y-2=0$ 에 동시에 접하므로 원의 중심 C와 두 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다. 즉,

$$\frac{|a+2b-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|a-2b-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = |r| \quad \dots\dots ㉡$$

$$|a+2b-2| = |a-2b-2|$$

$$a+2b-2 = -(a-2b-2) \text{ 또는 } a+2b-2 = a-2b-2$$

$$2a=4 \text{ 또는 } 4b=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } b=0$$

$$ab \neq 0 \text{이므로 } a=2$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$4+b=9 \quad \therefore b=5$$

㉡에서

$$|r| = \frac{|2+2 \times 5-2|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \quad \therefore r^2=20$$

$$\therefore \frac{r^2}{ab} = \frac{20}{2 \times 5} = 2$$

답 ③

- 16 점 P는 직선 $y=-2x+8$ 위의 점이므로

$P(a, -2a+8)$ 이라 하고,

원 $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 5$ 의 중심을 C라 하면

$C(2, 5)$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하면 두 접선이 수직이므로

$$\angle APB = 90^\circ \text{이고,}$$

$$\angle CAP = \angle CBP = 90^\circ, \overline{CA} = \overline{CB} = \sqrt{5}$$

즉, 사각형 APBC는 정사각형이므로

$$\overline{CP} = \sqrt{2} \overline{CA} = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \overline{CP}^2 = 10$$

이때

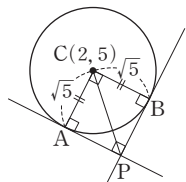
$$\overline{CP}^2 = (a-2)^2 + \{(-2a+8)-5\}^2$$

$$= 5a^2 - 16a + 13$$

이므로

$$5a^2 - 16a + 13 = 10, 5a^2 - 16a + 3 = 0$$

$$(5a-1)(a-3) = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{5} \text{ 또는 } a = 3$$



따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{1}{5}$ 또는 3이므로

$$\alpha + \beta = \frac{1}{5} + 3 = \frac{16}{5}$$

답 ①

- 17 직선 $5x-12y=0$, 즉 $y=\frac{5}{12}x$ 와 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{12}{5} \text{이다.}$$

기울기가 $-\frac{12}{5}$ 이고 점 $(10, -12)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-12) = -\frac{12}{5}(x - 10) \quad \therefore y = -\frac{12}{5}x + 12$$

이 직선의 x절편, y절편은 각각 5, 12이므로

$A(5, 0), B(0, 12)$

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABO의 내

접원은 x축, y축, 직선

$y = -\frac{12}{5}x + 12$ 에 동시에 접하므로

원의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)라 하면 내접원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이때 $\overline{OA}=5, \overline{OB}=12, \overline{AB}=\sqrt{5^2+12^2}=13$ 이므로 삼각형

ABO의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times r \times \overline{OA} + \frac{1}{2} \times r \times \overline{OB} + \frac{1}{2} \times r \times \overline{AB}$$

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} r (5 + 12 + 13)$$

$$60 = 30r \quad \therefore r = 2$$

따라서 삼각형 ABO의 내접원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4, \text{ 즉 } x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

이므로 $a=-4, b=-4, c=4$

$$\therefore a+b+c = -4 + (-4) + 4 = -4$$

답 ③

- 18 원 C가 x축에 접하고 반지름의 길

이가 1이므로 원 C의 중심을

$C(t, 1)$ ($t > 0$)이라 하면 원 C가

직선 $3x-4y=0$ 에 접하므로 원의

중심 C와 직선 $3x-4y=0$ 사이의

거리가 원의 반지름의 길이 1과 같다. 즉,

$$\frac{|3t-4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 1, |3t-4| = 5$$

$$3t-4=5 \text{ 또는 } 3t-4=-5$$

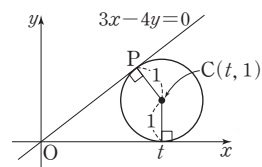
$$3t=9 \text{ 또는 } 3t=-1$$

$$\therefore t=3 \quad (\because t > 0)$$

원의 중심 $C(3, 1)$ 과 접점 $P(a, b)$ 를 지나는 직선 CP는 직선

$3x-4y=0$, 즉 $y=\frac{3}{4}x$ 에 수직이므로 직선 CP의 기울기는

$$-\frac{4}{3} \text{이다. 즉,}$$



$$\frac{b-1}{a-3} = -\frac{4}{3}, -4(a-3) = 3(b-1)$$

$$\therefore 4a+3b=15 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, 점 P는 직선 $3x-4y=0$ 위의 점이므로

$$3a-4b=0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

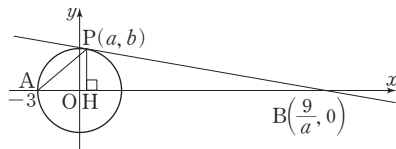
$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{12}{5}, b = \frac{9}{5}$$

$$\therefore a+b = \frac{12}{5} + \frac{9}{5} = \frac{21}{5}$$

답 ②

19



$P(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)라 하면

$$\overline{AH} = a - (-3) = a+3$$

$$\overline{BH} = 5\overline{AH} = 5(a+3) \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

원 $C: x^2+y^2=9$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=9$$

이 직선이 x축과 만나는 점은 $B\left(\frac{9}{a}, 0\right)$ 이므로 $\overline{OB} = \frac{9}{a}$

이때 $\overline{OH} = a$ 이므로

$$\overline{BH} = \overline{OB} - \overline{OH} = \frac{9}{a} - a \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{9}, \textcircled{10} \text{에서 } 5(a+3) = \frac{9}{a} - a$$

$$5a(a+3) = 9 - a^2, 5a^2 + 15a = 9 - a^2$$

$$6a^2 + 15a - 9 = 0, 2a^2 + 5a - 3 = 0$$

$$(2a-1)(a+3) = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because a > 0)$$

즉, $P\left(\frac{1}{2}, b\right)$ 이고, 점 P가 원 C 위의 점이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = 9, b^2 = \frac{35}{4} \quad \therefore b = \frac{\sqrt{35}}{2} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore \overline{PH} = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

또, $B(18, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = 18 - (-3) = 21$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 21 \times \frac{\sqrt{35}}{2} = \frac{21\sqrt{35}}{4}$$

답 ①

20 주어진 조건에서 $k \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

원 $x^2+y^2=2$ 의 중심은 점 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이고, 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이므로 조건 $\textcircled{7}$ 에서 $\frac{|k|}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$

$$|k| < 2 \quad \therefore -2 < k < 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

한편, 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=2k^2$ 의 중심은 점 $(-2, 1)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{2k^2} = \sqrt{2}|k|$ 이고, 원의 중심 $(-2, 1)$ 과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k-3|}{\sqrt{2}}$$

이므로 조건 $\textcircled{8}$ 에서

$$\frac{|k-3|}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}|k| \quad \therefore |k-3| > 2|k|$$

(i) $k < 0$ 일 때, $-(k-3) > -2k$

$$k-3 < 2k \quad \therefore k > -3$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $-3 < k < 0$

(ii) $0 \leq k < 3$ 일 때, $-(k-3) > 2k$

$$-k+3 > 2k, -3k > -3 \quad \therefore k < 1$$

그런데 $0 \leq k < 3$ 이므로 $0 \leq k < 1$

(iii) $k \geq 3$ 일 때, $k-3 > 2k$

$$-k > 3 \quad \therefore k < -3$$

그런데 $k \geq 3$ 이므로 부등식의 해는 존재하지 않는다

(i), (ii), (iii)에서 부등식 $|k-3| > 2|k|$ 의 해는

$$-3 < k < 1 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{9}, \textcircled{10}$ 의 공통부분을 구하면

$$-2 < k < 0 \text{ 또는 } 0 < k < 1$$

따라서 $\alpha = -2, \beta = 1$ 이므로

$$\alpha + \beta = -2 + 1 = -1$$

답 ①

21 원의 중심이 직선 $y = -3x$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, -3a)$ 라 하면 이 원이 두 직선 $x-y+3=0, x-y+5=0$ 에 모두 접하므로 원의 중심과 각 직선 사이의 거리는 같다. 즉,

$$\frac{|a - (-3a) + 3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|a - (-3a) + 5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$|4a+3| = |4a+5|, 4a+3 = \pm(4a+5)$$

$$8a = -8 \quad \therefore a = -1$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-1, 3)$ 이다.

답 ①

22 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3 \text{에서 } 3\overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$9\overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

$$9\{x - (-3)\}^2 + (y-1)^2 = 4\{(x-2)^2 + (y-1)^2\}$$

$$9(x^2+y^2+6x-2y+10) = 4(x^2+y^2-4x-2y+5)$$

$$5x^2+5y^2+70x-10y+70=0$$

$$x^2+y^2+14x-2y+14=0$$

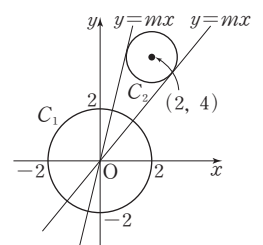
$$\therefore (x+7)^2+(y-1)^2=36$$

답 ④

23 원 C_1 은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원이고, 원 C_2 은 중심이 점 $(2, 4)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 오른쪽 그림과 같다.

이때 원점을 지나는 직선 $y=mx$ 와

원 C_1 의 교점은 2개이므로



$$f(m)=2$$

즉, $f(m)+g(m)=3$ 이 되려면 $g(m)=1$ 이어야 하므로 직선 $y=mx$ 는 원 C_2 에 접해야 한다. ①

직선 $mx-y=0$ 이 원 C_2 에 접하려면

$$\frac{|m \times 2 - 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1, |2m - 4| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면 $4m^2 - 16m + 16 = m^2 + 1$

$$\therefore 3m^2 - 16m + 15 = 0 \quad \dots\dots ②$$

이차방정식 $3m^2 - 16m + 15 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-8)^2 - 3 \times 15 = 19 > 0$$

이므로 이차방정식 $3m^2 - 16m + 15 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

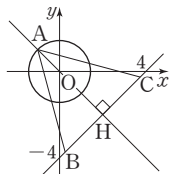
따라서 모든 실수 m 의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{15}{3} = 5 \quad \dots\dots ③$$

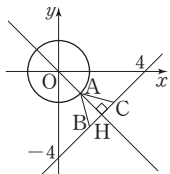
답 5

채점기준	배점
① 직선 $y=mx$ 와 두 원 C_1, C_2 와의 서로 다른 교점의 개수의 합이 3이 될 조건 제시하기	2
② 직선 $y=mx$ 가 원 C_2 에 접할 조건을 이차방정식으로 나타내기	2
③ 모든 실수 m 의 값의 곱 구하기	2

24



[그림 1]



[그림 2]

점 A에서 직선 $y=x-4$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 선분 AH는 정삼각형 ABC의 높이이다. [그림 1]과 같이 $\overline{AH}$ 의 길이가 최대일 때 정삼각형 ABC의 넓이도 최대이고, [그림 2]와 같이 $\overline{AH}$ 의 길이가 최소일 때 정삼각형 ABC의 넓이도 최소이다. ①

원의 중심 (0, 0)과 직선 $y=x-4$, 즉 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

원 $x^2+y^2=2$ 의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{AH}$ 의 길이의 최댓값은 $2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, 최솟값은 $2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ 이다. ②

$\overline{AH}$ 의 길이가 최대일 때와 최소일 때의 길이의 비는

$$3\sqrt{2} : \sqrt{2} = 3 : 1$$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이가 최대일 때와 최소일 때의 답을 비는 3 : 1이므로 정삼각형 ABC의 넓이의 최댓값과 최솟값의 비는 9 : 1이다. 두 도형의 답을 비가 a : b이면 넓이의 비는 $a^2 : b^2$ 이다.

$$\therefore m=9, n=1$$

$$\therefore m+n=9+1=10 \quad \dots\dots ③$$

답 10

채점기준

배점

① 점 A에서 직선 $y=x-4$ 에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 정삼각형 ABC의 넓이와 $\overline{AH}$ 의 길이 사이의 관계 제시하기	2
② $\overline{AH}$ 의 길이의 최댓값과 최솟값을 각각 구하기	3
③ 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비를 구하고, $m+n$ 의 값 구하기	2

실전 문제 | 2회

p.61~65

01 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$ 에서

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4-3=1+4$$

$$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=8$$

이 원의 중심은 점 (-1, 2)이므로 중심이 점 (-1, 2)인 원의 반지름의 길이를 r ($r>0$)라 하면 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-2)^2=r^2$$

이 원이 점 (4, -3)을 지나므로

$$5^2+(-5)^2=r^2$$

$$r^2=50 \quad \therefore r=5\sqrt{2}$$

답 ①

02 $x^2+y^2-6x-6y+16=0$ 에서

$$x^2-6x+9+y^2-6y+9+16=18$$

$$\therefore (x-3)^2+(y-3)^2=2$$

직선 $y=2x+m$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 이 원의 중심 (3, 3)을 지나야 하므로

$$3=6+m \quad \therefore m=-3$$

답 ④

03 원의 중심이 x 축 위에 있으므로 중심의 좌표를 ($a, 0$), 원의 반지름의 길이를 r ($r>0$)라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

이 원이 점 (2, 4)를 지나므로

$$(2-a)^2+4^2=r^2 \quad \therefore a^2-4a-r^2+20=0 \quad \dots\dots ㉠$$

또, 점 (1, -3)을 지나므로

$$(1-a)^2+(-3)^2=r^2 \quad \therefore a^2-2a-r^2+10=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠-㉡을 하면

$$-2a+10=0, -2a=-10 \quad \therefore a=5$$

$a=5$ 를 ㉠에 대입하면

$$25-20-r^2+20=0$$

$$\therefore r^2=25$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-5)^2+y^2=25$$

답 ②

04 원의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \quad \therefore C(1, 3)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\overline{AC} = \sqrt{\{1-(-2)\}^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$$

답 ②

05 $x^2 + y^2 - 4kx + 2ky + 6k^2 - 4k - 12 = 0$ 에서

$$(x-2k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k + 12$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-k^2 + 4k + 12 > 0, \quad k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$(k+2)(k-6) < 0 \quad \therefore -2 < k < 6$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, \dots, 5$ 이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$-1 + 0 + 1 + \dots + 5 = 14$$

답 ③

06 $P(a, b)$ 라 하면 점 P 는 원 $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 9$ 위의 점이므로

$$(a+5)^2 + (b+1)^2 = 9 \quad \dots\dots ㉠$$

$G(x, y)$ 라 하면 점 G 는 삼각형 PAB 의 무게중심이므로

$$x = \frac{a+5+0}{3} = \frac{a+5}{3}, \quad y = \frac{b+(-2)+3}{3} = \frac{b+1}{3}$$

$$\therefore a = 3x - 5, \quad b = 3y - 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(3x-5+5)^2 + (3y-1+1)^2 = 9$$

$$(3x)^2 + (3y)^2 = 9 \quad \therefore x^2 + y^2 = 1$$

따라서 점 G 가 나타내는 도형은 중심이 점 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 1 = 2\pi$$

답 ①

07 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 1 = 0$ 에서

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = a^2 + b^2 - 1$$

원 C_1 이 원 C_2 의 둘레를 이등분하므로 두 원의 교점을 각각 A, B 라 하면 선분 AB 가 원 C_2 의 지름이어야 한다.

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각

$$\overline{C_1A} = 3, \quad \overline{C_2A} = \sqrt{a^2 + b^2 - 1}$$

이고, $C_1(0, 0), C_2(-a, -b)$ 이므로 $\overline{C_1C_2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

직각삼각형 AC_1C_2 에서

$$\overline{C_1A}^2 = \overline{C_1C_2}^2 + \overline{C_2A}^2$$

$$9 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - 1$$

$$2(a^2 + b^2) = 10 \quad \therefore a^2 + b^2 = 5$$

$$\therefore \overline{C_1C_2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$$

답 ③

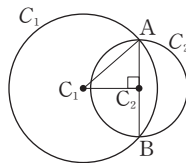
다른풀이 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 1 = 0$ 에서

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = a^2 + b^2 - 1$$

원 C_1 이 원 C_2 의 둘레를 이등분하므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 C_2 의 중심 $C_2(-a, -b)$ 를 지나야 한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 9 - (x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 1) = 0$$



$$\therefore ax + by + 5 = 0$$

이 직선이 점 $C_2(-a, -b)$ 를 지나야 하므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

$$\therefore \overline{C_1C_2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$$

08 원 $x^2 + y^2 = 2$ 위의 점 P 를 지나고 $\overline{OP}$ 에 수직인 직선은 원 위의 점 P 에서의 접선이다.

원의 반지름의 길이는 $\overline{OP} = \sqrt{2}$ 이므로

직각삼각형 POQ 에서

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 - 2$$

즉, $\overline{OQ}^2$ 이 최소일 때 $\overline{PQ}^2$ 도 최소가 된다.

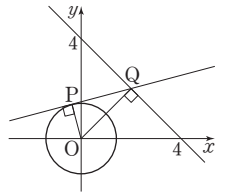
직선 $x + y - 4 = 0$ 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{OQ}$ 의 길이의 최솟값은 원점 $O(0, 0)$ 과 직선 $x + y - 4 = 0$ 사이의 거리이므로

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{PQ}$ 의 최솟값은

$$\overline{OQ}^2 - 2 = (2\sqrt{2})^2 - 2 = 6$$

답 ④



09 주어진 원과 직선의 교점을 A, B 라 하면 두 점 A, B 를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원이다.

원 $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$, 즉

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 중심을 C 라

하면 $C(1, 3)$ 이고, 원의 반지름의 길이는

$$\overline{CA} = \overline{CB} = 5$$

점 C 에서 직선 $3x - y - 5 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|3 \times 1 - 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

직각삼각형 ACH 에서

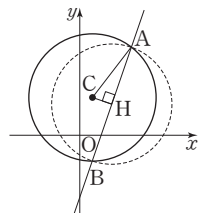
$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

따라서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이는 $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ 이므로 구하

는 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}\pi$$

답 ④



10 $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y = 0$ 에서 $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2$

$$\therefore x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$$

이 원은 중심이 점 $(0, \sqrt{3})$ 이고 반지름의

길이가 $\sqrt{3}$ 인 원이므로 오른쪽 그림과 같

이 x 축에 접한다. 따라서 x 축 위의 점

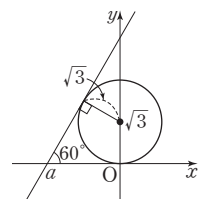
$(a, 0)$ 에서 원에 그은 두 접선 중 하나는

x 축이므로 다른 접선의 기울기는

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

기울기가 $\sqrt{3}$ 이고 점 $(a, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}(x - a) \quad \therefore \sqrt{3}x - y - \sqrt{3}a = 0$$



이 직선과 원 $x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$ 이 접하므로 원의 중심 $(0, \sqrt{3})$ 과 직선 $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3}a = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$ 과 같다. 즉,

$$\frac{|\sqrt{3} \times 0 - \sqrt{3} - \sqrt{3}a|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3}$$

$$|-\sqrt{3} - \sqrt{3}a| = 2\sqrt{3}, \sqrt{3}| -1 - a| = 2\sqrt{3}$$

$$| -1 - a| = 2$$

$$-1 - a = 2 \text{ 또는 } -1 - a = -2$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\therefore a = -3 (\because a < 0)$$

답 ①

- 11 원 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 8$ 의 중심 $(a, 1)$ 과 직선

$3x - 3y - a + 1 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3a - 3 - a + 1|}{\sqrt{3^2 + (-3)^2}} = \frac{|2a - 2|}{3\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 만나려면

$$\frac{|2a - 2|}{3\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2}, |2a - 2| \leq 12$$

$$-12 \leq 2a - 2 \leq 12, -10 \leq 2a \leq 14$$

$$\therefore -5 \leq a \leq 7$$

따라서 정수 a 는 $-5, -4, -3, \dots, 7$ 의 13개이다.

답 ③

- 12 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$$

직선 $2x - y + k = 0$ 이 이 원에 의하여 잘린 선분의 길이가 4이므로 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라 하면

$$\overline{AB} = 4$$

원의 중심을 C, 원의 중심 C에서 직선

$2x - y + k = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CA} = 3, \overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

따라서 직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

즉, 점 C(4, 2)와 직선 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|8 - 2 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, |6 + k| = 5$$

$$6 + k = -5 \text{ 또는 } 6 + k = 5$$

$$\therefore k = -11 \text{ 또는 } k = -1$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$-11 + (-1) = -12$$

답 ②

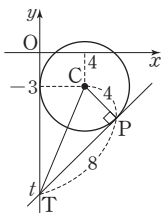
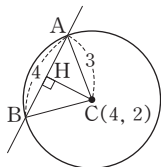
- 13 $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면

반지름의 길이가 4이므로 $\overline{CP} = 4$

또, $\overline{PT} = 8$ 이므로 직각삼각형 CTP에서



$$\overline{CT}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PT}^2 = 8^2 + 4^2 = 80$$

이때 C(4, -3), T(0, t)이므로

$$\overline{CT}^2 = (0-4)^2 + (t+3)^2 = 80, t^2 + 6t - 55 = 0$$

$$(t+11)(t-5) = 0 \quad \therefore t = -11 (\because t < 0)$$

답 ⑤

- 14 점 P(4, 0)에서 원 $x^2 + y^2 = 8$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접점 (x_1, y_1) 에서의 원의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 8$$

이 직선이 점 P(4, 0)을 지나므로

$$4x_1 = 8 \quad \therefore x_1 = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

접점 (x_1, y_1) 이 원 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 8 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4 + y_1^2 = 8, y_1^2 = 4 \quad \therefore y_1 = \pm 2$$

따라서 두 접선의 방정식은

$$2x + 2y = 8 \text{ 또는 } 2x - 2y = 8 \quad \therefore x + y = 4 \text{ 또는 } x - y = 4$$

즉, A(0, 4), B(0, -4)이다.

이때 $\overline{BP} = \overline{AP}$ 이므로 $4\overline{PQ} = \overline{AQ} + \overline{BP}$ 에서

$$4\overline{PQ} = \overline{AQ} + \overline{AP}, 4\overline{PQ} = \overline{AQ} + (\overline{AQ} + \overline{QP})$$

$$4\overline{PQ} = 2\overline{AQ} + \overline{QP} \quad \therefore 3\overline{QP} = 2\overline{AQ}$$

즉, $\overline{AQ} : \overline{QP} = 3 : 2$ 이고, 점 Q는 $\overline{AP}$ 를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{3 \times 4 + 2 \times 0}{3+2}, \frac{3 \times 0 + 2 \times 4}{3+2}\right) \quad \therefore Q\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

직선 $y = mx$ 가 점 Q를 지나므로

$$\frac{8}{5} = \frac{12}{5}m \quad \therefore m = \frac{2}{3}$$

답 ②

- 15 세 점 P(1, 3), Q(3, 1), R(-1, 1)을 지나는 원 C의 중심을 C(a, b)라 하면

$$\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR} = r$$

$$\overline{CP} = \overline{CQ} \text{에서 } \overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2$$

$$(a-1)^2 + (b-3)^2 = (a-3)^2 + (b-1)^2$$

$$4a - 4b = 0 \quad \therefore a = b \quad \dots\dots ㉠$$

$$\overline{CQ} = \overline{CR} \text{에서 } \overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2$$

$$(a-3)^2 + (b-1)^2 = \{a - (-1)\}^2 + (b-1)^2$$

$$8 - 8a = 0, 8a = 8 \quad \therefore a = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a = 1, b = 1$ 이므로 C(1, 1)

$$\therefore r = \overline{CP} = 3 - 1 = 2$$

따라서 원 C의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

또, 원 C의 중심 C(1, 1)과 직선 $3x + 4y + 23 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 + 4 + 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6$$

이므로 원 C 위의 점과 직선 $3x + 4y + 23 = 0$ 사이의 거리의 최댓값은 $M = 6 + 2 = 8$

$$\therefore r + M = 2 + 8 = 10$$

답 ③

- 16 원 $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2x \pm 3\sqrt{2^2+1} \quad \therefore y=2x \pm 3\sqrt{5}$$

또, 직선 $x-2y-6=0$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 이 직선에 수직인

직선의 기울기는 -2 이다.

원 $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y=-2x \pm 3\sqrt{(-2)^2+1} \quad \therefore y=-2x \pm 3\sqrt{5}$$

따라서 네 직선 $y=2x \pm 3\sqrt{5}$,

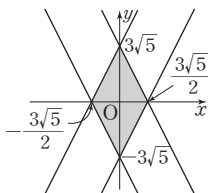
$y=-2x \pm 3\sqrt{5}$ 는 오른쪽 그림과 같으

므로 네 직선으로 둘러싸인 사각형의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ \frac{3\sqrt{5}}{2} - \left(-\frac{3\sqrt{5}}{2} \right) \right\} \times \{ 3\sqrt{5} - (-3\sqrt{5}) \}$$

$$=45$$



답 ④

- 17 $f(x)=mx+n$ 이라 하면

$$f(-4)f(4)=(-4m+n)(4m+n)=n^2-16m^2$$

원점 $O(0, 0)$ 과 직선 $y=mx+n$, 즉 $mx-y+n=0$ 사이의 거리가 4이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4, \quad |n|=4\sqrt{m^2+1}$$

$$\therefore n^2=16(m^2+1)$$

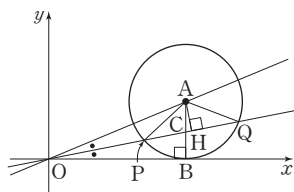
$$\therefore f(-4)f(4)=n^2-16m^2$$

$$=16(m^2+1)-16m^2$$

$$=16$$

답 ①

18



$B(12, 0)$ 이고, 원 C 의 반지름의 길이는 5이므로

$$\overline{OB}=12, \overline{AB}=5, \overline{OA}=\sqrt{5^2+12^2}=13$$

따라서 선분 AB 와 $\angle AOB$ 의 이등분선의 교점을 C 라 하면

$$\overline{BC}:\overline{CA}=\overline{OB}:\overline{OA}=12:13$$

이므로

$$\overline{BC}=\frac{12}{12+13} \times \overline{AB}=\frac{12}{25} \times 5=\frac{12}{5}$$

$$\therefore C\left(12, \frac{12}{5}\right)$$

$\angle AOB$ 의 이등분선은 원점과 점 $C\left(12, \frac{12}{5}\right)$ 를 지나므로

$\angle AOB$ 의 이등분선의 방정식은

$$y=\frac{1}{5}x \quad \therefore x-5y=0$$

원 C 의 중심 $A(12, 5)$ 에서 직선 $x-5y=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH}=\frac{|12-5 \times 5|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

또, $\overline{AP}$ 는 원 C 의 반지름이므로 $\overline{AP}=5$

따라서 직각삼각형 APH 에서

$$\overline{PH}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{74}}{2}$$

$$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}=2 \times \frac{\sqrt{74}}{2}=\sqrt{74}$$

답 ②

- 19 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은 $x_1x+y_1y=5$

이 점선이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$3x_1+y_1=5 \quad \therefore y_1=5-3x_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$x_1^2+(5-3x_1)^2=5, \quad x_1^2-3x_1+2=0$$

$$(x_1-1)(x_1-2)=0 \quad \therefore x_1=1 \text{ 또는 } x_1=2$$

이것을 ①에 대입하면

$$x_1=1 \text{ 일 때 } y_1=2$$

$$x_1=2 \text{ 일 때 } y_1=-1$$

$$\therefore A(1, 2), B(2, -1)$$

따라서 두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{-1-2}{2-1}(x-1) \quad \therefore 3x+y-5=0$$

점 $(0, k)$ 와 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|k-5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}, \quad |k-5|=10$$

$$k-5=-10 \text{ 또는 } k-5=10$$

$$k=-5 \text{ 또는 } k=15$$

$$\therefore k=-5 (\because k < 0)$$

답 ⑤

- 20 $\frac{y}{x}=a$ 라 하고, a 의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

원 $(x-2)^2+(y-3)^2=2$ 위의 점 $P(x, y)$ 에 대하여 $\frac{y}{x}=a$ 라

하면 $y=ax$ 이므로 직선 $y=ax$ 는 원점과 원

$(x-2)^2+(y-3)^2=2$ 위의 점을 지나는 직선이다.

이때 직선 $y=ax$ 의 기울기 a 가 최대 또

는 최소이려면 직선 $y=ax$ 가 원

$(x-2)^2+(y-3)^2=2$ 와 접해야 한다.

직선 $ax-y=0$ 이 원

$(x-2)^2+(y-3)^2=2$ 에 접하려면 원의

중심 $(2, 3)$ 과 직선 $ax-y=0$ 사이의 거

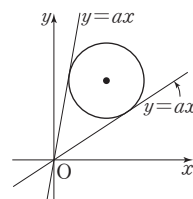
리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$ 와 같으면 되므로

$$\frac{|a \times 2 - 3|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}, \quad |2a-3|=\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$4a^2-12a+9=2(a^2+1)$$

$$\therefore 2a^2-12a+7=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$



이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 2 \times 7 = 22 > 0$$

이므로 ①은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 ①의 두 실근이 각각 a 의 최댓값과 최솟값이므로 a 의 최댓값과 최솟값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{12}{2} = 6$$

답 ①

- 21 원의 중심의 좌표를 (a, a) ($a > 0$)라 하면 반지름의 길이가 a 이므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

이 원이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-a)^2 + (1-a)^2 = a^2, a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$(a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=5$$

즉, 두 원의 방정식은

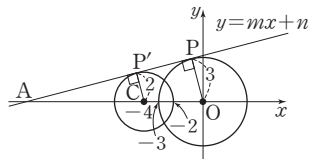
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

두 원의 중심의 좌표는 각각 $(1, 1)$, $(5, 5)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

답 ③

- 22 원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심은 원점 $O(0, 0)$, 원 $(x+4)^2 + y^2 = 4$ 의 중심을 C 라 하면 $C(-4, 0)$



위의 그림과 같이 직선 $y=mx+n$ 이 두 원과 만나는 점을

각각 P, P' , x 축과 만나는 점을 A 라 하면

$\triangle AOP \sim \triangle ACP'$ 이고, 닮음비는 $\overline{OP} : \overline{CP'} = 3 : 2$

즉, $\overline{AO} : \overline{AC} = 3 : 2$ 이므로

$$\overline{AO} : \overline{CO} = 3 : 1 \quad \therefore \overline{AO} = 3\overline{CO} = 3 \times 4 = 12$$

따라서 $A(-12, 0)$ 이고, 점 A 는 직선 $y=mx+n$ 위의 점이므로

$$0 = -12m + n \quad \therefore n = 12m \quad \dots\dots ㉑$$

이때 원점과 직선 $y=mx+n$, 즉 $mx-y+n=0$ 사이의 거리는 3이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3 \quad \therefore |n| = 3\sqrt{m^2 + 1} \quad \dots\dots ㉒$$

$$\text{㉑을 ㉒에 대입하면 } |12m| = 3\sqrt{m^2 + 1}$$

$$12|m| = 3\sqrt{m^2 + 1}, 4|m| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$16m^2 = m^2 + 1, 15m^2 = 1$$

$$m^2 = \frac{1}{15} \quad \therefore m = \frac{\sqrt{15}}{15} (\because m > 0)$$

$$\text{이를 ㉑에 대입하면 } n = \frac{4\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore mn = \frac{\sqrt{15}}{15} \times \frac{4\sqrt{15}}{5} = \frac{4}{5}$$

답 ①

- 23 두 직선 $y=ax, y=bx+c$ 가 원의 넓이를 4등분하므로 두 직선은 원의 중심을 지나고 서로 수직이다. ①

원 $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 16 = 0$, 즉 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 36$ 의 원의 중심은 점 $(2, 4)$ 이고, 직선 $y=ax$ 가 이 점을 지나므로

$$4 = 2a \quad \therefore a = 2 \quad \dots\dots ②$$

두 직선 $y=2x, y=bx+c$ 가 서로 수직이므로

$$2b = -1 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$$

직선 $y = -\frac{x}{2} + c$ 가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$4 = -1 + c \quad \therefore c = 5 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore abc = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 5 = -5 \quad \dots\dots ④$$

답 -5

채점기준	배점
① 두 직선이 원의 넓이를 4등분할 조건 설명하기	1
② a 의 값 구하기	2
③ b, c 의 값 구하기	2
④ abc 의 값 구하기	1

- 24 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 원의 중심을 $C(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)라 하면 중심이 점 C 이고 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25 \quad \dots\dots ①$$

이 원이 점 $A(4, 0)$ 을 지나므로

$$(4-a)^2 + b^2 = 25$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 8a - 9 = 0 \quad \dots\dots ㉑$$

또, 점 $B(10, 0)$ 을 지나므로

$$(10-a)^2 + b^2 = 25$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 20a + 75 = 0 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑-㉒을 하면

$$12a - 84 = 0, 12a = 84 \quad \therefore a = 7$$

이것을 ㉑에 대입하면

$$49 + b^2 - 56 - 9 = 0, b^2 = 16$$

$$\therefore b = 4 (\because b > 0) \quad \dots\dots ②$$

따라서 조건을 만족시키는 원의 방정식은

$$(x-7)^2 + (y-4)^2 = 25$$

원점 $O(0, 0)$ 과 원의 중심 $C(7, 4)$ 사이의 거리는

$$\overline{OC} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로

$$M = \sqrt{65} + 5, m = \sqrt{65} - 5$$

$$\therefore Mm = (\sqrt{65} + 5)(\sqrt{65} - 5)$$

$$= 65 - 25 = 40$$

..... ③

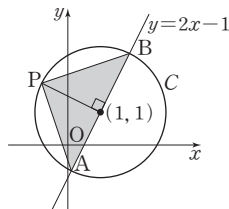
답 40

채점기준	배점
① 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 하고 원의 방정식 세우기	1
② a, b 의 값 구하기	2
③ M, m 의 값과 Mm 의 값 구하기	3

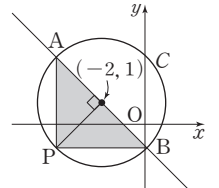
- 1 중심이 제2사분면에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표를 $(-r, r)$ ($r>0$)라 하면 원의 방정식은 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$ ($r>0$)
 원의 중심 $(-r, r)$ 는 곡선 $y=x^2-x-1$ 위의 점이므로 $r=r^2+r-1, r^2=1$
 $\therefore r=1$ ($\because r>0$)
 즉, 조건을 만족시키는 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
 $\therefore x^2+y^2+2x-2y+1=0$
 따라서 $a=2, b=-2, c=1$ 이므로 $a+b+c=2+(-2)+1=1$ 답 1

- 2 중심이 제1사분면에 있고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표를 (r, r) ($r>0$)라 하면 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ ($r>0$)
 원의 중심 (r, r) 는 이차함수 $y=x^2-x-3$ 의 그래프 위의 점이므로 $r=r^2-r-3$
 $r^2-2r-3=0, (r+1)(r-3)=0$
 $\therefore r=3$ ($\because r>0$)
 즉, 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이가 3이므로 구하는 원의 넓이는 $\pi \times 3^2=9\pi$ 답 ③

- 3 $x^2+y^2-2x-ay-b=0$ 에서 $(x-1)^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}+b+1$
 이므로 원 C 의 중심은 점 $(1, \frac{a}{2})$, 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+b+1}$ 이다.
 원 C 의 중심이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로 $\frac{a}{2}=2-1 \therefore a=2$
 $\overline{AB}$ 를 삼각형 ABP 의 밑변으로 생각하면 $\overline{AB}$ 는 원 C 의 지름이므로 삼각형 ABP 의 높이의 최댓값은 원 C 의 반지름의 길이와 같다.
 이때 원 C 의 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{2^2}{4}+b+1}=\sqrt{b+2}$ 이고, 삼각형 ABP 의 넓이의 최댓값은 4이므로 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{b+2} \times \sqrt{b+2}=4$
 $b+2=4 \therefore b=2$
 $\therefore a+b=2+2=4$ 답 ④



- 4 $x^2+y^2+ax-2y-4=0$ 에서 $(x+\frac{a}{2})^2+(y-1)^2=\frac{a^2}{4}+5$
 이므로 원 C 의 중심은 점 $(-\frac{a}{2}, 1)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+5}$ 이다.
 원 C 의 중심이 직선 $y=-x-1$ 위에 있으므로 $1=\frac{a}{2}-1 \therefore a=4$
 $\overline{AB}$ 를 삼각형 APB 의 밑변으로 생각하면 $\overline{AB}$ 는 원 C 의 지름이므로 삼각형 APB 의 높이의 최댓값은 원 C 의 반지름의 길이와 같다.
 이때 원 C 의 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{4^2}{4}+5}=3$ 이므로 삼각형 APB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2} \times 6 \times 3=9$ 답 ②



- 5 두 점 $A(0, 6), B(9, 0)$ 에 대하여 점 P 가 선분 AB 를 2:1로 내분하므로 $P(\frac{2 \times 9 + 1 \times 0}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 6}{2+1}) \therefore P(6, 2)$
 점 P 는 원 $x^2+y^2-2ax-2by=0$ 과 직선 AB 의 접점이다. 즉, 원 위의 점이므로 $36+4-12a-4b=0$
 $12a+4b=40 \therefore 3a+b=10 \dots\dots ㉠$
 원 $x^2+y^2-2ax-2by=0$, 즉 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$ 의 중심을 C 라 하면 $C(a, b)$
 원의 중심 C 에서 접점 P 에 그은 반지름은 접선 AB 에 수직이고, 직선 AB 의 기울기가 $\frac{0-6}{9-0}=-\frac{2}{3}$ 이므로 직선 CP 의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 이다. 즉, $\frac{b-2}{a-6}=\frac{3}{2}, 3a-18=2b-4$
 $\therefore 3a-2b=14 \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{34}{9}, b=-\frac{4}{3}$
 $\therefore a+b=\frac{34}{9}+(-\frac{4}{3})=\frac{22}{9}$ 답 ④

- 6 두 점 $A(-4, 0), B(0, -2)$ 에 대하여 점 M 이 선분 AB 의 중점이므로 $M(\frac{-4+0}{2}, \frac{0+(-2)}{2}) \therefore M(-2, -1)$
 점 M 은 원 $x^2+y^2+2ax+2by-23=0$ 과 직선 AB 의 접점이다. 즉, 원 위의 점이므로 $4+1-4a-2b-23=0$
 $4a+2b=-18 \therefore 2a+b=-9 \dots\dots ㉠$

원 $x^2+y^2+2ax+2by-23=0$, 즉

$$(x+a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2+23$$

의 중심을 C라 하면 $C(-a, -b)$

원의 중심 C에서 점 M에 그은 반지름은 접선 AB에 수직이

고, 직선 AB의 기울기가 $\frac{-2-0}{0-(-4)}=-\frac{1}{2}$ 이므로 직선 CM의

기울기는 2이다. 즉,

$$\frac{-1-(-b)}{-2-(-a)}=2$$

$$2a-4=b-1 \quad \therefore 2a-b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

⑦, ⑨를 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{2}, b=-6$

$$\therefore ab=-\frac{3}{2} \times (-6)=9 \quad \text{답 ①}$$

- 7 두 원 $C_1: (x+6)^2+y^2=4$, $C_2: (x-5)^2+(y+3)^2=1$ 의 중심을 각각 O_1 , O_2 라 하면

$$O_1(-6, 0), O_2(5, -3)$$

또, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하면

$$r_1=2, r_2=1$$

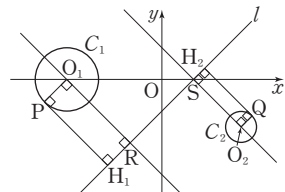
점 O_1 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 R, 점 O_2 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 S라 하자.

직선 O_1R 과 직선 $l: y=x-2$ 가 서로 수직이므로 직선 O_1R 은 기울기가 -1 이고 점 $O_1(-6, 0)$ 을 지나는 직선이다. 즉, 직선 O_1R 의 방정식은 $y=-x-6$ 이므로 직선 l 과 직선 O_1R 가 만나는 점은

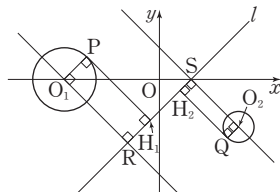
$$R(-2, -4)$$

또, 직선 O_2S 와 직선 $l: y=x-2$ 가 서로 수직이므로 직선 O_2S 는 기울기가 -1 이고 점 $O_2(5, -3)$ 을 지나는 직선이다. 즉, 직선 O_2S 의 방정식은 $y=-x+2$ 이므로 직선 l 과 직선 O_2S 가 만나는 점은

$$S(2, 0)$$



[그림 1]



[그림 2]

이때 $\overline{RS}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{0-(-4)\}^2}=4\sqrt{2}$ 이므로 선분

H_1H_2 의 길이의 최댓값 M 은 [그림 1]에서

$$M=\overline{RS}+r_1+r_2=4\sqrt{2}+3$$

또, 선분 H_1H_2 의 길이의 최솟값 m 은 [그림 2]에서

$$m=\overline{RS}-r_1-r_2=4\sqrt{2}-3$$

$$\therefore Mm=(4\sqrt{2}+3)(4\sqrt{2}-3)=32-9=23 \quad \text{답 23}$$

- 8 두 원 $C_1: (x+3)^2+(y-5)^2=1$,

$C_2: (x-5)^2+(y-4)^2=9$ 의 중심을 각각 O_1 , O_2 라 하면

$$O_1(-3, 5), O_2(5, 4)$$

또, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하면

$$r_1=1, r_2=3$$

점 O_1 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 R, 점 O_2 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 S라 하자.

직선 O_1R 과 직선 $l: y=-2x+4$ 가 서로 수직이므로 직선 O_1R

는 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 $O_1(-3, 5)$ 을 지나는 직선이다. 즉, 직선

O_1R 의 방정식은

$$y-5=\frac{1}{2}(x+3) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}$$

따라서 직선 l 과 직선 O_1R 가 만나는 점은

$$R(-1, 6)$$

또, 직선 O_2S 와 직선 $l: y=-2x+4$ 가 서로 수직이므로 직선

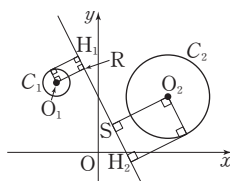
O_2S 는 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 $O_2(5, 4)$ 을 지나는 직선이다. 즉, 직

선 O_2S 의 방정식은

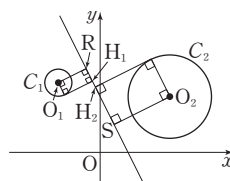
$$y-4=\frac{1}{2}(x-5) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

따라서 직선 l 과 직선 O_2S 가 만나는 점은

$$S(1, 2)$$



[그림 1]



[그림 2]

이때 $\overline{RS}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(2-6)^2}=2\sqrt{5}$ 이므로 선분 H_1H_2 의 길이의 최댓값 M 은 [그림 1]에서

$$M=\overline{RS}+r_1+r_2=2\sqrt{5}+4$$

또, 선분 H_1H_2 의 길이의 최솟값 m 은 [그림 2]에서

$$m=\overline{RS}-r_1-r_2=2\sqrt{5}-4$$

$$\therefore Mm=(2\sqrt{5}+4)(2\sqrt{5}-4)=20-16=4 \quad \text{답 4}$$

- 9 $P(x_1, y_1)$ ($x_1>0, y_1>0$)이라 하면 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=4$$

$y=0$ 을 대입하면

$$x_1x=4 \quad \therefore x=\frac{4}{x_1}$$

즉, 접선의 x 절편은 $\frac{4}{x_1}$ 이므로 $B(\frac{4}{x_1}, 0)$ 이다.

또, $A(-2, 0)$, $H(x_1, 0)$ 이므로 $2\overline{AH}=\overline{HB}$ 에서

$$2(x_1+2)=\left(\frac{4}{x_1}-x_1\right)$$

양변에 x_1 을 곱하면 $2x_1(x_1+2)=4-x_1^2$

$$3x_1^2+4x_1-4=0, (x_1+2)(3x_1-2)=0$$

$$\therefore x_1=\frac{2}{3} (\because x_1>0)$$

$$\therefore B(6, 0)$$

한편, 점 $P\left(\frac{2}{3}, y_1\right)$ 은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + y_1^2 = 4, y_1^2 = \frac{32}{9}$$

$$\therefore y_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} (\because y_1 > 0)$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

답 ④

- 10 $P(x_1, y_1)$ ($x_1 > 0, y_1 < 0$)이라 하면 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P에
서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 9$$

$x=0$ 을 대입하면

$$y_1y = 9 \quad \therefore y = \frac{9}{y_1}$$

즉, 접선의 y절편은 $\frac{9}{y_1}$ 이므로 점 $B\left(0, \frac{9}{y_1}\right)$ 이다.

또 $A(0, 3), H(0, y_1)$ 이므로 $\overline{AH} = \overline{HB}$ 에서

$$3 - y_1 = y_1 - \frac{9}{y_1}$$

양변에 y_1 을 곱하면 $3y_1 - y_1^2 = y_1^2 - 9$

$$2y_1^2 - 3y_1 - 9 = 0, (2y_1 + 3)(y_1 - 3) = 0$$

$$\therefore y_1 = -\frac{3}{2} (\because y_1 < 0)$$

$$\therefore B(0, -6)$$

한편, 점 $P\left(x_1, -\frac{3}{2}\right)$ 은 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 9, x_1^2 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} (\because x_1 > 0)$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 9 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

답 ②

3 도형의 이동

교과서 예제

p.73, 75

01 (1) $(2+4, 1+(-1)) \quad \therefore (6, 0)$

(2) $(-2+4, 3+(-1)) \quad \therefore (2, 2)$

답 (1) $(6, 0)$ (2) $(2, 2)$

- 02 주어진 점을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

(1) $(4+3, 3+(-2)) \quad \therefore (7, 1)$

(2) $(-2+3, 5+(-2)) \quad \therefore (1, 3)$

답 (1) $(7, 1)$ (2) $(1, 3)$

03 (1) $(x+2) - 3(y-1) + 2 = 0 \quad \therefore x - 3y + 7 = 0$

(2) $(x+2)^2 + \{(y-1)+1\}^2 = 4$

$$\therefore (x+2)^2 + y^2 = 4$$

답 (1) $x - 3y + 7 = 0$ (2) $(x+2)^2 + y^2 = 4$

- 04 주어진 도형을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

(1) $2(x+2) - (y-1) + 3 = 0 \quad \therefore 2x - y + 8 = 0$

(2) $\{(x+2)+3\}^2 + \{(y-1)-5\}^2 = 16$

$$\therefore (x+5)^2 + (y-6)^2 = 16$$

답 (1) $2x - y + 8 = 0$ (2) $(x+5)^2 + (y-6)^2 = 16$

- 05 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 에서

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 3 = 1 + 4$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a-1)^2 + (y-b+2)^2 = 8$$

이것이 $x^2+y^2=8$ 과 일치하므로

$$-a-1=0, -b+2=0 \quad \therefore a=-1, b=2$$

답 $a=-1, b=2$

06 답 (1) $(3, 4)$ (2) $(-3, -4)$ (3) $(-3, 4)$ (4) $(-4, 3)$

07 답 (1) $(-1, 5)$ (2) $(1, -5)$ (3) $(1, 5)$ (4) $(-5, -1)$

- 08 점 $(-a+4, b+2)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(b+2, -a+4)$

이 점이 $(3, b)$ 와 일치하므로

$$b+2=3, -a+4=b \quad \therefore a=3, b=1$$

답 $a=3, b=1$

09 (1) $2x + (-y) - 4 = 0 \quad \therefore 2x - y - 4 = 0$

(2) $2 \times (-x) + y - 4 = 0, -2x + y - 4 = 0$

$\therefore 2x - y + 4 = 0$

(3) $2 \times (-x) + (-y) - 4 = 0, -2x - y - 4 = 0$

$\therefore 2x + y + 4 = 0$

(4) $2y + x - 4 = 0 \quad \therefore x + 2y - 4 = 0$

답 (1) $2x - y - 4 = 0$ (2) $2x - y + 4 = 0$

(3) $2x + y + 4 = 0$ (4) $x + 2y - 4 = 0$

10 (1) $(x-2)^2 + (-y+4)^2 = 9$

$\therefore (x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$

(2) $(-x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$

$\therefore (x+2)^2 + (y+4)^2 = 9$

(3) $(-x-2)^2 + (-y+4)^2 = 9$

$\therefore (x+2)^2 + (y-4)^2 = 9$

(4) $(y-2)^2 + (x+4)^2 = 9$

$\therefore (x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$

답 (1) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$ (2) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 9$

(3) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 9$ (4) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$

11 직선 $x+3y-4=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$x+3 \times (-y)-4=0 \quad \therefore x-3y-4=0$

이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 평행이동한 직선의 방정식은

$y-3x-4=0 \quad \therefore 3x-y+4=0$ 답 $3x-y+4=0$

12 원 $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 9$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+3)^2 + (y-5)^2 = 9$

$\therefore (x-3)^2 + (y-5)^2 = 9$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-3)^2 + (-y-5)^2 = 9$

$\therefore (x+3)^2 + (y+5)^2 = 9$ 답 $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 9$

13 (1) 직선 $3x-y+2=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3 \times (-x) - (-y) + 2 = 0, -3x + y + 2 = 0$

$\therefore 3x - y - 2 = 0$

이 직선을 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x+3) - y - 2 = 0 \quad \therefore 3x - y + 7 = 0$

(2) 직선 $3x-y+2=0$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x+3) - y + 2 = 0 \quad \therefore 3x - y + 11 = 0$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3 \times (-x) - (-y) + 11 = 0, -3x + y + 11 = 0$

$\therefore 3x - y - 11 = 0$

(3) (1)과 (2)의 결과는 같지 않다.

답 (1) $3x - y + 7 = 0$ (2) $3x - y - 11 = 0$ (3) 같지 않다.

14 오른쪽 그림과 같이 점 B를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$B'(3, -4)$

이때 $\overline{PB} = \overline{PB'}$ 이므로

$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'}$

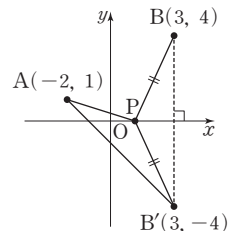
$\geq \overline{AB'}$

$= \sqrt{\{3 - (-2)\}^2 + \{-4 - 1\}^2}$

$= 5\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.

답 $5\sqrt{2}$

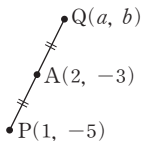


15 점 A(2, -3)은 선분 PQ의 중점이므로

$\frac{1+a}{2} = 2, \frac{-5+b}{2} = -3$

$\therefore a = 3, b = -1$

$\therefore Q(3, -1)$



답 (3, -1)

16 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$M\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$

이 점이 직선 $2x+y+3=0$ 위의 점이므로

$2 \times \frac{a-1}{2} + \frac{b+4}{2} + 3 = 0, 2(a-1) + (b+4) + 6 = 0$

$\therefore 2a + b = -8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

직선 PQ는 직선 $2x+y+3=0$, 즉 $y = -2x-3$ 에 수직이므로

직선 PQ의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다. 즉,

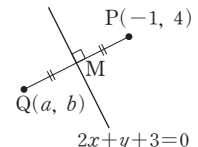
$\frac{b-4}{a+1} = \frac{1}{2}, a+1 = 2(b-4)$

$\therefore a - 2b = -9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -5, b = 2$

$\therefore Q(-5, 2)$

답 (-5, 2)



01 점 (m, n) 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(m-3, n+2)$

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ 에서 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 7$

이 원의 중심의 좌표는 $(2, -1)$

- 이 점이 점 $(m-3, n+2)$ 와 일치하므로
 $m-3=2, n+2=-1$
 $\therefore m=5, n=-3$
 $\therefore m+n=5+(-3)=2$ 답 ④
- 02** 점 $(1, 3)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행 이동하여 점 $(-1, 5)$ 로 옮겨졌다고 하면
 $1+a=-1, 3+b=5$
 $\therefore a=-2, b=2$
따라서 점 $(3, -2)$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(3+(-2), -2+2)$, 즉 $(1, 0)$ 답 ①
- 03** 직선 $3x-y+k=0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $3(x-2)-(y+2)+k=0$
 $\therefore 3x-y+k-8=0$
이 직선이 점 $(3, 4)$ 를 지나므로
 $9-4+k-8=0 \quad \therefore k=3$ 답 ②
- 04** 직선 $2x-y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $-2a$ 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $2(x-a)-(y+2a)+1=0$
 $\therefore 2x-y-4a+1=0$
이 직선이 $bx-y-3=0$ 과 일치하므로
 $2=b, -4a+1=-3 \quad \therefore a=1$
 $\therefore a+b=1+2=3$ 답 ④
- 05** 점 $(2, -3)$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하여 점 $(1, 2)$ 로 옮긴다고 하면
 $2+m=1, -3+n=2 \quad \therefore m=-1, n=5$
원 $x^2+y^2=4$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x+1)^2+(y-5)^2=4 \quad \therefore x^2+y^2+2x-10y+22=0$
따라서 $a=2, b=-10, c=22$ 이므로
 $a+b+c=2+(-10)+22=14$ 답 ⑤
- 06** 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x-a+2)^2+(y+3-1)^2=10$
 $\therefore (x-a+2)^2+(y+2)^2=10$
직선 $y=x-2$ 가 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(a-2, -2)$ 를 지나야 하므로
 $-2=a-2-2 \quad \therefore a=2$ 답 ④

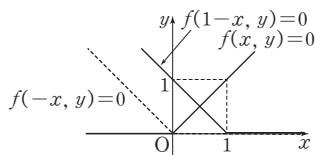
- 07** 점 $(-1, 4)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1, -4)$
이 점이 직선 $5x-ay-a^2=0$ 위의 점이므로
 $5+4a-a^2=0, a^2-4a-5=0$
 $(a+1)(a-5)=0 \quad \therefore a=-1$ 또는 $a=5$
따라서 모든 실수 a 의 값은 $-1+5=4$ 답 ④
- 08** 점 $(-3, 5)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(-3, -5)$
점 $(-3, 5)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(5, -3)$
 $\therefore PQ=\sqrt{\{5-(-3)\}^2+\{-3-(-5)\}^2}=2\sqrt{17}$ 답 ②
- 09** 직선 $ax+2y+3=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $ax+2(-y)+3=0 \quad \therefore ax-2y+3=0$
이 직선이 직선 $2x+3y+1=0$ 과 수직으로 만나므로
 $a \times 2 + (-2) \times 3 = 0 \quad \therefore a=3$ 답 ③
- 10** 직선 $y=-x+k$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=x+k$
이 직선이 포물선 $y=2x^2-3x+4$ 에 접하므로 이차방정식 $2x^2-3x+4=x+k$, 즉 $2x^2-4x+4-k=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(-2)^2-2(4-k)=0$
 $4-8+2k=0, 2k=4 \quad \therefore k=2$ 답 ④
- 11** 원 $(x+2)^2+(y-4)^2=10$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x+2)^2+(-y-4)^2=10 \quad \therefore (x-2)^2+(y+4)^2=10$
이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(x+4)^2+(y-2)^2=10$
이 원의 중심 $(-4, 2)$ 가 직선 $y=ax-2$ 위에 있으므로
 $2=-4a-2, 4a=-4 \quad \therefore a=-1$ 답 ②
- 12** $x^2+y^2+4x-5=0$ 에서 $(x+2)^2+y^2=9$
이 원을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x+2)^2+y^2=9 \quad \therefore (x-2)^2+y^2=9$
이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $x^2+(y-2)^2=9$
이 원이 x 축과 만나는 점의 좌표는
 $x^2+(-2)^2=9$ 에서 $x^2=5 \quad \therefore x=\pm\sqrt{5}$
즉, x 축과 만나는 서로 다른 두 점의 좌표는 $(-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0)$
이므로 두 점 사이의 거리는
 $\sqrt{5}-(-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$ 답 ②

- 13 점 $(-4, 3)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(-4+a, 3+b)$
 이 점을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3+b, -4+a)$
 이 점이 점 $(1, 3)$ 과 일치하므로
 $3+b=1, -4+a=3 \quad \therefore a=7, b=-2$
 $\therefore a+b=7+(-2)=5$ 답 ⑤

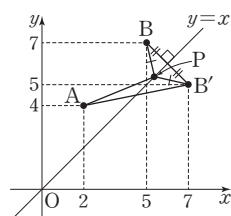
- 14 직선 l 이 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은
 $y=m(x+1)$
 이 직선을 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y-3=m(x+1) \quad \therefore y=m(x+1)+3$
 이 직선을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-y=m(x+1)+3 \quad \therefore y=-m(x+1)-3$
 이 직선이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로
 $1=-2m-3, 2m=-4 \quad \therefore m=-2$
 따라서 직선 l 의 기울기는 -2 이다. 답 ②

- 15 포물선 $y=x^2-4x+a$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
 $-y=(-x)^2-4 \times (-x)+a \quad \therefore y=-x^2-4x-a$
 이 포물선을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y+1=-(x-2)^2-4(x-2)-a$
 $\therefore y=-x^2+3-a$
 이 포물선은 점 $(0, 3-a)$ 를 지나고, y 축과 만나는 점의 y 좌표가 2이므로
 $3-a=2 \quad \therefore a=1$ 답 ④

- 16 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
 $f(-x, y)=0$
 방정식 $f(-x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은
 $f(-(x-1), y)=0 \quad \therefore f(1-x, y)=0$
 따라서 방정식
 $f(1-x, y)=0$ 이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다. 답 ③



- 17 점 $B(5, 7)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면
 $B'(7, 5)$
 이때 $\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로



$$\begin{aligned} \overline{AP}+\overline{PB} &= \overline{AP}+\overline{PB'} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{(7-2)^2+(5-4)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

답 ⑤

- 18 $Q(a, b)$ 라 하고, 선분 PQ 의 중점을 M 이라 하면

$$M\left(\frac{1+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로

$$\frac{b}{2} = \frac{1+a}{2} + 3$$

$$b=1+a+6 \quad \therefore a-b=-7 \quad \cdots \cdots ㉠$$

직선 PQ 는 직선 $y=x+3$ 과 수직이므로 직선 PQ 의 기울기는 -1 이다. 즉,

$$\frac{b-0}{a-1} = -1 \quad \therefore b = -a+1 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 4$$

$$\therefore Q(-3, 4)$$

답 ⑤

참고 직선 $y=x+3$ 은 선분 PQ 의 수직이등분선이다.

- 19 $C_1: x^2+y^2-2x+4y-11=0$ 에서

$$C_1: (x-1)^2+(y+2)^2=16$$

원 C_1 의 중심을 A 라 하면 $A(1, -2)$

원 C_2 의 중심을 $B(m, n)$ 이라 하고 선분 AB 의 중점을 M 이라 하면

$$M\left(\frac{1+m}{2}, \frac{-2+n}{2}\right)$$

이 점은 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{-2+n}{2} = 2 \times \frac{1+m}{2} + 1$$

$$-2+n=2(1+m)+2 \quad \therefore 2m-n=-6 \quad \cdots \cdots ㉠$$

또, 직선 AB 는 직선 $y=2x+1$ 과 수직이므로 직선 AB 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다. 즉,

$$\frac{n-(-2)}{m-1} = -\frac{1}{2}$$

$$-m+1=2n+4 \quad \therefore m+2n=-3 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-3, n=0$

$$\therefore B(-3, 0)$$

한편, 원 C_1 의 반지름의 길이가 4이고 원 C_2 는 원 C_1 과 직선 $y=2x+1$ 에 대하여 대칭인 원이므로 원 C_2 의 반지름의 길이도 4이다.

즉, 원 C_2 의 방정식은

$$(x+3)^2+y^2=16$$

$$\therefore x^2+y^2+6x-7=0$$

따라서 $a=6, b=0, c=-7$ 이므로

$$a+b+c=6+0+(-7)=-1$$

답 ③

- 01 점 $P(a^2, a)$ 를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a^2-4, a+2)$$

이 점이 직선 $y = -\frac{1}{4}x$ 위에 있으므로

$$a+2 = -\frac{1}{4}(a^2-4), -4a-8 = a^2-4$$

$$a^2+4a+4=0, (a+2)^2=0 \quad \therefore a=-2 \quad \text{답 ①}$$

- 02 주어진 평행이동에 의하여 두 점 A, B가 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한다고 하면

점 $A(a, 2)$ 가 점 $A'(-1, -4)$ 로 옮겨지므로

$$a+m=-1, 2+n=-4 \quad \therefore n=-6$$

점 $B(5, b)$ 가 점 $B'(8, -3)$ 로 옮겨지므로

$$5+m=8, b+n=-3 \quad \therefore m=3$$

따라서

$$a=-1-m=-1-3=-4,$$

$$b=-3-n=-3-(-6)=3$$

이므로

$$ab=-4 \times 3 = -12 \quad \text{답 ③}$$

- 03 점 (x, y) 를 점 $(x+k, y-3)$ 으로 평행이동하는 것은 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하는 것이므로 직선 $3x+y+4=0$ 을 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x-k)+(y+3)+4=0 \quad \therefore 3x+y-3k+7=0$$

이 직선이 처음 직선과 일치하므로

$$-3k+7=4, -3k=-3 \quad \therefore k=1 \quad \text{답 ③}$$

- 04 직선 $y=3x+k$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-2=3(x+2)+k$$

$$\therefore 3x-y+8+k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 원 $x^2+y^2=10$ 에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선

$\textcircled{1}$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$ 과 같다. 즉,

$$\frac{|8+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \sqrt{10}, |8+k| = 10$$

$$8+k=10 \text{ 또는 } 8+k=-10$$

$$\therefore k=2 (\because k>0) \quad \text{답 ②}$$

- 05 $y=x^2+6x+7$

$$=(x+3)^2-2$$

이 포물선을 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 $k+1$ 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-(k+1)=(x-k+3)^2-2$$

$$\therefore y=(x-k+3)^2+k-1$$

이 포물선의 꼭짓점은 점 $(k-3, k-1)$ 이고, 이 점이 x 축 위에 있으므로

$$k-1=0 \quad \therefore k=1 \quad \text{답 ④}$$

다른풀이 $y=x^2+6x+7$ 에서 $y=(x+3)^2-2$

이 포물선의 꼭짓점은 점 $(-3, -2)$ 이므로 이 점을 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 $k+1$ 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-3+k, -2+k+1) \quad \therefore (k-3, k-1)$$

이 점이 x 축 위에 있으므로

$$k-1=0 \quad \therefore k=1$$

- 06 도형 $f(x, y)=0$ 을 도형 $f(x-1, y+3)=0$ 으로 옮기는 평행이동은 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하는 것이다.

포물선 $y=x^2+3x+2$ 를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+3=(x-1)^2+3(x-1)+2$$

$$\therefore y=x^2+x-3$$

이 포물선과 직선 $y=x-2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2+x-3=x-2 \text{에서 } x^2=1 \quad \therefore x=\pm 1$$

이것을 $y=x-2$ 에 대입하면

$$x=-1 \text{일 때 } y=-3$$

$$x=1 \text{일 때 } y=-1$$

따라서 $A(-1, -3), B(1, -1)$ 이라 하면

$$\overline{AB} = \sqrt{\{1-(-1)\}^2 + \{-1-(-3)\}^2} = 2\sqrt{2} \quad \text{답 ①}$$

- 07 점 $(2, a)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a, 2)$

이 점을 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-a, 2)$$

이 점이 점 $(-1, b)$ 와 일치하므로

$$-a=-1, 2=b$$

$$\therefore a=1, b=2$$

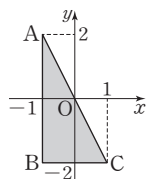
$$\therefore a-b=1-2=-1 \quad \text{답 ②}$$

- 08 점 B는 점 $A(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점이므로 $B(-1, -2)$

점 C는 점 $A(-1, 2)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 $C(1, -2)$

세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$



답 ③

- 09 직선 $y=ax+b$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-y=-ax+b \quad \therefore y=ax-b$
이 직선이 직선 $y=3x-3$ 과 평행하므로 $a=3$
직선 $y=3x-b$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로 $2=3-b \quad \therefore b=1$
 $\therefore a+b=3+1=4$ 답 ②
- 10 직선 $x+2y+n=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-x+2y+n=0$
이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $2x-y+n=0 \quad \cdots \cdots ㉠$
이 직선이 원 $x^2+y^2-4x-8y+15=0$, 즉 $(x-2)^2+(y-4)^2=5$ 에 접하므로 원의 중심 $(2, 4)$ 와 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같다. 즉,
 $\frac{|2 \times 2 - 4 + n|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, |n|=5$
 $\therefore n=5 (\because n>0)$ 답 ③
- 11 포물선 $y=-x^2+2ax+8$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은 $y=-(-x)^2+2a \times (-x)+8 \quad \therefore y=-x^2-2ax+8$
이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은 $-y=-(-x)^2-2a \times (-x)+8$
 $y=x^2-2ax-8 \quad \therefore y=(x-a)^2-a^2-8$
이 포물선의 꼭짓점은 점 $(a, -a^2-8)$ 이고 이 점이 점 $(-4, b)$ 와 일치하므로 $a=-4, -a^2-8=b$
 $\therefore b=-24$
 $\therefore a+b=-4+(-24)=-28$ 답 ②
- 12 원 $x^2-2x+y^2-3=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $y^2-2y+x^2-3=0$
이 원이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $\leftarrow$ 원의 방정식에 $y=0$ 을 대입 $x^2=3$ 에서 $x=\pm\sqrt{3}$
따라서 $A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$ 또는 $A(\sqrt{3}, 0), B(-\sqrt{3}, 0)$
이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$ 답 ①
- 13 점 $(1, 2)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1+a, 2+b)$
이 점을 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1-a, 2+b)$
이 점이 점 $(-2, 4)$ 와 일치하므로

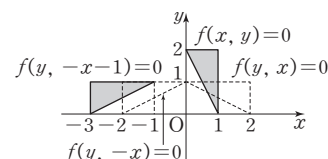
$$\begin{aligned} -1-a &= -2, 2+b=4 & \therefore a=1, b=2 \\ \therefore a+b &= 1+2=3 \end{aligned}$$

답 ⑤

- 14 직선 l 이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은 $y-1=m(x-2) \quad \therefore y=m(x-2)+1$
이 직선을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y-1=m\{(x-3)-2\}+1 \quad \therefore y=m(x-5)+2$
이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $x=m(y-5)+2$
이 직선이 점 $(3, 6)$ 을 지나므로 $3=m(6-5)+2 \quad \therefore m=1$
따라서 직선 l 의 방정식은 $y=(x-2)+1 \quad \therefore y=x-1$ 답 ③
- 15 $x^2+y^2+6x-4y+12=0$ 에서 $x^2+6x+9+y^2-4y+4+12=9+4$
 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$
이 원을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 원의 방정식은 $\{(x-2)+3\}^2+\{(y+1)-2\}^2=1$
 $\therefore (x+1)^2+(y-1)^2=1$
이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$
따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(1, -1)$ 이다. 답 ③

다른풀이 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 의 중심의 좌표는 $(-3, 2)$
이 점을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(-3+2, 2-1)$, 즉 $(-1, 1)$
이 점을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1, -1)$
따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(1, -1)$ 이다.

- 16 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$
방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, -x)=0$
방정식 $f(y, -x)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(y, -(x+1))=0 \quad \therefore f(y, -x-1)=0$



따라서 방정식 $f(y, -x-1)=0$ 이 나타내는 도형은 위의 그림과 같이 ②이다. 답 ②

- 17 점 A(1, 2)를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(-1, 2)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{\{3 - (-1)\}^2 + \{5 - 2\}^2}$$

$$= 5$$

$$\therefore m = 5$$

이때 직선 A'B의 방정식은

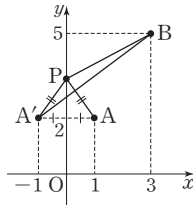
$$y - 2 = \frac{5 - 2}{3 - (-1)} \{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

점 P(0, a)가 이 직선 위에 있으므로 $a = \frac{11}{4}$

$$\therefore ma = 5 \times \frac{11}{4} = \frac{55}{4}$$

답 ⑤



- 18 두 점 A(1, -3), B(5, -1)을 잇는 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) \therefore M(3, -2)$$

이 점이 직선 $y = ax + b$ 위의 점이므로

$$-2 = 3a + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 AB는 직선 $y = ax + b$ 와 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다. 즉,

$$\frac{-1 - (-3)}{5 - 1} \times a = -1$$

$$\frac{1}{2}a = -1 \therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 ①에 대입하면

$$-2 = -6 + b \therefore b = 4$$

$$\therefore ab = -2 \times 4 = -8$$

답 ①

- 19 원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심은 O(0, 0)

원 $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$ 의 중심을 C라 하면 C(2, -4)

선분 OC의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+(-4)}{2}\right) \therefore M(1, -2)$$

이때 점 M(1, -2)는 직선 $ax + by + 10 = 0$ 위의 점이므로

$$a - 2b = -10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 OC의 방정식은

$$y = -2x \therefore 2x + y = 0$$

직선 OC는 직선 $ax + by + 10 = 0$ 과 수직이므로

$$2 \times a + 1 \times b = 0$$

$$\therefore 2a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 4$$

$$\therefore a + b = -2 + 4 = 2$$

답 ④

변형유형 집중공략

p.84~85

- 1-1 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(x, -y) = 0$$

방정식 $f(x, -y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x - 3, -y) = 0$$

따라서 방정식 $f(x - 3, -y) = 0$ 이

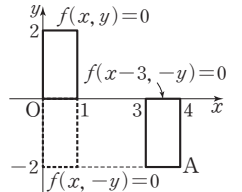
나타내는 도형은 주어진 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

이 도형 위의 점과 원점 사이의 거리의

최댓값은 원점과 점 A(4, -2) 사이의 거리이므로

$$\sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

답 ④



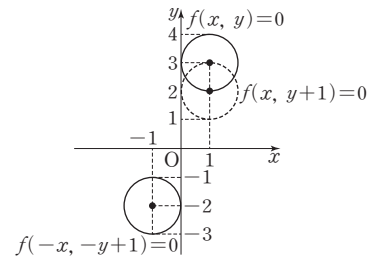
- 1-2 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 이동한 도형의 방정식은

$$f(x, y + 1) = 0$$

방정식 $f(x, y + 1) = 0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, -y + 1) = 0$$

따라서 방정식 $f(-x, -y + 1) = 0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



즉, 중심이 점 (-1, -2), 반지름의 길이가 1인 원이다.

원점과 이 원의 중심 (-1, -2) 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 이 도형 위의 점과 원점 사이의 거리의 최댓값은 $\sqrt{5} + 1$, 최솟값은 $\sqrt{5} - 1$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

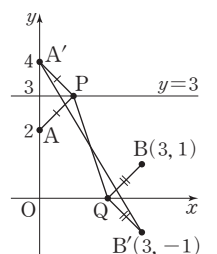
$$(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1) = 4$$

답 4

- 2-1 오른쪽 그림과 같이 점 A(0, 2)를 직선 $y = 3$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 B(3, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$A'(0, 4), B'(3, -1)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{QB} = \overline{QB'}$ 이므로



$$\begin{aligned} & \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} \\ &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(3-0)^2 + (-1-4)^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 $\sqrt{34}$ 이다. 답 ③

- 2-2 오른쪽 그림과 같이 점 A(4, 3)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면

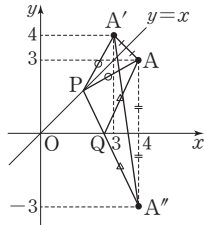
$$A'(3, 4), A''(4, -3)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{QA} = \overline{QA''}$ 이므로

삼각형 APQ의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} & \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} \\ &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''} \\ &\geq \overline{A'A''} \\ &= \sqrt{(4-3)^2 + (-3-4)^2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 APQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다. 답 ⑤



서술형 What & How

p.86~89

- 1 점 (1, k)를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1+2, k-5) \therefore (3, k-5)$ ①
이 점이 직선 $y=2x-7$ 위에 있으므로 $k-5=2 \times 3-7 \therefore k=4$ ②

답 4

- 2 원점 (0, 0)이 x 축의 방향으로 m만큼, y 축의 방향으로 n만큼 평행이동하여 점 (-1, 3)으로 옮겨진다고 하면 $0+m=-1, 0+n=3$ ①
 $\therefore m=-1, n=3$
점 P(a, b)를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(a-1, b+3)$
이 점이 원점이므로 $a-1=0, b+3=0 \therefore a=1, b=-3$
 $\therefore a-b=1-(-3)=4$ ②

답 4

채점기준	배점
① 원점을 x 축으로 m만큼, y 축으로 n만큼 평행이동하여 점 (-1, 3)으로 옮기는 m, n의 값 구하기	2
② a, b의 값과 a-b의 값 구하기	2

- 3 원 $x^2+(y-2)^2=4$ 를 x 축의 방향으로 m만큼, y 축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x-m)^2+(y-n-2)^2=4$

이 원이 $(x-2)^2+y^2=4$ 와 일치하려면

$$m=2, -n-2=0 \therefore n=-2 \quad \text{..... ①}$$

직선 $2x+y-3=0$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} & 2(x-2)+(y+2)-3=0 \\ & \therefore 2x+y-5=0 \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=-5$ 이므로

$$a+b=2+(-5)=-3 \quad \text{..... ③}$$

답 -3

- 4 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=10$ 을 x 축의 방향으로 m만큼, y 축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-m-2)^2+(y-n+1)^2=10$$

이 원이 원 $(x-6)^2+(y+14)^2=10$ 과 일치하려면

$$\begin{aligned} & -m-2=-6, -n+1=14 \\ & \therefore m=4, n=-13 \quad \text{..... ①} \end{aligned}$$

포물선 $y=x^2-4x+3$, 즉 $y=(x-2)^2-1$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -13만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$\begin{aligned} & y+13=(x-4-2)^2-1 \\ & \therefore y=(x-6)^2-14 \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (6, -14)이므로

$$\begin{aligned} & a=6, b=-14 \\ & \therefore a+b=6+(-14)=-8 \quad \text{..... ③} \end{aligned}$$

답 -8

채점기준	배점
① 주어진 조건을 만족시키는 평행이동 구하기	2
② 포물선 $y=x^2-4x+3$ 을 평행이동한 포물선의 방정식 구하기	2
③ a, b의 값과 a+b의 값 구하기	1

- 5 직선 $x-ay+3=0$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} & (x-1)-a(y+3)+3=0 \\ & \therefore x-ay-3a+2=0 \quad \text{..... ①} \end{aligned}$$

이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} & y-ax-3a+2=0 \\ & \therefore ax-y+3a-2=0 \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

이 직선이 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ 의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 (2, 3)을 지난다. 즉, ③

$$\begin{aligned} & 2a-3+3a-2=0 \\ & 5a=5 \therefore a=1 \quad \text{..... ④} \end{aligned}$$

답 1

- 6 원 $x^2+y^2=9$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (-y+1)^2 = 9$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9 \quad \dots\dots ①$$

이 원이 직선 $ax+4y+2=0$ 에 접하므로 원의 중심 $(3, 1)$ 과 직선 $ax+4y+2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3과 같다. 즉,

$$\frac{|a \times 3 + 4 \times 1 + 2|}{\sqrt{a^2 + 4^2}} = 3 \quad \dots\dots ②$$

$$|3a+6| = 3\sqrt{a^2+16}, \quad |a+2| = \sqrt{a^2+16}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 4a + 4 = a^2 + 16$$

$$4a = 12 \quad \therefore a = 3 \quad \dots\dots ③$$

답 3

채점기준	배점
① 평행이동 및 대칭이동한 원의 방정식 구하기	2
② ①의 원이 직선 $ax+4y+2=0$ 에 접할 조건 제시하기	2
③ a 의 값 구하기	2

- 7 두 원 $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 3$, $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 3$ 의 중심을 각각 C, C'이라 하면

$$C(6, -2), C'(-4, 6)$$

선분 CC'의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{6+(-4)}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) \quad \therefore M(1, 2)$$

이 점이 직선 $ax+by+3=0$ 위의 점이므로

$$a+2b+3=0 \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots ①$$

직선 CC'은 직선 $ax+by+3=0$, 즉 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{3}{b}$ 과 수직이

므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다. 즉,

$$\frac{6-(-2)}{-4-6} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

$$\frac{4a}{5b} = -1, 4a = -5b \quad \therefore 4a+5b=0 \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots ②$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, b=-4$

$$\therefore a+b=5+(-4)=1 \quad \dots\dots ③$$

답 1

- 8 $x^2+y^2-2x-6y-9=0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 19$$

또, $x^2+y^2+2x-2y+c=0$ 에서

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2-c$$

두 원의 반지름의 길이가 같으므로

$$19 = 2-c \quad \therefore c = -17 \quad \dots\dots ①$$

두 원의 중심을 각각 A, B라 하면 $A(1, 3), B(-1, 1)$ 이고, 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \quad \therefore M(0, 2)$$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$$b=2 \quad \dots\dots ②$$

또, 직선 AB는 직선 $y=ax+2$ 와 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다. 즉,

$$\frac{1-3}{-1-1} \times a = -1 \quad \therefore a = -1 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore a+b+c = -1+2+(-17) = -16 \quad \dots\dots ④$$

답 -16

채점기준	배점
① c 의 값 구하기	2
② b 의 값 구하기	2
③ a 의 값 구하기	2
④ $a+b+c$ 의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.90~93

- 01 점 $(-2, a)$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-2+1, a-2) \quad \therefore (-1, a-2)$$

이 점이 점 $(b, 1)$ 과 일치하므로

$$-1=b, a-2=1 \quad \therefore a=3$$

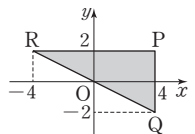
$$\therefore a+b=3+(-1)=2$$

답 ④

- 02 $Q(4, -2), R(-4, 2)$ 이므로

삼각형 PRQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$$



답 ②

- 03 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x)=0$$

이 도형을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x-1)=0$$

이 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, -x-1)=0$$

답 ①

- 04 직선 $y=3x+3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-b=3(x-a)+3$$

$$\therefore y=3x-3a+b+3$$

이 직선이 직선 $y=3x+3$ 과 일치하므로

$$-3a+b+3=3, b=3a$$

$$\therefore \frac{b}{a}=3$$

답 ⑤

- 05 직선 $y=2x-5$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y+2=2(x-m)-5 \quad \therefore y=2x-2m-7$
 이 직선과 직선 $y=2x-5$ 사이의 거리는 직선 $y=2x-5$ 위의 한 점 $(0, -5)$ 와 직선 $y=2x-2m-7$, 즉
 $2x-y-2m-7=0$ 사이의 거리 $2\sqrt{5}$ 와 같으므로
 $\frac{|5-2m-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}, |-2m-2|=10$
 $-2m-2=\pm 10$
 $-2m=12$ 또는 $-2m=-8$
 $\therefore m=-6$ 또는 $m=4$
 $\therefore m=4$ ($\because m>0$)

답 ②

- 06 도형 $f(x, y)=0$ 은 도형 $f(x-4, y+2)=0$ 를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 도형이다.
 원 $(x+2)^2+(y-4)^2=1$ 을 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x+4+2)^2+(y-2-4)^2=1$
 $\therefore (x+6)^2+(y-6)^2=1$
 이 원의 중심은 $(-6, 6)$ 이므로 $a=-6, b=6$
 $\therefore a+b=-6+6=0$

답 ②

- 07 포물선 $y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
 $-y=x^2 \quad \therefore y=-x^2$
 이 포물선을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 $y=-(x-a)^2$
 이 포물선이 직선 $y=2x-1$ 과 접하므로 이차방정식
 $-(x-a)^2=2x-1$, 즉 $x^2-2(a-1)x+a^2-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2-1)=0$
 $a^2-2a+1-a^2+1=0$
 $-2a=-2 \quad \therefore a=1$

답 ④

- 08 $x^2+y^2+ax+6y+b=0$ 에서
 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y+3)^2=9+\frac{a^2}{4}-b$
 이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(x+3)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=9+\frac{a^2}{4}-b$
 이 원의 중심 $\left(-3, -\frac{a}{2}\right)$ 가 x 축 위에 있으므로
 $-\frac{a}{2}=0 \quad \therefore a=0$
 또, 원의 넓이가 16π 이므로
 $\pi\left(9+\frac{a^2}{4}-b\right)=16\pi, 9-b=16 \quad \therefore b=-7$
 $\therefore a+b=0+(-7)=-7$

답 ②

- 09 $C: x^2+y^2+2x-6y=0$ 에서
 $C: (x+1)^2+(y-3)^2=10$
 원 C_1 의 방정식은
 $(x-a+1)^2+(y-b-3)^2=10$
 이 원의 중심의 좌표는 $(a-1, b+3)$
 원 C_2 의 방정식은
 $(-x+1)^2+(-y-3)^2=10$
 $\therefore (x-1)^2+(y+3)^2=10$
 이 원의 중심의 좌표는 $(1, -3)$
 두 원 C_1, C_2 가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이면 두 원의 중심도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
 $a-1=-3, b+3=1$
 $\therefore a=-2, b=-2$
 $\therefore ab=-2 \times (-2)=4$

답 ②

- 10 삼각형 OAB 의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면 내접원의 방정식은
 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
 이때 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ 이므로 삼각형 OAB 의 넓이에서
 $\triangle OAB=\frac{1}{2} \times 6 \times 8=\frac{1}{2} \times r \times (6+8+10)$
 $48=24r \quad \therefore r=2$
 따라서 삼각형 OAB 의 내접원의 방정식은
 $(x-2)^2+(y-2)^2=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 한편 점 $A'(12, 8)$ 은 점 $A(6, 0)$ 을 x 축의 방향으로 6 만큼, y 축의 방향으로 8 만큼 평행이동한 것이므로 삼각형 OAB 의 내접원을 x 축의 방향으로 6 만큼, y 축의 방향으로 8 만큼 평행이동한 삼각형 $O'A'B'$ 의 내접원의 방정식은
 $(x-6-2)^2+(y-8-2)^2=4$
 $(x-8)^2+(y-10)^2=4$
 $\therefore x^2+y^2-16x-20y+160=0$
 따라서 $a=-16, b=-20, c=160$ 이므로
 $a+b+c=-16+(-20)+160=124$

답 ③

- 11 원 $(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$ 을 x 축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x+6-a)^2+(y-a)^2=r^2$
 이므로 중심이 점 $(-6+a, a)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원이다. 이 원이 y 축에 접하므로
 $|-6+a|=r$
 $\therefore -6+a=r$ ($\because a>6$) $\cdots \cdots \textcircled{1}$
 또, 직선 $y=x$ 에도 접하므로 원의 중심 $(-6+a, a)$ 와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r 와 같다. 즉,
 $\frac{|-6+a-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=r \quad \therefore r=3\sqrt{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $-6+a=3\sqrt{2}$

$$\therefore a=6+3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore a^2-12r &= (6+3\sqrt{2})^2-12\times 3\sqrt{2} \\ &= 36+36\sqrt{2}+18-36\sqrt{2}=54\end{aligned}$$

답 ①

12 주어진 조건에 따라 $P_2, P_3, P_4, \dots$ 를 구하면

$$P_1(3, 2) \xrightarrow[\text{대칭}]{\text{원점}} P_2(-3, -2) \xrightarrow[\text{대칭}]{\text{직선 } y=x} P_3(-2, -3)$$

$$\xrightarrow[\text{대칭}]{\text{원점}} P_4(2, 3) \xrightarrow[\text{대칭}]{\text{직선 } y=x} P_5(3, 2) \rightarrow \dots$$

따라서 자연수 n 에 대하여 점 P_n 의 좌표와 점 P_{n+4} 의 좌표가 같다.

이때 $999=4\times 249+3$ 이므로 점 P_{999} 의 좌표는 점 P_3 의 좌표와 같다. 따라서 점 P_{999} 의 좌표는 $(-2, -3)$ 이다.

답 ②

13 ㄱ. 방정식 $f(x-2, y-1)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식

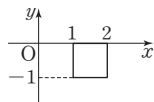
$f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 도형 B이다. (참)

ㄴ. 방정식 $f(x-2, -y+2)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식

$f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 도형 B이다. (참)

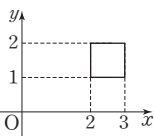
ㄷ. 방정식 $f(-x+1, y+1)=0$ 이 나타내는

도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. (거짓)



ㄹ. 방정식 $f(y-2, x-2)=0$ 이 나타내는

도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

14 원 C 는 y 축에 접하고 반지름의 길이가 1이므로 원 C 의 y 좌표를 m 이라 하면 원 C 의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-m)^2=1$$

원 C 의 중심 $(1, m)$ 과 직선 $l: x+y-8=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|1+m-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1, |m-7|=\sqrt{2}$$

$$m-7=\pm\sqrt{2} \quad \therefore m=7\pm\sqrt{2}$$

이때 주어진 그림에서 원 C 의 중심 $(1, m)$ 은 직선 l 위의 점

$(1, 7)$ 보다 위에 있으므로 $m>7$

$$\therefore m=7+\sqrt{2}$$

한편, 원 C 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원 C' 의 방정식은

$$(x-a-1)^2+(y-b-m)^2=1$$

원 C' 의 중심은 점 $(a+1, b+m)$ 이고 이 원이 x 축과 접하므로

$$b+m=1 \quad \therefore b=1-m=1-(7+\sqrt{2})=-6-\sqrt{2}$$

이때 원 C' 의 중심 $(a+1, 1)$ 과 직선 $l: x+y-8=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|a+1+1-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1, |a-6|=\sqrt{2}$$

$$a-6=\pm\sqrt{2} \quad \therefore a=6\pm\sqrt{2}$$

이때 주어진 그림에서 원 C' 의 중심의 x 좌표는 직선 l 의 x 절편인 8보다 작으므로 $1+a<8$, 즉 $a<7$

$$\therefore a=6-\sqrt{2}$$

$$\therefore ab=(6-\sqrt{2})(-6-\sqrt{2})=-36+2=-34$$

답 ④

15 점 $B(2, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한

점을 $B'(2, -1)$

$$B'(2, -1)$$

$$\text{이때 } \overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2},$$

$$\overline{CB}=\overline{CB'} \text{이므로 삼각형 } ACB \text{의 둘레}$$

의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CB'}$$

$$\geq \overline{AB}+\overline{AB'}$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}$$

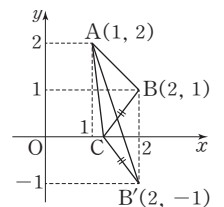
$$=\sqrt{2}+\sqrt{10}$$

따라서 삼각형 ACB 의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}+\sqrt{10}$ 이므로

$$a=10, b=2 \text{ 또는 } a=2, b=10$$

$$\therefore a+b=10+2=12$$

답 ①



16 직선 $l: y=ax+3$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로

2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-2=a(x-4)+3 \quad \therefore y=ax-4a+5$$

이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$l': x=ay-4a+5$$

두 직선 l, l' 의 교점이 y 축 위에 있고, 직선 l 이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로 직선 l' 도 점 $(0, 3)$ 을 지난다. 즉,

$$0=3a-4a+5 \quad \therefore a=5$$

답 ⑤

참고 $a=0$ 이면 $l: y=3, l': x=5$ 이므로 두 직선의 교점은 점 $(5, 3)$ 이다. 즉, 두 직선의 교점이 y 축 위에 있을 수 없다.

17 $C_1: x^2+y^2-6x-4y+12=0$ 에서

$$C_1: (x-3)^2+(y-2)^2=1$$

원 C_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(-y-2)^2=1$$

$$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=1$$

이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원 C_2 의 방정식은

$$(y-3)^2 + (x+2)^2 = 1$$

$$\therefore C_2: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

두 원 C_1, C_2 의 중심의 좌표가 각각

$(3, 2), (-2, 3)$ 이므로 두 원 $C_1,$

C_2 의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{26}$$

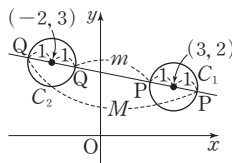
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 모두 1이므로

$\overline{PQ}$ 의 최댓값은 $\sqrt{26}+2$, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\sqrt{26}-2$

따라서 $M = \sqrt{26}+2, m = \sqrt{26}-2$ 이므로

$$Mm = (\sqrt{26}+2)(\sqrt{26}-2) = 26-4 = 22$$

답 ③



18 $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$ 에서 $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 16$

즉, 원 C_1 의 중심의 좌표는 $(-1, 4)$ 이다. ①

이때 원 C_2 의 중심은 점 $(-1, 4)$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점이므로 원 C_2 의 중심의 좌표는

$$(-1+k, 4+3) \quad \therefore (k-1, 7) \quad \dots\dots ②$$

두 원 C_1, C_2 의 중심 사이의 거리가 $3\sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{\{(k-1)-(-1)\}^2 + \{7-4\}^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{k^2 + 9} = 3\sqrt{5}$$

양변을 제곱하면

$$k^2 + 9 = 45$$

$$k^2 = 36 \quad \therefore k = 6 (\because k > 0) \quad \dots\dots ③$$

답 6

채점기준	배점
① 원 C_1 의 중심의 좌표 구하기	2
② 원 C_2 의 중심의 좌표를 k 를 사용하여 나타내기	2
③ k 의 값 구하기	2

19 오른쪽 그림과 같이 점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 B를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$$A'(8, -1), B'(2, 3) \quad \dots\dots ①$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}, \overline{QB} = \overline{QB'}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \geq \overline{A'B'}$$

$$= \sqrt{(2-8)^2 + \{3-(-1)\}^2}$$

$$= 2\sqrt{13}$$

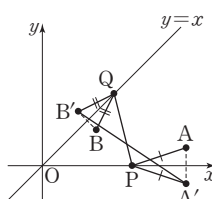
$$\therefore m = 2\sqrt{13} \quad \dots\dots ②$$

이때 직선 A'B'의 방정식은

$$y - (-1) = \frac{3-(-1)}{2-8}(x-8) \quad \therefore y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$$

이 직선이 x 축과 만나는 점 P의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이므로

$$a = \frac{13}{2} \quad \dots\dots ③$$



$$\therefore \frac{m^2}{a} = \frac{(2\sqrt{13})^2}{\frac{13}{2}} = 8 \quad \dots\dots ④$$

답 8

채점기준	배점
① 점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표와 점 B를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기	2
② m 의 값 구하기	2
③ a 의 값 구하기	2
④ $\frac{m^2}{a}$ 의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.94~97

01 점 B의 좌표는 $(1+a, 2)$, 점 C의 좌표는 $(1+a, 2+b)$ 이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+(1+a)+(1+a)}{3}, \frac{2+2+(2+b)}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{3+2a}{3}, \frac{6+b}{3} \right)$$

이 점이 점 $(5, 4)$ 와 일치하므로

$$\frac{3+2a}{3} = 5, \frac{6+b}{3} = 4$$

$$\therefore a = 6, b = 6$$

$$\therefore ab = 6 \times 6 = 36$$

답 ⑤

02 직선 $y=x+3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-1 = x-a+3 \quad \therefore y = x-a+4 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 $y=-x-2$ 를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-b = -x-2 \quad \therefore y = -x-2+b \quad \dots\dots ㉡$$

두 직선이 모두 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$㉠에서 2 = 3 - a + 4 \quad \therefore a = 5$$

$$㉡에서 2 = -3 - 2 + b \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore a + b = 5 + 7 = 12$$

답 ⑤

03 원 $x^2 + y^2 = 9$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

이 원의 중심을 C, 원이 x 축과 만나

는 두 점을 각각 A, B, 원의 중심 C

에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라

하면

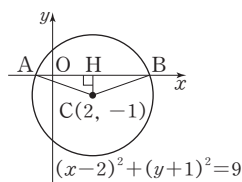
$$\overline{AC} = 3, \overline{CH} = 1$$

직각삼각형 ACH에서

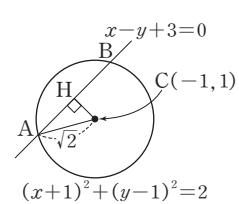
$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

답 ①



- 04 원 C_1 의 중심 $(-3, 2)$ 는 원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 $(0, 0)$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점이다.
포물선 $y=x^2-2x$, 즉 $y=(x-1)^2-1$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y-2=(x+3-1)^2-1 \quad \therefore y=(x+2)^2+1$
이 포물선은 점 $(0, 5)$ 를 지나므로 포물선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는 5 이다. 답 ④

- 05 $y=-x^2+2x$ 에서 $y=-(x-1)^2+1$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 1)$
또, $y=-x^2+4x+1$ 에서 $y=-(x-2)^2+5$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 5)$
점 $(2, 5)$ 는 점 $(1, 1)$ 을 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.
직선 $y=x$ 를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y-4=x-1 \quad \therefore x-y+3=0$
이때 원 $x^2+y^2+2x-2y=0$, 즉
 $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ 의 중심을 C 라 하면 $C(-1, 1)$ 이고 원의 중심 C 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

 $\overline{CH} = \frac{|-1-1+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{AC} = \sqrt{2}$ ← 원의 반지름의 길이
직각삼각형 ACH 에서
 $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
 $\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$ 답 ②

- 06 점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 $(a, -b)$
이 점이 제2사분면 위에 있으므로 $a < 0, -b > 0$
 $\therefore a < 0, b < 0$
점 $(a+b, ab)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 $(-a-b, ab)$
이때 $-a > 0, -b > 0$ 에서 $-a-b > 0$ 이고, $ab > 0$ 이므로
점 $(-a-b, ab)$ 가 속하는 사분면은 제1사분면이다. 답 ①

- 07 직선 $x+5y+2=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-x-5y+2=0 \quad \dots\dots ㉠$
또, 원 $x^2+y^2+ax-2y-16=0$ 에서
 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{a^2}{4}+17$
직선 ㉠이 이 원의 넓이를 이등분하므로 직선 ㉠은 원의 중심
 $\left(-\frac{a}{2}, 1\right)$ 을 지난다. 즉,

$$\frac{a}{2}-5+2=0, \frac{a}{2}=3 \quad \therefore a=6$$

따라서 주어진 원의 방정식은 $(x+3)^2+(y-1)^2=26$ 이고, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{26}$ 이므로 원의 넓이는
 $\pi \times (\sqrt{26})^2 = 26\pi$ 답 ③

- 08 원 $x^2+y^2+6x+10y+25=0$ 에서
 $(x+3)^2+(y+5)^2=9$
 $\therefore (x+3)^2+(-y-5)^2=9 \quad \dots\dots ㉠$
따라서 원 $(x+3)^2+(y-5)^2=9$ 을 원 ㉠으로 옮기는 대칭이동은 x 축에 대한 대칭이동이다.
직선 $y=2x+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-y=2x+1 \quad \therefore y=-2x-1$
따라서 $a=-2, b=-1$ 이므로
 $a-b=-2-(-1)=-1$ 답 ③

- 09 포물선 $y=x^2-2x+k$ 를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y+1=x^2-2x+k \quad \therefore y=x^2-2x+k-1$
이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
 $-y=(-x)^2-2 \times (-x)+k-1$
 $y=-x^2-2x-k+1 \quad \therefore y=-(x+1)^2-k+2$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -k+2)$ 이고, 이 포물선이 x 축과 접하므로
 $-k+2=0 \quad \therefore k=2$ 답 ④

- 10 $x^2+y^2-6x-4y-9=0$ 에서 $(x-3)^2+(y-2)^2=22$
이 원을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x-3)^2+(y-2)^2=22$
 $\therefore (x+3)^2+(y-2)^2=22$
이 원을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x+1+3)^2+(y-2-2)^2=22$
 $\therefore (x+4)^2+(y-4)^2=22$
이 원이 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 에 접하므로 원의 중심 $(-4, 4)$ 와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{22}$ 와 같다.
따라서
 $\frac{|-4m-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{22}, |-4m-4| = \sqrt{22} \times \sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
 $16m^2+32m+16=22(m^2+1)$
 $6m^2-32m+6=0 \quad \therefore 3m^2-16m+3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-8)^2 - 3 \times 3 = 55 > 0$
이므로 이차방정식 $3m^2-16m+3=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 모든 실수 m 의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{-16}{3} = \frac{16}{3} \quad \text{답 ④}$$

- 11 도형 $f(x, y)=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x)=0$$

이 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, -x)=0$$

이 도형을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(y+3, -(x+2))=0$$

$$\therefore f(y+3, -x-2)=0$$

위와 같은 평행이동 및 대칭이동에 의하여 점 (a, b) 를 이동하면

$$(a, b) \rightarrow (b, a) \rightarrow (-b, a) \rightarrow (-b-2, a-3)$$

점 $(-b-2, a-3)$ 이 점 $(-4, -5)$ 와 일치하므로

$$-b-2=-4, a-3=-5$$

$$\therefore a=-2, b=2$$

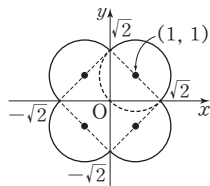
$$\therefore ab=-2 \times 2=-4$$

답 ①

- 12 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 의 제1사분면에 있는 부분을 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동하여 만든 도형은 오른쪽 그림과 같다.

이 도형의 둘레의 길이는 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원 두 개의 둘레의 길이의 합과 같으므로

$$2 \times (2\pi \times \sqrt{2}) = 4\sqrt{2}\pi \quad \text{답 ③}$$



- 13 동전을 10번 던질 때, 앞면이 a 번 나오면 뒷면은 $(10-a)$ 번 나오므로 점 Q 의 x 좌표는

$$1+1 \times a + (-1) \times (10-a) = 2a-9$$

점 Q 의 y 좌표는

$$-2+(-2) \times a + 1 \times (10-a) = 8-3a$$

$$\therefore Q(2a-9, 8-3a)$$

$$\overline{PQ} = 2\sqrt{58} \text{에서 } \overline{PQ}^2 = 232$$

$$\{(2a-9)-1\}^2 + \{(8-3a)-(-2)\}^2 = 232$$

$$13a^2-100a+200=232, 13a^2-100a-32=0$$

$$(13a+4)(a-8)=0 \quad \therefore a=8 \quad (\because a \text{는 } 0 \leq a \leq 10 \text{인 정수})$$

따라서 $Q(7, -16)$ 이므로 $m=7, n=-16$

$$\therefore a+m+n=8+7+(-16)=-1 \quad \text{답 ④}$$

- 14 도형 $f(x, y)=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x)=0$$

도형 $f(y, x)=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

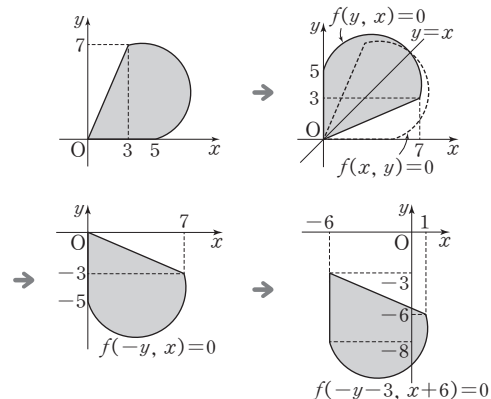
$$f(-y, x)=0$$

도형 $f(-y, x)=0$ 을 x 축의 방향으로 -6 만큼, y 축의 방향으로

-3 만큼 평행이동한 도형의 방정식은

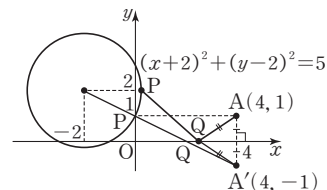
$$f(-(y+3), x+6)=0$$

$$\therefore f(-y-3, x+6)=0$$



따라서 방정식 $f(-y-3, x+6)=0$ 이 나타내는 도형은 ②이다. 답 ②

15



점 $A(4, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(4, -1)$$

이때 $\overline{QA} = \overline{QA'}$ 이므로

$$\overline{PQ} + \overline{QA} = \overline{PQ} + \overline{QA'} \geq \overline{PA'}$$

$\overline{PA'}$ 의 길이가 최소이려면 직선 PA' 이 원의 중심을 지나야 하고, $\overline{PA'}$ 의 길이의 최솟값은 원의 중심 $(-2, 2)$ 와 점 A' 사이의 거리에서 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$$\overline{PA'} \geq \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + \{-1-2\}^2} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다. 답 ②

- 16 $x^2+y^2+6x+2y-6=0$ 에서

$$(x+3)^2+(y+1)^2=16$$

이 원을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a+3)^2+(y-b+1)^2=16$$

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$|a-3|=4, |b-1|=4$$

$$|a-3|=4 \text{에서 } a-3=-4 \text{ 또는 } a-3=4$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=7$$

$$|b-1|=4 \text{에서 } b-1=-4 \text{ 또는 } b-1=4$$

$$\therefore b=-3 \text{ 또는 } b=5$$

따라서 $b-a$ 의 최댓값은

$$5-(-1)=6 \quad \therefore M=6$$

$b-a$ 의 최솟값은

$$-3-7=-10 \quad \therefore m=-10$$

$$\therefore M+m=6+(-10)=-4$$

답 ②

- 17 방정식 $g(x, y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 도형이다.
방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

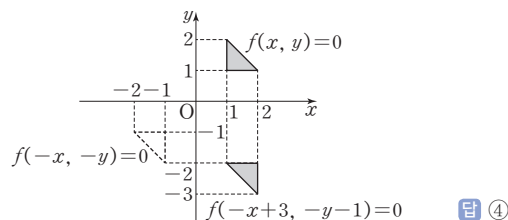
$$f(-x, -y)=0$$

방정식 $f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(-(x-3), -(y+1))=0$$

$$\therefore f(-x+3, -y-1)=0$$

$$\therefore g(x, y)=f(-x+3, -y-1)$$



답 ④

- 18 원 $(x-4)^2+(y-1)^2=16$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$\{(x-3)-4\}^2+\{(y+5)-1\}^2=16$$

$$\therefore (x-7)^2+(y+4)^2=16 \quad \dots\dots ㉠$$

즉, 점 P'은 원 ㉠ 위의 점이다. ①

또, 원 $(x-4)^2+(y-1)^2=16$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-4)^2=16 \quad \dots\dots ㉡$$

즉, 점 Q'은 원 ㉡ 위의 점이다. ②

두 원 ㉠, ㉡의 중심의 좌표는 각각 $(7, -4)$, $(1, 4)$ 이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(7-1)^2+(-4-4)^2}=10$$

두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이가 모두 4이므로 선분 P'Q'의 길이의 최댓값은

$$4+10+4=18$$

..... ③

답 18

채점기준	배점
① 점 P'이 나타내는 원의 방정식 구하기	2
② 점 Q'이 나타내는 원의 방정식 구하기	2
③ 선분 P'Q'의 길이의 최댓값 구하기	3

- 19 $x^2+y^2+4x-2y-3=0$ 에서

$$(x+2)^2+(y-1)^2=8$$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x+2)^2+(-y-1)^2=8$$

$$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=8 \quad \dots\dots ①$$

이 원이 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 과 서로 다른 두 점에서 만나므로 원의 중심 $(2, -1)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 작아야 한다. 즉, ②

$$\frac{|2-(-1)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} < 2\sqrt{2}, |k+3| < 4$$

$$-4 < k+3 < 4 \quad \therefore -7 < k < 1$$

따라서 정수 k 는 $-6, -5, -4, \dots, 0$ 의 7개이다. ③

답 7

채점기준	배점
① 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식 구하기	2
② ①의 원이 직선 $y=x+k$ 과 서로 다른 두 점에서 만날 조건 제시하기	2
③ 정수 k 의 개수 구하기	3

수능형 기출문제 & 변형문제

p.98 ~ 102

- 1 점 A($-3, 4$)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 B는 $B(4, -3)$

점 B($4, -3$)을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 점 C는

$$C(4+2, -3+k) \quad \therefore C(6, -3+k)$$

직선 AB의 방정식은

$$y-4=\frac{-3-4}{4-(-3)}\{x-(-3)\}$$

$$\therefore y=-x+1$$

점 C($6, -3+k$)가 직선 AB 위에 있으므로

$$-3+k=-6+1 \quad \therefore k=-2$$

답 ④

참고 (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)임을 이용해도 된다.

- 2 점 A($1, 3$)을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B는 $B(-1, -3)$

점 B($-1, -3$)을 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점 C는

$$C(-1+k, -3+2) \quad \therefore C(-1+k, -1)$$

이때 직선 AC와 직선 BC가 수직이므로 기울기의 곱은 -1 이다. 즉,

$$\frac{-1-3}{-1+k-1} \times \frac{-1-(-3)}{-1+k-(-1)} = -1$$

$$\frac{-4}{k-2} \times \frac{2}{k} = -1, k(k-2)=8$$

$$k^2-2k-8=0, (k+2)(k-4)=0$$

$$\therefore k=4 (\because k>0)$$

답 ⑤

- 3 두 원 C, C' 의 중심을 각각 A, A' 이라 하면 원 C 의 중심은 $A(1, 0)$
 조건 ㄴ에서 원 C 의 중심 A 와 직선 $4x-3y+21=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r 와 같으므로

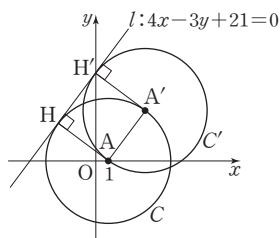
$$r = \frac{|4 \times 1 - 3 \times 0 + 21|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5$$

 따라서 원 C' 의 방정식은

$$(x-a-1)^2 + (y-b)^2 = 25$$

 조건 ㄷ에서 $(1-1-a)^2 + (0-b)^2 = 25$
 $\therefore a^2 + b^2 = 25$ ㉠
 직선 $4x-3y+21=0$ 을 l 이라 하고, 두 점 A, A' 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H, H' 이라 하면 $\overline{AH} = \overline{A'H'}$ 이고, $\overline{AH} \perp l, \overline{A'H'} \perp l$ 이므로 직선 AA' 은 직선 l 과 평행하다.
 이때 $A'(a+1, b)$ 이고, 직선 l 의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이므로 직선 AA' 의 기울기도 $\frac{4}{3}$ 이다. 즉,

$$\frac{b-0}{(1+a)-1} = \frac{4}{3} \quad \therefore b = \frac{4}{3}a$$
 ㉡
 ㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = 25, \frac{25}{9}a^2 = 25$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$
 이것을 ㉡에 대입하면 $b = 4$
 $\therefore a+b+r = 3+4+5 = 12$ 답 12



- 4 두 원 C, C' 의 중심을 각각 A, A' 이라 하면 원 C 의 중심은 $A(0, -1)$
 조건 ㄴ에서 원 C 의 중심 A 와 직선 $3x-y-11=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r 와 같으므로

$$r = \frac{|0 - (-1) - 11|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

 따라서 원 C' 의 방정식은

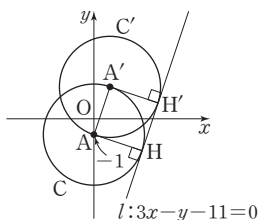
$$(x-a)^2 + (y-b+1)^2 = 10$$

 조건 ㄷ에서

$$(0-a)^2 + (-1-b+1)^2 = 10$$

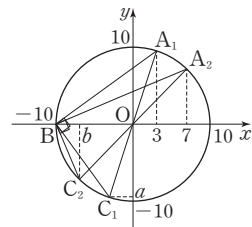
 $\therefore a^2 + b^2 = 10$ ㉠
 직선 $3x-y-11=0$ 을 l 이라 하고, 두 점 A, A' 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H, H' 이라 하면 $\overline{AH} = \overline{A'H'}$ 이고, $\overline{AH} \perp l, \overline{A'H'} \perp l$ 이므로 직선 AA' 은 직선 l 과 평행하다.
 이때 $A'(a, b-1)$ 이고, 직선 l 의 기울기는 3이므로 직선 AA' 의 기울기도 3이다. 즉,

$$\frac{b-1-(-1)}{a-0} = 3 \quad \therefore b = 3a$$
 ㉡

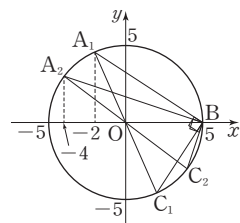


- ㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2 + (3a)^2 = 10, 10a^2 = 10$
 $a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$
 이것을 ㉡에 대입하면 $b = 3$
 $\therefore r^2 - a - b = (\sqrt{10})^2 - 1 - 3 = 6$ 답 6

- 5 $\angle A_1BC_1 = 90^\circ, \angle A_2BC_2 = 90^\circ$ 이므로 두 선분 A_1C_1, A_2C_2 는 원의 지름이다.
 이때 $\overline{OA_1} = \overline{OC_1}, \overline{OA_2} = \overline{OC_2}$ 이므로 두 점 C_1, C_2 는 각각 두 점 A_1, A_2 를 원점에 대하여 대칭이동한 점이다.
 이때 $A_1(3, \sqrt{91}), A_2(7, \sqrt{51})$ 이므로 $C_1(-3, -\sqrt{91}), C_2(-7, -\sqrt{51})$ 이다.
 따라서 $a = -\sqrt{91}, b = -7$ 이므로
 $a^2 + b^2 = (-\sqrt{91})^2 + (-7)^2 = 140$ 답 140



- 6 $\angle A_1BC_1 = 90^\circ, \angle A_2BC_2 = 90^\circ$ 이므로 두 선분 A_1C_1, A_2C_2 는 원의 지름이다.
 이때 $\overline{OA_1} = \overline{OC_1}, \overline{OA_2} = \overline{OC_2}$ 이므로 두 점 C_1, C_2 는 각각 두 점 A_1, A_2 를 원점에 대하여 대칭이동한 점이다.
 이때 $A_1(-2, \sqrt{21}), A_2(-4, 3)$ 이므로 $C_1(2, -\sqrt{21}), C_2(4, -3)$ 이다.
 따라서 $a = -\sqrt{21}, b = -3$ 이므로
 $a^2 + b^2 = (-\sqrt{21})^2 + (-3)^2 = 30$ 답 30



- 7 점 $A(1, 0)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면
 $A'(0, 1)$
 이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$
 점 P_0 은 선분 $A'B$ 위에 있으므로 직선 AP_0 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선 $A'P_0$ 은 직선 $A'B$ 와 같다.
 따라서 직선 $A'P_0$ 의 방정식은 직선 $A'B$ 의 방정식과 같다.

$$y = \frac{5-1}{6-0}(x-0) + 1 \quad \therefore y = \frac{2}{3}x + 1$$

 점 $(9, a)$ 가 직선 $y = \frac{2}{3}x + 1$ 위에 있으므로
 $a = \frac{2}{3} \times 9 + 1 = 7$ 답 4

- 8 점 $A(-2, 1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면
 $A'(1, -2)$
 이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$$

점 P_0 은 선분 $A'B$ 위에 있으므로 직선 AP_0 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선 $A'P_0$ 은 직선 $A'B$ 와 같다.

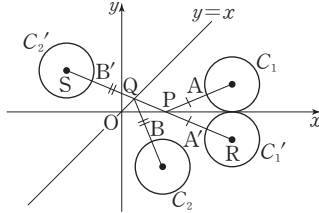
직선 $A'P_0$ 의 방정식은 $-$ 직선 $A'B$ 의 방정식과 같다.

$$y - (-2) = \frac{6 - (-2)}{3 - 1}(x - 1) \quad \therefore y = 4x - 6$$

따라서 이 직선의 y 절편은 -6 이다.

답 ①

9



원 C_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원을 C_1' , 원 C_2 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C_2' 이라 하면

$$C_1': (x-8)^2 + (y+2)^2 = 4,$$

$$C_2': (x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$$

두 원 C_1' , C_2' 의 중심을 각각 R, S라 하면

$$R(8, -2), S(-4, 3)$$

점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' , 점 B를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 두 점 A' , B' 은 각각 원 C_1' , 원 C_2' 위의 점이다.

$\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{QB} = \overline{QB'}$ 이므로 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 값은 네 점 A' , P, Q, B' 이 두 원 C_1' , C_2' 의 중심을 연결한 선분 RS 위에 있을 때 최소이다.

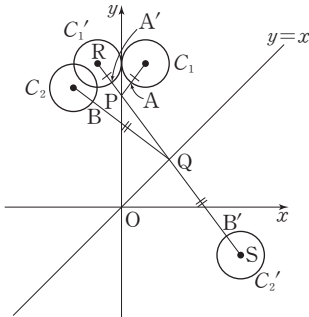
이때 두 원 C_1' , C_2' 의 반지름의 길이가 모두 2이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \overline{RS} - 2 - 2 \\ &= \sqrt{(-4-8)^2 + \{3-(-2)\}^2} - 2 - 2 \\ &= 13 - 2 - 2 = 9 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 9이다.

답 ③

10



원 C_1 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원을 C_1' , 원 C_2 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C_2' 이라 하면

$$C_1': (x+1)^2 + (y-6)^2 = 1,$$

$$C_2': (x-5)^2 + (y+2)^2 = 1$$

두 원 C_1' , C_2' 의 중심을 각각 R, S라 하면

$$R(-1, 6), S(5, -2)$$

점 A를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' , 점 B를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 두 점 A' , B' 은 각각 원 C_1' , 원 C_2' 위의 점이다.

$\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{QB} = \overline{QB'}$ 이므로 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 값은 네 점 A' , P, Q, B' 이 두 원 C_1' , C_2' 의 중심을 연결한 선분 RS 위에 있을 때 최소이다.

이때 두 원 C_1' , C_2' 의 반지름의 길이가 모두 1이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \overline{RS} - 1 - 1 \\ &= \sqrt{\{5-(-1)\}^2 + (-2-6)^2} - 1 - 1 \\ &= 10 - 1 - 1 = 8 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 8이다.

답 ②

II 집합과 명제

1 집합

교과서 예제

p.105, 107

- 01 (1) 10보다 작은 홀수의 모임은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다. (○)
 (2) 세계에서 높은 산의 모임은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다. (×)
 (3) 5의 배수 중 두 자리 수의 모임은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다. (○)
 (4) 농구를 잘하는 학생의 모임은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다. (×)

답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×

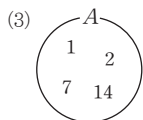
- 02 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로

- (1) $2 \in A$ (2) $3 \notin A$
 (3) $5 \notin A$ (4) $8 \in A$

답 (1) ∈ (2) ∉ (3) ∉ (4) ∈

- 03 답 (1) $A = \{1, 2, 7, 14\}$

- (2) $A = \{x | x \text{는 } 14 \text{의 양의 약수}\}$



- 04 (1) 원소가 2, 4, 6, 8, ...과 같이 무수히 많으므로 무한집합이다.
 (2) 원소가 1, 2, 3, 4, ..., 100의 유한개이므로 유한집합이다.
 (3) 2보다 작은 소수는 없으므로 유한집합이고 공집합이다.
 (4) 3의 양의 배수는 3, 6, 9, 12, ...와 같이 무수히 많으므로 무한집합이다.

답 (1) 무 (2) 유 (3) 유, 공 (4) 무

- 05 (2) $|x| < 4$ 에서 $-4 < x < 4$

따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이므로

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \quad \therefore n(A) = 7$$

답 (1) 4 (2) 7

- 06 (1) $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ 이므로 $B \subset A$

- (2) $A = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ 이므로

$$A \subset B$$

답 (1) $B \subset A$ (2) $A \subset B$

- 07 답 (1) $\emptyset$ (2) $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$

- (3) $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$ (4) $\{2, 4, 6\}$

- 08 (1) $30 = 2 \times 3 \times 5$ 이므로 $B = \{2, 3, 5\} \quad \therefore A = B$

- (2) $x^2 - 2x = 0$ 에서 $x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

따라서 $A = \{0, 2\}$ 이므로 $A \neq B$ 답 (1) $A = B$ (2) $A \neq B$

- 09 (1) $2^4 = 16$

$$(2) 2^4 - 1 = 15$$

$$(3) 2^{4-1} = 2^3 = 8$$

$$(4) 2^{4-2} = 2^2 = 4$$

답 (1) 16 (2) 15 (3) 8 (4) 4

- 10 (2) $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

답 (1) $\{a, b, c, d, e, f\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

- 11 (2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ 이므로

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

답 (1) $\{5, 7\}$ (2) $\{2, 3\}$

- 12 (1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

$$B = \{1, 3, 9\}$$

 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 집합 A 와 B 는 서로소이다.

- (2) $x^2 + 3x + 2 = 0$ 에서 $(x+2)(x+1) = 0$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \quad \therefore A = \{-2, -1\}$$

$$x^2 - 4 = 0 \text{에서 } x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2 \quad \therefore B = \{-2, 2\}$$

 $A \cap B = \{-2\} \neq \emptyset$ 이므로 집합 A 와 B 는 서로소가 아니다.

답 (1) 서로소이다. (2) 서로소가 아니다.

- 13 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

$$= \{3, 6\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

답 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

- 14 $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

$$= \{1, 3, 5, 7\} \cup \{4, 5\}$$

$$= \{1, 3, 4, 5, 7\}$$

답 $\{1, 3, 4, 5, 7\}$

- 15 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$(1) A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$$

$$(2) B = \{1, 2, 5, 10\} \text{이므로 } B^c = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

답 (1) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ (2) $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

- 16 (2) $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로

$$A - B = \{2, 4, 8, 16\}$$

답 (1) $\{b, c, d\}$ (2) $\{2, 4, 8, 16\}$

17 답 (1) A (2) $\emptyset$ (3) U (4) A (5) U (6) $\emptyset$

18 (1) $A \cap B^c = A - B = \{2, 7, 9\}$

(2) $A^c \cap B = B - A = \{6, 8\}$ 답 (1) $\{2, 7, 9\}$ (2) $\{6, 8\}$

다른풀이

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A^c = \{1, 4, 6, 8\}$,

$B^c = \{1, 2, 4, 7, 9\}$ 이므로

(1) $A \cap B^c = \{2, 7, 9\}$

(2) $A^c \cap B = \{6, 8\}$

19 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여

(1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ 이므로

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{4, 6\}$

(2) $A \cap B = \{3, 5\}$ 이므로

$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$

답 (1) $\{4, 6\}$ (2) $\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$

20 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$16 = 12 + 8 - n(A \cap B)$

$\therefore n(A \cap B) = 4$

답 4

기출 Best | 1회

p.108~112

01 '큰', '아름다운', '잘하는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄴ의 2개이다.

답 ②

02 두 집합 A, B 각각의 원소 a, b

에 대하여 $\frac{a+b}{2}$ 의 값을 구하면

오른쪽 표와 같으므로

$C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

a \ b	6	8	10
2	4	5	6
4	5	6	7
6	6	7	8

답 ④

03 이차방정식 $x^2 + 5x + 10 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$D_1 = 5^2 - 4 \times 1 \times 10 = -15 < 0$

이므로 이차방정식 $x^2 + 5x + 10 = 0$ 은 실근을 갖지 않는다.

$\therefore n(A) = 0$

따라서 $n(A) = n(B)$ 가 되려면 $n(B) = 0$ 이어야 하므로 이차

방정식 $x^2 - 2kx + 4k = 0$ 은 실근을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차

방정식 $x^2 - 2kx + 4k = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-k)^2 - 1 \times 4k < 0, k^2 - 4k < 0$$

$$k(k-4) < 0 \quad \therefore 0 < k < 4$$

따라서 정수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ③

04 ③ $\emptyset \in A$, $\{1\} \in A$ 이므로 $\{\emptyset, \{1\}\} \subset A$

④ 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$

⑤ $3 \notin A$ 이므로 $\{1, 3\} \not\subset A$

참고 ⑤ $\{1, 3\} \in A$

답 ⑤

05 $|x| < 2$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로

$$A = \{x \mid -2 < x < 2\}$$

$$x^2 - x \leq 6 \text{에서 } x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$(x+2)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 3$$

$$\therefore B = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

$$1 < 3 - x < 4 \text{에서 } -2 < -x < 1 \quad \therefore -1 < x < 2$$

$$\therefore C = \{x \mid -1 < x < 2\}$$

$$\therefore C \subset A \subset B$$

답 ④

06 $A \subset B$ 이고 $4 \in A$ 이므로 $4 \in B$ 이어야 한다.

즉, $a^2 + 3 = 4$ 또는 $a - 2 = 4$ 이므로

$$a^2 + 3 = 4 \text{에서 } a^2 = 1 \quad \therefore a = \pm 1$$

$$a - 2 = 4 \text{에서 } a = 6$$

(i) $a = -1$ 일 때, $A = \{1, 4\}$, $B = \{-3, 3, 4\}$ 이므로

$$A \not\subset B$$

(ii) $a = 1$ 일 때, $A = \{-1, 4\}$, $B = \{-1, 3, 4\}$ 이므로

$$A \subset B$$

(iii) $a = 6$ 일 때, $A = \{-6, 4\}$, $B = \{3, 4, 39\}$ 이므로

$$A \not\subset B$$

(i), (ii), (iii)에서 $a = 1$

답 ③

07 $A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A = B$

$A = B$ 이고 $6 \in A$ 이므로 $6 \in B$ 이어야 한다.

즉, $a^2 - a = 6$ 이므로

$$a^2 - a - 6 = 0, (a+2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $a = -2$ 일 때, $A = \{-5, 3, 6\}$, $B = \{-5, 3, 6\}$ 이므로

$$A = B$$

(ii) $a = 3$ 일 때, $A = \{5, 6, 8\}$, $B = \{-5, 3, 6\}$ 이므로

$$A \neq B$$

(i), (ii)에서 $a = -2$

답 ②

08 $X \subset A$, $X \neq A$ 이므로 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$$2^{5-2} - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

답 ③

09 $x^2 - 7x + 6 = 0$ 에서 $(x-1)(x-6) = 0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=6$

$\therefore A = \{1, 6\}$

또, $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이므로 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는

$2^{6-2} = 2^4 = 16$

답 ④

10 ⑤ $A^c \cap B = B - A = \{7\}$

답 ⑤

11 $\neg$. $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$\neg$. $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

$\neg$. $\{4, 8, 12, 16, \dots\}$

$\neg$. $\{1, 2, 3, 6\}$

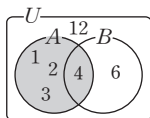
$\neg$. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\neg$. $\{2\}$

따라서 집합 $\{1, 3, 5\}$ 와 서로소인 집합은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 의 3개이다.

답 ③

12 $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 주어진 조건을 만족시키도록 전체집합 U 와 두 부분집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 이므로 집합 A 의 모든 원소의 합은

$1+2+3+4=10$

답 ④

13 $A - B = \{3\}$ 이므로 $3 \in A$

즉, $x^2 - 1 = 3$ 이므로

$x^2 = 4 \quad \therefore x = \pm 2$

(i) $x = -2$ 일 때, $A = \{2, 3\}$, $B = \{-2, 1\}$ 이므로

$A - B = \{2, 3\}$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x = 2$ 일 때, $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$ 이므로

$A - B = \{3\}$

(i), (ii)에서 $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$ 이므로

$A \cup B = \{2, 3, 5\}$

따라서 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은

$2+3+5=10$

답 ⑤

14 $A \cap B = B$ 이므로 $B \subset A$

②, ③ $B \subset A$ 이면 $A^c \subset B^c$ 이므로

$A^c \cap B^c = A^c$

④ $B \subset A$ 이고 $A \neq B$ 이므로 $A - B \neq \emptyset$

⑤ $B \subset A$ 이므로 $B \cap A^c = B - A = \emptyset$

답 ④

15 $A \cup X = A$ 에서 $X \subset A$

즉, $(A - B) \subset X \subset A$ 이므로

$\{2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중에서 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$2^{5-2} = 2^3 = 8$

답 ④

16 $(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)$

$= A \cap (B^c \cap C^c)$

$= A \cap (B \cup C)^c$

$= A - (B \cup C) \quad (\because X \cap Y^c = X - Y)$

답 ④

17 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 이므로

$A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ 이고

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$

$= \{2, 6, 8, 10\}$

이때 집합 A 의 원소인 6, 8, 10은 집합 $A - B$ 의 원소이고, 집합

A 의 원소가 아닌 2는 집합 $B - A$ 의 원소이

므로 주어진 조건을 만족시키도록 전체집합

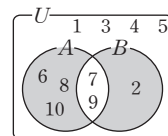
U 와 두 부분집합 A, B 를 벤 다이어그램으로

나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $B = \{2, 7, 9\}$ 이므로

$n(B) = 3$

답 ②



18 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분은 집합 A 에서 집합 $B \cup C$ 를 뺀 것과 같으므로 색칠한 부분을 나타내는 집합은

① $A - (B \cup C)$

답 ①

19 3의 배수이면서 4의 배수인 수의 집합은 $\{12, 24, 36, \dots\}$

즉, $A_3 \cap A_4 = A_{12}$ 이므로 $m = 12$

$(A_{12} \cup A_{18}) \subset A_n$ 에서 $A_{12} \subset A_n$ 이고 $A_{18} \subset A_n$

즉, n 은 12와 18의 공약수이므로 n 의 최댓값은 12와 18의 최대 공약수인 6이다.

따라서 $m + n$ 의 최댓값은

$12 + 6 = 18$

답 ⑤

20 $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ 에서 $(x+2)(x-5) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 5$

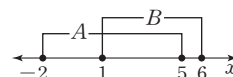
$\therefore A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$

$A \cap B = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$,

$A \cup B = \{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$ 이 성립하

려면 집합 B 는 오른쪽 그림과 같아야

하므로



$$\begin{aligned}
 B &= \{x \mid 1 \leq x \leq 6\} \\
 &= \{x \mid (x-1)(x-6) \leq 0\} \\
 &= \{x \mid x^2 - 7x + 6 \leq 0\} \\
 \text{따라서 } p &= -7, q = 6 \text{ 이므로} \\
 p+q &= -7+6 = -1
 \end{aligned}$$

답 ⑤

21 $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$ 에서
 $14 = 40 - n(A \cup B) \quad \therefore n(A \cup B) = 26$
 따라서 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서
 $26 = 23 + 11 - n(A \cap B)$
 $\therefore n(A \cap B) = 8$

답 ①

22 $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $B \subset A$ 일 때이므로
 $n(A \cap B) = n(B) = 13 \quad \therefore M = 13$
 $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $A \cup B = U$ 일 때이므로
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= n(A) + n(B) - n(U)$
 $= 22 + 13 - 30 = 5$
 $\therefore m = 5$
 $\therefore M + m = 13 + 5 = 18$

답 ①

참고 $n(A) + n(B) \geq n(U)$ 이므로 $n(A \cap B)$ 는 $A \cup B = U$ 일 때 최소이다.
 $n(A) + n(B) < n(U)$ 이면 $n(A \cap B)$ 의 최솟값은 0이다.

23 학생 전체의 집합을 U , 운동을 희망하는 학생의 집합을 A , 교과 학습을 희망하는 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 50, n(A) = 20, n(B) = 24, n(A^c \cap B^c) = 12$
 이때 $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$ 에서
 $12 = 50 - n(A \cup B) \quad \therefore n(A \cup B) = 38$
 $\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 20 + 24 - 38 = 6$

따라서 운동과 교과 학습을 모두 희망하는 학생은 6명이다.

답 ③

24 학생 전체의 집합을 U , 토요일에 야구 경기를 시청한 학생의 집합을 A , 일요일에 야구 경기를 시청한 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 35, n(A) = 25, n(B) = 18$
 이고, 토요일과 일요일 모두 야구 경기를 시청한 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.
 $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $B \subset A$ 일 때이므로
 $n(A \cap B) = n(B) = 18 \quad \therefore M = 18$
 $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $A \cup B = U$ 일 때이므로
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= n(A) + n(B) - n(U)$
 $= 25 + 18 - 35 = 8$
 $\therefore m = 8$
 $\therefore M + m = 18 + 8 = 26$

답 ③

01 ⑤ ‘가까운’은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

답 ⑤

02 $-3 \leq 2x - 3 \leq 15$ 에서 $0 \leq 2x \leq 18, 0 \leq x \leq 9$
 $-1 \leq x - 1 \leq 8 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} \leq 4$

이때 $\frac{x-1}{2}$ 은 정수이므로 $\frac{x-1}{2}$ 의 값은 0, 1, 2, 3, 4이다. 즉,

x 의 값은 1, 3, 5, 7, 9이므로

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

답 ①

03 집합 A, B 각각의 원소 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로
 $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, a+1, a+3, a+5\}$

$x \backslash y$	1	3	5
1	2	4	6
2	3	5	7
3	4	6	8
a	$a+1$	$a+3$	$a+5$

이때 $n(X) = 9$ 이므로

$$a+1=7 \text{ 또는 } a+1=8 \quad \therefore a=6 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 7이다.

답 ②

- 04 ① $\{a\} \notin A$
 ② $\{b\} \notin A$
 ③ $a \in A, c \in A$ 이므로 $\{a, c\} \subset A$
 ④ $b \notin A$ 이므로 $\{a, b\} \not\subset A$
 ⑤ $b \notin A$ 이므로 $\{a, b, c\} \not\subset A$

답 ③

참고 ④ $\{a, b\} \in A$ 또는 $\{\{a, b\}\} \subset A$

05 집합 A 의 두 원소 x, y 에 대하여 $x+2y, xy$ 의 값을 구하면 각각 [표 1], [표 2]와 같다.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	2	4
1	1	3	5
2	2	4	6

[표 1]

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

[표 2]

따라서 $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, C = \{0, 1, 2, 4\}$ 이므로

$$A \subset C \subset B$$

답 ②

06 $A \subset B$ 이고 $5 \in A$ 이므로 $5 \in B$ 이어야 한다.
 즉, $a+1=5$ 이므로 $a=4$
 $\therefore B = \{2, 5, 7\}, C = \{2, 5, 2b+3, 9\}$
 $B \subset C$ 이고 $7 \in B$ 이므로 $7 \in C$ 이어야 한다.
 즉, $2b+3=7$ 이므로 $2b=4 \quad \therefore b=2$
 $\therefore a+b=4+2=6$

답 ①

07 $|x-1| < 3$ 에서

$$-3 < x-1 < 3 \quad \therefore -2 < x < 4$$

$A=B$ 이므로 부등식 $ax^2+bx+16>0$ 의 해가 $-2 < x < 4$ 이어야 한다. 즉, $a < 0$ 이고, $a(x+2)(x-4) > 0$

$$\therefore ax^2+bx+16=ax^2-2ax-8a > 0$$

따라서 $b=-2a$, $16=-8a$ 이므로

$$a=-2, b=4$$

$$\therefore ab=-2 \times 4 = -8$$

답 ②

08 $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

집합 A 의 부분집합 중에서 3, 18을 반드시 원소로 갖고, 9를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$$2^{10-2-1}=2^7=128$$

답 ④

09 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합과 같다.

이때 집합 X 의 개수가 16이므로

$$2^{n-4}=16=2^4, n-4=4$$

$$\therefore n=8$$

답 ③

10 ⑤ $A^c=\{b, d, e\}$ 이므로

$$A^c \cup B = \{b, c, d, e\}$$

답 ⑤

11 ① $A \cap B = \{2, 5\}$

② $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 $A \cap B = \{2\}$

③ $B = \{1, 2, 5, 10\}$ 이므로 $A \cap B = \{1, 5\}$

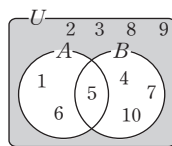
④ $A \cap B = \{x | x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$

⑤ $A \cap B = \emptyset$

따라서 두 집합 A, B 가 서로소인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

12 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이므로 주어진 조건을 만족시키도록 전체집합 U 와 두 부분집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $A^c - B = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{2, 3, 8, 9\}$ 이므로 집합 $A^c - B$ 의 모든 원소의 합은

$$2+3+8+9=22$$

답 ②

13 $A \cap B = \{1, 8\}$ 이므로 $8 \in A$ 이어야 한다.

즉, $a^2-8=8$ 이므로

$$a^2=16 \quad \therefore a=\pm 4$$

(i) $a=-4$ 일 때, $A=\{1, 2, 6, 8\}$, $B=\{-12, -7, 8\}$ 이므로 $A \cap B = \{8\}$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$ 일 때, $A=\{1, 2, 6, 8\}$, $B=\{1, 4, 8\}$ 이므로

$$A \cap B = \{1, 8\}$$

(i), (ii)에서 $A=\{1, 2, 6, 8\}$, $B=\{1, 4, 8\}$ 이므로

$$A-B=\{2, 6\}, B-A=\{4\}$$

$$\therefore (A-B) \cup (B-A) = \{2, 4, 6\}$$

따라서 집합 $(A-B) \cup (B-A)$ 의 모든 원소의 합은

$$2+4+6=12$$

답 ③

14 $A^c \subset B^c$ 이므로 $B \subset A$

$$\textcircled{1} A \cap B = B$$

$$\textcircled{2} (A \cup B) \cap B = A \cap B = B$$

$$\textcircled{3} (A \cap B) \cup A = B \cup A = A$$

$$\textcircled{4} (B-A) \cup B = \emptyset \cup B = B$$

$$\textcircled{5} (A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B = B$$

답 ③

15 $A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$

$$(A \cap B) \cup X = X \text{에서 } (A \cap B) \subset X$$

즉, $(A \cap B) \subset X \subset A$ 이므로

$$\{5, 7, 9\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

따라서 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중에서 5, 7, 9를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{5-3}=2^2=4$$

답 ②

16 $\neg, (A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B$ (참)

$$\neg, A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c$$

$$= A \cap (B^c \cup C^c)$$

$$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$$

$$= (A - B) \cup (A - C) \text{ (거짓)}$$

$$\neg, (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

$$= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$$

$$= \{(A \cup B) \cap A^c\} \cup \{(A \cup B) \cap B^c\}$$

$$= \{(A \cap A^c) \cup (B \cap A^c)\} \cup \{(A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)\}$$

$$= \{\emptyset \cup (B \cap A^c)\} \cup \{(A \cap B^c) \cup \emptyset\}$$

$$= (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$$

$$= (B - A) \cup (A - B)$$

$$= (A - B) \cup (B - A) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ③

17 $B = \{3, 6, 9\}$ 이므로

$$(A - B)^c \cap \{B - (A \cap B)\}$$

$$= (A \cap B^c)^c \cap \{B \cap (A \cap B)^c\}$$

$$= (A^c \cup B) \cap \{B \cap (A^c \cup B^c)\}$$

$$= (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \cap B$$

$$= \{A^c \cup (B \cap B^c)\} \cap B$$

$$= (A^c \cup \emptyset) \cap B$$

$$= A^c \cap B = \{3, 9\}$$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$$3+9=12$$

답 ①

- 18 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분은 집합 A 에서 집합 $B \cap C$ 를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \end{aligned}$$

답 ①

- 19 $A_{60} \cap A_{150} = A_{30}$ 이므로 $m=30$

$$(A_8 \cup A_{12}) \subset A_n \text{에서 } A_8 \subset A_n \text{이고 } A_{12} \subset A_n$$

즉, n 은 8과 12의 공배수이므로 n 의 최솟값은 8과 12의 최소공배수인 24이다.

따라서 $m+n$ 의 최솟값은

$$30+24=54$$

답 ③

- 20 $x^2+2x-8 < 0$ 에서 $(x+4)(x-2) < 0$

$$\therefore -4 < x < 2$$

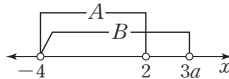
$$\therefore A = \{x \mid -4 < x < 2\}$$

$$x^2 + (4-3a)x - 12a < 0 \text{에서 } (x+4)(x-3a) < 0$$

$$\therefore B = \{x \mid (x+4)(x-3a) < 0\}$$

이때 $A \cap B = A$ 이므로 $A \subset B$

$A \subset B$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$3a \geq 2 \quad \therefore a \geq \frac{2}{3}$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

답 ③

- 21 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$40 = 26 + 21 - n(A \cap B) \quad \therefore n(A \cap B) = 7$$

$$\therefore n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c)$$

$$= n(U) - n(A \cap B)$$

$$= 50 - 7 = 43$$

답 ③

- 22 $n(A \cup B)$ 가 최대인 경우는 $n(A \cap B)$ 가 최소일 때, 즉

$$n(A \cap B) = 4 \text{일 때}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 7 + 11 - 4 = 14$$

$$\therefore M = 14$$

$n(A \cup B)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cap B)$ 가 최대일 때, 즉 $A \subset B$ 일 때

$$n(A \cup B) = n(B) = 11 \quad \therefore m = 11$$

$$\therefore M - m = 14 - 11 = 3$$

답 ②

- 23 학생 전체의 집합을 U , 버스를 이용하여 통학하는 학생의 집합을 A , 지하철을 이용하여 통학하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 192, n(A) = 75, n(B) = 52, n(A \cap B) = 27$$

이때

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 75 + 52 - 27 = 100$$

이므로

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 192 - 100 = 92 \end{aligned}$$

따라서 버스와 지하철 중 어느 것도 이용하지 않는 학생은 92명이다.

답 ②

- 24 놀이동산 입장객 전체의 집합을 U , 롤러코스터를 이용한 입장객의 집합을 A , 바이킹을 이용한 입장객의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 60, n(A) = 46, n(B) = 37$$

롤러코스터와 바이킹 중 어느 것도 이용하지 않은 입장객의 집합은 $A^c \cap B^c$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 60 - n(A \cup B) \end{aligned}$$

$n(A^c \cap B^c)$ 이 최대인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최소일 때이다. 즉, $B \subset A$ 이어야 하므로

$$n(A \cup B) = n(A) = 46$$

$$\therefore n(A^c \cap B^c) = 60 - 46 = 14 \quad \therefore M = 14$$

또, $n(A^c \cap B^c)$ 이 최소인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이다. 즉, $A \cup B = U$ 이어야 하므로

$$n(A \cup B) = n(U) = 60$$

$$\therefore n(A^c \cap B^c) = 60 - 60 = 0 \quad \therefore m = 0$$

$$\therefore M - m = 14 - 0 = 14$$

답 ①

변형유형 집중공략

p.118~119

- 1-1 $A \cap B = \{4\}$ 에서 $4 \in A$ 이므로

$$a+4=4 \text{ 또는 } a^2+3=4$$

$$a=0 \text{ 또는 } a^2=1 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=\pm 1$$

(i) $a=0$ 일 때, $A = \{3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ 이므로

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-1$ 일 때, $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 4, 6\}$ 이므로

$$A \cap B = \{4\}, A \cup B = \{1, 3, 4, 6\}$$

즉, 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a=1$ 일 때, $A = \{4, 5\}$, $B = \{0, 3, 4\}$ 이므로

$$A \cup B = \{0, 3, 4, 5\}$$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

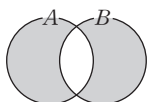
(i), (ii), (iii)에서 $a=-1$

답 -1

- 1-2 집합 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$3 \in A \text{에서 } 3 \in (A \cup B) \text{이고,}$$

$$3 \notin \{(A \cup B) - (A \cap B)\} \text{이므로 } 3 \in (A \cap B) \text{이다.}$$



따라서 $3 \in B$ 이므로 $-a+1=3$ 또는 $-a+6=3$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

(i) $a=-2$ 일 때, $A=\{-4, 3, 8\}$, $B=\{3, 8\}$ 이므로

$$A \cap B = \{3, 8\}, A \cup B = \{-4, 3, 8\} = A$$

$$\therefore (A \cup B) - (A \cap B) = \{-4\}$$

(ii) $a=3$ 일 때, $A=\{3, 6, 13\}$, $B=\{-2, 3\}$ 이므로

$$A \cap B = \{3\}, A \cup B = \{-2, 3, 6, 13\}$$

$$\therefore (A \cup B) - (A \cap B) = \{-2, 6, 13\}$$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-2$, $A \cup B = \{-4, 3, 8\}$ 이므로 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은

$$-4+3+8=7$$

답 ②

2-1 $A \cap B = \{3, 4, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$(A \cap B) - X = \emptyset \text{에서 } (A \cap B) \subset X$$

$$(A \cup B) \cap X = X \text{에서 } X \subset (A \cup B)$$

$$\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$$

즉, 집합 X 는 집합 $A \cup B$ 의 부분집합 중에서 3, 4, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

그런데 집합 X 의 모든 원소의 합이 35이고, $3+4+5=12$ 이므로 3, 4, 5를 제외한 집합 X 의 나머지 원소의 합은 23이다.

1, 2, 6, 7, 8 중에서 몇 개의 수를 선택하여 그 합이 23이 되는 경우는 $2+6+7+8=23$ 인 경우뿐이므로

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

따라서 집합 X 의 원소의 개수는 7이다.

답 7

2-2 $B - A = \{-1\}$ 이고

$$(B - A) \cup X = X \text{에서 } (B - A) \subset X$$

$$\therefore \{-1\} \subset X \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{또, } A \cup X = X \text{에서 } A \subset X \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 집합 X 는 $-1, 0, 1$ 을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

그런데 집합 X 의 모든 원소의 합이 1이고, $-1+0+1=0$ 이므로 $-1, 0, 1$ 을 제외한 집합 X 의 나머지 원소의 합은 1이다.

$-3, -2, 2, 3$ 중에서 몇 개의 수를 선택하여 그 합이 1이 되는 경우는 $-2+3=1$ 인 경우뿐이므로

$$X = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$$

따라서 집합 X 의 원소의 개수는 5이다.

답 5

서술형 What & How

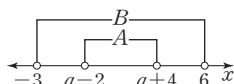
p.120~123

1 $x^2-3x-18 < 0$ 에서 $(x+3)(x-6) < 0$

$$\therefore -3 < x < 6$$

$A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B

를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$a-2 \geq -3, a+4 \leq 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a-2 \geq -3 \text{에서 } a \geq -1 \quad \dots\dots ㉡$$

$$a+4 \leq 6 \text{에서 } a \leq 2 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 } -1 \leq a \leq 2 \quad \dots\dots ㉣$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

답 4

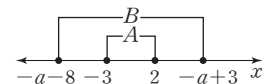
2 $(x+a+8)(x+a-3) \leq 0$ 에서

$$-a-8 \leq x \leq -a+3$$

$$A \cap B = A \text{에서 } A \subset B$$

$A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B

를 수직선 위에 나타내면 오른쪽



그림과 같으므로

$$-a-8 \leq -3, -a+3 \geq 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$-a-8 \leq -3 \text{에서 } a \geq -5 \quad \dots\dots ㉡$$

$$-a+3 \geq 2 \text{에서 } a \leq 1 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$$-5 \leq a \leq 1 \quad \dots\dots ㉣$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 1, 최솟값은 -5 이므로 그 합은

$$1 + (-5) = -4$$

답 -4

채점기준	배점
① $A \cap B = A$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내고 a 에 대한 연립부등식 세우기	2
② a 의 값의 범위 구하기	2
③ 정수 a 의 최댓값과 최솟값의 합 구하기	1

3 $A \subset B, B \subset A$ 에서 $A=B$

$A=B$ 이고 $2 \in B$ 이므로 $2 \in A$ 이어야 한다.

즉, $a^2-a=2$ 에서

$$a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2 \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $a=-1$ 일 때, $A=\{-1, 2, 4\}$, $B=\{-4, -2, 2\}$ 이므로

$$A \neq B \quad \dots\dots ㉡$$

(ii) $a=2$ 일 때, $A=\{-1, 2, 4\}$, $B=\{-1, 2, 4\}$ 이므로

$$A=B \quad \dots\dots ㉢$$

(i), (ii)에서 $a=2$

답 2

4 $A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A=B$

$A=B$ 이고 $3 \in A$ 이므로 $3 \in B$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } b=3 \text{ 또는 } a-4=3 \quad \therefore a=7 \text{ 또는 } b=3 \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $a=7$ 일 때, $A=\{3, 14, b-1\}$, $B=\{3, 6, b\}$

$$A=B \text{이므로}$$

$$6 \in A \text{에서 } b-1=6 \quad \therefore b=7 \quad \dots\dots ㉡$$

$$14 \in B \text{에서 } b=14 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢은 동시에 성립하지 않으므로 $A=B$ 가 성립하지 않는다.

답 2

(ii) $b=3$ 일 때, $A=\{a^2-5a, 2, 3\}$, $B=\{3, 6, a-4\}$

$A=B$ 이므로

$6 \in A$ 에서 $a^2-5a=6$

$a^2-5a-6=0$, $(a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=6$ ㉔

$2 \in B$ 에서 $a-4=2$

$\therefore a=6$ ㉕

㉔, ㉕에서 $a=6$

이때 $A=\{2, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 6\}$ 이므로

$A=B$ ㉖

(i), (ii)에서 $a=6$, $b=3$ 이므로

$a+b=6+3=9$ ㉗

답 9

채점기준	배점
① $3 \in B$ 임을 설명하고 a, b 의 값이 될 수 있는 수 구하기	1
② $a=7$ 일 때 두 집합 A, B 의 포함 관계 구하기	2
③ $b=3$ 일 때 두 집합 A, B 의 포함 관계 구하기	2
④ a, b 의 값과 $a+b$ 의 값 구하기	1

5 두 조건 (가), (나)에서 집합 A 의 원소는 12의 양의 약수이다.

이때 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이고, 조건 (나)에서 1과 12, 2와 6, 3과 4는 어느 하나가 A 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A 의 원소이다. ㉘

따라서 공집합이 아닌 집합 A 의 개수는 집합 $\{1, 2, 3\}$ 의 부분집합 중 공집합이 아닌 집합의 개수와 같으므로

$2^3-1=7$ ㉙

답 7

6 조건 (나)에서 $5 \in B$ 이므로 조건 (다)에서

$\frac{20}{5}=4 \in B$

즉, 집합 B 는 4, 5를 반드시 원소로 갖는다.

또, 조건 (다)에서 1과 20, 2와 10은 어느 하나가 B 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 B 의 원소이다. ㉚

따라서 집합 B 의 개수는 집합 $\{1, 2\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^2=4$ ㉛

답 4

채점기준	배점
① 집합 B 의 원소의 조건 설명하기	4
② 집합 B 의 개수 구하기	3

참고 집합 B 가 될 수 있는 집합은

$\{4, 5\}$, $\{1, 4, 5, 20\}$, $\{2, 4, 5, 10\}$, $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

의 4개이다.

7 $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ ㉜

$A-X=\emptyset$ 에서 $A \subset X$

$B \cap X=X$ 에서 $X \subset B$

$\therefore A \subset X \subset B$ ㉝

따라서 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 3, 9를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$2^{9-3}=2^6=64$ ㉞

답 64

8 $U=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ ㉟

전체집합 U 의 부분집합 X 에 대하여

$\{1, 2\} \cup X = \{2, 6, 8\} \cup X$

이므로 집합 X 는 두 집합 $\{1, 2\}$, $\{2, 6, 8\}$ 의 원소 중 공통인 원소 2를 제외한 1, 6, 8을 반드시 원소로 갖는 집합이다. ㊱

따라서 집합 X 의 개수는

$2^{8-3}=2^5=32$ ㊲

답 32

채점기준	배점
① 전체집합 U 를 원소나열법으로 나타내기	1
② 집합 X 가 반드시 갖는 원소 구하기	3
③ 집합 X 의 개수 구하기	2

참고 $A \cup X = B \cup X$ 에서

$(A \cup X) \subset (B \cup X)$ 이고 $(B \cup X) \subset (A \cup X)$

$\therefore (A \cup X) - (B \cup X) = \emptyset$ 이고 $(B \cup X) - (A \cup X) = \emptyset$

$(A \cup X) - (B \cup X) = \emptyset$ 에서 $(A \cup X) \cap (B \cup X)^c = \emptyset$

$(A \cup X) \cap (B^c \cap X^c) = \emptyset$

$\{A \cap (B^c \cap X^c)\} \cup \{X \cap (B^c \cap X^c)\} = \emptyset$

$(A \cap B^c \cap X^c) \cup \emptyset = \emptyset$, $A \cap B^c \cap X^c = \emptyset$

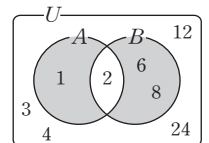
$(A-B)-X = \emptyset \quad \therefore (A-B) \subset X$

같은 방법으로 $(B \cup X) - (A \cup X) = \emptyset$ 에서 $(B-A) \subset X$

따라서 $(A-B) \subset X$ 이고 $(B-A) \subset X$ 이므로

$\{(A-B) \cup (B-A)\} \subset X$

즉, 집합 X 는 색깔한 부분이 나타내는 집합의 원소를 반드시 원소로 가져야 한다.



실전 문제 | 1회

p.124~128

01 ‘진한’, ‘가까운’, ‘아름다운’, ‘귀여운’은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다. ㉞

02 집합 A 의 원소 중 3의 배수인 것은 3, 9이다.

집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5=32$

집합 A 의 부분집합 중에서 3, 9를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 $2^{5-2}=8$

따라서 집합 A 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 3의 배수를 원소로 갖는 집합의 개수는

$32-8=24$ ㉟

답 24

03 $\neg$. 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$ (참)

ㄴ. $5 \notin A$ 이므로 $\{3, 5\} \not\subset A$ (거짓)

ㄷ. 집합 A 의 원소는 4개이므로 부분집합의 개수는

$$2^4 = 16 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$ 이다.

답 ①

참고 $\neg$. $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이기도 하므로 $\emptyset \in A$ 도 참이다.

04 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 이므로

$$B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 18, 19\}$$

$$\therefore B^c - A^c = B^c \cap A$$

$$= A - B$$

$$= \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$$

따라서 집합 $B^c - A^c$ 의 모든 원소의 합은

$$3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 = 56$$

답 ③

05 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$B^c = \{3, 6, 7, 8\} \text{이므로}$$

$$B = (B^c)^c = \{1, 2, 4, 5, 9, 10\}$$

이때 $A \cap B = \{1, 9\}$ 이므로

$$B - A = B - (A \cap B) = \{2, 4, 5, 10\}$$

또, $A - B = \{3, 8\}$ 이므로 주어진 조건을 만족시키도록 벤 다이어그램을 그리면 오른쪽 그림과 같다.

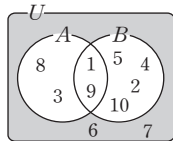
따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합은

$$U - (A \cup B) = \{6, 7\}$$

이므로 구하는 모든 원소의 합은

$$6 + 7 = 13$$

답 ①



06 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$

$\{a, c, e\} \subset X$, 즉 a, c, e 를 반드시 원소로 갖는 집합 X 의 개수는 $2^{6-3} = 8$

따라서 $\{a, c, e\} \not\subset X$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는

$$64 - 8 = 56$$

답 ④

07 집합 S 의 원소는 자연수이므로 조건 ㉠에서 집합 S 의 원소는 32의 양의 약수이다. 이때 32의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16, 32이고, 조건 ㉡에서 1과 32, 2와 16, 4와 8은 어느 하나가 집합 S 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 S 의 원소이다.

따라서 공집합이 아닌 집합 S 의 개수는 집합 $\{1, 2, 4\}$ 의 부분집합 중 공집합이 아닌 집합의 개수와 같으므로

$$2^3 - 1 = 7$$

답 ②

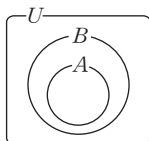
08 ① $B^c \subset A^c$ 에서 $A \subset B \therefore A \cup B = B$

$$\textcircled{2} A^c - B^c = A^c \cap B = B \cap A^c$$

$$= B - A \neq \emptyset$$

③ $B^c \subset A^c$ 에서 $A \subset B$ 이므로 $A - B = \emptyset$

$$\therefore A^c \cup B = (A \cap B^c)^c = (A - B)^c = \emptyset^c = U$$



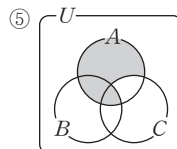
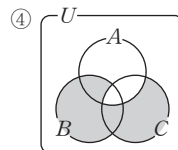
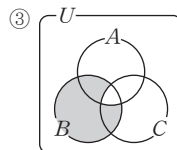
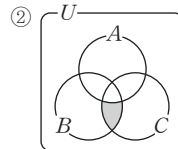
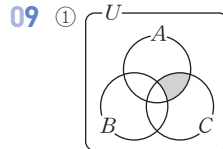
④ $A \subset B$ 이므로 $A \cap B = A$

⑤ ①에서 $A \cup B = B$ 이므로

$$(A \cup B) \cap B^c = (A \cup B) - B = B - B = \emptyset$$

따라서 항상 옳은 것이 아닌 것은 ②이다.

답 ②



따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 ③이다.

답 ③

다른풀이 색칠한 부분이 나타내는 집합은

$$B - (A \cap C) = B \cap (A \cap C)^c = B \cap (A^c \cup C^c)$$

10 $A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A = B$

$$A = B \text{이고 } 2 \in B \text{이므로 } 2 \in A$$

즉, $x=2$ 는 방정식 $ax^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해이므로

$$4a - 10 + 6 = 0, 4a = 4 \therefore a = 1$$

$a=1$ 을 $ax^2 - 5x + 6 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore A = \{2, 3\}$$

이때 $A = B$ 이고 $3 \in A$ 이므로 $3 \in B$

$$\therefore b=3$$

$$\therefore a+b=1+3=4$$

답 ③

11 $x^2 - 5x + 4 < 0$ 에서 $(x-1)(x-4) < 0$

$$\therefore 1 < x < 4$$

$$x^2 - (a+3)x + 3a < 0 \text{에서 } (x-a)(x-3) < 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $A \cap B = B$ 에서 $B \subset A$

(i) $a > 3$ 일 때, $B \subset A$ 가 성립하려면

두 집합 A, B 는 오른쪽 그림과

같아야 하므로 $a \leq 4$

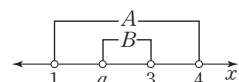
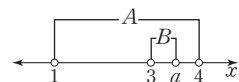
그런데 $a > 3$ 이므로 $3 < a \leq 4$

(ii) $a < 3$ 일 때, $B \subset A$ 가 성립하려면

두 집합 A, B 는 오른쪽 그림과

같아야 하므로 $a \geq 1$

그런데 $a < 3$ 이므로 $1 \leq a < 3$



(iii) $a=3$ 일 때, ㉠에서 $(x-3)^2 < 0$

이 부등식의 해는 없으므로 $B=\emptyset$ 이다. 즉, $B \subset A$ 가 항상 성립한다.

(i), (ii), (iii)에서 $1 \leq a \leq 4$ 이므로 실수 a 의 최솟값은 1이다.

답 ②

- 12 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서
 $17 = 13 + 8 - n(A \cap B) \quad \therefore n(A \cap B) = 4$
 이때 $A \cap (A \cap B)^c = A - (A \cap B) = A - B$ 이므로
 $n(A \cap (A \cap B)^c) = n(A - B)$
 $= n(A) - n(A \cap B)$
 $= 13 - 4 = 9$

참고1 $n(A - B) \neq n(A) - n(B)$ 임에 주의한다.

참고2 $(A - B) \cup (A \cap B) = A, (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$
 이므로

$$\begin{aligned} n(A) &= n((A - B) \cup (A \cap B)) \\ &= n(A - B) + n(A \cap B) - n((A - B) \cap (A \cap B)) \\ &= n(A - B) + n(A \cap B) - n(\emptyset) \\ &= n(A - B) + n(A \cap B) \\ \therefore n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

다른풀이 $A \cap (A \cap B)^c = A - (A \cap B)$
 $= A - B = (A \cup B) - B$

이므로

$$\begin{aligned} n(A \cap (A \cap B)^c) &= n((A \cup B) - B) \\ &= n(A \cup B) - n(B) \\ &= 17 - 8 = 9 \end{aligned}$$

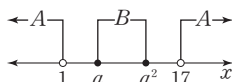
- 13 $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c)$
 $= (A \cup B) \cap (A \cup A^c)$
 $= (A \cup B) \cap U$
 $= A \cup B$
 이므로 $A \cup B = B \quad \therefore A \subset B \quad \dots\dots ㉠$
 $(A^c \cup B^c) \cap C = (A \cap B)^c \cap C$
 $= A^c \cap C \quad (\because ㉠에서 A \cap B = A)$
 $= C - A$

이므로 $C - A = \emptyset \quad \therefore C \subset A \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡에서 $C \subset A \subset B$

답 ④

- 14 $(x-1)(x-17) > 0$ 에서 $x < 1$ 또는 $x > 17$
 1이 아닌 자연수 a 에 대하여 $a < a^2$ 이므로 $(x-a)(x-a^2) \leq 0$
 에서
 $a \leq x \leq a^2$
 $A \cap B = \emptyset$ 이 성립하려면 두 집합 A, B 는 오른쪽 그림과 같아야 하므로
 $a \geq 1, a^2 \leq 17$



$a^2 \leq 17$ 에서 $-\sqrt{17} \leq a \leq \sqrt{17}$

$\therefore 1 \leq a \leq \sqrt{17}$

그런데 $a \neq 1$ 이므로 $1 < a \leq \sqrt{17}$

따라서 자연수 a 는 2, 3, 4이므로 모든 자연수 a 의 값의 합은

$$2 + 3 + 4 = 9$$

답 ④

- 15 $A_3 \cap (A_2 \cup A_5) = (A_3 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_5)$
 $= A_6 \cup A_{15}$
 $\therefore n(A_6 \cup A_{15}) = n(A_6) + n(A_{15}) - n(A_6 \cap A_{15})$
 $= n(A_6) + n(A_{15}) - n(A_{30})$
 $= 16 + 6 - 3 = 19$

답 ②

- 16 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d}$ 가 자연수이므로 a, b, c, d 는 모두 자연수의 제곱인 수이다.

이때 $a < b < c < d, a + b = 13$ 이므로

$$a = 4, b = 9$$

$$\therefore A = \{4, 9, c, d\}, B = \{2, 3, \sqrt{c}, \sqrt{d}\}$$

또, $A \cap B = \{4, 9\}$ 이므로

$$\sqrt{c} = 4, \sqrt{d} = 9 \quad \therefore c = 16, d = 81$$

$$\therefore a + d = 4 + 81 = 85$$

답 ④

- 17 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 의 원소 a, b

에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하면

오른쪽 표와 같으므로

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

따라서 전체집합 U 와 두 부분집합 A, B 를

벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 $A \cap X = B \cap X$ 이므로 집합 $A - B$

의 원소와 집합 $B - A$ 의 원소는 집합 X 의 원소가 될 수 없다.

즉, 집합 X 는 1, 4, 5, 6 중 어느 것도 원소로 가질 수 없으므로

집합 X 가 될 수 있는 집합 중 원소의 합이 가장 큰 것은

$$X = \{2, 3, 7, 8, 9\}$$

따라서 집합 X 의 모든 원소의 합의 최댓값은

$$2 + 3 + 7 + 8 + 9 = 29$$

답 ⑤

참고 $A \cap X = B \cap X$ 에서

$(A \cap X) \subset (B \cap X)$ 이고 $(B \cap X) \subset (A \cap X)$

$$\therefore (A \cap X) - (B \cap X) = \emptyset \text{이고 } (B \cap X) - (A \cap X) = \emptyset$$

$$(A \cap X) - (B \cap X) = \emptyset \text{에서}$$

$$(A \cap X) \cap (B \cap X)^c = \emptyset$$

$$(A \cap X) \cap (B^c \cup X^c) = \emptyset$$

$$\{(A \cap X) \cap B^c\} \cup \{(A \cap X) \cap X^c\} = \emptyset$$

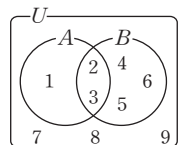
$$(A \cap X) \cap B^c = \emptyset, (A \cap B^c) \cap X = \emptyset$$

$$\therefore (A - B) \cap X = \emptyset$$

같은 방법으로 $(B \cap X) - (A \cap X) = \emptyset$ 에서

$$(B - A) \cap X = \emptyset$$

$a \setminus b$	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6



따라서 $(A-B) \cap X = \emptyset$, $(B-A) \cap X = \emptyset$ 이므로 집합 X 는 두 집합 $A-B$, $B-A$ 의 원소 중 어떤 것도 원소로 갖지 않는다.

- 18 $\neg$. $M(X)=4$ 를 만족시키는 집합 X 는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 4를 반드시 원소로 갖고, 5는 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{5-1-1}=2^3=8$$

$M(X)=5$ 를 만족시키는 집합 X 는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 5를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{5-1}=2^4=16$$

따라서 $M(X) \geq 4$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는

$$8+16=24 \text{ (참)}$$

- $\neg$. 원소의 최댓값이 3이고, 원소의 개수가 2인 집합 X 는

$$\{1, 3\}, \{2, 3\}$$

의 2개이다. (참)

- $\neg$. 집합 X 는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 2, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{5-2}=2^3=8 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ⑤

- 19 집합 $\left\{\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^9}\right\}$ 의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합의 개수는

$$2^8-1=255 \text{이므로 } n=255$$

집합 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{255}$ 중에서

가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^2}$ 인 집합은 $\left\{\frac{1}{2^2}\right\}$ 의 1개

가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^3}$ 인 집합은 $\frac{1}{2^3}$ 을 반드시 원소로 갖고 $\frac{1}{2^4},$

$\frac{1}{2^5}, \dots, \frac{1}{2^9}$ 은 원소로 갖지 않는 집합이므로 그 개수는

$$2^{8-1-6}=2$$

가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^4}$ 인 집합은 $\frac{1}{2^4}$ 을 반드시 원소로 갖고 $\frac{1}{2^5},$

$\frac{1}{2^6}, \dots, \frac{1}{2^9}$ 은 원소로 갖지 않는 집합이므로 그 개수는

$$2^{8-1-5}=2^2$$

:

가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^9}$ 인 집합은 $\frac{1}{2^9}$ 을 반드시 원소로 갖는 집합이

므로 그 개수는 $2^{8-1}=2^7$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+\dots+a_{255}$$

$$=\frac{1}{2^2} \times 1 + \frac{1}{2^3} \times 2 + \frac{1}{2^4} \times 2^2 + \dots + \frac{1}{2^8} \times 2^6 + \frac{1}{2^9} \times 2^7$$

$$=\frac{1}{4} \times 8=2$$

답 ②

- 20 집합 $A_5 \cap A_m$ 은 5와 m 의 공배수인 50 이하의 자연수의 집합이다.

- (i) $m(m>5)$ 이 5의 배수일 때

$$A_5 \cap A_m = A_m \text{이므로}$$

$$n(A_5 \cap A_m) = n(A_m) \geq 3 \text{이어야 한다.}$$

$$m=10, 15, 20, \dots, 50 \text{일 때,}$$

$$A_{10}=\{10, 20, 30, 40, 50\} \quad \therefore n(A_{10})=5$$

$$A_{15}=\{15, 30, 45\} \quad \therefore n(A_{15})=3$$

$$A_{20}=\{20, 40\} \quad \therefore n(A_{20})=2$$

:

따라서 조건을 만족시키는 m 은 10, 15의 2개이다.

- (ii) $m(m>5)$ 이 5의 배수가 아닐 때

$$A_5 \cap A_m = A_{5m} \text{이므로}$$

$$n(A_5 \cap A_m) = n(A_{5m}) \geq 3 \text{이어야 한다.}$$

$$m=6, 7, 8, 9, 11, 12, \dots \text{일 때}$$

$$A_{30}=\{30\} \quad \therefore n(A_{30})=1$$

$$A_{35}=\{35\} \quad \therefore n(A_{35})=1$$

:

따라서 조건을 만족시키는 5보다 큰 자연수 m 은 없다.

- (i), (ii)에서 자연수 m 은 10, 15의 2개이다.

답 ②

- 21 학생 전체의 집합을 U , 교통 안전 지도를 한 학생의 집합을 A , 멘토링 지도를 한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=30, n(A)=19, n(B)=17$$

이때 교통 안전 지도와 멘토링 지도를 모두 한 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.

$n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $B \subset A$ 일 때이므로

$$n(A \cap B) = n(B) = 17 \quad \therefore M=17$$

$n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $A \cup B = U$ 일 때이므로

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(U)$$

$$= 19 + 17 - 30 = 6$$

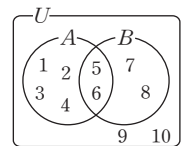
$$\therefore m=6$$

$$\therefore M+m=17+6=23$$

답 ②

- 22 $U=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$

세 집합 U, A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



조건 (ㄱ)에서 두 집합 $A-B, B-A$ 의 원

소는 모두 집합 X 에 속해야 한다. 즉, 집합 X 는 1, 2, 3, 4, 7, 8을 반드시 원소로 가져야 한다. ①

또, 조건 (ㄴ)에서

$$(X-A) \cap (X-B) = (X \cap A^c) \cap (X \cap B^c)$$

$$= X \cap A^c \cap X \cap B^c$$

$$= X \cap A^c \cap B^c$$

$$= X \cap (A \cup B)^c$$

$$= X - (A \cup B) \neq \emptyset$$

이므로 $9 \in X$ 또는 $10 \in X$ 이다.

..... ②

(i) $9 \in X, 10 \notin X$ 일 때

㉠에서 $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\} \subset X$ 이고, $n(X)=8$ 이므로 5 또는 6 중 하나가 집합 X 의 원소이어야 한다.

따라서 집합 X 는

$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ 의 2개이다.

(ii) $9 \notin X, 10 \in X$ 일 때

(i)과 같은 방법으로 집합 X 는 2개이다.

(iii) $9 \in X, 10 \in X$ 일 때

$\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\} \subset X$ 이고 $n(X)=8$ 이므로 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$ 의 1개 ③

(i), (ii), (iii)에서 집합 X 의 개수는

$2+2+1=5$ ④

답 5

채점기준	배점
① 집합 X 가 1, 2, 3, 4, 7, 8을 반드시 원소로 가져야 함을 설명하기	2
② 9 또는 10이 집합 X 의 원소임을 설명하기	2
③ 각 경우에 따라 집합 X 의 개수 구하기	2
④ 집합 X 의 개수 구하기	1

참고 $A - X = B - X$ 에서

$(A - X) \subset (B - X)$ 이고 $(B - X) \subset (A - X)$

$\therefore (A - X) - (B - X) = \emptyset$ 이고 $(B - X) - (A - X) = \emptyset$

$(A - X) - (B - X) = \emptyset$ 에서 $(A \cap X^c) \cap (B \cap X^c)^c = \emptyset$

$(A \cap X^c) \cap (B^c \cup X) = \emptyset$

$\{(A \cap X^c) \cap B^c\} \cup \{(A \cap X^c) \cap X\} = \emptyset$

$(A \cap X^c) \cap B^c = \emptyset, (A \cap B^c) \cap X^c = \emptyset$

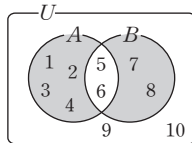
$(A - B) - X = \emptyset \therefore (A - B) \subset X$

같은 방법으로 $(B - X) - (A - X) = \emptyset$ 에서 $(B - A) \subset X$

따라서 $(A - B) \subset X$ 이고 $(B - A) \subset X$ 이므로

$\{(A - B) \cup (B - A)\} \subset X$

즉, 집합 X 는 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소를 반드시 원소로 가져야 한다.



23 학생 100명 전체의 집합을 U , 놀이공원, 박물관, 고궁을 선호한다고 답한 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하면

$n(U)=100, n(A)=40, n(B)=55,$

$n(A \cap B)=22, n(A^c \cap B^c \cap C^c)=8$

이므로

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 40 + 55 - 22 = 73$ ①

$n(A \cup B \cup C) = n(U) - n((A \cup B \cup C)^c)$

$= n(U) - n(A^c \cap B^c \cap C^c)$

$= 100 - 8 = 92$ ②

이때 고궁만을 선호한다고 답한 학생의 집합은

$C - (A \cup B) = (A \cup B \cup C) - (A \cup B)$

이므로 ③

$n((A \cup B \cup C) - (A \cup B))$

$= n(A \cup B \cup C) - n(A \cup B) (\because (A \cup B) \subset (A \cup B \cup C))$

$= 92 - 73 = 19$

따라서 고궁만을 선호한다고 답한 학생은 19명이다. ④

답 19

채점기준	배점
① 학생 100명 전체의 집합을 U , 놀이공원, 박물관, 고궁을 선호한다고 답한 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하고, $n(A \cup B)$ 구하기	1
② $n(A \cup B \cup C)$ 구하기	1
③ 고궁만을 선호한다고 답한 학생의 집합을 A, B, C 로 나타내기	2
④ 고궁만을 선호한다고 답한 학생 수 구하기	3

참고 $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$ 이므로

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$= n(A) - n(B)$

실전 문제 | 2회

p.129 ~ 133

01 집합 A, B 의 각각의 원소 a, b

에 대하여 ab 의 값을 구하면 오

른쪽 표와 같으므로

$P = \{-6, -4, -2, 4, 8, 12\}$

따라서 집합 P 의 모든 원소의 합은

$-6 + (-4) + (-2) + 4 + 8 + 12 = 12$

답 ②

$a \backslash b$	2	4	6
-1	-2	-4	-6
2	4	8	12

02 조건 (가), (나)에서

$2 \in A$ 이므로 $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$

$-1 \in A$ 이므로 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$

$\frac{1}{2} \in A$ 이므로 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A$

$\vdots$

즉, 집합 A 는 $2, -1, \frac{1}{2}$ 을 반드시 원소로 가지므로 집합 A 중에서 원소의 개수가 최소인 집합은

$A = \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$

따라서 $n(A)$ 의 최솟값은 3이다.

답 ③

03 오른쪽 그림에서

$A - B = \{x | x \leq -1 \text{ 또는 } 1 < x < 2\}$

$(A - B) \cap C = C$ 에서 $C \subset (A - B)$

가 성립하려면 두 집합 $A - B, C$ 는 다음 그림과 같아야 하므로



$$k+3 \leq -1 \quad \therefore k \leq -4$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -4 이다.

답 ②

참고 $k-1 < x < k+3$ 에서 x 의 값의 범위의 간격이 4이므로

$k-1 < x < k+3$ 은 $1 < x < 2$ 안에 포함될 수 없다.

04 $A = \{1, 3, 5, \dots, 19\}$, $B = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$ 이므로

$$A^c - B^c = A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B = B \cap A^c = B - A \\ = \{4, 10, 16\}$$

따라서 집합 $A^c - B^c$ 의 모든 원소의 합은

$$4 + 10 + 16 = 30$$

답 ①

05 집합 A 의 원소 중 짝수는 2, 4이다.

집합 A 의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖고, 4는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$$2^{5-1-1} = 2^3 = 8$$

집합 A 의 부분집합 중에서 4를 반드시 원소로 갖고, 2는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$$2^{5-1-1} = 2^3 = 8$$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$8 + 8 = 16$$

답 ③

06 조건 (가)에서 $A \subset X$

조건 (나)에서 $X \subset B^c$

$$\therefore A \subset X \subset B^c$$

즉, 집합 X 는 집합 B^c 의 부분집합 중에서 집합 A 의 원소 1, 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

이때 $B^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{7-4} = 2^3 = 8$$

답 ③

07 $x^2 - 4x + 3 < 0$ 에서 $(x-1)(x-3) < 0$

$$\therefore 1 < x < 3$$

$$|x-k| \leq 2 \text{에서 } -2 \leq x-k \leq 2$$

$$\therefore k-2 \leq x \leq k+2$$

$A \subset B$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$k-2 \leq 1, 3 \leq k+2$$

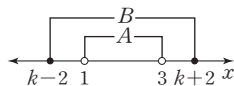
$$k-2 \leq 1 \text{에서 } k \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$3 \leq k+2 \text{에서 } k \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $1 \leq k \leq 3$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ③



08 $A = \{1, 2\}$ 이고 $A - B = \{2\}$ 이므로 $1 \in (A \cap B)$

따라서 $1 \in B$ 이어야 하므로 방정식 $x^3 - ax - a^2 + 1 = 0$ 의 근이 $x=1$ 이다. 즉,

$$1 - a - a^2 + 1 = 0, a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

(i) $a = -2$ 일 때,

$$x^3 + 2x - 3 = 0 \text{에서 } (x-1)(x^2 + x + 3) = 0$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore B = \{1\}$$

즉, $A - B = \{2\}$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a = 1$ 일 때,

$$x^3 - x = 0 \text{에서 } x(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore B = \{-1, 0, 1\}$$

즉, $A - B = \{2\}$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a = -2$ 또는 $a = 1$ 이므로 모든 실수 a 의 값의 합은 $-2 + 1 = -1$

답 ②

09 ① $(A - B^c)^c \cap A = (A \cap B)^c \cap A$

$$= A \cap (A \cap B)^c$$

$$= A - (A \cap B)$$

$$= A - B$$

② $A \cap B = A \cap (B^c)^c = A - B^c = \emptyset$ 이므로 $A \subset B^c$

③ $A \cup (A \cap B)^c = A \cup (A^c \cup B^c)$

$$= (A \cup A^c) \cup B^c$$

$$= U \cup B^c = U$$

④ $(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)$

$$= A \cap B^c \cap A \cap C^c$$

$$= A \cap B^c \cap C^c$$

$$= A \cap (B^c \cap C^c)$$

$$= A \cap (B \cup C)^c$$

$$= A - (B \cup C)$$

⑤ $(A \cup B) \cap (A - B)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup (B^c)^c)$

$$= (A \cup B) \cap (A^c \cup B)$$

$$= (A \cap A^c) \cup B$$

$$= \emptyset \cup B$$

$$= B$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

10 $\neg$. 두 집합 A, B^c 이 서로소이므로 $A \cap B^c = \emptyset$

$$\therefore A - B = \emptyset \text{ (참)}$$

$\sqsubset$. $\neg$ 에서 $A \subset B$ 이므로 $A \cap B = A$

$$\therefore (A \cap B)^c = A^c \text{ (참)}$$

$\sqsupset$. $(A^c \cup B) \cap A = (A \cap A^c) \cup (A \cap B)$

$$= \emptyset \cup A \text{ (} \because A \cap B = A \text{)}$$

$$= A \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.

답 ②

11 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이고

$$A \cup B^c = (A^c \cap B)^c = \{1, 3, 4, 5, 7, 10\}$$
이므로

$$A^c \cap B = \{2, 6, 8, 9\} \quad \therefore B - A = B \cap A^c = \{2, 6, 8, 9\}$$

$$\{(A-B) \cup (A \cap B)\} \cap \{(A-B)^c \cap (A \cup B)\} = \{3, 5\}$$

에서

$$(A-B) \cup (A \cap B) = A,$$

$$\begin{aligned} (A-B)^c \cap (A \cup B) &= (A \cup B) \cap (A-B)^c \\ &= (A \cup B) - (A-B) \\ &= B \end{aligned}$$

이므로 $A \cap B = \{3, 5\}$

$$\therefore B = (B \cap A) \cup (B - A)$$

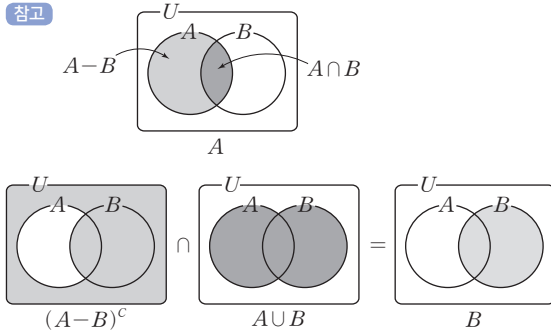
$$= \{3, 5\} \cup \{2, 6, 8, 9\}$$

$$= \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$$

따라서 집합 B 의 원소의 개수는 6이다.

답 ③

참고



$$12 \quad \{(A^c \cap B^c) \cup (B-A)\} \cup B^c$$

$$= \{(A^c \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\} \cup B^c$$

$$= \{A^c \cap (B^c \cup B)\} \cup B^c$$

$$= (A^c \cap U) \cup B^c$$

$$= A^c \cup B^c$$

$$\text{이므로 } A^c \cup B^c = A^c \quad \therefore B^c \subset A^c \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\therefore A \subset B$$

$$\textcircled{1} \textcircled{7} \text{에서 } A^c \cap B^c = B^c$$

$$\textcircled{2} \quad B \cap A^c = B - A \neq \emptyset$$

$$\textcircled{3} \textcircled{2} \text{에서 } B - A \neq \emptyset \text{이므로}$$

$$A \cup B^c = (A^c \cap B)^c = (B-A)^c \neq U$$

$$\textcircled{4} \quad A \subset B \text{이므로 } A-B = \emptyset$$

$$\textcircled{5} \quad A^c \cup B = (A \cap B^c)^c = (A-B)^c = \emptyset^c = U \quad (\because \textcircled{4}) = U \quad \text{답 ④}$$

참고 ①, ②, ③ $B \subset A$ 일 때 성립한다.

$$13 \quad A_2 \cap A_7 = A_{14} \text{이므로}$$

$$A_m \subset (A_2 \cap A_7) \text{에서 } A_m \subset A_{14}$$

즉, m 은 14의 배수이어야 하므로 m 의 최솟값은 14이다.

$$\text{또, } (A_{12} \cup A_{18}) \subset A_n \text{에서 } A_{12} \subset A_n, A_{18} \subset A_n$$

즉, n 은 12와 18의 공약수이어야 하므로 n 의 최댓값은 12와 18의 최대공약수인 6이다.

따라서 m 의 최솟값과 n 의 최댓값의 합은

$$14 + 6 = 20$$

답 ④

14 조건 (가), (나)에서 집합 S 는 원소가 두 개 이상인 집합 A 의 부분집합이고, 조건 (다)에서 집합 S 는 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는다.

즉, 집합 S 의 개수는 원소가 두 개 이상인 집합 A 의 부분집합의 개수에서 홀수만을 원소로 갖는 부분집합의 개수를 뺀 것이다.

원소가 두 개 이상인 집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^5 - 5 - 1 = 26$$

원소가 두 개 이상인 집합 A 의 부분집합 중 홀수만을 원소로 갖는 것의 개수는

$$2^3 - 3 - 1 = 4$$

따라서 집합 S 의 개수는

$$26 - 4 = 22$$

답 ④

다른풀이 집합 S 의 개수는 집합 A 의 부분집합의 개수에서

$\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 $\{2\}$, $\{4\}$ 의 개수를 빼면 되므로

$$2^5 - 2^3 - 2 = 22$$

$$15 \quad X \cup A = A \text{에서 } X \subset A, X \cap C = C \text{에서 } C \subset X$$

$$\therefore C \subset X \subset A$$

집합 $A = \{(x, y) \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ 의 원소의 개수는 x, y 의 값이 될 수 있는 것이 각각 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개씩이므로

$$5 \times 5 = 25$$

$C = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ 이므로 집합 C 는 방정식

$$x^2 + y^2 = n \quad (n=1, 2, 3, 4) \text{의 정수해의 개수와 같다.}$$

$x^2 + y^2 = 1$ 을 만족시키는 정수 (x, y) 의 순서쌍은

$(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1)$ 의 4개

$x^2 + y^2 = 2$ 를 만족시키는 정수 (x, y) 의 순서쌍은

$(-1, 1), (-1, -1), (1, -1), (1, 1)$ 의 4개

$x^2 + y^2 = 3$ 을 만족시키는 정수 (x, y) 의 순서쌍은 없다.

$x^2 + y^2 = 4$ 를 만족시키는 정수 (x, y) 의 순서쌍은

$(-2, 0), (0, -2), (2, 0), (0, 2)$ 의 4개

$$\therefore n(C) = 4 + 4 + 0 + 4 = 12$$

따라서 집합 X 는 집합 A 의 원소 25개 중에서 12개를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{25-12} = 2^{13}$$

답 ②

$$16 \quad (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B) = \{0, 1\}$$

$2 \in B$ 에서 $2 \in (A \cup B)$ 이고, $2 \notin \{(A \cup B) - (A \cap B)\}$ 이므로 $2 \in (A \cap B)$ 이다. 즉, $2 \in A$ 이어야 하므로

$$a-1=2 \text{ 또는 } a^2-2=2$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=\pm 2$$

(i) $a=-2$ 일 때, $A=\{-3, 2, 3\}$, $B=\{-4, 2, 3\}$ 이므로

$$(A-B) \cup (B-A) = \{-4, -3\}$$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$ 일 때, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{0, 2, 3\}$ 이므로

$$(A-B) \cup (B-A) = \{0, 1\}$$

즉, 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a=3$ 일 때, $A=\{2, 3, 7\}$, $B=\{1, 2, 3\}$ 이므로

$$(A-B) \cup (B-A) = \{1, 7\}$$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$ 이고, $B=\{0, 2, 3\}$ 이므로
 집합 B 의 모든 원소의 합은 $0+2+3=5$
 $\therefore b=5$
 $\therefore a-b=2-5=-3$

답 ③

17 $A_1=\{x|2\leq x\leq 12, x\text{는 자연수}\},$
 $A_2=\{x|5\leq x\leq 21, x\text{는 자연수}\},$
 $A_3=\{x|8\leq x\leq 30, x\text{는 자연수}\},$
 $A_4=\{x|11\leq x\leq 39, x\text{는 자연수}\},$
 $A_5=\{x|14\leq x\leq 48, x\text{는 자연수}\}$
 이므로
 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=\{x|11\leq x\leq 12, x\text{는 자연수}\}\neq\emptyset,$
 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5=\emptyset$
 즉, 주어진 조건을 만족시키는 n 의 최댓값은 4이다.
 $\therefore M=4$
 따라서
 $A_{M-2}=A_2=\{5, 6, 7, \dots, 21\}$
 이므로 집합 A_{M-2} 의 원소의 개수는
 $21-5+1=17$

답 ②

18 $B\cap(A-B)=\emptyset$ 이므로
 $n(A\cup B)=n(B)+n(A-B)=18+17=35$
 $n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^c)$
 $=n(U)-n(A^c\cap B^c\cap C^c)$
 $=50-5=45$
 이때
 $(A\cup B)^c\cap C=C-(A\cup B)=(A\cup B\cup C)-(A\cup B)$
 이므로
 $n((A\cup B)^c\cap C)$
 $=n((A\cup B\cup C)-(A\cup B))$
 $=n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B) (\because (A\cup B)\subset(A\cup B\cup C))$
 $=45-35=10$

답 ⑤

참고 두 집합 A, B 에 대하여 $B\subset A$ 일 때,
 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
 $=n(A)-n(B) (\because A\cap B=B)$

19 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
 $=67-n(A\cap B)$
 $n(A^c-B)=n(A^c\cap B^c)=n((A\cup B)^c)$
 $=n(U)-n(A\cup B)$
 $=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$
 $=100-\{67+50-n(A\cap B)\}$
 $=n(A\cap B)-17$
 $\therefore n(A-B)-n(A^c-B)$
 $=67-n(A\cap B)-\{n(A\cap B)-17\}$
 $=84-2\times n(A\cap B) \dots\dots ㉠$

㉠은 $n(A\cap B)$ 가 최대일 때, 즉 $B\subset A$ 일 때 최소가 된다.
 이때 $n(A\cap B)=n(B)=50$ 이므로
 $n(A-B)-n(A^c-B)=84-2\times n(A\cap B)$
 $=84-2\times 50=-16$

$\therefore m=-16$
 또, ㉠은 $n(A\cap B)$ 가 최소일 때, 즉 $A\cup B=U$ 일 때 최대가 된다.

이때
 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
 $=n(A)+n(B)-n(U)$
 $=67+50-100=17$

이므로
 $n(A-B)-n(A^c-B)=84-2\times n(A\cap B)$
 $=84-2\times 17=50$

$\therefore M=50$
 $\therefore M+m=50+(-16)=34$

답 ⑤

20 조건 ㉠에서
 $B\cap(A\cup B^c)=(B\cap A)\cup(B\cap B^c)$
 $=(B\cap A)\cup\emptyset$
 $=B\cap A=\emptyset$
 즉, $B=B-A$ 이므로 $n(B)=n(B-A)=12$ 이고
 $n(B^c)=n(U)-n(B)=30-12=18$
 그런데 $A\cap B=\emptyset$ 에서 $A\subset B^c$ 이므로 $n(A)$ 는 $A=B^c$ 일 때
 최대이다.
 따라서 $n(A)$ 의 최댓값은
 $n(A)=n(B^c)=18$

답 ③

21 100 이하의 자연수의 집합을 U 라 하고, 100 이하의 자연수 중 3
 의 배수의 집합을 A , 7로 나누었을 때의 나머지가 6인 자연수의
 집합을 B 라 하면
 $n(U)=100, n(A)=33$
 또, 100 이하의 자연수 중 7의 배수는
 7, 14, 21, ..., 91, 98
 의 14개이므로 7로 나누었을 때의 나머지가 6인 수는
 6, 13, 20, ..., 90, 97
 의 14개이다. 즉, $n(B)=14$
 100 이하의 자연수 중 3의 배수가 아니고, 7로 나누었을 때의 나
 머지가 6도 아닌 자연수의 집합은
 $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$
 이므로
 $n(A^c\cap B^c)=n((A\cup B)^c)$
 $=n(U)-n(A\cup B)$
 $=100-n(A\cup B) \dots\dots ㉠$
 이때 $A\cap B$ 는 3의 배수이면서 7로 나누었을 때의 나머지가 6인
 수의 집합이므로
 $A\cap B=\{6, 27, 48, 69, 90\} \therefore n(A\cap B)=5$

$$\begin{aligned}\therefore n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 33 + 14 - 5 = 42\end{aligned}$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 ㉠에서

$$n(A^c \cap B^c) = 100 - 42 = 58 \quad \text{답 ②}$$

22 $n(A)=1$ 이므로 집합 A 가 될 수 있는 집합은

$\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}$ 의 4개 ①

이때 $n(A \cap B)=0$, 즉 $A \cap B = \emptyset$ 인 집합 B 는 집합 U 의 부분 집합 중에서 집합 A 의 원소인 수 1개를 원소로 갖지 않는 집합이므로 그 개수는

$$2^{4-1} = 8 \quad \text{..... ②}$$

따라서 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$$4 \times 8 = 32 \quad \text{..... ③}$$

답 32

채점기준	배점
① 집합 A 의 개수 구하기	2
② 집합 B 의 개수 구하기	2
③ 순서쌍 (A, B) 의 개수 구하기	1

23 $(A \cap B) \cup (A - B) = A$ 이므로

$\{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cup B = A$ 에서

$$A \cup B = A$$

$$\therefore B \subset A \quad \text{..... ①}$$

따라서 자연수 n 은 24의 약수이고, $24 = 2^3 \times 3$ 의 양의 약수는 $(3+1) \times (1+1) = 8$ (개)이므로 자연수 n 의 개수는 8이다.

..... ②

답 8

채점기준	배점
① 두 집합 A, B 사이의 포함 관계 구하기	3
② 자연수 n 의 개수 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.134 ~ 138

1 조건 ㉠에서 $A^c \cup B = (A \cap B^c)^c = \{1, 2, 8, 16\}$ 이므로

$$A \cap B^c = U - (A \cap B^c)^c = \{4, 32\}$$

$$\therefore A = (A \cap B) \cup (A - B)$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

$$= \{2, 8\} \cup \{4, 32\}$$

$$= \{2, 4, 8, 32\}$$

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은

$$2 + 4 + 8 + 32 = 46 \quad \text{답 ⑤}$$

2 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 이고

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$
이므로

$$A \cap B = U - (A \cap B)^c = \{4, 7\}$$

$$\therefore A = (A \cap B) \cup (A - B)$$

$$= \{4, 7\} \cup \{1, 5\}$$

$$= \{1, 4, 5, 7\}$$

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은

$$1 + 4 + 5 + 7 = 17 \quad \text{답 ③}$$

3 $U = \{1, 2, 3, \dots, 50\} \quad \therefore n(U) = 50$

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$
이므로 $n(A) = 8$

$$B = \{3, 6, 9, \dots, 48\}$$
이므로 $n(B) = 16$

$A \cap B$ 는 30의 약수이면서 3의 배수인 자연수의 집합이므로

$$A \cap B = \{3, 6, 15, 30\} \quad \therefore n(A \cap B) = 4$$

$$\therefore n(A^c \cup B) = n((A \cap B)^c)$$

$$= n((A - B)^c)$$

$$= n(U) - n(A - B)$$

$$= n(U) - \{n(A) - n(A \cap B)\}$$

$$= 50 - (8 - 4) = 46 \quad \text{답 ④}$$

4 $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\} \quad \therefore n(U) = 100$

100 이하의 홀수인 자연수는 50개이므로

$$n(A) = 50$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$
이므로

$$n(B) = 12$$

$A \cap B$ 는 60의 약수이면서 홀수인 자연수의 집합이므로

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 15\} \quad \therefore n(A \cap B) = 4$$

$$\therefore n(A \cup B^c) = n((A^c \cap B)^c)$$

$$= n((B - A)^c)$$

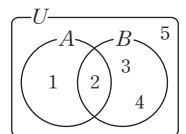
$$= n(U) - n(B - A)$$

$$= n(U) - \{n(B) - n(A \cap B)\}$$

$$= 100 - (12 - 4) = 92 \quad \text{답 ③}$$

5 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

세 집합 U, A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고



$$A \cap B = \{2\}$$

(i) $2 \in X$ 인 경우

$$2 \in X \text{이면 } X \cap A \neq \emptyset, X \cap B \neq \emptyset$$

따라서 집합 X 의 개수는 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-1} = 2^4 = 16$$

(ii) $2 \notin X$ 인 경우

2를 제외한 집합 A 의 원소는 1이고, 2를 제외한 집합 B 의 원소는 3, 4이므로 $X \cap A \neq \emptyset, X \cap B \neq \emptyset$ 인 경우는

$$1 \in X, 3 \in X, 4 \notin X$$

$$\text{또는 } 1 \in X, 3 \notin X, 4 \in X$$

$$\text{또는 } 1 \in X, 3 \in X, 4 \in X$$

의 3가지이다. 이때 각 경우에서 집합 X 는 집합 $(A \cup B)^c$ 의 원소인 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있으므로 집합 X 의 개수는

$$3 \times 2 = 6$$

(i), (ii)에서 집합 X 의 개수는

$$16 + 6 = 22$$

답 22

6 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

세 집합 U, A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고

$$B - A = \{2, 4, 8\}$$

$$(B - A) \cap X = \{2, 4, 8\} \cap X = \{4, 8\}$$

이므로

$$2 \notin X, 4 \in X, 8 \in X$$

또, $X \cap A \neq \emptyset$ 인 경우는

$$1 \in X, 3 \notin X$$

$$\text{또는 } 1 \notin X, 3 \in X$$

$$\text{또는 } 1 \in X, 3 \in X$$

의 3가지

따라서 집합 X 는

$$1 \in X, 3 \notin X, 2 \notin X, 4 \in X, 8 \in X \text{ 또는}$$

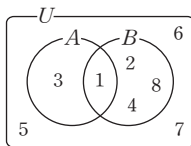
$$1 \notin X, 3 \in X, 2 \notin X, 4 \in X, 8 \in X \text{ 또는}$$

$$1 \in X, 3 \in X, 2 \notin X, 4 \in X, 8 \in X$$

를 만족시키므로 집합 X 의 개수는

$$3 \times 2^{8-5} = 24$$

답 24



7 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합을 k 라 하자.

$A \cup B^c = (A^c \cap B)^c = (B - A)^c$ 이므로 조건 (가)에서 집합 $(B - A)^c$ 의 모든 원소의 합이 $6k$ 이다. 즉, 전체집합 U 의 모든 원소의 합은 $7k$ 이므로

$$7k = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$$

$$7k = 63 \quad \therefore k = 9$$

즉, 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합이 9이므로

$$B - A = \{1, 8\} \quad \leftarrow n(B - A) = 2$$

한편 $A \cap (B - A) = \emptyset$ 이므로

$$A \subset (B - A)^c = \{2, 4, 16, 32\}$$

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B - A)$ 에서

$$5 = n(A) + 2 \quad (\because \text{조건 (가)})$$

$$\therefore n(A) = 3$$

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합의 최솟값은

$$A = \{2, 4, 16\} \text{ 일 때 } 2 + 4 + 16 = 22 \text{ 이다.}$$

답 22

8 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합을 k 라 하자.

$A^c \cup B = (A \cap B^c)^c = (A - B)^c$ 이므로 조건 (가)에서 집합

$(A - B)^c$ 의 모든 원소의 합이 $7k$ 이다. 즉, 전체집합 U 의 모든 원소의 합은 $8k$ 이므로

$$8k = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21$$

$$8k = 56 \quad \therefore k = 7$$

즉, 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합이 7이므로

$$A - B = \{1, 6\} \quad \leftarrow n(A - B) = 2$$

한편 $(A - B) \cap B = \emptyset$ 이므로

$$B \subset (A - B)^c = \{3, 10, 15, 21\}$$

이때 $n(A \cup B) = n(A - B) + n(B)$ 에서

$$5 = 2 + n(B) \quad (\because \text{조건 (가)})$$

$$\therefore n(B) = 3$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합의 최댓값은 $B = \{10, 15, 21\}$

일 때 $10 + 15 + 21 = 46$ 이다.

답 46

9 은행 A를 이용하는 고객의 집합을 A , 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 B 라 하면

$$n(A \cup B) = 35 + 30 = 65$$

이고, 조건 (가)에서

$$n(A) + n(B) = 82$$

$$\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 82 - 65 = 17$$

따라서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수는

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 65 - 17 = 48$$

조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는

$$\frac{1}{2} \times 48 = 24$$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

전체 여자 고객의 수에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는

여자 고객의 수를 빼면 되므로

$$30 - 24 = 6$$

답 ②

10 역사 수업을 신청한 학생의 집합을 A , 과학 수업을 신청한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(A \cup B) = 58 + 63 = 121$$

이고, 조건 (가)에서

$$n(A) + n(B) = 134$$

$$\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 134 - 121 = 13$$

따라서 역사 수업과 과학 수업 중 한 가지만 신청한 학생의 수는

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 121 - 13 = 108$$

조건 (나)에서 역사 수업과 과학 수업 중 한 가지만 신청한 남학생의 수는

$$\frac{1}{2} \times 108 = 54$$

따라서 역사 수업과 과학 수업을 모두 신청한 남학생의 수는

전체 남학생의 수에서 역사 수업, 과학 수업 중 한 가지만 신청한

남학생의 수를 빼면 되므로

$$58 - 54 = 4$$

답 ①

01 $\overline{AB} = \sqrt{13}$ 에서 $\sqrt{(0-2)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{13}$

$$\sqrt{a^2 + 4} = \sqrt{13}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 4 = 13, a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

답 ③

02 $x^2 + y^2 + 8x + 2y + k + 11 = 0$ 에서

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 + k + 11 = 16 + 1$$

$$\therefore (x+4)^2 + (y+1)^2 = 6 - k$$

이 방정식이 원을 나타내야 하므로

$$6 - k > 0 \quad \therefore k < 6$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 5이고, 이때 원의 방정식은

$$(x+4)^2 + (y+1)^2 = 1 \text{ 이므로 반지름의 길이는 } 1 \text{ 이다.}$$

$$\therefore M = 5, r = 1$$

$$\therefore M + r = 5 + 1 = 6$$

답 ⑤

03 ② $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 이므로 $B^c = \{1, 4, 6\}$

③ $B - A = \{2, 7\}$

④ $(A^c)^c = A = \{1, 3, 5\}$

⑤ $n(A) = 3, n(B) = 4$ 이므로 $n(A) + n(B) = 3 + 4 = 7$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

04 두 점 $(2, 5), (-2, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 5 = \frac{-3 - 5}{-2 - 2}(x - 2) \quad \therefore y = 2x + 1$$

이 직선이 점 $(a, 7)$ 을 지나므로

$$7 = 2a + 1, 2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

답 ②

05 점 (a, b) 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a+3, b-1) \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 1 = 0 \text{ 에서 } (x-2)^2 + (y+2)^2 = 7$$

이 원의 중심의 좌표는 $(2, -2) \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$a+3=2, b-1=-2$$

$$\therefore a=-1, b=-1$$

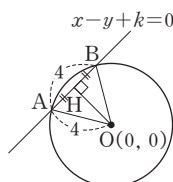
$$\therefore a+b=-1+(-1)=-2$$

답 ①

06 원 $x^2 + y^2 = 16$ 의 중심을 O라 하면

$$\overline{OA} = 4$$

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

따라서 직각삼각형 AOH에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

즉, 점 $O(0, 0)$ 과 직선 $x - y + k = 0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{3}$$

$$|k| = 2\sqrt{6} \quad \therefore k = 2\sqrt{6} (\because k > 0)$$

답 ⑤

07 $B \cap X = X$ 에서 $X \subset B \quad \dots\dots ㉠$

$(B - A) \cup X = X$ 에서 $(B - A) \subset X \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡에서 $(B - A) \subset X \subset B$

이때 $B - A = \{2, 4, 6\}$ 이므로

$$\{2, 4, 6\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

따라서 집합 X 는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서

2, 4, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{7-3} = 2^4 = 16$$

답 ③

08 $x^2 + y^2 - 2x - 10y = 0$ 에서 $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 26$

두 직선 $y = ax, y = bx + c$ 가 이 원의 넓이를 4등분하므로 두 직선은 모두 원의 중심 $(1, 5)$ 를 지나고, 서로 수직이다.

직선 $y = ax$ 가 점 $(1, 5)$ 를 지나므로 $5 = a$

직선 $y = bx + c$ 는 직선 $y = 5x$ 에 수직이므로 $b = -\frac{1}{5}$

직선 $y = -\frac{1}{5}x + c$ 가 점 $(1, 5)$ 를 지나므로

$$5 = -\frac{1}{5} + c \quad \therefore c = \frac{26}{5}$$

$$\therefore a - b + c = 5 - \left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{26}{5} = \frac{52}{5}$$

답 ③

09 접선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = m(x - 2) \quad \therefore mx - y - 2m = 0$$

직선 $mx - y - 2m = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$ 와 같아야 한다. 즉,

$$\frac{|-2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$|-2m| = \sqrt{2} \times \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면 $4m^2 = 2(m^2 + 1)$

$$2m^2 = m^2 + 1, m^2 = 1 \quad \therefore m = \pm 1$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$-1 \times 1 = -1$$

답 ②

10 두 점 $(2, -3), (-4, a)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{a - (-3)}{-4 - 2} = -\frac{a + 3}{6}$$

직선 $2x - ay + 1 = 0$ 의 기울기는 $\frac{2}{a}$

두 점 $(2, -3), (-4, a)$ 를 지나는 직선이 직선

$2x - ay + 1 = 0$ 에 수직이므로

$$-\frac{a+3}{6} \times \frac{2}{a} = -1$$

$$-\frac{a+3}{3a} = -1, a+3=3a$$

$$2a=3 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$$

직선 $y=(2a-1)x+7$, 즉 $y=2x+7$ 에 평행한 직선의 기울기

는 2이므로 점 $(\frac{3}{2}, -5)$ 를 지나고 직선 $y=2x+7$ 에 평행한 직선의 방정식은

$$y-(-5)=2(x-\frac{3}{2})$$

$$\therefore y=2x-8$$

답 ⑤

11 $n(A^c \cap B^c) = 10$ 에서

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 30 - n(A \cup B) \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\therefore n(A \cup B) = 20$$

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$20 = 17 + n(B) - 9 \quad \therefore n(B) = 12$$

답 ②

12 직선 $(k+2)x + 4y - 2 = 0$ 을 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$(k+2)(x-3) + 4y - 2 = 0$$

이 직선을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$(k+2)(-x-3) + 4y - 2 = 0$$

$$\therefore k(-x-3) - 2x + 4y - 8 = 0 \quad \dots\dots ①$$

이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-x-3=0, -2x+4y-8=0$$

$$\therefore x=-3, y=\frac{1}{2}$$

따라서 직선 ①은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, \frac{1}{2})$ 을 지난다.

답 ③

13 $P(x, y)$ 라 하면 점 P 에서 두 직선 $x+3y-5=0$,

$3x-y+5=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+3y-5|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|3x-y+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$|x+3y-5| = |3x-y+5|$$

$$x+3y-5 = \pm(3x-y+5)$$

$$\therefore y=-2x, y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

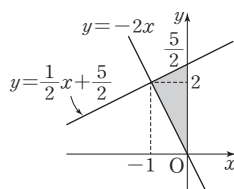
두 직선 $y=-2x, y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 의 교

점의 좌표는 $(-1, 2)$

따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림에

서

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{4}$$



답 ①

14 $x^2 + y^2 - 4x = 14$ 에서 $(x-2)^2 + y^2 = 18$

$P(a, b)$ 라 하면 점 P 가 이 원 위의 점이므로

$$(a-2)^2 + b^2 = 18 \quad \dots\dots ①$$

삼각형 PAB 의 무게중심을 $G(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{a+(-4)+1}{3} = \frac{a-3}{3}$$

$$y = \frac{b+(-2)+8}{3} = \frac{b+6}{3}$$

$$\therefore a=3x+3, b=3y-6 \quad \dots\dots ②$$

$$②\text{을 } ①\text{에 대입하면 } (3x+3-2)^2 + (3y-6)^2 = 18$$

$$(3x+1)^2 + (3y-6)^2 = 18, 9(x+\frac{1}{3})^2 + 9(y-2)^2 = 18$$

$$\therefore (x+\frac{1}{3})^2 + (y-2)^2 = 2$$

따라서 삼각형 PAB 의 무게중심이 나타내는 도형은 중심이 점

$(-\frac{1}{3}, 2)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi$$

답 ④

15 집합 A 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$$2^5 - 1 = 31 \quad \therefore n = 31$$

집합 A 의 부분집합 중에서

가장 작은 원소가 1인 집합은 1을 반드시 원소로 갖는 집합이므로 그 개수는 $2^{5-1} = 2^4$

가장 작은 원소가 2인 집합은 2를 반드시 원소로 갖고 1은 원소로 갖지 않는 집합이므로 그 개수는 $2^{5-1-1} = 2^3$

가장 작은 원소가 3인 집합은 3을 반드시 원소로 갖고 1, 2는 원소로 갖지 않는 집합이므로 그 개수는 $2^{5-1-2} = 2^2$

가장 작은 원소가 4인 집합은 4를 반드시 원소로 갖고 1, 2, 3은 원소로 갖지 않는 집합이므로 그 개수는 $2^{5-1-3} = 2$

가장 작은 원소가 5인 집합은 $\{5\}$ 의 1개

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{31}$$

$$= 1 \times 2^4 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2 + 5 \times 1$$

$$= 16 + 16 + 12 + 8 + 5$$

$$= 57$$

답 ③

16 원 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2 + (-y-2)^2 = 9 \quad \therefore x^2 + (y+2)^2 = 9$$

이 원을 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$x^2 + (y-2+2)^2 = 9 \quad \therefore x^2 + y^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

즉, 점 Q는 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점이다.

삼각형 ABQ의 넓이가 최대하려면 점 Q와 직선 AB 사이의 거리가 최대이어야 한다. 이때 원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심인 원점 O에 대하여 두 직선 OQ, AB는 서로 수직이다.

직선 AB의 기울기는

$$\frac{2\sqrt{2} - (-2\sqrt{2})}{3-1} = 2\sqrt{2}$$

이므로 직선 OQ의 기울기는 $-\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 직선 OQ의 방정식은

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

①을 ⑦에 대입하면

$$x^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}x\right)^2 = 9, \quad \frac{9}{8}x^2 = 9$$

$$x^2 = 8 \quad \therefore x = \pm 2\sqrt{2}$$

위의 그림에서 점 Q의 x좌표는 음수이므로

$$x = -2\sqrt{2}$$

이것을 ⑧에 대입하면

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{4} \times (-2\sqrt{2}) = 1$$

$$\therefore Q(-2\sqrt{2}, 1)$$

점 P(a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a, -b)$$

이 점을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a, -b+2)$$

이것이 점 Q의 좌표이므로

$$a = -2\sqrt{2}, -b+2 = 1 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore ab = -2\sqrt{2} \times 1 = -2\sqrt{2} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

- 17 직선 $3x+2y-4=0$ 을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x-a)+2(y+a)-4=0 \quad \therefore 3x+2y-a-4=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 원 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$ 의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 (1, -2)를 지나야 하므로

$$3-4-a-4=0 \quad \therefore a = -5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

답 -5

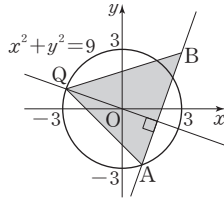
채점기준	배점
① 평행이동한 직선의 방정식 구하기	2
② a의 값 구하기	3

- 18 $\overline{AB}$ 를 $(1-m):m$ ($0 < m < 1$)로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{(1-m) \times 2 + m \times (-2)}{1-m+m}, \frac{(1-m) \times (-6) + m \times 3}{1-m+m} \right)$$

$$\therefore (-4m+2, 9m-6) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 점이 제3사분면 위에 있으므로



$$-4m+2 < 0, 9m-6 < 0$$

$$-4m+2 < 0 \text{에서 } -4m < -2 \quad \therefore m > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$9m-6 < 0 \text{에서 } 9m < 6 \quad \therefore m < \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{의 공통부분을 구하면 } \frac{1}{2} < m < \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{2}{3}$ 이므로

$$30\alpha\beta = 30 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 10 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 10

채점기준	배점
① $\overline{AB}$ 를 $(1-m):m$ 으로 내분하는 점의 좌표 구하기	2
② m의 값의 범위 구하기	2
③ α, β 의 값과 $30\alpha\beta$ 의 값 구하기	1

- 19 산악회 회원 100명의 집합을 U, 한라산을 등반해 본 회원의 집합을 A, 설악산을 등반해 본 회원의 집합을 B라 하면

$$n(U)=100, n(A)=80, n(B)=65 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한라산과 설악산을 모두 등반해 본 회원의 집합은 $A \cap B$ 이므로

$n(A \cap B)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

$n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $B \subset A$ 일 때이므로

$$n(A \cap B) = n(B) = 65 \quad \therefore M = 65 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $A \cup B = U$ 일 때이므로

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(U)$$

$$= 80 + 65 - 100 = 45$$

$$\therefore m = 45 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\therefore M+m = 65+45=110 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 110

채점기준	배점
① 산악회 회원의 전체집합을 U, 한라산을 등반해 본 회원의 집합을 A, 설악산을 등반해 본 회원의 집합을 B라 하고 주어진 조건을 식으로 나타내기	1
② M의 값 구하기	2
③ m의 값 구하기	2
④ M+m의 값 구하기	1

- 20 원 $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 원 C_1 의 방정식은

$$C_1: (x-m-2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

조건 ㉞에서 원 C_1 이 직선 l과 서로

다른 두 점에서 만나므로 원 C_1 의 중

심 $(m+2, 3)$ 과 직선

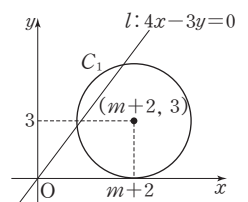
$l: 4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의

반지름의 길이 3보다 작아야 한다. 즉,

$$\frac{|4(m+2)-3 \times 3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} < 3, |4m-1| < 15$$

$$-15 < 4m-1 < 15, -14 < 4m < 16$$

$$\therefore -\frac{7}{2} < m < 4$$



따라서 가능한 자연수 m 의 값은 1, 2, 3이다. ❶

원 $C_1: (x-m-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 를 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 원 C_2 의 방정식은

$$C_2: (x-m-2)^2 + (y-n-3)^2 = 9$$

조건 ④에서 원 C_2 가 직선 l 과 서로 다른 두 점에서 만나므로 원 C_2 의 중심 $(m+2, n+3)$ 과 직선 $l: 4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3보다 작아야 한다. 즉,

$$\frac{|4(m+2)-3(n+3)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} < 3, |4m-3n-1| < 15$$

$$-15 < 4m-3n-1 < 15, -4m-14 < -3n < -4m+16$$

$$\therefore \frac{4m-16}{3} < n < \frac{4m+14}{3} \quad \dots\dots ❷$$

❶에서 자연수 n 은 m 의 값이 가장 클 때 최대가 되고, 자연수 m 의 최댓값은 3이므로

$$m=3\text{일 때, } ❷\text{에서 } -\frac{4}{3} < n < \frac{26}{3}$$

즉, 가능한 자연수 n 의 최댓값은 8이므로 $m+n$ 의 최댓값은 $3+8=11$ ❸

답 11

채점기준	배점
❶ 조건 ④를 이용하여 가능한 자연수 m 의 값 구하기	2
❷ 조건 ④와 m 의 값을 이용하여 n 의 값의 범위 구하기	3
❸ $m+n$ 의 최댓값 구하기	2

실전 모의고사 2회

p.144~147

01 ⑤ ‘성격이 좋은’은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다. ❶

02 원 $x^2+y^2=16$ 을 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-4)^2+y^2=16$$

이 원이 점 $(4, a)$ 를 지나므로

$$(4-4)^2+a^2=16, a^2=16$$

$$\therefore a=4 (\because a>0)$$

..... ❷

03 점 $(3, -5)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P 는 $P(-3, 5)$

점 $(3, -5)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q 는 $Q(-5, 3)$

$$\therefore PQ = \sqrt{\{-5-(-3)\}^2 + \{3-5\}^2} = 2\sqrt{2}$$

..... ❸

04 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로

$$b=a-2 \quad \dots\dots ❶$$

점 $P(a, a-2)$ 에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$$\{a-(-2)\}^2 + \{(a-2)-1\}^2 = (a-2)^2 + \{(a-2)-5\}^2$$

$$2a^2-2a+13=2a^2-18a+53$$

$$16a=40 \quad \therefore a=\frac{5}{2}$$

따라서 ❶에서

$$b=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore ab=\frac{5}{2} \times \frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

답 ③

05 $2 \in B$ 이고 $A=B$ 이므로 $2 \in A$ 이어야 한다. 즉,

$$a+2=2 \text{ 또는 } a^2-2=2$$

$$a=0 \text{ 또는 } a^2=4$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=\pm 2$$

(i) $a=0$ 일 때, $A=\{-2, 2\}$, $B=\{2, 6\}$ 이므로

$$A \neq B$$

(ii) $a=-2$ 일 때, $A=\{0, 2\}$, $B=\{2, 8\}$ 이므로

$$A \neq B$$

(iii) $a=2$ 일 때, $A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4\}$ 이므로

$$A=B$$

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$

답 ⑤

06 점 $A(4, 3)$ 과 원 $x^2+y^2=16$ 의 중심 $O(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA} = \sqrt{4^2+3^2}=5$$

이때 원 $x^2+y^2=16$ 의 반지름의 길이가 4이므로 선분 AP 의 길이의 최솟값은

$$5-4=1$$

답 ①

07 $x^2+y^2-6x-2y+k=0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10-k$$

이 원의 중심을 C 라 하면 $C(3, 1)$ 이고,

$\overline{CA}$ 는 원의 반지름이다.

점 $C(3, 1)$ 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

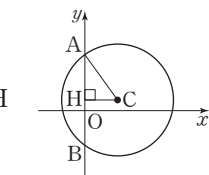
$$\overline{CH}=3, \overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2} \times 8=4$$

따라서 직각삼각형 CAH 에서

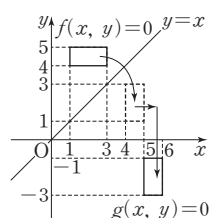
$$\overline{CA}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2$$

$$10-k=3^2+4^2 \quad \therefore k=-15$$

답 ②



08 방정식 $g(x, y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.



방정식 $f(x, y)=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x)=0$$

이 도형을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행 이동한 도형의 방정식은

$$f(y+4, x-1)=0$$

$$\therefore g(x, y)=f(y+4, x-1) \quad \text{답 ⑤}$$

- 09 두 직선 $x+2y-1=0$, $x+y-2=0$ 은 한 점에서 만나므로 세 직선이 평행한 경우는 없다.

(i) 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우

(ㄱ) 두 직선 $x+2y-1=0$, $x+ay-3=0$ 이 평행한 경우

$$\frac{1}{1}=\frac{2}{a} \neq \frac{-1}{-3} \quad \therefore a=2$$

(ㄴ) 두 직선 $x+y-2=0$, $x+ay-3=0$ 이 평행한 경우

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{a} \neq \frac{-2}{-3} \quad \therefore a=1$$

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

두 직선 $x+2y-1=0$, $x+y-2=0$ 의 교점의 좌표가

$(3, -1)$ 이므로 직선 $x+ay-3=0$ 도 점 $(3, -1)$ 을 지나야 한다. 즉,

$$3-a-3=0 \quad \therefore a=0$$

(i), (ii)에서 $a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은 $0+1+2=3$ 답 ②

- 10 $x^2-8x+12 \leq 0$ 에서

$$(x-2)(x-6) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq x \leq 6$$

$$\therefore A = \{x | 2 \leq x \leq 6\}$$

이때 $A \cap B = \emptyset$,

$A \cup B = \{x | -1 < x \leq 6\}$ 이 되도록

두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$B = \{x | -1 < x < 2\}$$

해가 $-1 < x < 2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore x^2-x-2 < 0$$

따라서 $a=-1$, $b=-2$ 이므로

$$a+b=-1+(-2)=-3 \quad \text{답 ①}$$

- 11 점 B를 원점, 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 생각하면 E(13, 9)이고, 원의 중심은 점 (5, 5), 반지름의 길이는 5이므로 원의 방정식은

$$(x-5)^2+(y-5)^2=25$$

이때 P(a, b), Q(x, y)라 하면 점 P는 원 위의 점이므로

$$(a-5)^2+(b-5)^2=25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 Q는 선분 PE를 3:1로 내분하므로

$$Q\left(\frac{3 \times 13 + 1 \times a}{3+1}, \frac{3 \times 9 + 1 \times b}{3+1}\right)$$

$$\therefore Q\left(\frac{39+a}{4}, \frac{27+b}{4}\right)$$

$$\text{즉, } x=\frac{39+a}{4}, y=\frac{27+b}{4} \text{이므로}$$

$$a=4x-39, b=4y-27$$

이것을 ①에 대입하면

$$(4x-39-5)^2+(4y-27-5)^2=25$$

$$(4x-44)^2+(4y-32)^2=25$$

$$\therefore (x-11)^2+(y-8)^2=\frac{25}{16}$$

따라서 점 Q(x, y)가 나타내는 도형은 중심이 점 (11, 8)이고

반지름의 길이가 $\frac{5}{4}$ 인 원이므로 점 Q가 나타내는 도형의 길이는

$$2\pi \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}\pi \quad \text{답 ①}$$

- 12 원의 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를

$(a, a+1)$ 이라 하면 원이 y 축에 접하므로 원의 반지름의 길이는

$|a|$ 이고, 원의 방정식은

$$(x-a)^2+\{y-(a+1)\}^2=a^2$$

$$\therefore (x-a)^2+(y-a-1)^2=a^2$$

이 원이 점 (2, 2)를 지나므로

$$(2-a)^2+(2-a-1)^2=a^2, (2-a)^2+(1-a)^2=a^2$$

$$4-4a+a^2+1-2a+a^2=a^2, a^2-6a+5=0$$

$$(a-1)(a-5)=0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=5$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 (1, 2), (5, 6)이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-1)^2+(6-2)^2}=4\sqrt{2} \quad \text{답 ④}$$

- 13 $(A-B^c) \cup (B^c-A^c) = (A \cap B) \cup (B^c \cap A)$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

$$= A \cap (B \cup B^c)$$

$$= A \cap U = A$$

즉, $A = A \cup B$ 이므로 $B \subset A$

ㄱ. (거짓)

ㄴ. $B-A = \emptyset$ (참)

ㄷ. $A \cup B^c = (A^c \cap B)^c = (B-A)^c = \emptyset^c (\because \text{ㄴ}) = U$ (참)

ㄹ. $B \subset A$ 에서 $A^c \subset B^c$ 이므로

$$A^c \cap B^c = A^c \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

- 14 규칙에 따라 점 P₂, P₃, P₄, ...를 차례대로 구하면

$$P_2(2, -1), P_3(-2, 1), P_4(-2, -1), P_5(2, 1), \dots$$

이므로 자연수 n 에 대하여 점 P_n의 좌표와 점 P_{n+4}의 좌표가 같다.

이때 $213=4 \times 53+1$ 이므로 점 P₂₁₃의 좌표는 점 P₁의 좌표와 같다.

따라서 점 P₂₁₃의 좌표는 (2, 1)이다. 답 ⑤

- 15 A(0, 10), B(2, 0)이고, 두 직선 $y = -x + 10$, $y = 3x - 6$ 의 교점은 C(4, 6)

이때 두 삼각형 ABD, ABC의 넓이가 같고 $a > 2$ 이므로 두 직선 AB, CD의 기울기가 같아야 한다. 즉,

$$\frac{0-10}{2-0} = \frac{0-6}{a-4}$$

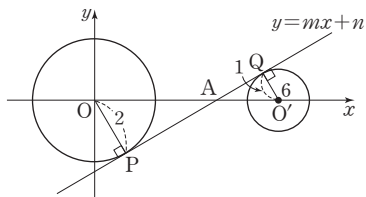
— 두 삼각형 ABD, ABC의 밑변을 $\overline{AB}$ 라 하면
두 점 C, D 각각과 $\overline{AB}$ 사이의 거리가 서로 같아야
하므로 $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ 이어야 한다.

$$-5 = \frac{-6}{a-4}, a-4 = \frac{6}{5}$$

$$\therefore a = \frac{26}{5}$$

답 ②

16



원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 중심은 O(0, 0)이고, 원 $(x-6)^2 + y^2 = 1$ 의 중심을 O'이라 하면 O'(6, 0)

$$\therefore \overline{OO'} = 6$$

두 점 O, O'에서 직선 $y = mx + n$ 에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, 직선 $y = mx + n$ 이 x축과 만나는 점을 A라 하면 $\angle OAP = \angle O'AQ$, $\angle OPA = \angle O'QA = 90^\circ$ 이므로 $\triangle AOP \sim \triangle AO'Q$ 이고 닮음비는 2 : 1이다.

즉, $\overline{OA} : \overline{O'A} = 2 : 1$ 이므로 A(4, 0)

이때 점 A(4, 0)은 직선 $y = mx + n$ 위의 점이므로

$$4m + n = 0 \quad \therefore n = -4m \quad \dots\dots ㉠$$

원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 중심 O와 직선 $y = mx + n$, 즉 $mx - y + n = 0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2, |n| = 2\sqrt{m^2 + 1} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$|-4m| = 2\sqrt{m^2 + 1}, |-2m| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$4m^2 = m^2 + 1, 3m^2 = 1, m^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{3}}{3} (\because m > 0)$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면 } n = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$mn = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

답 ③

- 17 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치한다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+3}{2}, \frac{-4-a}{2}\right) \quad \therefore \left(-\frac{1}{2}, \frac{-4-a}{2}\right) \quad \dots\dots ㉠$$

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{-9+b}{2}\right) \quad \dots\dots ㉡$$

..... ①

㉠, ㉡이 일치하므로

$$-\frac{1}{2} = \frac{a+1}{2}, \frac{-4-a}{2} = \frac{-9+b}{2}$$

$$\therefore a = -2, b = 7 \quad \dots\dots ㉢$$

따라서 A(-4, -4), B(-2, -9), C(3, 2), D(1, 7)이므로

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$$

$$= \{3 - (-4)\}^2 + \{2 - (-9)\}^2 + \{1 - (-2)\}^2 + \{7 - (-9)\}^2$$

$$= 350 \quad \dots\dots ㉣$$

답 350

채점기준	배점
① AC, BD 각각의 중점의 좌표 구하기	1
② a, b의 값 구하기	2
③ $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ 의 값 구하기	2

- 18 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ 에서

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

두 원 $x^2 + (y-1)^2 = 9$, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$ 의 중심을 각각 C₁, C₂라 하면

$$C_1(0, 1), C_2(a, b)$$

두 원이 직선 $y = x + 4$ 에 대하여 서로 대칭이므로 선분 C₁C₂의 중점은 직선 $y = x + 4$ 위에 있다. 즉, $\overline{C_1C_2}$ 의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{0+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right) \quad \therefore M\left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y = x + 4$ 위의 점이므로

$$\frac{b+1}{2} = \frac{a}{2} + 4, b+1 = a+8$$

$$\therefore a - b = -7 \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots ①$$

또, 직선 C₁C₂는 직선 $y = x + 4$ 에 수직이므로 직선 C₁C₂의 기울기는 -1이다. 즉,

$$\frac{b-1}{a-0} = -1, b-1 = -a$$

$$\therefore a + b = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -3, b = 4$

한편, 두 원의 반지름의 길이가 같으므로

$$9 = a^2 + b^2 - c = 9 + 16 - c$$

$$\therefore c = 16 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\therefore ab + c = -3 \times 4 + 16 = 4 \quad \dots\dots ㉣$$

답 4

채점기준	배점
① 두 원의 중심을 이은 선분의 중점이 직선 $y = x + 4$ 위에 있음을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	2
② 두 원의 중심을 이은 직선이 직선 $y = x + 4$ 에 수직임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세우고, a, b의 값 구하기	2
③ 두 원의 반지름의 길이가 같음을 이용하여 c의 값 구하기	1
④ $ab + c$ 의 값 구하기	1

- 19 $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로

$$A - B = \{1, 3, 9, 18\} \quad \dots\dots ①$$

조건 ㉠에서 $X \subset A$

즉, 집합 X는 집합 A의 부분집합이고, $n(X \cap (A - B)) = 2$ 이

므로 집합 X 는 집합 $A-B$ 의 원소 중 2개를 원소로 갖고, 나머지 2개는 원소로 갖지 않는 집합이다. ②

집합 $A-B$ 의 원소 4개 중 집합 X 의 원소가 될 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

집합 A 의 부분집합 중 위에서 택한 집합 $A-B$ 의 특정한 원소 2개를 반드시 원소로 갖고, 나머지 2개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-2-2}=4$$

따라서 집합 X 의 개수는

$$6 \times 4 = 24$$

..... ③

답 24

채점기준	배점
① 집합 $A-B$ 구하기	2
② 집합 X 가 어떤 집합인지 설명하기	2
③ 집합 X 의 개수 구하기	3

20 $\triangle ACO$ 의 넓이가 $\triangle ABO$ 의 넓이의 4배이므로 $\triangle ACB$ 의 넓이는 $\triangle ABO$ 의 넓이의 3배이다. 즉,

$$\triangle ACB : \triangle ABO = 3 : 1$$

이므로 $\overline{CB} : \overline{BO} = 3 : 1$ 이고, 점 $B(-1, 3)$ 은 선분 CO 를 3 : 1로 내분하는 점이다. 따라서 $C(a, b)$ 라 하면

$$B\left(\frac{3 \times 0 + 1 \times a}{3+1}, \frac{3 \times 0 + 1 \times b}{3+1}\right) \quad \therefore B\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right)$$

$$\text{즉, } \frac{a}{4} = -1, \frac{b}{4} = 3 \text{ 이므로 } a = -4, b = 12$$

$$\therefore C(-4, 12)$$

..... ①

이때 $x = -4, y = 12$ 를

$5x + 3y - 16 = 0$ 에 대입하면

$$5 \times (-4) + 3 \times 12 - 16 = 0 \text{ 이 성립하}$$

므로 점 C 는 직선 $5x + 3y - 16 = 0$ 위

의 점이다. ②

직선 OA 의 방정식은 $y = x$ 이므로 두

직선 $y = x, 5x + 3y - 16 = 0$ 의 교점을 D 라 하면 $D(2, 2)$

$$\overline{OD} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{DA} = \sqrt{(5-2)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{이므로 } \overline{OD} : \overline{DA} = 2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$$

..... ③

따라서 $\triangle COD : \triangle CDA = 2 : 3$ 이므로 직선 $5x + 3y - 16 = 0$ 은 삼각형 ACO 의 넓이를 2 : 3으로 나눈다.

$$\therefore m = 2, n = 3$$

..... ④

$$\therefore m^2 + n^2 = 4 + 9 = 13$$

..... ⑤

답 13

채점기준	배점
① 점 C 의 좌표 구하기	2
② 점 C 는 직선 $5x + 3y - 16 = 0$ 위의 점임을 설명하기	1
③ 직선 OA 와 직선 $5x + 3y - 16 = 0$ 의 교점을 D 라 하고 $\overline{OD}, \overline{DA}$ 의 길이의 비 구하기	2
④ m, n 의 값 구하기	1
⑤ $m^2 + n^2$ 의 값 구하기	1

실전 모의고사 3회

p.148~151

01 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}, A \cap B = \{6\}$ 이므로

$$n(A \cup B) = 7, n(A \cap B) = 1$$

$$\therefore n(A \cup B) - n(A \cap B) = 7 - 1 = 6$$

답 ④

02 점 M 이 $\overline{BC}$ 의 중점이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{에서}$$

$$(2\sqrt{6})^2 + 6^2 = 2\{\overline{AM}^2 + (3\sqrt{2})^2\}$$

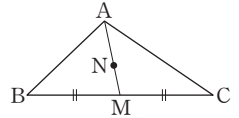
$$60 = 2(\overline{AM}^2 + 18), 30 = \overline{AM}^2 + 18$$

$$\overline{AM}^2 = 12 \quad \therefore \overline{AM} = 2\sqrt{3}$$

이때 점 N 이 $\overline{AM}$ 을 3 : 2로 내분하므로

$$\overline{AN} = \frac{3}{5}\overline{AM} = \frac{3}{5} \times 2\sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

답 ③



참고 아폴로니우스의 정리

삼각형 ABC 에서 변 BC 의 중점을 M 이라 할 때,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

03 ① $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이므로

$$\{\emptyset\} \subset A \text{ (참)}$$

② 3은 집합 A 의 원소가 아니므로

$$3 \notin A \text{ (거짓)}$$

③ $\{1\}$ 은 집합 A 의 원소가 아니므로

$$\{1\} \notin A \text{ (거짓)}$$

④ $\{1, 2\}$ 은 집합 A 의 원소가 아니므로

$$\{1, 2\} \notin A \text{ (거짓)}$$

⑤ $2 \in A$ 이지만 $3 \notin A$ 이므로 $\{2, 3\} \not\subset A$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ①이다.

답 ①

참고 ③ 1은 집합 A 의 원소이므로

$$\{1\} \subset A$$

④ 1, 2는 모두 집합 A 의 원소이므로

$$\{1, 2\} \subset A$$

⑤ $\{2, 3\}$ 은 집합 A 의 원소이므로

$$\{2, 3\} \in A$$

04 주어진 평행이동에 의하여 두 점 A, B 가 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한다고 하면

점 $A(3, a)$ 가 점 $A'(2, 1)$ 로 옮겨지므로

$$3 + m = 2, a + n = 1 \quad \therefore m = -1$$

점 $B(b, -2)$ 가 점 $B'(-4, -5)$ 로 옮겨지므로

$$b + m = -4, -2 + n = -5 \quad \therefore n = -3$$

$$\therefore a = 1 - n = 1 - (-3) = 4$$

$$b = -4 - m = -4 - (-1) = -3$$

따라서 점 (a, b) , 즉 $(4, -3)$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축

의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(4-1, -3-3) \quad \therefore (3, -6)$$

답 ④

- 05 직선 $x+2y-4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로
이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이다.
점 $(-4, 3)$ 을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은
 $y-3=2\{x-(-4)\}$
 $\therefore y=2x+11$
따라서 $a=2, b=11$ 이므로
 $a+b=2+11=13$ 답 ④

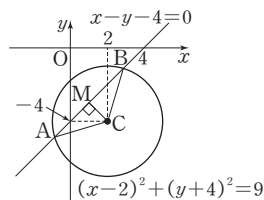
- 06 원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가
원의 반지름의 길이보다 커야 한다.
원 $x^2+y^2=9$ 의 반지름의 길이는 3
이 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이
의 거리는
 $\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{k}{\sqrt{5}}$ ($\because k$ 는 자연수)
원과 직선이 만나지 않으려면
 $\frac{k}{\sqrt{5}}>3 \quad \therefore k>3\sqrt{5}=6. \times \times \times$
따라서 자연수 k 의 최솟값은 7이다. 답 ②
참고 $6=\sqrt{36}<3\sqrt{5}=\sqrt{45}<\sqrt{49}=7$

- 07 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 2개 이상인 집합의 개수는
 $2^6-1-6=57$ [0과 {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}의 개수를 뺀 것이다.]
집합 X 의 모든 원소의 곱이 짝수이려면 집합 X 는 적어도 한 개
의 짝수를 원소로 가져야 한다.
집합 A 의 부분집합 중 홀수만을 원소로 갖고, 원소의 개수가 2개
이상인 부분집합의 개수는 집합 $\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합 중 원소의
개수가 2개 이상인 부분집합의 개수와 같으므로
 $2^3-1-3=4$ [0과 {1}, {3}, {5}의 개수를 뺀 것이다.]
따라서 구하는 집합 X 의 개수는
 $57-4=53$ 답 ③

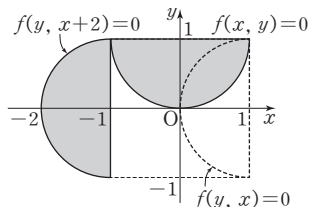
- 08 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$
 $=\{(1-a)^2+(2-b)^2\}+\{(-2-a)^2+(-5-b)^2\}$
 $\quad +\{(4-a)^2+(0-b)^2\}$
 $=(1-2a+a^2+4-4b+b^2)+(4+4a+a^2+25+10b+b^2)$
 $\quad + (16-8a+a^2+b^2)$
 $=3a^2+3b^2-6a+6b+50$
 $=3(a^2-2a+1)+3(b^2+2b+1)+44$
 $=3(a-1)^2+3(b+1)^2+44$
이때 $(a-1)^2 \geq 0, (b+1)^2 \geq 0$ 이므로
 $3(a-1)^2+3(b+1)^2+44 \geq 44$
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 은 $a=1, b=-1$ 일 때 최솟값 44를
가지므로 $m=44$
 $\therefore a+b+m=1+(-1)+44=44$ 답 ①

- 09 직선 $y=3x+2$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 k 만큼
평행이동한 직선의 방정식은
 $y-k=3(x-1)+2$
 $\therefore y=3x+k-1$
이 직선이 포물선 $y=x^2-3x+2$ 에 접하므로 이차방정식
 $x^2-3x+2=3x+k-1$, 즉 $x^2-6x+3-k=0$ 의 판별식을 D
라 하면
 $\frac{D}{4}=(-3)^2-1 \times (3-k)=0$
 $9-3+k=0 \quad \therefore k=-6$ 답 ①

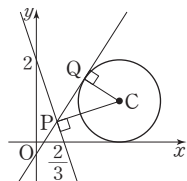
- 10 $x^2+y^2-4x+8y+11=0$ 에서
 $(x-2)^2+(y+4)^2=9$
원 $(x-2)^2+(y+4)^2=9$ 의 중심
을 C 라 하면 삼각형 ACB 가 이등
변삼각형이므로 삼각형 ACM 은
 $\angle AMC=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.
원의 중심 $C(2, -4)$ 와 직선 $x-y-4=0$ 사이의 거리는
 $\overline{CM}=\frac{|2-(-4)-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
이때 $\overline{AC}=3$ 이므로 직각삼각형 ACM 에서
 $\overline{AM}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CM}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}$ 답 ③



- 11 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대
칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$
방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -2 만큼
평행이동한 도형의 방정식은 $f(y, x+2)=0$
따라서 방정식
 $f(y, x+2)=0$ 이 나타내는
도형은 ⑤이다.



- 12 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 의 중심을 C 라 하면 $C(2, 1)$, 반지름
의 길이는 $\overline{CQ}=1$
 $\overline{PQ} \perp \overline{CQ}$ 이므로 직각삼각형 CQP 에서
 $\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}$
 $=\sqrt{\overline{CP}^2-1} \quad \dots\dots ①$
즉, $\overline{PQ}$ 의 길이가 최소인 경우는 $\overline{CP}$ 의 길
이가 최소일 때이다. 이때 $\overline{CP}$ 의 길이는 직선 CP 가 직선
 $y=-3x+2$ 에 수직일 때 최소이고, $\overline{CP}$ 의 길이의 최솟값은 점
 $C(2, 1)$ 과 직선 $y=-3x+2$, 즉 $3x+y-2=0$ 사이의 거리와
같으므로



$$\overline{CP} = \frac{|3 \times 2 + 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 ㉠에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

답 ①

다른풀이 원 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 중심을 C라 하면 $C(2, 1)$

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 PCQ에서

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{QC}^2 = \overline{PC}^2 - 1$$

점 P가 직선 $y = -3x + 2$ 위의 점이므로

$P(a, -3a + 2)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{PC} &= \sqrt{(a-2)^2 + (-3a+2-1)^2} \\ &= \sqrt{10a^2 - 10a + 5}\end{aligned}$$

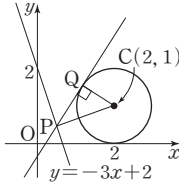
$$\therefore \overline{PQ}^2 = \overline{PC}^2 - 1$$

$$= (10a^2 - 10a + 5) - 1$$

$$= 10\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

따라서 $\overline{PQ}^2$ 은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$ 을 가지므로

$\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 이다.



13 $mx - y - 3m + 6 = 0$ 에서

$$(x-3)m - (y-6) = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 6)$ 을 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 $A(-2, 4)$ 를 지날 때,

$$-5m + 2 = 0, -5m = -2$$

$$\therefore m = \frac{2}{5}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $C(5, 0)$ 을 지날 때,

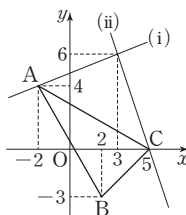
$$2m + 6 = 0, 2m = -6$$

$$\therefore m = -3$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$-3 < m < \frac{2}{5}$$

답 ⑤



14 (i) 집합 $A_n \cap A_3$ 은 n 과 3의 공배수의 집합이다.

이때 $A_n \cap A_3 = A_{3n}$ 에서 n 과 3의 최소공배수가 $3n$ 이므로 n 과 3은 서로소이다.

즉, n 은 3의 배수가 아니다.

(ii) $150 \in A_3 - A_n$ 이 성립하려면 $150 \in A_3$ 이고 $150 \notin A_n$ 이어야 한다. 즉, 150은 n 의 배수가 아니므로 n 은 150의 약수가 아니다.

(i), (ii)에서 n 은 150 이하의 자연수 중 3의 배수도 150의 약수도 아닌 수이다.

150 이하의 자연수의 집합을 U 라 하면 $n(U) = 150$

150 이하의 자연수 중 3의 배수의 집합을 A 라 하면 $n(A) = 50$

$150 = 2 \times 3 \times 5^2$ 의 약수인 자연수의 집합을 B 라 하면

$$n(B) = (1+1) \times (1+1) \times (2+1) = 12$$

150의 약수 중 3의 배수인 자연수의 개수는

$$n(A \cap B) = (1+1) \times (2+1) = 6$$

150 이하의 자연수 중 3의 배수도 150의 약수도 아닌 수의 집합은 $A^c \cap B^c$ 이므로

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\}$$

$$= 150 - (50 + 12 - 6)$$

$$= 94$$

따라서 구하는 자연수 n 의 개수는 94이다.

답 ③

15 점 $A(2, 4)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대

칭이동한 점은 $A'(4, 2)$

직선 BC의 방정식은

$$y = \frac{k-6}{0-6}x + k$$

$$\therefore (k-6)x + 6y - 6k = 0$$

삼각형 $A'BC$ 의 넓이가 삼각형 ACB 의 넓이의 2배이므로 점 A' 와 직선 BC 사이의 거리는 점 A와 직선 BC 사이의 거리의 2배이다. 즉,

$$\frac{|(k-6) \times 4 + 6 \times 2 - 6k|}{\sqrt{(k-6)^2 + 6^2}} = \frac{|(k-6) \times 2 + 6 \times 4 - 6k|}{\sqrt{(k-6)^2 + 6^2}} \times 2$$

$$|-2k - 12| = 2|-4k + 12|, 2|-k - 6| = 8|-k + 3|$$

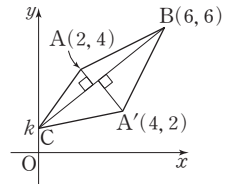
$$|-k - 6| = 4|-k + 3|, |k + 6| = 4|k - 3|$$

이때 $0 < k < 3$ 이므로

$$k + 6 = -4(k - 3), k + 6 = -4k + 12$$

$$5k = 6 \quad \therefore k = \frac{6}{5}$$

답 ③



16 $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ 이므로 두 점 P, Q는 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.

$\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$ 의 중점 이므로

$$C\left(\frac{1-5}{2}, \frac{\sqrt{7}-\sqrt{7}}{2}\right) \quad \therefore C(-2, 0)$$

원의 반지름의 길이는

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-\sqrt{7})^2} = 4$$

원의 중심 C에서 $\overline{PQ}$ 에 내린 수선

의 발을 H라 하면 $\overline{CH}$ 의 길이는

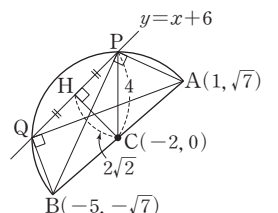
원의 중심 C(-2, 0)에서 직선

$y = x + 6$, 즉 $x - y + 6 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH} = \frac{|-2-0+6|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$\overline{CP}$ 는 원의 반지름이므로 $\overline{CP} = 4$ 이고, 직각삼각형 CPH에서

$$\begin{aligned}\overline{PH} &= \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$



삼각형 CPQ는 이등변삼각형이므로 $\overline{PH} = \overline{QH}$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad \text{답 ③}$$

다른풀이 원 $(x+2)^2 + y^2 = 16$ 과 직선 $y = x+6$ 의 교점의 x 좌표는

$$(x+2)^2 + (x+6)^2 = 16 \text{에서}$$

$$x^2 + 4x + 4 + x^2 + 12x + 36 = 16$$

$$2x^2 + 16x + 24 = 0$$

$$x^2 + 8x + 12 = 0, (x+6)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -6 \text{ 또는 } x = -2$$

이것을 $y = x+6$ 에 대입하면

$$x = -6 \text{일 때 } y = 0$$

$$x = -2 \text{일 때 } y = 4$$

즉, 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-6, 0), (-2, 4)$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{\{-2 - (-6)\}^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2}$$

17 $\overline{AB}$ 를 2:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 7 + 3 \times (-3)}{2+3}, \frac{2 \times 7 + 3 \times 2}{2+3} \right) \therefore (1, 4) \quad \dots\dots ①$$

두 점 $(1, 4), (3, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4 = \frac{-2-4}{3-1}(x-1) \therefore y = -3x+7 \quad \dots\dots ②$$

따라서 $a = -3, b = 7$ 이므로

$$ab = -3 \times 7 = -21 \quad \dots\dots ③$$

답 -21

채점기준	배점
① $\overline{AB}$ 를 2:3으로 내분하는 점의 좌표 구하기	2
② ①의 점과 점 $(3, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식 구하기	2
③ a, b 의 값과 ab 의 값 구하기	1

18 $n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c) = n(U) - n(A \cap B)$ 이므로

$$32 = 40 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 8 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{또, } n(B) = n(U) - n(B^c) = 40 - 21 = 19 \quad \dots\dots ②$$

$$\begin{aligned} \therefore n(A^c \cap B) &= n(B - A) \\ &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 19 - 8 = 11 \end{aligned} \quad \dots\dots ③$$

답 11

채점기준	배점
① $n(A \cap B)$ 구하기	2
② $n(B)$ 구하기	1
③ $n(A^c \cap B)$ 구하기	2

19 $x^2 - 2x + y^2 + 4y + a = 0$ 에서

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + a = 1 + 4$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5-a \quad \dots\dots ㉠$$

㉠이 원을 나타내려면

$$5-a > 0 \therefore a < 5 \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots ①$$

원 ㉠이 x 축과 만나야 하므로 ㉠에 $y=0$ 을 대입하면

$$x^2 - 2x + a = 0$$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \times a \geq 0, 1-a \geq 0$$

$$\therefore a \leq 1$$

원 ㉠이 직선 $3x-4y+4=0$ 과 만나

지 않아야 하므로 원의 중심 $(1, -2)$

와 직선 $3x-4y+4=0$ 사이의 거리

가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5-a}$ 보다 커

야 한다. 즉,

$$\frac{|3 \times 1 - 4 \times (-2) + 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} > \sqrt{5-a}$$

$$\sqrt{5-a} < 3$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 5-a < 9 \therefore a > -4 \quad \dots\dots ㉢ \quad \dots\dots ③$$

㉡, ㉢, ㉢의 공통부분을 구하면

$$-4 < a \leq 1 \quad \dots\dots ④$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 의 5개이다. $\dots\dots ⑤$

답 5

채점기준	배점
① 주어진 방정식이 원을 나타내기 위한 a 의 값의 범위 구하기	1
② 주어진 방정식이 x 축과 만나기 위한 a 의 값의 범위 구하기	2
③ 주어진 방정식이 직선 $3x-4y+4=0$ 과 만나지 않기 위한 a 의 값의 범위 구하기	2
④ 실수 a 의 값의 범위 구하기	1
⑤ 정수 a 의 개수 구하기	1

참고 원 ㉠이 x 축과 만나야 하므로 반지름의 길이가 2보다 크

나 같아야 한다. 즉, $\sqrt{5-a} \geq 2$

$$\text{양변을 제곱하면 } 5-a \geq 4 \therefore a \leq 1$$

20 점 R를 x 축에 대하여 대칭이동한

점을 R' 이라 하면

$$\overline{PR} = \overline{PR'}, \overline{RQ} = \overline{R'Q}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB} \\ &= \overline{AP} + \overline{PR'} + \overline{R'Q} + \overline{QB} \\ &\geq \overline{AR'} + \overline{R'B} \end{aligned}$$

이때 점 R' 은 직선 $y = -1$ 위의 점

이므로 점 B를 직선 $y = -1$ 에 대

하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

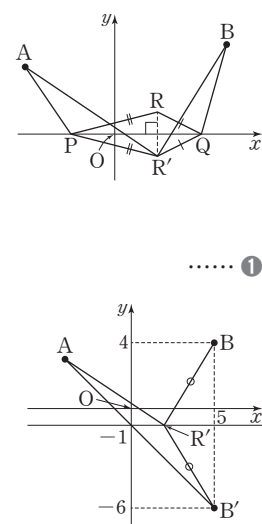
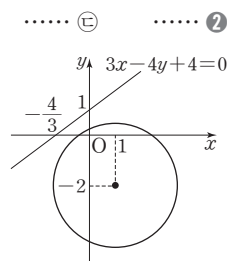
$B'(5, -6)$ 이고, $\overline{RB} = \overline{R'B}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB} \\ &\geq \overline{AR'} + \overline{R'B} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{\{5 - (-4)\}^2 + \{-6 - 3\}^2} = 9\sqrt{2} \end{aligned} \quad \dots\dots ②$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 $9\sqrt{2}$ 이므로

$$k = 9 \quad \dots\dots ③$$

답 9



채점기준	배점
① 점 R를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 R'이라 할 때, $\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB} \geq \overline{AR'} + \overline{R'B}$ 임을 설명하기	2
② 점 B를 직선 $y = -1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 할 때, $\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB} \geq \overline{AB'}$ 임을 설명하고 $\overline{AB'}$ 의 길이 구하기	4
③ $\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값과 k의 값 구하기	1

실전 모의고사 4회

p.152~155

- 01 원 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 4$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-1)^2 = 4$$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (-y-1)^2 = 4 \quad \therefore (x-a)^2 + (y+1)^2 = 4$$

이 원의 중심 $(a, -1)$ 이 직선 $y=3x-7$ 위에 있으므로

$$-1 = 3a - 7, 3a = 6 \quad \therefore a = 2$$

답 ②

다른풀이 원 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 4$ 의 중심 $(1, a)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a, 1)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a, -1)$

이 점이 직선 $y=3x-7$ 위에 있으므로

$$-1 = 3a - 7, 3a = 6 \quad \therefore a = 2$$

- 02 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay - 10a - 12 = 0$ 에서

$$(x+a)^2 + (y-2a)^2 = 5a^2 + 10a + 12$$

이 원의 넓이는 $(5a^2 + 10a + 12)\pi$ 이고

$$(5a^2 + 10a + 12)\pi = \{5(a+1)^2 + 7\}\pi$$

이므로 $a = -1$ 일 때 최소가 된다.

이때 이 원의 중심의 좌표는 $(-a, 2a)$ 이므로

$$(1, -2)$$

답 ④

- 03 l_1, l_2 는 서로 수직이므로

$$a \times 3 + 1 \times b = 0 \quad \therefore 3a + b = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

l_1, l_3 은 서로 평행하므로

$$\frac{a}{b+4} = \frac{1}{1} \neq \frac{3}{2} \quad \therefore a = b + 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, b = -3$

$$\therefore ab = 1 \times (-3) = -3$$

답 ④

- 04 점 a가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $P(a, a)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

$$(a-3)^2 + (a-4)^2 = \{a - (-2)\}^2 + (a-7)^2$$

$$a^2 - 6a + 9 + a^2 - 8a + 16 = a^2 + 4a + 4 + a^2 - 14a + 49$$

$$-4a = 28 \quad \therefore a = -7$$

따라서 $P(-7, -7)$ 이므로 삼각형 ABP의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3 + (-2) + (-7)}{3}, \frac{4 + 7 + (-7)}{3} \right) \quad \therefore \left(-2, \frac{4}{3} \right) \quad \text{답 ③}$$

$$05 \overline{AB} = \sqrt{(-3-2)^2 + \{2 - (-3)\}^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\{4 - (-3)\}^2 + (1-2)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(2-4)^2 + (-3-1)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

- 06 기울기가 m인 직선이 원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$ 의 넓이를 이등분하므로 직선은 이 원의 중심 $(-1, 2)$ 를 지나야 한다. 기울기가 m이고 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = m\{x - (-1)\} \quad \therefore mx - y + m + 2 = 0$$

이 직선이 원 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 2$ 에 접하므로 직선과 이 원의 중심 $(-3, -2)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{2}$ 와 같다. 즉,

$$\frac{|-3m - (-2) + m + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}, \quad |-2m + 4| = \sqrt{2} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$4m^2 - 16m + 16 = 2(m^2 + 1), \quad 2m^2 - 16m + 14 = 0$$

$$m^2 - 8m + 7 = 0, \quad (m-1)(m-7) = 0$$

$$\therefore m = 1 \text{ 또는 } m = 7$$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은

$$1 + 7 = 8$$

답 ④

- 07 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$ 에서 $C_1: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 1$

이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원 C_2 의 방정식은

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 1$$

두 점 P, Q 사이의 거리가 최대가 되려면

오른쪽 그림과 같이 선분 PQ가 두 원 C_1, C_2 의 중심을 모두 지나야 하고, 최소가 되

려면 두 점 P, Q가 각각 P', Q'에 있으면

된다. 이때 두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각

C_1, C_2 라 하면 $C_1(3, -4), C_2(-4, 3)$ 이고

$$\overline{C_1C_2} = \sqrt{\{3 - (-4)\}^2 + (-4-3)^2} = 7\sqrt{2}$$

이므로 선분 PQ의 길이의 최댓값은

$$1 + \overline{C_1C_2} + 1 = 7\sqrt{2} + 2$$

$$\text{최솟값은 } \overline{C_1C_2} - 1 - 1 = 7\sqrt{2} - 2$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최댓값과 최솟값의 곱은

$$(7\sqrt{2} + 2)(7\sqrt{2} - 2) = 98 - 4 = 94$$

답 ②

- 08 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 $P(a, b)$, 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = r$ 이므로

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$\{a - (-2)\}^2 + (b-3)^2 = (a-4)^2 + (b-5)^2$$

$$a^2 + 4a + 4 + b^2 - 6b + 9 = a^2 - 8a + 16 + b^2 - 10b + 25$$

$$12a + 4b = 28 \quad \therefore 3a + b = 7 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\overline{PA} = \overline{PC} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$$

$$\{a - (-2)\}^2 + (b-3)^2 = a^2 + (b-7)^2$$

$$a^2 + 4a + 4 + b^2 - 6b + 9 = a^2 + b^2 - 14b + 49$$

$$4a + 8b = 36 \quad \therefore a + 2b = 9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=4$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는

$$PC = \sqrt{1^2 + (4-7)^2} = \sqrt{10}$$

이므로 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{10})^2 = 10\pi$$

답 ④

09 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

세 집합 U, A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

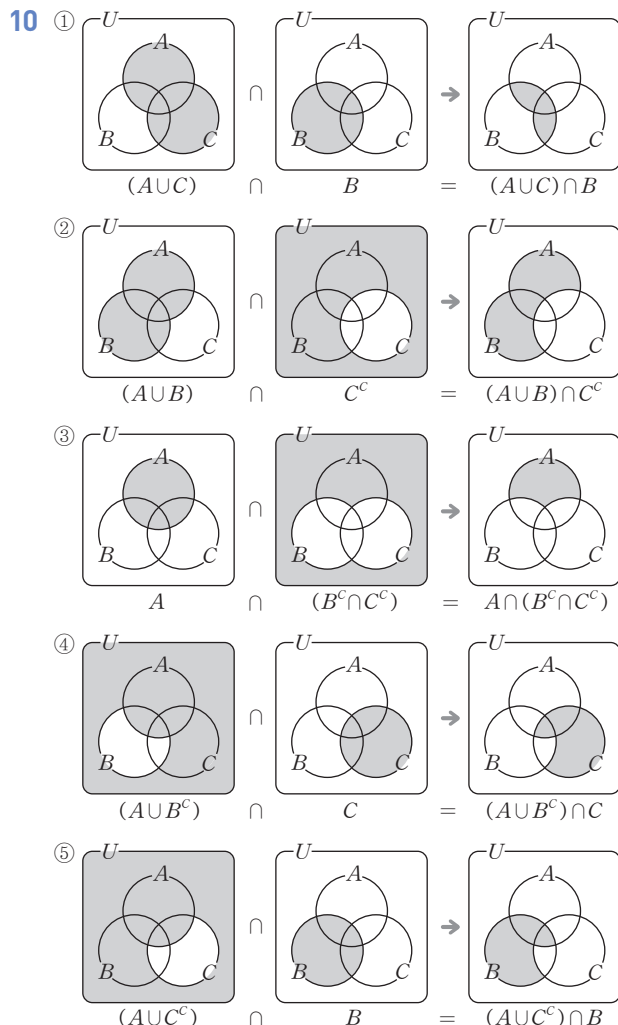
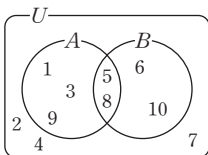
이때 $A \cap X = B \cap X$ 이므로 집합

$A - B$ 의 원소와 집합 $B - A$ 의 원소는 집합 X 의 원소가 될 수 없다.

즉, 집합 X 는 U 의 부분집합 중에서 1, 3, 6, 9, 10을 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{10-5} = 2^5 = 32$$

답 ③



따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ⑤이다.

답 ⑤

11 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$a \in A$ 이면 $\frac{a}{3} \notin A$ 이므로

$3 \in A$ 이면 $1 \notin A$

$6 \in A$ 이면 $2 \notin A$

$9 \in A$ 이면 $3 \notin A$

즉, 1과 3, 2와 6, 3과 9는 각각 동시에 집합 A 의 원소가 될 수 없다. 이때 집합 A 의 모든 원소의 합이 최대하려면 1, 6, 9가 모두 들어가야 하므로

$$A = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

따라서 집합 A 의 원소의 합의 최댓값은

$$1 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 50$$

답 ③

12 $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 이므로 $n(U) = 100$

자연수 k 에 대하여 U 의 부분집합 B_k 를

$$B_k = \{x \mid x \text{는 } k \text{의 배수}\}$$

라 하면 소수 p 에 대하여 $B_p = A_p^c$ 이고

$$n(B_2) = 50, n(B_3) = 33, n(B_2 \cap B_3) = n(B_6) = 16$$

또, $4 = 2^2$ 이므로 4와 서로소인 수의 집합은 2와 서로소인 수의 집합과 같다. 즉, $A_4 = A_2$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A_3 \cup A_4) &= n(A_3 \cup A_2) \\ &= n(B_3^c \cup B_2^c) \\ &= n((B_3 \cap B_2)^c) \\ &= n(U) - n(B_3 \cap B_2) \\ &= 100 - 16 = 84 \end{aligned}$$

답 ④

13 원 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2$ 의 중심을 C 라 하면 $C(1, 3)$

점 $P(5, 5)$ 에서 이 원에 그은 두 접선이 서로 수직이므로 사각형 PACB는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이다. 즉,

$$\overline{PB} = \overline{CB} = r \text{이므로 } \overline{CP} = \sqrt{2}r$$

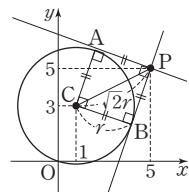
이때

$$\overline{CP} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{이므로 } \sqrt{2}r = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore r = \sqrt{10}$$

답 ⑤



14 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이고 $\overline{PA} + \overline{PB} = 10$ 이므로

$$\overline{PA} = \overline{PB} = 5$$

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 는

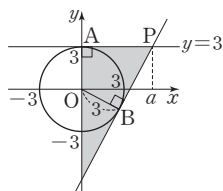
점 $(0, 3)$ 을 지나므로 이 점을 A 라 하면 두 점 A, P 는 모두 직선 $y=3$ 위의 점이므로 접선 PA 는 직선 $y=3$ 이고, $P(5, 3)$

한편, 접선 PB 도 점 P 를 지나므로 기울기를 $m(m > 0)$ 이라 하면 접선 PB 의 방정식은

$$y - 3 = m(x - 5) \quad \therefore mx - y - 5m + 3 = 0$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 이 접선 사이의 거리가 반지름의 길이 3과 같으므로

$$\frac{|-5m + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3, \quad |-5m + 3| = 3\sqrt{m^2 + 1}$$



$$25m^2 - 30m + 9 = 9(m^2 + 1), 16m^2 - 30m = 0$$

$$2m(8m - 15) = 0 \quad \therefore m = \frac{15}{8} \quad (\because m > 0)$$

접선 PB의 방정식은

$$y - 3 = \frac{15}{8}(x - 5) \quad \therefore y = \frac{15}{8}x - \frac{51}{8}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ 3 - \left(-\frac{51}{8} \right) \right\} \times 5 = \frac{375}{16} \quad \text{답 ①}$$

다름풀이 접선 PB의 접점 B를 $B(x_1, y_1)$ 이라 하면 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점 B에서의 접선 PB의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 9$$

이 직선이 점 P(5, 3)을 지나므로

$$5x_1 + 3y_1 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 점 B가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x_1 = 0, y_1 = 3 \text{ 또는 } x_1 = \frac{45}{17}, y_1 = -\frac{24}{17}$$

$$\therefore B\left(\frac{45}{17}, -\frac{24}{17}\right)$$

따라서 접선 PB의 방정식은

$$\frac{45}{17}x - \frac{24}{17}y = 9 \quad \therefore y = \frac{15}{8}x - \frac{51}{8}$$

이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ 3 - \left(-\frac{51}{8} \right) \right\} \times 5 = \frac{375}{16}$$

- 15** 조건 ㉠에서 원 C가 x 축과 y 축에 동시에 접하고 제1사분면의 점을 지나므로 원 C의 중심을 $C(a, a)$ ($a > 0$)라 하면 반지름의 길이는 a 이고, 원 C의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 ①이 점 (1, 2)를 지나므로

$$(1 - a)^2 + (2 - a)^2 = a^2$$

$$1 - 2a + a^2 + 4 - 4a + a^2 = a^2$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0, (a - 1)(a - 5) = 0$$

조건 ㉡에서 $a > 1$ 이므로 $a = 5$

따라서 원 C는 중심이 C(5, 5)이고 반지름의 길이가 5인 원이다.

이때 $\overline{PC} = \sqrt{\{5 - (-1)\}^2 + \{5 - 2\}^2} = 3\sqrt{5}$ 이므로 선분 PQ의 길이의 최댓값은 $M = 3\sqrt{5} + 5$, 최솟값은 $m = 3\sqrt{5} - 5$

$$\therefore Mm = (3\sqrt{5} + 5)(3\sqrt{5} - 5) = 45 - 25 = 20 \quad \text{답 ②}$$

- 16** 점 $P_1(1, 2)$ 에서 $1 \times 2 = 2 > 0$, $1 < 2$ 이므로 점 P_2 는 규칙 ㉠에 의하여 점 P_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점이다.

$$\therefore P_2(1, -2)$$

점 $P_2(1, -2)$ 에서 $1 \times (-2) = -2 < 0$ 이므로 점 P_3 은 규칙 ㉡에 의하여 점 P_2 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점이다.

$$\therefore P_3(-1, -2)$$

점 $P_3(-1, -2)$ 에서 $(-1) \times (-2) = 2 > 0$, $-1 > -2$ 이므로 점 P_4 는 규칙 ㉠에 의하여 점 P_3 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이다.

$$\therefore P_4(-2, -1)$$

점 $P_4(-2, -1)$ 에서 $(-2) \times (-1) = 2 > 0$, $-2 < -1$ 이므로 점 P_5 는 규칙 ㉡에 의하여 점 P_4 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점이다.

$$\therefore P_5(-2, 1)$$

점 $P_5(-2, 1)$ 에서 $(-2) \times 1 = -2 < 0$ 이므로 점 P_6 은 규칙 ㉡에 대하여 점 P_5 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점이다.

$$\therefore P_6(2, 1)$$

점 $P_6(2, 1)$ 에서 $2 \times 1 = 2 > 0$, $2 > 1$ 이므로 점 P_7 은 규칙 ㉠에 의하여 점 P_6 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이다.

$$\therefore P_7(1, 2)$$

따라서 점 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, \dots$ 로는 6개의 점 (1, 2), (1, -2), (-1, -2), (-2, -1), (-2, 1), (2, 1)이 이 순서대로 반복된다.

이때 $100 = 6 \times 16 + 4$ 이므로 점 P_{100} 의 좌표는 점 P_4 의 좌표와 같다.

따라서 $x_{100} = -2, y_{100} = -1$ 이므로

$$x_{100} - 2y_{100} = -2 - 2 \times (-1) = 0 \quad \text{답 ③}$$

- 17** $-3 \in A$ 이므로 $A \subset B$ 가 성립하려면 $-3 \in B$ 이어야 한다. 즉, $a = -3$ 또는 $a + 1 = -3$ 또는 $a + 2 = -3$
 $\therefore a = -3$ 또는 $a = -4$ 또는 $a = -5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

(i) $a = -3$ 일 때,

$$A = \{-3, -1\}, B = \{-3, -2, -1, 1\} \text{이므로}$$

$$A \subset B$$

(ii) $a = -4$ 일 때,

$$A = \{-3, 6\}, B = \{-4, -3, -2, 1\} \text{이므로}$$

$$A \not\subset B$$

(iii) $a = -5$ 일 때,

$$A = \{-3, 15\}, B = \{-5, -4, -3, 1\} \text{이므로}$$

$$A \not\subset B \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 $a = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

답 -3

채점기준	배점
① $-3 \in B$ 를 만족시키는 모든 a 의 값 구하기	2
② 각각의 경우에서 $A \subset B$ 가 성립하는지 확인하기	3
③ a 의 값 구하기	1

- 18** 도형 $f(x, y) = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y) = 0$

이 방정식이 나타내는 도형을 y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, y + 5) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

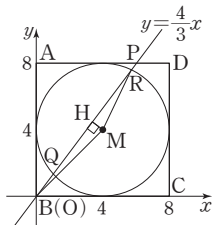
점 (1, 3)을 지나는 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$y-3=m(x-1)$
 $\therefore y=mx-m+3$ ①
 이 직선을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $y=-mx-m+3$
 이 직선을 y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 직선 l' 의 방정식은
 $y+5=-mx-m+3$
 $\therefore y=-mx-m-2$ ③
 직선 l' 이 점 $(-2, -4)$ 를 지나므로
 $-4=2m-m-2 \quad \therefore m=-2$ ④
 따라서 직선 l 의 방정식은 ①에서 $y=-2x+5$, 즉
 $2x+y-5=0$ 이므로 $a=2, b=1, c=-5$
 $\therefore abc=2 \times 1 \times (-5)=-10$ ⑤

답 -10

채점기준	배점
① 어떻게 평행이동 또는 대칭이동한 것인지 알아내기	2
② 직선 l 의 기울기를 m 이라 하고 직선 l 의 방정식 세우기	1
③ 직선 l' 의 방정식 구하기	2
④ m 의 값 구하기	1
⑤ a, b, c 의 값과 abc 의 값 구하기	1

- 19** 점 B를 원점, 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 생각하고, 원 C의 중심을 M이라 하면 $M(4, 4)$
 또, $P(6, 8)$ 이므로 직선 BP의 방정식은



$y=\frac{4}{3}x \quad \therefore 4x-3y=0$
 점 $M(4, 4)$ 에서 직선 $4x-3y=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\overline{MH}=\frac{|4 \times 4 - 3 \times 4|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}=\frac{4}{5}$ ①
 $\overline{BM}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 MHB에서
 $\overline{BH}=\sqrt{\overline{BM}^2-\overline{MH}^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{28}{5}$ ②
 $\overline{MR}=4$ 이므로 직각삼각형 RHM에서
 $\overline{HR}=\sqrt{\overline{MR}^2-\overline{MH}^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{8\sqrt{6}}{5}$ ③
 $\therefore \overline{BR}=\overline{BH}+\overline{HR}=\frac{28}{5}+\frac{8\sqrt{6}}{5}$
 따라서 $p=\frac{28}{5}, q=\frac{8}{5}$ 이므로
 $p-q=\frac{28}{5}-\frac{8}{5}=4$ ④

답 4

채점기준	배점
① 원 C의 중심에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{MH}$ 의 길이 구하기	2
② $\overline{BH}$ 의 길이 구하기	2
③ $\overline{HR}$ 의 길이 구하기	2
④ p, q 의 값과 $p-q$ 의 값 구하기	1

- 20** 점 I는 삼각형 ABC의 내심이므로 두 직선 AI, CI는 각각 $\angle A, \angle C$ 의 이등분선이다. ①

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2},$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(3-2)^2+(-3-4)^2}=5\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3\sqrt{2}:5\sqrt{2}=3:5$$

즉, 점 P는 선분 BC를 3:5로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{3 \times 3 + 5 \times (-1)}{3+5}, \frac{3 \times (-3) + 5 \times 1}{3+5}\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$
 ②

$$\text{또, } \overline{BC}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{AQ}:\overline{QB}=\overline{AC}:\overline{BC}=5\sqrt{2}:4\sqrt{2}=5:4$$

즉, 점 Q는 선분 AB를 5:4로 내분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{5 \times (-1) + 4 \times 2}{5+4}, \frac{5 \times 1 + 4 \times 4}{5+4}\right)$$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$$
 ③

따라서 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{3}, d=\frac{7}{3}$ 이므로

$$a-b+c-d=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}-\frac{7}{3}=-1$$
 ④

답 -1

채점기준	배점
① 두 직선 AI, CI가 각각 $\angle A, \angle C$ 의 이등분선임을 설명하기	1
② 점 P의 좌표 구하기	3
③ 점 Q의 좌표 구하기	2
④ $a-b+c-d$ 의 값 구하기	1

실전 모의고사 5회

p.156~159

- 01** $x^2+y^2-8x+6y+21=0$ 에서 $(x-4)^2+(y+3)^2=4$
 이 원의 중심의 좌표는 $(4, -3)$, 반지름의 길이는 2이므로
 $a=4, b=-3, r=2$
 $\therefore a+b+r=4+(-3)+2=3$ ③

- 02** $P(a, 0)$ 이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$$(a-4)^2+1^2=(a-1)^2+(-2)^2$$

$$a^2-8a+16+1=a^2-2a+1+4$$

$$-6a=-12 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore P(2, 0)$$

$$\text{또 } Q(0, b) \text{라 하면 } \overline{AQ}=\overline{BQ} \text{에서 } \overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$$

$$(-4)^2+\{b-(-1)\}^2=(-1)^2+(b-2)^2$$

$$16+b^2+2b+1=1+b^2-4b+4$$

$$6b = -12 \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore Q(0, -2)$$

$$\therefore PQ = \sqrt{(0-2)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

답 ③

- 03 원 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-m+3)^2 + (y-n-1)^2 = 1$$

이것이 $(x+5)^2 + (y+4)^2 = 1$ 과 일치하려면

$$-m+3=5, -n-1=4 \quad \therefore m=-2, n=-5$$

따라서 직선 $3x-5y+2=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x+2)-5(y+5)+2=0$$

$$\therefore 3x-5y-17=0$$

답 ⑤

- 04 원의 중심을 C라 하면 점 C는 원의 지름 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{7+(-3)}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \quad \therefore C(2, 2)$$

원의 반지름의 길이는

$$AC = \sqrt{(7-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 26$$

답 ①

- 05 집합 A의 두 원소 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면 [표 1], ab 의 값을 구하면 [표 2]와 같으므로

+	-2	0	1
-2	-4	-2	-1
0	-2	0	1
1	-1	1	2

[표 1]

×	-2	0	1
-2	4	0	-2
0	0	0	0
1	-2	0	1

[표 2]

$$X = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2\}, Y = \{-2, 0, 1, 4\}$$

$$\therefore X-Y = \{-4, -1, 2\}$$

$$\therefore n(X-Y) = 3$$

답 ③

- 06 $\overline{BC}$ 의 중점을 M($a, 0$) ($a < 0$)이라 하면 점 M은 직선 $y=mx-2$ 위의 점이므로

$$0 = ma - 2$$

$$\therefore ma = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

또, 직선 AM은 $\overline{BC}$ 의 수직이등분선이므로 직선 AM의 기울기는 $-\frac{1}{m}$ 이다. 즉,

$$\frac{6}{1-a} = -\frac{1}{m}, 6m = a-1$$

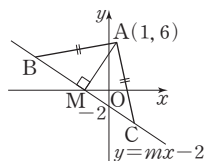
$$\therefore a = 6m+1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$m(6m+1) = 2, 6m^2 + m - 2 = 0$$

$$(3m+2)(2m-1) = 0 \quad \therefore m = -\frac{2}{3} (\because m < 0)$$

답 ③



$$07 (A_2 \cup A_9) \cap A_6 = (A_2 \cap A_6) \cup (A_9 \cap A_6)$$

$$= A_6 \cup A_{18}$$

$$= A_6$$

답 ①

- 08 중심이 제1사분면 위에 있고, x 축, y 축에 동시에 접하므로 원의 중심의 좌표를 (a, a) ($a > 0$)라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

이 원이 직선 $4x+3y-10=0$ 에 접하므로 원의 중심 (a, a) 와 직선 $4x+3y-10=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 a 와 같아야 한다. 즉,

$$\frac{|4a+3a-10|}{\sqrt{4^2+3^2}} = a, |7a-10| = 5a$$

$$7a-10 = \pm 5a \quad \therefore a = \frac{5}{6} \text{ 또는 } a = 5$$

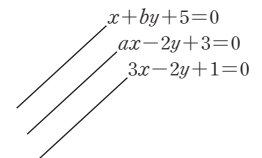
따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$, $(5, 5)$ 이므로 두

원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(5-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(5-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{25\sqrt{2}}{6}$$

답 ②

- 09 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.



두 직선 $ax-2y+3=0$, $3x-2y+1=0$ 이 평행하려면

$$\frac{a}{3} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{3}{1} \quad \therefore a = 3$$

두 직선 $x+by+5=0$, $3x-2y+1=0$ 이 평행하려면

$$\frac{1}{3} = \frac{b}{-2} \neq \frac{5}{1} \quad \therefore b = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore ab = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -2$$

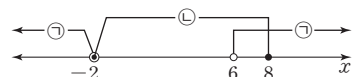
답 ③

- 10 $x^2-4x-12 > 0$ 에서 $(x+2)(x-6) > 0$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 6 \quad \dots\dots ㉠$$

집합 A의 원소 ㉠과 집합 B의 원소, 즉 이차부등식

$x^2+ax+b \leq 0$ 의 해 ㉡을 조건 ㉠, ㉡를 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 이차부등식 $x^2+ax+b \leq 0$ 은

$$(x+2)(x-8) \leq 0, \text{ 즉 } x^2-6x-16 \leq 0 \text{ 이므로}$$

$$a = -6, b = -16$$

$$\therefore a-b = -6 - (-16) = 10$$

답 ⑤

- 11 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 48$ 의 중심을 C라 하면 C(-2, 1)이고, 원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{CB} = 4\sqrt{3}$$

또,

$$\angle CPB = \frac{1}{2} \angle APB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

이므로 직각삼각형 CPB에서

$$\overline{CP} = \frac{2}{\sqrt{3}} \overline{CB} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 4\sqrt{3} = 8 \quad \left[\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \therefore \overline{CP} = \frac{2}{\sqrt{3}} \overline{CB}$$

이때 P(x, y)라 하면

$$\overline{CP} = \sqrt{\{x - (-2)\}^2 + \{y - 1\}^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$$

$$\text{이므로 } \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 8$$

즉, $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 64$ 이므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 C(-2, 1)이고 반지름의 길이가 8인 원이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$$2\pi \times 8 = 16\pi$$

답 ④

- 12 ㄱ. $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$$

즉, 원 C_1 의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 원 C_1 을 평행이동한 원 C_2 의 반지름의 길이도 $2\sqrt{2}$ 이다. (거짓)

- ㄴ. 원 $C_1: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 원 C_2 의 방정식은

$$C_2: (x-a-2)^2 + (y-a+1)^2 = 8$$

원 C_2 와 직선 $x+y-5=0$ 이 접하므로 원 C_2 의 중심 $(a+2, a-1)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 와 같다. 즉,

$$\frac{|a+2+(a-1)-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}, \quad |2a-4| = 4$$

$$2a-4 = -4 \text{ 또는 } 2a-4 = 4$$

$$2a=0 \text{ 또는 } 2a=8 \quad \therefore a=4 \quad (\because a>0) \text{ (참)}$$

- ㄷ. 원 $C_2: (x-a-2)^2 + (y-a+1)^2 = 8$, 즉

$C_2: (x+1)^2 + (y+4)^2 = 8$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+4)^2 + (y+1)^2 = 8$$

이고, 이 원의 중심은 점 $(-4, -1)$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

- 13 직선 $l_1: y = -2x+k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2 의 방정식은

$$-y = -2 \times (-x) + k \quad \therefore l_2: y = -2x - k$$

직선 l_2 를 y 축에 대하여 대칭이동한 직선 l_3 의 방정식은

$$y = -2 \times (-x) - k \quad \therefore l_3: y = 2x - k$$

직선 l_3 을 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선 l_4 의 방정식은

$$y-1 = 2x-k \quad \therefore l_4: y = 2x-k+1$$

직선 l_4 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_5 의 방정식은

$$-y = 2 \times (-x) - k + 1 \quad \therefore l_5: y = 2x + k - 1$$

직선 l_5 를 y 축에 대하여 대칭이동한 직선 l_6 의 방정식은

$$y = 2 \times (-x) + k - 1 \quad \therefore l_6: y = -2x + k - 1$$

직선 l_6 을 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선 l_7 의 방정식은

$$y-1 = -2x+k-1 \quad \therefore l_7: y = -2x+k$$

직선 l_7 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_8 의 방정식은

$$-y = -2 \times (-x) + k \quad \therefore l_8: y = -2x - k$$

:

즉, 직선 l_n 으로는 6개의 직선 $y = -2x+k$,

$$y = -2x-k, y = 2x-k, y = 2x-k+1, y = 2x+k-1,$$

$y = -2x+k-1$ 이 이 순서대로 반복된다.

$50 = 6 \times 8 + 2$ 이므로 직선 l_{50} 은 l_2 와 같고,

직선 $l_2: y = -2x-k$ 의 x 절편은 $-\frac{k}{2}$ 이므로

$$-\frac{k}{2} = 3 \quad \therefore k = -6$$

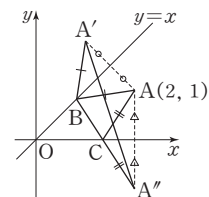
답 ①

- 14 점 A(2, 1)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A', x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면 A'(1, 2), A''(2, -1)

이때 $\overline{AB} = \overline{A'B}$, $\overline{CA} = \overline{CA''}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} &= \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CA''} \\ &\geq \overline{A'A''} \\ &= \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

답 ②



- 15 $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $B = \{1, 3, 9, 27\}$ 이므로 $A \cap B = \{1, 3, 9\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27\}$

$$(A \cap B) - X = \emptyset \text{에서 } (A \cap B) \subset X$$

$$(A \cup B) \cap X = X \text{에서 } X \subset (A \cup B)$$

$$\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$$

즉, 집합 X는 집합 $A \cup B$ 의 부분집합 중에서 1, 3, 9를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

그런데 집합 X의 모든 원소의 합이 21이고,

$$1+3+9=13$$

이므로 1, 3, 9를 제외한 집합 X의 나머지 원소의 합은 8이다.

2, 6, 18, 27 중에서 몇 개의 수를 선택하여 그 합이 8이 되는 경우는 $2+6=8$ 인 경우뿐이므로

$$X = \{1, 2, 3, 6, 9\}$$

따라서 집합 X의 원소의 개수는 5이다.

답 ③

- 16 A(0, 3)이고 점 C는 점 A를 x 축의 방향으로 8만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이므로

$$C(0+8, 3+6) \quad \therefore C(8, 9)$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{(8-0)^2 + (9-3)^2} = 10$$

오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 직선 $4x+3y-9=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$OH = \frac{|-9|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{9}{5}$$

직각삼각형 AOH에서

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{3^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}$$

선분 AB와 호 AB로 둘러싸인 활꼴과 선분 CD와 호 CD로 둘러싸인 활꼴은 서로 합동이므로 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 ABDC의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{24}{5} \times 10 = 28$$

답 ④

- 17 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3, -4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3x-4y=25 \quad \therefore 3x-4y-25=0 \quad \dots\dots ①$$

또, $x^2+y^2-8x+a-2=0$ 에서

$$(x-4)^2+(y-3)^2=27-a$$

직선 $3x-4y-25=0$ 이 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=27-a$ 에 접하므로 원의 중심 $(4, 3)$ 과 직선 $3x-4y-25=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{27-a}$ 와 같아야 한다. 즉,

$$\frac{|12-12-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \sqrt{27-a}, \sqrt{27-a}=5$$

$$27-a=25 \quad \therefore a=2 \quad \dots\dots ②$$

답 2

채점기준	배점
① 원의 접선의 방정식 구하기	2
② a의 값 구하기	3

18 $\overline{AB} = \sqrt{\{-6-(-1)\}^2 + \{-5-7\}^2} = 13,$

$$\overline{AC} = \sqrt{\{3-(-1)\}^2 + \{4-7\}^2} = 5$$

..... ①

이때 $\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5 \quad \dots\dots ②$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 13:5로 내분하는 점이므로

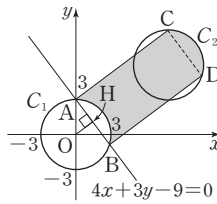
$$D\left(\frac{13 \times 3 + 5 \times (-6)}{13+5}, \frac{13 \times 4 + 5 \times (-5)}{13+5}\right)$$

$$\therefore D\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad \dots\dots ③$$

따라서 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ 이므로

$$a+b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \quad \dots\dots ④$$

답 2



채점기준	배점
① $\overline{AB}, \overline{AC}$ 의 길이 구하기	2
② $\overline{BD} : \overline{CD}$ 구하기	1
③ 점 D의 좌표 구하기	2
④ a, b의 값과 a+b의 값 구하기	1

- 19 점 P(2, 2)에서 마름모 위의 한 점까지의 거리의 최솟값은 점 P와 직선 CD 사이의 거리와 같다.

C(2, 0), D(0, 1)이므로 직선 CD의 방정식은

$$y-0 = \frac{1-0}{0-2}(x-2) \quad \therefore x+2y-2=0$$

점 P와 직선 CD 사이의 거리는

$$\frac{|2+2 \times 2-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \quad \therefore m = \frac{4\sqrt{5}}{5} \quad \dots\dots ①$$

또,

$$\overline{AP} = \sqrt{\{2-(-2)\}^2 + \{2-0\}^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$\overline{BP} = \sqrt{\{2-0\}^2 + \{2-(-1)\}^2} = \sqrt{13}$$

이므로 점 P에서 마름모 위의 한 점까지의 거리의 최댓값은 $2\sqrt{5}$ 이다. $\therefore M = 2\sqrt{5}$ ②

$$\therefore Mm = 2\sqrt{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} = 8 \quad \dots\dots ③$$

답 8

채점기준	배점
① m의 값 구하기	3
② M의 값 구하기	3
③ Mm의 값 구하기	1

- 20 달리기에 참가하는 학생의 집합을 A, 피구 경기에 참가하는 학생의 집합을 B라 하면

$$n(A \cup B) = 40 + 50 = 90 \quad \dots\dots ①$$

조건 (나)에서 $n(A) + n(B) = 120$

달리기와 피구 경기에 모두 참가하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이고

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 120 - 90 = 30 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

달리기와 피구 경기 중 한 종목에만 참가하는 학생의 수는

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 90 - 30 = 60 \quad \dots\dots ③$$

조건 (가)에서 달리기와 피구 경기 중 한 종목에만 참가하는 1학년 학생의 수와 2학년 학생의 수의 비는 1:2이므로 달리기와 피구 경기 중 한 종목에만 참가하는 2학년 학생의 수는

$$60 \times \frac{2}{1+2} = 40 \quad \dots\dots ④$$

따라서 달리기와 피구 경기에 모두 참가하는 2학년 학생의 수는

$$50 - 40 = 10 \quad \dots\dots ⑤$$

답 10

채점기준	배점
① 달리기에 참가하는 학생의 집합을 A, 피구 경기에 참가하는 학생의 집합을 B라고 하고 $n(A \cup B)$ 구하기	1
② $n(A \cap B)$ 구하기	1
③ 달리기와 피구 경기 중 한 종목에만 참가하는 학생의 수 구하기	2
④ 달리기와 피구 경기 중 한 종목에만 참가하는 2학년 학생의 수 구하기	2
⑤ 달리기와 피구 경기에 모두 참가하는 2학년 학생의 수 구하기	1



A series of horizontal dotted lines for writing, spanning the width of the page.