정답 및 해설

고등 내신 1등급을 위한 기출문제집

100발100중

고등 기출문제집

공통수학 2 하

2학기·기말

Ⅱ 집합과 명제

2 명제

교과서 예제 p.7

01 ㄴ, ㄷ, ㅁ　02 (1) $\{2, 3, 5, 7\}$ (2) $\{1, 2, 3\}$
03 (1) 8은 2의 배수가 아니다. (거짓) (2) $\varnothing \subset \{1, 2, 3\}$ (참)
04 (1) x는 9의 약수가 아니다., $\{2, 4, 5, 6\}$ (2) $2x-1>7$, $\{5, 6\}$
05 (1) 가정: $x=-1$이다., 결론: $x^2+3=4$이다.
(2) 가정: a와 b가 모두 홀수이다., 결론: ab는 홀수이다.
06 (1) 참 (2) 참 (3) 거짓　07 (1) 참 (2) 거짓
08 (1) 어떤 실수 x에 대하여 $|x|<0$이다. (거짓)
(2) 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)^2 \geq 0$이다. (참)
09 (1) 역: $x^2=9$이면 $x=3$이다. (거짓)
대우: $x^2 \neq 9$이면 $x \neq 3$이다. (참)
(2) 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
대우: $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$이면 $xy \neq 0$이다. (거짓)
(3) 역: $x>0$ 또는 $y>0$이면 $x+y>0$이다. (거짓)
대우: $x \leq 0$이고 $y \leq 0$이면 $x+y \leq 0$이다. (참)
10 ㄷ
11 (1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건
12 ㈎ 짝수 ㈏ 짝수 ㈐ $2k$　13 ㈎ 무리수 ㈏ 유리수 ㈐ $\sqrt{3}$
14 ㈎ $(a-b)^2$ ㈏ $\geq$ ㈐ $a=b$
15 ㈎ $2\sqrt{ab}$ ㈏ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ㈐ $a=b$
16 (1) 4 (2) 12　17 최댓값 36, $x=6$, $y=6$

기출 Best | 1회 p.10~13

01 ③　02 ④　03 ④　04 ③　05 ④
06 ②　07 ①　08 ⑤　09 ②　10 ③
11 ⑤　12 ①　13 ③　14 ①　15 ①
16 ②　17 ⑤　18 ③　19 ⑤　20 ③

기출 Best | 2회 p.14~17

01 ⑤　02 ①　03 ④　04 ②　05 ③
06 ②　07 ④　08 ③　09 ④　10 ⑤
11 ②　12 ④　13 ②　14 ③　15 ②
16 ④　17 ①　18 ②　19 ⑤　20 ③

변형유형 집중공략 p.18~21

1-1 ④　1-2 ③　2-1 3　2-2 15
3-1 ⑤　3-2 3　4-1 ⑤　4-2 33

서술형 What & How p.22~25

1 15　2 3　3 4　4 20
5 풀이 참조　6 풀이 참조　7 36　8 $b<c<a$

실전 문제 | 1회 p.26~29

01 ③　02 ③　03 ①　04 ③　05 ②
06 ③　07 ⑤　08 ②　09 ⑤　10 ①
11 ⑤　12 ②　13 ③　14 ①　15 ②
16 ⑤　17 ⑥　18 ③
19 (1) $x^2+(2-k)x-2k \leq 0$이면 $x<4$이다. (2) 6　20 2

실전 문제 | 2회 p.30~33

01 ③　02 ①　03 ⑤　04 ⑤　05 ④
06 ⑤　07 ⑤　08 ③　09 ⑤　10 ①
11 ③　12 ①　13 ⑤　14 ③　15 ②
16 ①　17 ③　18 ⑤　19 31　20 -2

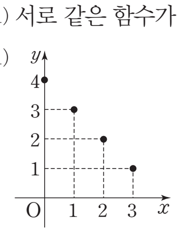
수능형 기출문제 & 변형문제 p.34~36

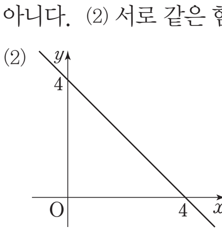
1 9　2 8　3 ④
4 ②　5 8　6 ④

Ⅲ 함수와 그래프

1 함수

교과서 예제 p.39, 41

01 (1) 함수가 아니다.
(2) 함수이다, 정의역: $\{a, b, c, d\}$, 공역: $\{0, 1, 2\}$,
치역: $\{0, 1, 2\}$
(3) 함수가 아니다.
(4) 함수이다, 정의역: $\{a, b, c, d\}$, 공역: $\{0, 1, 2\}$,
치역: $\{0, 2\}$
02 (1) 정의역은 $\{x|x$는 실수$\}$, 치역은 $\{y|y$는 실수$\}$
(2) 정의역은 $\{x|x$는 실수$\}$, 치역은 $\{y|y \leq 5\}$
03 (1) 서로 같은 함수가 아니다. (2) 서로 같은 함수이다.
04 (1)


(2)


05 (1) ○ (2) ×　06 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄴ (4) ㄷ
07 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄱ (4) ㄷ
08 (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 3
09 (1) $(g \circ f)(x)=9x^2+6x$ (2) $(f \circ g)(x)=3x^2-2$
(3) $(f \circ f)(x)=9x+4$ (4) $(g \circ g)(x)=x^4-2x^2$

10 (1) $(h\circ(g\circ f))(x)=4x^2-1$

(2) $((h\circ g)\circ f)(x)=4x^2-1$

(3) $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

11 ㄴ, ㄷ **12** (1) 4 (2) -3

13 (1) $y=\frac{1}{3}x-2$ (2) $y=-2x+10$

14 (1) 3 (2) 8 (3) 4 (4) 6

기출 Best | 1회 p.42~46

01 ⑤	02 ⑤	03 ①	04 ①	05 ⑤
06 ⑤	07 ②	08 ④	09 ②	10 ②
11 ③	12 ③	13 ①	14 ③	15 ③
16 ①	17 ②	18 ④	19 ①	20 ①
21 ③	22 ⑤	23 ①	24 ⑤	

기출 Best | 2회 p.47~51

01 ②	02 ⑤	03 ④	04 ①	05 ④
06 ⑤	07 ③	08 ③	09 ④	10 ⑤
11 ④	12 ③	13 ②	14 ①	15 ②
16 ③	17 ③	18 ④	19 ②	20 ④
21 ①	22 ①	23 ②	24 ②	

변형유형 집중공략 p.52~55

1-1 ③	1-2 ②	2-1 ③	2-2 12
3-1 ④	3-2 6	4-1 ②	4-2 12

서술형 What & How p.56~59

1 -15	2 1	3 13	4 1
5 4	6 6	7 8	8 8

실전 문제 | 1회 p.60~64

01 ⑤	02 ①	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ⑤	07 ①	08 ②	09 ⑤	10 ①
11 ①	12 ②	13 ①	14 ⑤	15 ⑤
16 ⑤	17 ②	18 ①	19 ②	20 ②
21 ③	22 ③	23 2	24 1	

실전 문제 | 2회 p.65~69

01 ④	02 ⑤	03 ③	04 ④	05 ①
06 ③	07 ③	08 ②	09 ⑤	10 ④
11 ②	12 ④	13 ④	14 ④	15 ①
16 ⑤	17 ⑤	18 ④	19 ③	20 ③
21 ③	22 ④	23 5	24 -1	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.70~74

1 ⑤	2 ②	3 ④	4 ③	5 6
6 ①	7 ①	8 ③	9 ②	10 ③

2 유리함수

교과서 예제 p.77

01 ㄱ, ㄹ, ㅁ

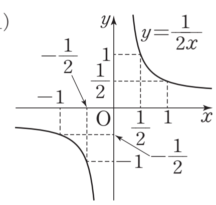
02 (1) $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$ (2) $\frac{x+3}{x(x-1)}$ (3) $\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$

(4) $\frac{(x-3)(x-4)}{(x+2)(x+3)}$ (5) $\frac{3}{(x+1)(x+4)}$

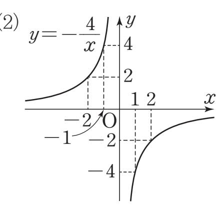
03 ㄴ, ㄷ, ㅁ

04 (1) $\left\{x \,\middle|\, x\neq\frac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$ (2) 실수 전체의 집합

05 (1)

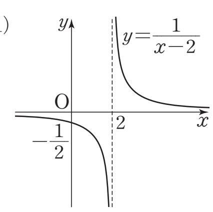


(2)



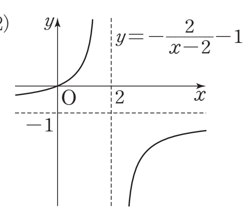
06 $y=\frac{1}{x-2}+1$

07 (1)



정의역: $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$,
치역: $\{y\,|\,y\neq0$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=2$, $y=0$

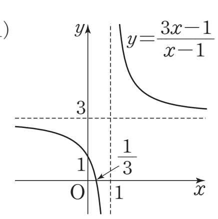
(2)



정의역: $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$,
치역: $\{y\,|\,y\neq-1$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=2$, $y=-1$

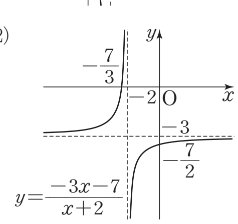
08 (1) $y=\frac{5}{x-1}+3$ (2) $y=\frac{7}{x+2}-2$

09 (1)



정의역: $\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$,
치역: $\{y\,|\,y\neq3$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=1$, $y=3$

(2)



정의역: $\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$,
치역: $\{y\,|\,y\neq-3$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=-2$,
$y=-3$

기출 Best | 1회 p.78~82

01 ③	02 ①	03 ①	04 ④	05 ②
06 ④	07 ⑤	08 ⑤	09 ③	10 ②
11 ①	12 ⑤	13 ⑤	14 ①	15 ③
16 ④	17 ④	18 ②	19 ③	20 ②
21 ①	22 ②	23 ③	24 ③	

기출 Best | 2회 p.83~87

01 ⑤	02 ②	03 ①	04 ③	05 ②
06 ①	07 ⑤	08 ④	09 ③	10 ②
11 ⑤	12 ④	13 ①	14 ①	15 ④
16 ③	17 ②	18 ⑤	19 ④	20 ②
21 ④	22 ②	23 ⑤	24 ③	

변형유형 집중공략 p.88~91

1-1 ④	1-2 ①	2-1 ③	2-2 ②
3-1 ④	3-2 ⑤	4-1 ①	4-2 ④

서술형 What & How p.92~95

1 2	2 -5	3 -8	4 9	5 0
6 2	7 9	8 18		

실전 문제 | 1회 p.96~100

01 ④	02 ⑤	03 ②	04 ④	05 ①
06 ③	07 ①	08 ④	09 ③	10 ①
11 ④	12 ⑤	13 ③	14 ②	15 ③
16 ⑤	17 ②	18 ②	19 ④	20 ③
21 ⑤	22 ④	23 6	24 75	

실전 문제 | 2회 p.101~105

01 ②	02 ④	03 ②	04 ③	05 ②
06 ⑤	07 ③	08 ③	09 ⑤	10 ①
11 ③	12 ①	13 ⑤	14 ⑤	15 ②
16 ②	17 ③	18 ①	19 ①	20 ①
21 ②	22 ⑤	23 -3	24 9	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.106~110

1 ④	2 ①	3 ④
4 ③	5 ④	6 -7
7 ⑤	8 ⑤	9 ①
10 ④		

3 무리함수

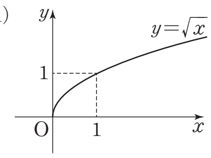
교과서 예제 p.113

01 (1) $x\geq5$ (2) $-1\leq x\leq4$ (3) $2\leq x<5$

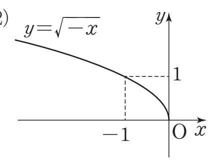
02 (1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ (2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$ (3) $-2x+1+2\sqrt{x^2-x}$

03 ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ

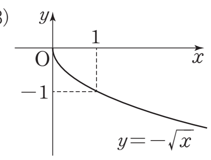
04 (1) $\{x\,|\,x\geq2\}$ (2) $\left\{x\,\middle|\,x\leq\frac{1}{2}\right\}$ (3) $\left\{x\,\middle|\,x\geq\frac{3}{2}\right\}$

05 (1)


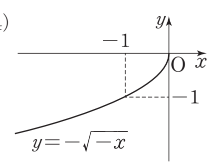
정의역: $\{x\,|\,x\geq0\}$,
치역: $\{y\,|\,y\geq0\}$

(2)


정의역: $\{x\,|\,x\leq0\}$,
치역: $\{y\,|\,y\geq0\}$

(3)


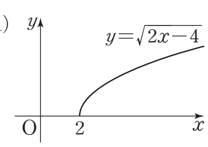
정의역: $\{x\,|\,x\geq0\}$,
치역: $\{y\,|\,y\leq0\}$

(4)


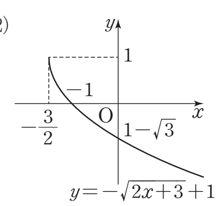
정의역: $\{x\,|\,x\leq0\}$,
치역: $\{y\,|\,y\leq0\}$

06 (1) $y=-\sqrt{3x}$ (2) $y=\sqrt{-3x}$ (3) $y=-\sqrt{-3x}$

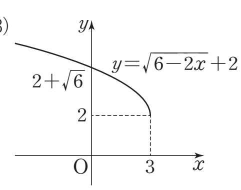
07 $y=\sqrt{5x+10}+4$ 08 $a=2$, $b=-1$

09 (1)


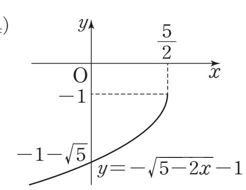
정의역: $\{x\,|\,x\geq2\}$,
치역: $\{y\,|\,y\geq0\}$

(2)


정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\geq-\frac{3}{2}\right\}$,
치역: $\{y\,|\,y\leq1\}$

(3)


정의역: $\{x\,|\,x\leq3\}$,
치역: $\{y\,|\,y\geq2\}$

(4)


정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\leq\frac{5}{2}\right\}$,
치역: $\{y\,|\,y\leq-1\}$

기출 Best | 1회
p.114~118

01 ③	02 ①	03 ③	04 ⑤	05 ③
06 ⑤	07 ④	08 ⑤	09 ②, ③	10 ⑤
11 ④	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ②
16 ⑤	17 ②	18 ③	19 ①	20 ①
21 ③	22 ②	23 ④	24 ③	25 ②

기출 Best | 2회
p.119~123

01 ③	02 ③	03 ①	04 ②	05 ④
06 ④	07 ⑤	08 ①	09 ③	10 ④
11 ⑤	12 ⑤	13 ②	14 ⑤	15 ④
16 ①	17 ③	18 ④	19 ②	20 ①
21 ②	22 ②	23 ⑤	24 ⑤	25 ③

변형유형 집중공략
p.124~125

1-1 ④	1-2 ②	2-1 9	2-2 3

서술형 What & How
p.126~129

1 9	2 -1	3 12	4 7	5 10
6 6	7 4	8 8		

실전 문제 | 1회
p.130~134

01 ③	02 ⑤	03 ②	04 ④	05 ⑤
06 ③	07 ②	08 ⑤	09 ①	10 ②
11 ③	12 ⑤	13 ④	14 ②	15 ②
16 ③	17 ②	18 ③	19 ②	20 ⑤
21 ③	22 ④	23 9	24 2	

실전 문제 | 2회
p.135~139

01 ⑤	02 ④	03 ①	04 ④	05 ⑤
06 ①	07 ⑤	08 ②	09 ③	10 ②
11 ③	12 ②	13 ①	14 ⑤	15 ③
16 ⑤	17 ②	18 ②	19 ④	20 ④
21 ③	22 ①	23 825	24 5	

수능형 기출문제 & 변형문제
p.140~144

1 ①	2 ②	3 3	4 8	5 27
6 3	7 ③	8 ④	9 ⑤	10 ④

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회
p.146~149

01 ③	02 ①	03 ③	04 ②	05 ④
06 ②	07 ②	08 ①	09 ③	10 ④
11 ③	12 ④	13 ③	14 ③	15 ①
16 ①	17 12	18 50	19 18	20 7

실전 모의고사 2회
p.150~153

01 ①	02 ④	03 ⑤	04 ②	05 ⑤
06 ③	07 ④	08 ⑤	09 ②	10 ①
11 ④	12 ④	13 ⑤	14 ①	15 ②
16 ④	17 21	18 -3	19 1000	20 -4

실전 모의고사 3회
p.154~157

01 ⑤	02 ①	03 ④	04 ③	05 ①
06 ④	07 ⑤	08 ②	09 ④	10 ①
11 ⑤	12 ③	13 ⑤	14 ②	15 ①
16 ⑤	17 11	18 21	19 1	20 4

실전 모의고사 4회
p.158~161

01 ⑤	02 ⑤	03 ④	04 ⑤	05 ②
06 ④	07 ③	08 ④	09 ③	10 ②
11 ②	12 ③	13 ③	14 ④	15 ③
16 ①	17 9	18 5	19 1	20 12

실전 모의고사 5회
p.162~165

01 ④	02 ⑤	03 ④	04 ⑤	05 ①
06 ④	07 ⑤	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ④	12 ③	13 ①	14 ②	15 ⑤
16 ⑤	17 80	18 84	19 -6	20 26

Ⅱ 집합과 명제

2 명제

교과서 예제 p.7

01 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
ㄴ. 거짓인 명제이다.
ㄷ. 참인 명제이다.
ㄹ. '가까운'의 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
ㅁ. 6의 배수인 6, 12, 18, ⋯은 3의 배수이므로 참인 명제이다.
따라서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

02 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(1) 10 이하의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 p의 진리집합은 $\{2, 3, 5, 7\}$이다.
(2) $2x+1<9$에서 $2x<8$ $\quad\therefore x<4$
따라서 조건 q의 진리집합은 $\{1, 2, 3\}$이다.
답 (1) $\{2, 3, 5, 7\}$ (2) $\{1, 2, 3\}$

03 답 (1) 8은 2의 배수가 아니다. (거짓)
(2) $\varnothing\subset\{1, 2, 3\}$ (참)

04 (1) $\sim p$: x는 9의 약수가 아니다.
전체집합 U의 원소 중에서 9의 약수는 1, 3이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은 $\{2, 4, 5, 6\}$이다.
(2) $\sim q$: $2x-1>7$
$2x-1>7$에서 $2x>8$ $\quad\therefore x>4$
따라서 조건 $\sim q$의 진리집합은 $\{5, 6\}$이다.
답 (1) x는 9의 약수가 아니다., $\{2, 4, 5, 6\}$
(2) $2x-1>7$, $\{5, 6\}$

05 답 (1) 가정: $x=-1$이다., 결론: $x^2+3=4$이다.
(2) 가정: a와 b가 모두 홀수이다., 결론: ab는 홀수이다.

06 (1) 두 조건 'p: $x>5$', 'q: $x>2$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|x>5\}$, $Q=\{x|x>2\}$
이때 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.
(2) 두 조건 'p: $x-2=0$', 'q: $x^2-2x=0$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2\}$, $Q=\{0, 2\}$
이때 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.
(3) 두 조건 'p: x는 5의 양의 약수이다.', 'q: x는 5의 양의 배수이다.'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 5\}$, $Q=\{5, 10, 15, \cdots\}$
이때 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
답 (1) 참 (2) 참 (3) 거짓

07 (1) $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 주어진 명제는 참이다.
(2) $x^2<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다. 답 (1) 참 (2) 거짓

08 답 (1) 어떤 실수 x에 대하여 $|x|<0$이다. (거짓)
(2) 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)^2\ge 0$이다. (참)

09 (1) 역: $x^2=9$이면 $x=3$이다. (거짓)
[반례] $x=-3$이면 $x^2=9$이지만 $x\ne 3$이다.
대우: $x^2\ne 9$이면 $x\ne 3$이다. (참)
(2) 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
대우: $x\ne 0$ 또는 $y\ne 0$이면 $xy\ne 0$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=0$이면 $xy=0$이다.
(3) 역: $x>0$ 또는 $y>0$이면 $x+y>0$이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=-3$이면 $x+y=-1<0$이다.
대우: $x\le 0$이고 $y\le 0$이면 $x+y\le 0$이다. (참)
답 (1) 역: $x^2=9$이면 $x=3$이다. (거짓)
대우: $x^2\ne 9$이면 $x\ne 3$이다. (참)
(2) 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
대우: $x\ne 0$ 또는 $y\ne 0$이면 $xy\ne 0$이다. (거짓)
(3) 역: $x>0$ 또는 $y>0$이면 $x+y>0$이다. (거짓)
대우: $x\le 0$이고 $y\le 0$이면 $x+y\le 0$이다. (참)

10 ㄷ. 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이면 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
답 ㄷ

11 (1) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-3\le x\le 3\}$, $Q=\{x|-4\le x\le 4\}$
$P\subset Q$이고 $Q\not\subset P$이므로 $p \Longrightarrow q$이지만 $q \longrightarrow p$는 참이 아니다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
(2) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q=\{1, 2, 3, 6\}$
$Q\subset P$이고 $P\not\subset Q$이므로 $q \Longrightarrow p$이지만 $p \longrightarrow q$는 참이 아니다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
(3) $x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2, 3\}$, $Q=\{2, 3\}$
$P=Q$이므로 $p \Longleftrightarrow q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
답 (1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건

12 주어진 명제의 대우

'n이 자연수일 때, n이 $\boxed{\text{짝수}}$이면 n^2도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.'

가 참임을 보이면 된다.

$n=2k$ (k는 자연수)로 나타내면

$n^2=(\boxed{2k})^2=4k^2=2\times 2k^2$이므로 n^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

∴ (가) 짝수 (나) 짝수 (다) $2k$

답 (가) 짝수 (나) 짝수 (다) $2k$

13 주어진 명제를 부정하여 $4+\sqrt{3}$이 $\boxed{\text{무리수}}$가 아니라고 가정하면 $4+\sqrt{3}$은 $\boxed{\text{유리수}}$이므로 $4+\sqrt{3}=a$ (a는 유리수)로 나타낼 수 있다.

이때 $\boxed{\sqrt{3}}=a-4$이고 유리수끼리의 뺄셈은 유리수이므로 $a-4$는 유리수이다.

그런데 좌변의 $\boxed{\sqrt{3}}$은 무리수이므로 모순이다.

따라서 $4+\sqrt{3}$은 무리수이다.

∴ (가) 무리수 (나) 유리수 (다) $\sqrt{3}$

답 (가) 무리수 (나) 유리수 (다) $\sqrt{3}$

14 $(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab=a^2-2ab+b^2$

$=\boxed{(a-b)^2}\geq 0$

∴ $(a+b)^2 \boxed{\geq} 4ab$

여기서 등호는 $\boxed{a=b}$일 때 성립한다.

∴ (가) $(a-b)^2$ (나) $\geq$ (다) $a=b$

답 (가) $(a-b)^2$ (나) $\geq$ (다) $a=b$

15 $a>0$, $b>0$이므로

$a=(\sqrt{a})^2$, $b=(\sqrt{b})^2$, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2-\boxed{2\sqrt{ab}}+(\sqrt{b})^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\}$$
$$=\frac{1}{2}(\boxed{\sqrt{a}-\sqrt{b}})^2\geq 0$$

∴ $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

여기서 등호는 $\boxed{a=b}$일 때 성립한다.

∴ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (다) $a=b$

답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (다) $a=b$

16 (1) $x>0$, $\dfrac{4}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}=4$$

여기서 등호는 $x=\dfrac{4}{x}$에서 $x^2=4$, 즉 $x=2$일 때 성립한다.

따라서 $x+\dfrac{4}{x}$의 최솟값은 4이다.

(2) $4x>0$, $\dfrac{9}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x+\frac{9}{x}\geq 2\sqrt{4x\times\frac{9}{x}}=12$$

여기서 등호는 $4x=\dfrac{9}{x}$에서 $x^2=\dfrac{9}{4}$, 즉 $x=\dfrac{3}{2}$일 때 성립한다.

따라서 $4x+\dfrac{9}{x}$의 최솟값은 12이다.

답 (1) 4 (2) 12

17 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$

이때 $x+y=12$이므로

$12\geq 2\sqrt{xy}$, $\sqrt{xy}\leq 6$ ∴ $xy\leq 36$

따라서 xy는 $x=y$, 즉 $x=6$, $y=6$일 때 최댓값 36을 갖는다.

답 최댓값 36, $x=6$, $y=6$

기출 Best | 1회

p.10~13

01 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄷ. '높다'의 기준이 분명하지 않으므로 명제가 아니다.

ㄴ, ㄹ, ㅁ은 참인 명제이다.

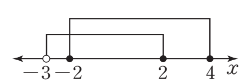
ㅂ. 모든 실수 x가 $x\geq 0$인 것은 아니므로 거짓인 명제이다.

따라서 명제인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ의 4개, 명제가 아닌 것은 ㄱ, ㄷ의 2개이므로 $a=4$, $b=2$

∴ $a-b=4-2=2$

답 ③

02



'p 또는 q'를 만족시키는 조건은 $-3<x\leq 4$이므로 이 조건의 부정은 $x\leq -3$ 또는 $x>4$이다.

답 ④

03 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

10 이하의 자연수 중 짝수는 2, 4, 6, 8, 10,

8의 약수는 1, 2, 4, 8이므로

조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$

조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로

$P^C=\{3, 5, 7, 9\}$

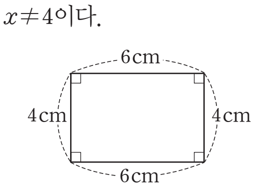
따라서 조건 $\sim p$의 진리집합의 모든 원소의 합은

$3+5+7+9=24$

답 ④

04 ㄱ. [반례] $x=-4$이면 $x^2=16$이지만 $x\neq 4$이다.

ㄹ. [반례] 오른쪽 그림과 같은 사각형은 직사각형이지만 마름모는 아니다.

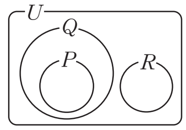


따라서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

05 세 집합 P, Q, R에 대하여

$P\cap Q=P$, $R^C\cup Q^C=U$를 만족시키도록 벤다이어그램을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



④ $R\subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 참이다. 답 ④

06 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x\le 1$ 또는 $x\ge 3$에서 $\sim p$: $1<x<3$이므로

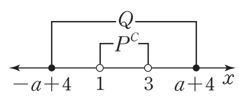
$P^C=\{x\,|\,1<x<3\}$

q: $|x-4|\le a$에서 a가 자연수이므로

$-a\le x-4\le a \qquad \therefore -a+4\le x\le a+4$

$\therefore Q=\{x\,|\,-a+4\le x\le a+4\}$

이때 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a+4\le 1$, $a+4\ge 3$

$a\ge 3$, $a\ge -1 \qquad \therefore a\ge 3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다. 답 ②

07 주어진 명제의 부정이 참이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-14x+k\ge 0$이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-14x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-7)^2-k\le 0 \qquad \therefore k\ge 49$

따라서 정수 k의 최솟값은 49이다. 답 ①

08 ① 역: $xy=0$이면 $x=0$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x\ne 0$이다.

② 역: $x^2>0$이면 $x>0$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$이면 $x^2=4>0$이지만 $x<0$이다.

③ 역: $x+y\le 2$이면 $x\le 1$이고 $y\le 1$이다. (거짓)

[반례] $x=2$, $y=0$이면 $x+y=2\le 2$이지만 $x>1$이다.

④ 역: $a+c=b+d$이면 $a=b$이고 $c=d$이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $c=3$, $b=2$, $d=2$이면 $a+c=b+d=4$이지만 $a\ne b$이고 $c\ne d$이다.

⑤ 역: $x\ne 0$ 또는 $y\ne 0$이면 $x^2+y^2>0$이다. (참)

따라서 그 역이 참인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

09 주어진 명제가 참이 되려면 그 대우

'$x=4$이면 $x^2-3ax+8=0$이다.'

가 참이 되어야 한다.

따라서 $x=4$를 $x^2-3ax+8=0$에 대입하면 등식이 성립해야 하므로

$16-12a+8=0$, $12a=24$

$\therefore a=2$ 답 ②

10 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $q \longrightarrow \sim p$, $\sim q \longrightarrow r$도 참이다.

또, 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow r$가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \longrightarrow r$가 참이고, 그 대우인 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

11 ① 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2\}$, $Q=\{-2, 2\}$이므로

$P\subset Q$, $Q\not\subset P$

즉, p는 q이기 위한 충분조건이다.

② $|x+y|=|x-y|$이면

$x+y=-(x-y)$ 또는 $x+y=x-y$, 즉

$x=0$ 또는 $y=0$

$xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0 \qquad \therefore p \Longleftrightarrow q$

즉, p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ $x^2=y^2$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$이고,

$|x|=|y|$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$이므로 $p \Longleftrightarrow q$

즉, p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $x=y$이면 $xz=yz$이므로 $p \Longrightarrow q$

$x=3$, $y=1$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x\ne y$이므로 명제 $q \longrightarrow p$는 참이 아니다.

즉, p는 q이기 위한 충분조건이다.

⑤ $x=1$, $y=3$이면 $x+y=4$는 짝수이지만 x, y는 모두 홀수이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이 아니다.

x, y가 모두 짝수이면 $x+y$도 짝수이므로 $q \Longrightarrow p$

즉, p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

12 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim q$, $q \Longrightarrow \sim p$

p는 r이기 위한 필요조건이므로 $r \Longrightarrow p$, $\sim p \Longrightarrow \sim r$

$r \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow \sim q$이므로 $r \Longrightarrow \sim q$

따라서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

13 ㄱ. $\sim r$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로 $\sim r \Longrightarrow \sim p$, 즉 $p \Longrightarrow r$

따라서 $P\subset R$이므로 $P-R=\varnothing$ (참)

ㄴ. q는 r이기 위한 필요조건이므로 $r \Longrightarrow q$

따라서 $R\subset Q$이므로 $R\cup Q=Q$ (거짓)

ㄷ. $p \Longrightarrow r$이고 $r \Longrightarrow q$이므로 $p \Longrightarrow q$

따라서 $P\subset Q$이므로 $P\cap Q=P$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

14 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $|x-1|<4$에서

$-4<x-1<4 \qquad \therefore -3<x<5$

$\therefore P=\{x\,|\,-3<x<5\}$

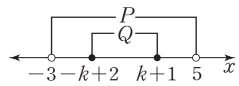
q: $(x-k-1)(x+k-2)\le 0$에서 k가 자연수이므로

$-k+2\le x\le k+1$

$\therefore Q=\{x\,|\,-k+2\le x\le k+1\}$

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면

$Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+2>-3$에서 $k<5$ …… ㉠

$k+1<5$에서 $k<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $k<4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ①

15 $\sqrt{2}$를 $\boxed{\text{유리수}}$라고 가정하면

$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 $\boxed{\text{서로소}}$인 자연수) …… ㉠

이때 ㉠의 양변을 제곱하면 $2=\dfrac{n^2}{m^2}$이므로

$n^2=2m^2$ …… ㉡

여기서 n^2이 $\boxed{\text{짝수}}$이므로 n도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

$n=2k$ (k는 자연수)로 놓고 ㉡에 대입하면

$(2k)^2=2m^2$, 즉 $m^2=2k^2$

여기서 m^2이 $\boxed{\text{짝수}}$이므로 m도 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

이것은 m, n이 $\boxed{\text{서로소}}$라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수, (나) 서로소, (다) 짝수

답 ①

16 ② $x=1$, $y=1$이면

$x^2+y^2=1^2+1^2=2$, $3xy=3\times1\times1=3$

$2<3$이므로 $x^2+y^2<3xy$

③ $x^2-4x+4=(x-2)^2\ge 0$ (참)

⑤ $x^2+y^2-2x+3=x^2-2x+1+y^2+2$

$=(x-1)^2+y^2+2>0$

따라서 항상 성립하는 것이 아닌 것은 ②이다.

답 ②

17 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{2x+3y}{xy}=\dfrac{12}{xy}$ ($\because$ $2x+3y=12$)

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+3y\ge 2\sqrt{2x\times 3y}$, $12\ge 2\sqrt{6xy}$

$6\ge\sqrt{6xy}$, $xy\le 6$ $\quad\therefore \dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{1}{6}$ ($\because$ $x>0$, $y>0$)

$\therefore \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{12}{xy}\ge 2$

따라서 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}$의 최솟값은 2이다.

$\therefore k=2$

이때 등호는 $2x=3y$일 때 성립하므로 $2x=3y=6$에서

$x=3$, $y=2$ $\quad\therefore a=3$, $b=2$

$\therefore a+b+k=3+2+2=7$

답 ⑤

18 $x>-2$에서 $x+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+3+\dfrac{4}{x+2}=x+2+\dfrac{4}{x+2}+1$

$\ge 2\sqrt{(x+2)\times\dfrac{4}{x+2}}+1$

$=2\times2+1=5$

등호는 $x+2=\dfrac{4}{x+2}$일 때 성립하므로

$(x+2)^2=4$, $x+2=2$ ($\because$ $x+2>0$)

$\therefore x=0$

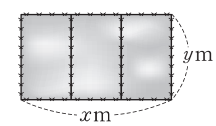
따라서 $x+3+\dfrac{4}{x+2}$는 $x=0$일 때 최솟값 5를 가지므로

$m=5$, $a=0$

$\therefore m+a=5+0=5$

답 ③

19 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 철망의 전체 길이가 600 m이므로



$2x+4y=600$

$\therefore x+2y=300$ …… ㉠

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+2y\ge 2\sqrt{x\times 2y}=2\sqrt{2xy}$

$300\ge 2\sqrt{2xy}$

이때 가축우리의 전체 넓이 xy는 등호가 성립할 때, 즉 $x=2y$일 때 최대가 되므로 $x=2y$와 ㉠을 연립하여 풀면

$x=150$, $y=75$

따라서 가축우리의 세로의 길이는 75 m이다.

답 ⑤

20 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$

$25\times16\ge(3x+4y)^2$ ($\because$ $x^2+y^2=16$)

$(3x+4y)^2\le 400$

$\therefore -20\le 3x+4y\le 20$ $\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $3x+4y$의 최댓값은 20이다.

답 ③

기출 Best | 2회

p.14~17

01 ㄱ. y의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄴ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

ㄷ. 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로 거짓인 명제이다.

ㄹ. $x=4$이면 x는 4의 약수이지만 6의 약수가 아니므로 거짓인 명제이다.

따라서 명제인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

02 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$에서 $x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$

이 조건의 부정은 '$x\ne y$ 그리고 $y\ne z$ 그리고 $z\ne x$이다.', 즉

'$\boxed{x,\ y,\ z\text{는 서로 다르다.}}$'이다.

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$에서

$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

$\therefore x=y=z$

이 조건의 부정은 '$\boxed{x\neq y \text{ 또는 } y\neq z \text{ 또는 } z\neq x\text{이다.}}$'이다.

$\therefore$ (가) x, y, z는 서로 다르다. (나) $x\neq y$ 또는 $y\neq z$ 또는 $z\neq x$

답 ①

03 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$\sim p$: $x^2-2x\leq 0$에서 $x(x-2)\leq 0$ $\quad \therefore 0\leq x\leq 2$

$\therefore P^C=\{0, 1, 2\}$

q: $x^2=9$에서 $x=3$ 또는 $x=-3$

$\therefore Q=\{-3, 3\}$

조건 $\sim p$ 또는 q의 진리집합은

$P^C\cup Q=\{-3, 0, 1, 2, 3\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$-3+0+1+2+3=3$

답 ④

04 ② $0.333\cdots$은 무한소수이지만 $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$이므로 유리수이다. (거짓)

③ 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로 그 합은 $1+2+3+4+6+12=28$ (참)

따라서 거짓인 명제는 ②이다.

답 ②

05 ㄱ. $P\subset R^C$이므로 명제 $p\longrightarrow \sim r$는 참이다.

ㄴ. $R^C\not\subset Q$이므로 명제 $\sim r\longrightarrow q$는 거짓이다.

ㄷ. $R\subset(Q-P)$, 즉 $R\subset(P^C\cap Q)$이므로 명제 $r\longrightarrow(\sim p$ 그리고 $q)$는 참이다.

따라서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

06 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

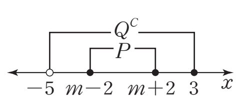
p: $|x-m|\leq 2$에서 $-2\leq x-m\leq 2$ $\quad \therefore m-2\leq x\leq m+2$

$\therefore P=\{x\,|\,m-2\leq x\leq m+2\}$

q: $x\leq -5$ 또는 $x>3$에서 $\sim q$: $-5<x\leq 3$

$\therefore Q^C=\{x\,|\,-5<x\leq 3\}$

명제 $p\longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$m-2>-5$에서 $m>-3$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$m+2\leq 3$에서 $m\leq 1$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<m\leq 1$

따라서 정수 m은 -2, -1, 0, 1이므로 모든 정수 m의 값의 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$

답 ②

07 ① $2x-1\leq 3$에서 $2x\leq 4$ $\quad \therefore x\leq 2$

$x\in U$인 모든 x에 대하여 $x\leq 2$이므로 참이다.

② $x^2-4\leq 0$에서 $(x+2)(x-2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq 2$

$x\in U$인 모든 x에 대하여 $-2\leq x\leq 2$이므로 참이다.

③ $3x+1>x-5$에서 $2x>-6$ $\quad \therefore x>-3$

$x\in U$인 모든 x에 대하여 $x>-3$이므로 참이다.

④ $x^2+5x+6<0$에서 $(x+3)(x+2)<0$

$\therefore -3<x<-2$

$x\in U$인 어떤 x도 이 부등식을 만족시키지 않으므로 거짓이다.

⑤ $x=-2$일 때 $|-2|>-2$, 즉 $|x|>x$이므로 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ④이다.

답 ④

08 ① 역: $x^2+x-2=0$이면 $x-1=0$이다. (거짓)

[반례] $x=-2$이면 $x^2+x-2=0$이지만 $x-1\neq 0$이다.

대우: $x^2+x-2\neq 0$이면 $x-1\neq 0$이다. (참)

② 역: 9의 약수이면 3의 약수이다. (거짓)

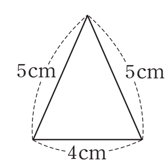
[반례] 9는 9의 약수이지만 3의 약수는 아니다.

대우: 9의 약수가 아니면 3의 약수가 아니다. (참)

③ 역: 정삼각형은 이등변삼각형이다. (참)

대우: 정삼각형이 아니면 이등변삼각형이 아니다. (거짓)

[반례] 오른쪽 그림과 같은 삼각형은 정삼각형이 아니지만 이등변삼각형이다.



④ 역: $x^2=y^2$이면 $x=y$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2=y^2$이지만 $x\neq y$이다.

대우: $x^2\neq y^2$이면 $x\neq y$이다. (참)

⑤ 역: $x^2+y^2=0$이면 $x=y=0$이다. (참)

대우: $x^2+y^2\neq 0$이면 $x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$이다. (참)

따라서 그 역은 참이고 대우는 거짓인 명제는 ③이다.

답 ③

09 명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 그 대우인 $\sim q\longrightarrow \sim p$가 참이 되어야 한다. 즉, 명제 '$x+2=0$이면 $x^2+ax+4=0$이다.'가 참이 되어야 한다.

따라서 $x=-2$를 $x^2+ax+4=0$에 대입하면 등식이 성립해야 하므로

$4-2a+4=0$, $2a=8$ $\quad \therefore a=4$

답 ④

10 조건 (가)에서 명제 $p\longrightarrow r$가 참이고, 조건 (나)에서 명제 $\sim q\longrightarrow p$도 참이므로 $\sim q\longrightarrow r$도 참이다.

따라서 명제 $\sim q\longrightarrow r$의 대우 $\sim r\longrightarrow q$도 참이다.

답 ⑤

11 (가) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2\}$, $Q=\{0, 2\}$이므로 $P\subset Q$, $Q\not\subset P$

따라서 $p\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(나) $p\Longrightarrow q$이고 $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

(다) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x<-4$ 또는 $x>4\}$, $Q=\{x\,|\,x<-4\}$

이므로 $P\not\subset Q$, $Q\subset P$

따라서 $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 ②

12 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow \sim r$

q는 r이기 위한 충분조건이므로 $q \Longrightarrow r$, 즉 $\sim r \Longrightarrow \sim q$

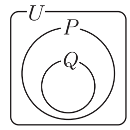
s는 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로 $\sim q \Longrightarrow s$

$p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$, $\sim q \Longrightarrow s$이므로

$p \Longrightarrow s$, 즉 $\sim s \Longrightarrow \sim p$

따라서 항상 참인 명제는 ④이다. 답 ④

13 $P \cup Q^C = U$에서 $(P^C \cap Q)^C = U$



$P^C \cap Q = \varnothing$, $Q \cap P^C = \varnothing$

$Q - P = \varnothing \qquad \therefore Q \subset P$

즉, $q \Longrightarrow p$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim q$

따라서 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다. 답 ②

14 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $(x+4)(x-2)<0$에서 $-4<x<2$

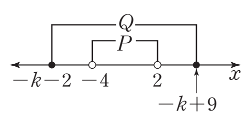
$\therefore P=\{x \mid -4<x<2\}$

q: $(x+k+2)(x+k-9) \le 0$에서 $-k-2 \le x \le -k+9$

$\therefore Q=\{x \mid -k-2 \le x \le -k+9\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면

$P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k-2 \le -4$에서 $k \ge 2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$-k+9 \ge 2$에서 $k \le 7 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2 \le k \le 7$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다. 답 ③

15 주어진 명제의 대우는 'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'이다.

n이 3의 배수가 아니면

$n=\boxed{3k-1}$ 또는 $n=\boxed{3k-2}$ (k는 자연수)

(i) $n=\boxed{3k-1}$일 때,

$n^2=9k^2-6k+1=3(3k^2-2k)+\boxed{1}$

이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

(ii) $n=\boxed{3k-2}$일 때,

$n^2=9k^2-12k+4=3(3k^2-4k+1)+\boxed{1}$

따라서 $f(k)=3k-1$, $g(k)=3k-2$, $a=1$이므로

$f(a)+g(2a)=f(1)+g(2)=2+4=6$ 답 ②

16 ㄱ. $|a+b|^2-(|a|+|b|)^2$

$=(a+b)^2-(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)$

$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2+2|ab|+b^2)$

$=2(ab-|ab|) \le 0$ ($\because ab \le |ab|$)

즉, $|a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$이므로

$|a+b| \le |a|+|b|$ (단, 등호는 $ab \ge 0$일 때 성립) (거짓)

ㄴ. (i) $|a|<|b|$일 때,

$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

(ii) $|a| \ge |b|$일 때,

$|a-b| \ge 0$, $|a|-|b| \ge 0$이므로

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=-2(ab-|ab|) \ge 0$ ($\because ab \le |ab|$)

즉, $|a-b|^2 \ge (|a|-|b|)^2$이므로 $|a-b| \ge |a|-|b|$

(i), (ii)에서 $|a-b| \ge |a|-|b|$

(단, 등호는 $|a| \ge |b|$이고 $ab \ge 0$일 때 성립) (참)

ㄷ. $(a^2+b^2+1)-(ab+a+b)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\frac{1}{2}\{\underbrace{(a-b)^2}_{\ge 0}+\underbrace{(a-1)^2}_{\ge 0}+\underbrace{(b-1)^2}_{\ge 0}\} \ge 0$

$\therefore a^2+b^2+1 \ge ab+a+b$

이때 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

17 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$8x+2y \ge 2\sqrt{8x \times 2y}=8\sqrt{xy}=8$ ($\because xy=1$)

따라서 $8x+2y$의 최솟값은 8이고 등호는 $8x=2y$일 때 성립하므로

$8x=2y=4$에서 $x=\frac{1}{2}$, $y=2$

즉, $m=8$, $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이므로

$m+a+b=8+\frac{1}{2}+2=\frac{21}{2}$ 답 ①

18 $x-2>0$, $y-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(x+y-5)\left(\frac{3}{x-2}+\frac{12}{y-3}\right)$

$=\{(x-2)+(y-3)\}\left(\frac{3}{x-2}+\frac{12}{y-3}\right)$

$=3+\frac{12(x-2)}{y-3}+\frac{3(y-3)}{x-2}+12$

$=\frac{12(x-2)}{y-3}+\frac{3(y-3)}{x-2}+15$

$\ge 2\sqrt{\frac{12(x-2)}{y-3} \times \frac{3(y-3)}{x-2}}+15$

$=2 \times 6+15=27$ (단, 등호는 $2x-y=1$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 27이다. 답 ②

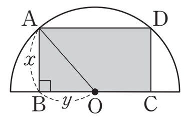
참고 등호는 $\frac{12(x-2)}{y-3}=\frac{3(y-3)}{x-2}$일 때 성립하므로

$12(x-2)^2=3(y-3)^2$, $4(x-2)^2=(y-3)^2$

$2(x-2)=y-3$ ($\because x-2>0$, $y-3>0$)

$\therefore 2x-y=1$

19 오른쪽 그림과 같이 반원의 지름의 중점을 O라 하고, $\overline{AB}=x$, $\overline{BO}=y$라 하면 직각삼각형 ABO에서



$x^2+y^2=64$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}$, $64\ge 2\sqrt{x^2y^2}$

$\therefore xy\le 32$ (단, 등호는 $x=y=4\sqrt{2}$일 때 성립)

이때 직사각형 ABCD의 넓이는 $2xy$이므로

$2xy\le 64$

따라서 구하는 직사각형의 넓이의 최댓값은 64이다. 답 ⑤

참고 등호는 $x^2=y^2$일 때 성립하므로 $x^2+y^2=64$에서

$x^2=y^2=32$ $\therefore x=4\sqrt{2}$, $y=4\sqrt{2}$

20 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$\{1^2+(\sqrt{2})^2\}\{x^2+(2\sqrt{2}y)^2\}\ge(x+4y)^2$

$3(x^2+8y^2)\ge 36$ ($\because x+4y=6$)

$\therefore x^2+8y^2\ge 12$

등호는 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}y$, 즉 $x=2y$일 때 성립하므로

$x=2y$, $x+4y=6$

을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$

따라서 x^2+8y^2은 $x=2$, $y=1$일 때 최솟값 12를 가지므로

$\alpha=2$, $\beta=1$, $m=12$

$\therefore \alpha+\beta+m=2+1+12=15$ 답 ③

변형유형 집중공략 p.18~21

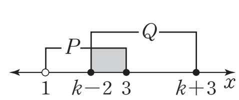
1-1 p: $1<x\le 3$, q: $k-2\le x\le k+3$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid 1<x\le 3\}$, $Q=\{x\mid k-2\le x\le k+3\}$

어떤 실수 x에 대하여 명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 하므로

(i) $k-2\ge 1$, 즉 $k\ge 3$일 때,

오른쪽 그림에서 $k-2\le 3$



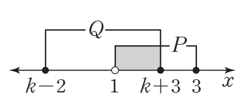
$\therefore k\le 5$

그런데 $k\ge 3$이므로

$3\le k\le 5$

(ii) $k-2<1$, 즉 $k<3$일 때,

오른쪽 그림에서 $1<k+3$



$\therefore k>-2$

그런데 $k<3$이므로

$-2<k<3$

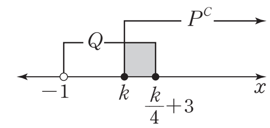
(i), (ii)에서 $-2<k\le 5$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$의 7개이다. 답 ④

1-2 주어진 명제가 거짓이므로 명제의 부정은 참이다.

주어진 명제의 부정은 '어떤 실수 x에 대하여 $\sim p$ 그리고 q이다.'이고, 이것이 참이므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P^C\cap Q\ne\varnothing$이다.

$P^C=\{x\mid x\ge k\}$이므로 오른쪽 그림에서



$k\le \dfrac{k}{4}+3$

$4k\le k+12$, $3k\le 12$ $\therefore k\le 4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4이므로 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+2+3+4=10$ 답 ③

2-1 p: $x^2-1\ge 0$에서

$(x+1)(x-1)\ge 0$ $\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 1$

q: $x^2-(a+4)x+4a\le 0$에서

$(x-a)(x-4)\le 0$

r: $x^2-5x+6>0$에서

$(x-2)(x-3)>0$ $\therefore x<2$ 또는 $x>3$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\mid x\le -1$ 또는 $x\ge 1\}$

$Q=\{x\mid a\le x\le 4\}$ 또는 $Q=\{x\mid 4\le x\le a\}$

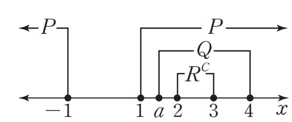
$R=\{x\mid x<2$ 또는 $x>3\}$

p는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$

$\sim r$는 q이기 위한 충분조건이므로 $R^C\subset Q$

$\therefore R^C\subset Q\subset P$

이때 $R^C=\{x\mid 2\le x\le 3\}$이므로 $a\le 4$이어야 하고 오른쪽 그림에서



$1\le a\le 2$

따라서 $m=1$, $n=2$이므로

$m+n=1+2=3$ 답 3

2-2 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{n\mid n\ge a$, n은 자연수$\}$

q: $4n-3\ge 11$에서 $4n\ge 14$ $\therefore n\ge\dfrac{7}{2}$

그런데 n은 자연수이므로 $n\ge 4$

$\therefore Q=\{n\mid n\ge 4$, n은 자연수$\}$

r: $n^2-17n-18\ge 0$에서 $(n+1)(n-18)\ge 0$

$\therefore n\le -1$ 또는 $n\ge 18$

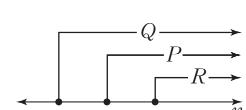
그런데 n은 자연수이므로 $n\ge 18$

$\therefore R=\{n\mid n\ge 18$, n은 자연수$\}$

이때 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$

p는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset P$

즉, $R\subset P\subset Q$이므로 오른쪽 그림에서



$4\le a\le 18$

따라서 자연수 a는 4, 5, 6, $\cdots$, 18의 15개이다. 답 15

3-1 $x>2$에서 $x-2>0$,

$x^2-4x+20=(x-2)^2+16>0$

이고

$$\frac{x-2}{x^2-4x+20}=\frac{1}{\frac{x^2-4x+20}{x-2}}=\frac{1}{\frac{(x-2)^2+16}{x-2}}$$

$$=\frac{1}{x-2+\frac{16}{x-2}}$$

$x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x-2+\frac{16}{x-2}\geq 2\sqrt{(x-2)\times\frac{16}{x-2}}=8$$

이때 등호는 $x-2=\frac{16}{x-2}$일 때 성립하므로

$(x-2)^2=16$

$x-2=4$ ($\because x-2>0$)

$\therefore x=6$

따라서 $x-2+\frac{16}{x-2}$의 최솟값이 8이므로

$\frac{1}{x-2+\frac{16}{x-2}}$, 즉 $\frac{x-2}{x^2-4x+20}$의 최댓값은 $\frac{1}{8}$이다.

$\therefore a=\frac{1}{8}$, $b=6$

$\therefore \frac{b}{a}=6\div\frac{1}{8}=48$

답 ⑤

3-2 $x>-k$, 즉 $x+k>0$이고,

$x^2+2kx+10k^2=(x+k)^2+9k^2>0$이므로

$$\frac{x+k}{x^2+2kx+10k^2}=\frac{1}{\frac{x^2+2kx+10k^2}{x+k}}>0$$

$\frac{x+k}{x^2+2kx+10k^2}$의 최댓값이 $\frac{1}{18}$이므로 $\frac{x^2+2kx+10k^2}{x+k}$의 최솟값은 18이다.

$x+k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2+2kx+10k^2}{x+k}=\frac{(x^2+2kx+k^2)+9k^2}{x+k}$$

$$=\frac{(x+k)^2+9k^2}{x+k}=x+k+\frac{9k^2}{x+k}$$

$$\geq 2\sqrt{(x+k)\times\frac{9k^2}{x+k}}$$

$$=2\times 3k=6k$$

(단, 등호는 $(x+k)^2=9k^2$, 즉 $x=2k$일 때 성립)

$\frac{x^2+2kx+10k^2}{x+k}$의 최솟값은 $6k$이므로

$6k=18$ $\quad\therefore k=3$

답 3

4-1 직선의 x절편, y절편을 각각 a, b ($a>0$, $b>0$)라 하면 삼각형 OBC의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$

직선 BC의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(3, 5)$를 지나므로 $\frac{3}{a}+\frac{5}{b}=1$

이때 $\frac{3}{a}>0$, $\frac{5}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$1=\frac{3}{a}+\frac{5}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{5}{b}}$$

$$=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{ab}}\left(\text{단, 등호는 }\frac{3}{a}=\frac{5}{b}\text{일 때 성립}\right)$$

$1\geq\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{ab}}$에서 $\sqrt{ab}\geq 2\sqrt{15}$, $ab\geq 60$ $\quad\therefore \frac{1}{2}ab\geq 30$

따라서 삼각형 OBC의 넓이의 최솟값은 30이다.

답 ⑤

참고 등호는 $\frac{3}{a}=\frac{5}{b}$일 때 성립하고, $\frac{3}{a}+\frac{5}{b}=1$이므로

$\frac{3}{a}=\frac{1}{2}$, $\frac{5}{b}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=6$, $b=10$

4-2 직선 $mx-y+4=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$m(x+3)-(y-m)+4=0$ $\quad\therefore mx-y+4m+4=0$

이 직선의 x절편은 $\frac{-4m-4}{m}$, y절편은 $4m+4$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\left|\frac{-4m-4}{m}\right|\times|4m+4|$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4m+4}{m}\times(4m+4)\ (\because m>0)$$

$$=\frac{8m^2+16m+8}{m}$$

$$=8m+\frac{8}{m}+16$$

이때 $m>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S=8m+\frac{8}{m}+16\geq 2\sqrt{8m\times\frac{8}{m}}+16=32$$

등호는 $8m=\frac{8}{m}$일 때 성립하므로 $8m^2=8$ $\quad\therefore m=1$

따라서 S는 $m=1$일 때 최솟값 32를 가지므로

$a=32$, $b=1$

$\therefore a+b=32+1=33$

답 33

서술형 What & How

p.22~25

1 주어진 명제가 참이므로 그 대우인

'$2a-1\geq k$이고 $3b+2\geq -1$이면 $a+b\geq 7$이다.'

도 참이다. …… ❶

$2a-1\geq k$에서

$2a\geq k+1$ $\quad\therefore a\geq\frac{k+1}{2}$ …… ㉠

$3b+2\geq -1$에서

$3b\geq -3$ $\quad\therefore b\geq -1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a+b\geq\frac{k+1}{2}+(-1)=\frac{k-1}{2}$ …… ❷

이때 $a+b\geq7$이어야 하므로

$\frac{k-1}{2}\geq7,\ k-1\geq14\qquad\therefore\ k\geq15$

따라서 실수 k의 최솟값은 15이다. …… ❸

답 15

2 주어진 명제가 참이므로 그 대우인

'$-x+3\geq2k-1$이고 $2y-4\leq4$이면 $x+y\leq k$이다.'

도 참이다. …… ❶

$-x+3\geq2k-1$에서

$-x\geq2k-4\qquad\therefore\ x\leq-2k+4$ …… ㉠

$2y-4\leq4$에서

$2y\leq8\qquad\therefore\ y\leq4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$x+y\leq(-2k+4)+4=-2k+8$ …… ❷

이때 $x+y\leq k$이어야 하므로

$-2k+8\leq k,\ -3k\leq-8\qquad\therefore\ k\geq\frac{8}{3}$

따라서 정수 k의 최솟값은 3이다. …… ❸

답 3

채점기준	배점
❶ 주어진 명제의 대우와 그것의 참, 거짓 구하기	2
❷ $x+y$의 값의 범위 구하기	3
❸ 정수 k의 최솟값 구하기	2

3 p: $x^2-x-12\leq0$에서

$(x+3)(x-4)\leq0\qquad\therefore\ -3\leq x\leq4$

또, q: $|x-a|\leq2$에서

$-2\leq x-a\leq2\qquad\therefore\ a-2\leq x\leq a+2$ …… ❶

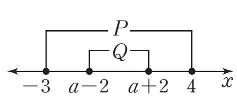
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,-3\leq x\leq4\}$, $Q=\{x\,|\,a-2\leq x\leq a+2\}$

명제 $p\longrightarrow q$의 역, 즉 명제 $q\longrightarrow p$가 참이 되려면

$Q\subset P$ …… ❷

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-2\geq-3$에서 $a\geq-1$ …… ㉠

$a+2\leq4$에서 $a\leq2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1\leq a\leq2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2의 4개이다. …… ❸

답 4

4 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,a<x<b+5\}$,

$Q=\{x\,|\,2b-3<x<2a-1\}$ …… ❶

명제 $p\longrightarrow q$의 역, 즉 명제 $q\longrightarrow p$가 참이므로 $Q\subset P$

또, 명제 $p\longrightarrow q$의 대우가 참이면 명제 $p\longrightarrow q$도 참이므로

$P\subset Q$

따라서 $P=Q$이므로 …… ❷

$a=2b-3,\ b+5=2a-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=5,\ b=4$

$\therefore\ ab=5\times4=20$ …… ❸

답 20

채점기준	배점
❶ 두 조건 p, q의 진리집합 구하기	2
❷ 명제 $p\longrightarrow q$의 역과 대우가 모두 참일 조건 구하기	2
❸ a, b의 값과 ab의 값 구하기	2

5 (1) 주어진 명제의 대우는 'a, b, c가 자연수일 때, a, b, c가 모두 홀수이면 $a^2+b^2\neq c^2$이다.'이다. …… ❶

(2) a, b, c가 모두 홀수이면 $a=2k-1$, $b=2s-1$, $c=2t-1$ (k, s, t는 자연수)로 나타낼 수 있다.

이때

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(2k-1)^2+(2s-1)^2\\&=4k^2-4k+1+4s^2-4s+1\\&=2(2k^2+2s^2-2k-2s+1)\end{aligned}$$

이므로 짝수이고

$c^2=(2t-1)^2=4t^2-4t+1=2(2t^2-2t)+1$

이므로 홀수이다.

$\therefore\ a^2+b^2\neq c^2$ …… ❷

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. …… ❸

답 풀이 참조

6 (1) 주어진 명제의 대우는 'm, n이 모두 홀수이면 mn은 홀수이다.'이다. …… ❶

(2) $m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)이라 하면

$$\begin{aligned}mn&=(2k-1)(2l-1)\\&=4kl-2k-2l+1\\&=2(2kl-k-l)+1\end{aligned}$$

이므로 mn은 홀수이다. …… ❷

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. …… ❸

답 풀이 참조

채점기준	배점
❶ 주어진 명제의 대우 구하기	2
❷ 주어진 명제의 대우가 참임을 증명하기	4
❸ 주어진 명제가 참인 이유 설명하기	1

7 $(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{16}{b}\right)=4+\frac{16a}{b}+\frac{4b}{a}+16$

$=\frac{16a}{b}+\frac{4b}{a}+20$ …… ❶

$a>0,\ b>0$에서 $\frac{16a}{b}>0,\ \frac{4b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{16a}{b}+\frac{4b}{a}+20\geq 2\sqrt{\frac{16a}{b}\times\frac{4b}{a}}+20$$

$$=2\times 8+20=36 \qquad \cdots\cdots ❷$$

이때 등호는 $\frac{16a}{b}=\frac{4b}{a}$일 때 성립하므로

$16a^2=4b^2$, $4a^2=b^2$ $\quad\therefore 2a=b$ ($\because a>0$, $b>0$) $\cdots\cdots$ ❸

따라서 구하는 최솟값은 36이다. $\cdots\cdots$ ❹

답 36

8 $A=(2x+y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{4y}\right)=4+\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}+\frac{1}{4}$

$$=\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}+\frac{17}{4}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x}{2y}\times\frac{2y}{x}}+\frac{17}{4}=2\times 1+\frac{17}{4}=\frac{25}{4}$$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{2y}=\frac{2y}{x}\text{, 즉 }x=2y\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore a=\frac{25}{4}$ $\cdots\cdots$ ❶

$B=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1$

$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}}+2=2\times 1+2=4$$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{y}=\frac{y}{x}\text{, 즉 }x=y\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore b=4$ $\cdots\cdots$ ❷

$C=(x+y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}\right)=2+\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}+\frac{1}{2}$

$$=\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}+\frac{5}{2}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x}{2y}\times\frac{2y}{x}}+\frac{5}{2}=2\times 1+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{2y}=\frac{2y}{x}\text{, 즉 }x=2y\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore c=\frac{9}{2}$ $\cdots\cdots$ ❸

$\therefore b<c<a$ $\cdots\cdots$ ❹

답 $b<c<a$

채점기준	배점
❶ a의 값 구하기	2
❷ b의 값 구하기	2
❸ c의 값 구하기	2
❹ a, b, c의 대소 관계 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.26~29

01 $x^2-5x-14\leq 0$에서 $(x+2)(x-7)\leq 0$ $\quad\therefore -2\leq x\leq 7$

$\therefore P=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$3x-8>0$에서 $3x>8$ $\quad\therefore x>\frac{8}{3}$

$\therefore Q=\{3, 4, 5, 6, 7, \cdots\}$

따라서 $P\cap Q=\{3, 4, 5, 6, 7\}$이므로 $n(P\cap Q)=5$

답 ③

02 ② 2의 양의 약수 1, 2는 모두 4의 양의 약수이다. (참)

③ [반례] $a=\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{3}$이면 a, b는 무리수이지만 $a+b=0$은 유리수이다. (거짓)

④ 2보다 큰 소수 3, 5, 7, 11, 13, $\cdots$은 모두 홀수이다. (참)

⑤ $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+5>0$이 성립한다. (참)

따라서 거짓인 명제는 ③이다.

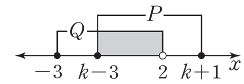
답 ③

03 두 조건 $k-3\leq x\leq k+1$, $-3\leq x<2$의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid k-3\leq x\leq k+1\}$, $Q=\{x\mid -3\leq x<2\}$

주어진 명제가 참이 되려면 $P\cap Q\neq\varnothing$이어야 하므로

(i) $k-3\geq -3$, 즉 $k\geq 0$일 때,



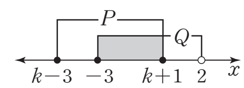
오른쪽 그림에서 $k-3<2$이어야 하므로

$k<5$

그런데 $k\geq 0$이므로

$0\leq k<5$

(ii) $k-3<-3$, 즉 $k<0$일 때,



오른쪽 그림에서 $k+1\geq -3$이어야 하므로

$k\geq -4$

그런데 $k<0$이므로

$-4\leq k<0$

(i), (ii)에서 $-4\leq k<5$

답 ①

04 명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1>0$이다.'가 참이 되므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-1\times 1<0$, $(a+1)(a-1)<0$

$\therefore -1<a<1$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+a\leq 0$이다.'가 거짓이므로 이 명제의 부정 '모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax+a>0$이다.'가 참이다. 즉, 이차방정식 $x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-a)^2-1\times a<0$, $a(a-1)<0$

$\therefore 0<a<1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<a<1$

답 ③

05 ① 역: $x^2=1$이면 $x=1$이다. (거짓)

[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x\neq 1$이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

② 역: $x=1$이면 $x^3=1$이다. (참)

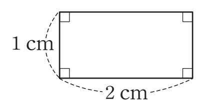
명제: $x^3=1$이면 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1\left(\because x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\right)$ (참)

주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

③ 역: 정사각형은 직사각형이다. (참)

명제: [반례] 오른쪽 그림의 사각형은 직사각형이지만 정사각형이 아니다.



즉, 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

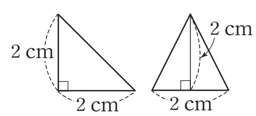
④ 역: $x+y=5$이면 $x=2$, $y=3$이다. (거짓)

[반례] $x=1$, $y=4$이면 $x+y=5$이지만 $x\neq2$, $y\neq3$이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

⑤ 역: 서로 합동인 두 삼각형은 넓이가 같다. (참)

명제: [반례] 오른쪽 그림의 두 삼각형은 넓이가 $\frac{1}{2}\times2\times2=2(\text{cm}^2)$로 같지만 서로 합동이 아니다.



즉, 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

따라서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ②이다. 답 ②

참고 ①~⑤의 대우

① $x^2\neq1$이면 $x\neq1$이다.

② $x\neq1$이면 $x^3\neq1$이다.

③ 정사각형이 아니면 직사각형이 아니다.

④ $x+y\neq5$이면 $x\neq2$ 또는 $y\neq3$이다.

⑤ 서로 합동이 아닌 두 삼각형은 넓이가 같지 않다.

06 $\sim p\Longrightarrow q$이므로 $P^C\subset Q$

ㄱ. $P^C\subset Q$이므로 $Q^C\subset(P^C)^C$ $\quad\therefore Q^C\subset P$ (참)

ㄴ. $Q^C\subset P$이므로 $P\cap Q^C=Q^C\neq\varnothing$ (거짓)

ㄷ. $P^C\subset Q$이므로 $P^C-Q=\varnothing$ (참)

ㄹ. $Q^C\subset P$이므로 $P\cup Q^C=P$ (참)

ㅁ. $P^C\subset Q$이므로 $P^C\not\subset Q^C$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ③

07 (i) A만 진실을 말했다고 할 때,

A는 서점 또는 영화관, B는 서점, C는 도서관 또는 영화관에 간 것이므로 A는 영화관, B는 서점, C는 도서관에 간 것이다.

(ii) B만 진실을 말했다고 할 때,

A는 도서관, B는 도서관 또는 영화관, C는 도서관 또는 영화관에 간 것이다. 따라서 서점에 간 학생이 없으므로 모순이다.

(iii) C만 진실을 말했다고 할 때,

A는 도서관, B는 서점, C는 서점에 간 것이다. 따라서 영화관에 간 학생이 없고 B, C 두 학생이 같은 장소에 간 것이므로 모순이다.

(i), (ii), (iii)에서 도서관, 서점, 영화관에 간 학생은 차례대로 C, B, A이다. 답 ⑤

참고 B 또는 C가 진실을 말한 것이면 B, C는 모두 서점에 가지 않았거나 모두 서점에 간 것이므로 진실을 말한 사람은 A이다.

08 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

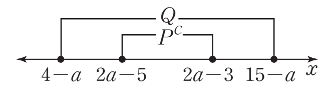
$P=\{x\,|\,x<2a-5$ 또는 $x>2a-3\}$,

$Q=\{x\,|\,4-a\leq x\leq15-a\}$

이때 명제 $\sim q\longrightarrow p$의 대우 $\sim p\longrightarrow q$가 참이므로 $P^C\subset Q$

$P^C=\{x\,|\,2a-5\leq x\leq2a-3\}$

이므로 오른쪽 그림에서



$4-a\leq2a-5$, $2a-3\leq15-a$

$4-a\leq2a-5$에서

$-3a\leq-9 \quad \therefore a\geq3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2a-3\leq15-a$에서

$3a\leq18 \quad \therefore a\leq6 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3\leq a\leq6$

따라서 정수 a의 최솟값은 3이다. 답 ②

09 ㄱ. $|x|=1$에서 $x=\pm1$이고 $x^2-1=0$에서 $x=\pm1$이므로

$p\Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄴ. $(x-y)(y-z)(z-x)=0$에서

$x-y=0$ 또는 $y-z=0$ 또는 $z-x=0$, 즉

$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$이므로 명제 $p\longrightarrow q$는 거짓이다.

또, $x=y=z$이면 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이므로 $q\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄷ. $xy=|xy|$에서 $xy\geq0$, 즉 $x\geq0$, $y\geq0$ 또는 $x\leq0$, $y\leq0$이므로 명제 $p\longrightarrow q$는 거짓이다.

또, $x>0$, $y>0$이면 $xy>0$

$\therefore |xy|=xy$

$\therefore q\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

10 $(A\cup B)\cap(B-A)^C=A\cap B$에서

$(A\cup B)\cap(B-A)^C=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$

$=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$

$=A\cup(B\cap B^C)$

$=A\cup\varnothing=A$

즉, $A=A\cap B$이므로 $A\subset B$

따라서 $(A\cup B)\cap(B-A)^C=A\cap B$가 성립하기 위한 필요충분조건인 것은 ① $A\cup B=B$이다. 답 ①

11 $p\Longrightarrow q$이므로 $\sim q\Longrightarrow\sim p$

$\sim r\Longrightarrow\sim q$이므로 $q\Longrightarrow r$

이때 $p\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow r$이므로 $p\Longrightarrow r$

$p\Longrightarrow r$이므로 $\sim r\Longrightarrow\sim p$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

12 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

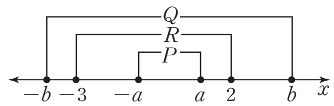
$P=\{x|-a\le x\le a\}$, $Q=\{x|-b\le x\le b\}$,

$R=\{x|-3\le x\le 2\}$

p는 r이기 위한 충분조건이므로 $P\subset R$

q는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset Q$

$\therefore P\subset R\subset Q$



위의 그림에서 $-a\ge -3$과 $a\le 2$, 즉 $a\le 3$과 $a\le 2$가 성립해야 하므로

$0<a\le 2$ ($\because a>0$)

또, $-b\le -3$과 $b\ge 2$, 즉 $b\ge 3$, $b\ge 2$가 성립해야 하므로

$b\ge 3$

따라서 a의 최댓값은 2, b의 최솟값은 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$

답 ②

13 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 점 $(1, 2)$를 지나므로 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$

$a>0$, $b>0$에서 $\frac{1}{a}>0$, $\frac{2}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{2}{ab}}$

$1\ge 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$에서 $\sqrt{ab}\ge 2\sqrt{2}$

$\therefore ab\ge 8$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{a}=\frac{2}{b}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ab의 최솟값은 8이다.

답 ③

참고 등호는 $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$일 때 성립하고 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$, $\frac{2}{b}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=2, b=4$

14 $x\ne 2$에서 $(x-2)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2-4x+\frac{4}{(x-2)^2}=x^2-4x+4-4+\frac{4}{(x-2)^2}$$
$$=(x-2)^2+\frac{4}{(x-2)^2}-4$$
$$\ge 2\sqrt{(x-2)^2\times\frac{4}{(x-2)^2}}-4$$
$$=2\times 2-4$$
$$=0$$

$\left(\text{단, 등호는 } (x-2)^2=\frac{4}{(x-2)^2}\text{, 즉 } x=2\pm\sqrt{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 0이다.

답 ①

15 [결과 2]에 의하여 미진이는 4등이다.

[결과 3]에 의하여 선우 1등, 수빈 2등 또는 선우 2등, 수빈 3등이다.

그런데 선우 2등, 수빈 3등이면 지민이가 1등이므로 [결과 1]에 모순이다.

즉, 선우 1등, 수빈 2등, 지민 3등이다.

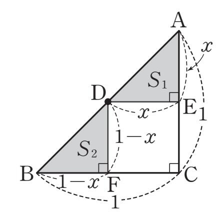
따라서 네 명의 학생을 1등부터 4등까지 순서대로 나열하면 선우, 수빈, 지민, 미진이다.

답 ②

16 오른쪽 그림과 같이

$\overline{AE}=x$라 하면 $\overline{DE}=x$

$\overline{BF}=\overline{DF}=1-x$



$\therefore S_1=\frac{1}{2}x^2$, $S_2=\frac{1}{2}(1-x)^2$

$S_1>0$, $S_2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2(S_1+S_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)+4$$
$$\ge 2\times 2\sqrt{S_1S_2}+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{1}{S_1S_2}}+4$$
$$=4\sqrt{S_1S_2}+\sqrt{\frac{1}{S_1S_2}}+4$$

이때 등호는 $S_1=S_2$이고 $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{S_2}$, 즉 $S_1=S_2$일 때 성립하므로

$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}(1-x)^2$, $x^2=x^2-2x+1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

$\therefore S_1=S_2=\frac{1}{8}$

$$\therefore 2(S_1+S_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}\right)+4$$
$$\ge 2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times 16+4=\frac{25}{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{25}{2}$이다.

답 ⑤

17 ㉮ 명제: [반례] $a=1$, $b=\sqrt{2}$이면 $a+b=1+\sqrt{2}$는 무리수이지만 a는 무리수가 아니다. (거짓)

역: 실수 a, b에 대하여 a, b 모두 무리수이면 $a+b$가 무리수이다. (거짓)

[반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 a, b는 모두 무리수이지만 $a+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$은 무리수가 아니다.

㉯ 명제: [반례] $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$이면 $A-B=\varnothing$이지만 $A\ne B$이다. (거짓)

역: 공집합이 아닌 두 집합 A, B에 대하여 $A=B$이면 $A-B=\varnothing$이다. (참)

따라서 ㉮에서 가운데로 이동하고 ㉯에서 아래로 이동하면 도착하는 지점은 ⑥이다.

답 ⑥

18 두 명제 $\sim p\longrightarrow q$, $p\longrightarrow r$가 참이므로 $P^C\subset Q$, $P\subset R$

또한 두 명제의 대우인 $\sim q\longrightarrow p$, $\sim r\longrightarrow\sim p$도 참이므로

$Q^C\subset P$, $R^C\subset P^C$

ㄱ. $\sim r\Longrightarrow\sim p$이고 $\sim p\Longrightarrow q$이므로 $\sim r\Longrightarrow q$ (참)

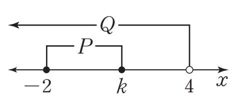
ㄴ. [반례] 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 $P=\{2,\ 4\}$, $Q=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$이면 $P^C=\{1,\ 3,\ 5\}$이므로 $P^C \subset Q$이지만 $P \cap Q=\{4\} \neq \varnothing$ (거짓)

ㄷ. $Q^C \subset P$, $P \subset R$이므로 $Q^C \subset R$
즉, $Q^C \cap R = Q^C \subset P$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

19 (1) 주어진 명제의 대우를 구하면
'$x^2+(2-k)x-2k \le 0$이면 $x<4$이다.'이다. …… ❶

(2) 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
p: $x^2+(2-k)x-2k \le 0$, q: $x<4$라 하면 조건 p에서
$(x+2)(x-k) \le 0$ $\quad \therefore -2 \le x \le k$ ($\because$ k는 자연수)
따라서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid -2 \le x \le k\}$,
$Q=\{x \mid x<4\}$ …… ❷
$P \subset Q$이므로 오른쪽 그림에서



$k<4$
그런데 k는 자연수이므로
$1 \le k < 4$ …… ❸
따라서 자연수 k는 1, 2, 3이므로 모든 자연수 k의 값의 합은
$1+2+3=6$ …… ❹

답 (1) $x^2+(2-k)x-2k \le 0$이면 $x<4$이다. (2) 6

채점기준	배점
❶ 주어진 명제의 대우 구하기	1
❷ 주어진 명제의 대우의 가정과 결론의 진리집합 구하기	2
❸ 자연수 k의 값의 범위 구하기	2
❹ 자연수 k의 값의 합 구하기	1

20 $\dfrac{8ab}{(a+b)^2}=\dfrac{8ab}{a^2+2ab+b^2}=\dfrac{8}{\dfrac{a}{b}+2+\dfrac{b}{a}}$

$=\dfrac{8}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2}$ …… ❶

$\dfrac{a}{b}>0$, $\dfrac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}}=2$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}\text{, 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$ …… ❷

따라서 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$의 최솟값이 2이므로 $\dfrac{8ab}{(a+b)^2}$, 즉 $\dfrac{8}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2}$의 최댓값은 $\dfrac{8}{2+2}=2$이다. …… ❸

답 2

채점기준	배점
❶ 분모, 분자를 ab로 나누어 식 변형하기	2
❷ 산술평균과 기하평균의 관계 이용하기	2
❸ 주어진 식의 최댓값 구하기	2

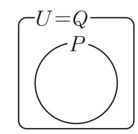
실전 문제 | 2회

p.30~33

01 ③ [반례] $n=2$는 소수이지만 $n^2=4$는 짝수이다. (거짓) 답 ③

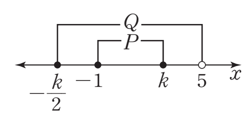
02 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 거짓임을 보이려면 집합 P의 원소 중에서 집합 Q^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 집합은 $P \cap (Q^C)^C = P \cap Q$ 답 ①

03 $P-Q=\varnothing$에서 $P \subset Q$, 즉 $P \cup Q = Q$이고,
$P \cup Q = U$이므로 $Q=U$
이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $P^C \subset U$, 즉 $P^C \subset Q$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$는 참이다.
ㄷ. $P \subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.
ㄹ. ㄷ에서 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이다.
따라서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

04 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
p: $-2 \le x-1 \le k-1$에서 $-1 \le x \le k$
$\therefore P=\{x \mid -1 \le x \le k\}$
q: $-\dfrac{k}{2}+2 \le x+2 < 7$에서 $-\dfrac{k}{2} \le x < 5$
$\therefore Q=\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{k}{2} \le x < 5\right\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-\dfrac{k}{2} \le -1$과 $k<5$가 성립해야 하므로
$2 \le k < 5$
따라서 정수 k는 2, 3, 4이므로 모든 정수 k의 값의 합은
$2+3+4=9$ 답 ⑤

05 주어진 명제의 부정은 '어떤 동물은 두 개의 눈을 갖고 있지 않다.'이다.
즉, 두 개의 눈을 갖고 있지 않은 동물이 적어도 하나는 존재한다. 답 ④

06 ① 역: $x>0$ 또는 $y>0$이면 $xy>0$이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x>0$이지만 $xy=-2<0$
명제: [반례] $x=-3$, $y=-2$이면 $xy=6>0$이지만 $x<0$이고 $y<0$이다. (거짓)
주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.
② 역: $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$이면 $x^2+y^2>0$이다. (참)
③ 역: $x+y<0$이면 x, y 중 적어도 하나는 음수이다. (참)
④ 역: $x-1>3$이면 $3x-2 \ge 7$이다.
$x-1>3$에서 $x>4$
$3x-2 \ge 7$에서 $3x \ge 9$ $\quad \therefore x \ge 3$
따라서 $x>4$이면 $x \ge 3$이므로 참이다.

⑤ 역: x가 3의 배수이면 x는 6의 배수이다. (거짓)

[반례] $x=9$이면 x는 3의 배수이지만 6의 배수는 아니다.

또, 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

따라서 그 역은 거짓이고 대우는 참인 명제는 ⑤이다. 답 ⑤

07 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 그 대우인 $p \longrightarrow \sim q$도 참이 되어야 한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p: $x^2-(a+b)x+ab\le 0$에서

$(x-a)(x-b)\le 0 \qquad \therefore a\le x\le b$

$\therefore P=\{x\,|\,a\le x\le b\}$

q: $2x-3\le -11$ 또는 $3x-7\ge 11$이고

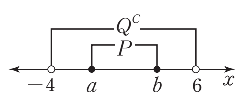
$2x-3\le -11$에서 $2x\le -8 \qquad \therefore x\le -4$

$3x-7\ge 11$에서 $3x\ge 18 \qquad \therefore x\ge 6$

즉, q: $x\le -4$ 또는 $x\ge 6$이므로 $\sim q$: $-4<x<6$

$\therefore Q^C=\{x\,|\,-4<x<6\}$

$p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



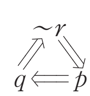
$a>-4$, $b<6$

따라서 정수 a의 최솟값은 -3, 정수 b의 최댓값은 5이므로 구하는 합은

$-3+5=2$ 답 ⑤

08 두 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 각각의 대우인 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

즉, $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow p$이므로 이를 정리하면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $q \Longrightarrow p$이므로 $Q\subset P$ (참)

ㄴ. $q \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow q$이므로 $Q\subset R^C$, $R^C\subset Q$

$\therefore Q=R^C$ (거짓)

ㄷ. $p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow p$이므로 $P\subset R^C$, $R^C\subset P$

$\therefore P=R^C$

$\therefore P\cap R=R^C\cap R=\varnothing$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

09 p: $x^2+y^2=0$에서 $x=0$, $y=0$

q: $|x|+|y|=0$에서 $x=0$, $y=0$

이므로 $p \Longleftrightarrow q$, $p \Longrightarrow r$, $q \Longrightarrow r$

⑤ r는 p이기 위한 필요조건이다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

10 $p \Longrightarrow \sim q$이므로 $q \Longrightarrow \sim p$

$\sim r \Longrightarrow q$이므로 $\sim q \Longrightarrow r$

$p \Longrightarrow \sim q$, $\sim q \Longrightarrow r$이므로 $p \Longrightarrow r$

따라서 참인 명제는 ①이다. 답 ①

11 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $(x+3)^2=a$, 즉 $x^2+6x+9-a=0$의 해는 $x=1$ 또는 $x=b$이다.

$x=1$을 $x^2+6x+9-a=0$에 대입하면

$1+6+9-a=0 \qquad \therefore a=16$

따라서 $x^2+6x-7=0$이므로

$(x+7)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-7$ 또는 $x=1$

$\therefore b=-7$

$\therefore a+b=16+(-7)=9$ 답 ③

12 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2x+\frac{2}{x}+a\ge 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+2\sqrt{2x\times\frac{2}{x}}+a$$
$$=2\times 1+2\times 2+a=6+a$$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{1}{x}\text{일 때 성립}\right)$

$x^2+\frac{1}{x^2}+2x+\frac{2}{x}+a$의 값이 음이 아닌 실수가 되려면

$6+a\ge 0 \qquad \therefore a\ge -6$

따라서 상수 a의 최솟값은 -6이다. 답 ①

13 $$x^2+\frac{9}{4x^2+2}=x^2+\frac{9}{4\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}=x^2+\frac{1}{2}+\frac{9}{4\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

이고

$x^2+\frac{1}{2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+\frac{1}{2}+\frac{9}{4\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{2}\ge 2\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\times\frac{9}{4\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}}-\frac{1}{2}$$
$$=2\times\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$\left(\text{단, 등호는 } x^2+\frac{1}{2}=\frac{9}{4\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}\text{, 즉 } x=\pm 1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $x^2+\frac{9}{4x^2+2}$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다. 답 ⑤

14 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

p: $x^2+(1-a)x-a<0$에서 $(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a$ ($\because a>0$)

$\therefore P=\{x\,|\,-1<x<a\}$

q: $|x^2-5|\le 20$에서

$-20\le x^2-5\le 20$, $0\le x^2\le 25$ ($\because x^2\ge 0$)

$\therefore -5\le x\le 5$

$\therefore Q=\{x\,|\,-5\le x\le 5\}$

r: $|x-2|<b$에서

$-b<x-2<b \qquad \therefore -b+2<x<b+2$

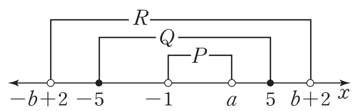
$\therefore R=\{x\,|\,-b+2<x<b+2\}$

q는 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset Q$

q는 r이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset R$

$\therefore P \subset Q \subset R$

$P \subset Q \subset R$이므로 오른쪽 그림에서



$0 < a \leq 5$

$-b+2 < -5$, $b+2 > 5$

$-b+2 < -5$에서 $b > 7$

$b+2 > 5$에서 $b > 3$

$\therefore b > 7$

따라서 자연수 a의 최댓값은 5, 자연수 b의 최솟값은 8이므로 구하는 합은

$5+8=13$ 답 ③

15 $x \in P$인 어떤 x에 대하여 $x \notin Q$이면 $x \in Q^C$이므로

$P \cap Q^C \neq \varnothing$, 즉 $P \not\subset Q$

또, $x \in Q$인 모든 x에 대하여 $x \notin R$이면 $x \in R^C$이므로

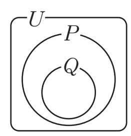
$Q \subset R^C$

ㄱ. $P \not\subset Q$이므로 q는 p이기 위한 필요조건이 아니다. (거짓)

ㄴ. $Q \subset R^C$에서 $q \Longrightarrow \sim r$이므로 $r \Longrightarrow \sim q$

즉, r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄷ. [반례] $Q \subset P$이고 $P \neq Q$이면 $P \not\subset Q$이지만 $Q \not\subset P^C$이므로 $P \neq Q^C$이다. 즉, $\sim q$는 p이기 위한 필요충분조건이 아니다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

16 두 정사각형의 한 변의 길이를 각각 a, b라 하면

$a+b=8$

두 정사각형의 넓이의 합은 a^2+b^2이고 $a>0$, $b>0$이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

$2(a^2+b^2) \geq 64$

$\therefore a^2+b^2 \geq 32$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 두 정사각형의 넓이의 합의 최솟값은 32이다. 답 ①

17 명제 ㈑의 대우는 '성욱이가 장난감을 받지 못했으면 지현이가 장난감을 받았다.'이므로 명제 ㈎에 의하여 성욱이는 장난감을 받지 못했고, 지현이는 장난감을 받았다.

지현이가 장난감을 받았으므로 명제 ㈏에 의하여 수연이는 장난감을 받지 못했다.

명제 ㈐의 대우는 '성욱이가 장난감을 받지 못했으면 상혁이는 장난감을 받았다.'이므로 명제 ㈎에 의하여 성욱이는 장난감을 받지 못했고, 상혁이는 장난감을 받았다.

따라서 장난감은 모두 2개이므로 $n=2$이다. 답 ③

18 $(P-R^C) \cup (R^C-Q^C) = \varnothing$이므로

$P-R^C=\varnothing$, $R^C-Q^C=\varnothing$

즉, $P \subset R^C$, $R^C \subset Q^C$이므로 $P \subset R^C \subset Q^C$

① $P \subset Q^C$에서 $P \not\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이 아니다.

② $P \subset Q^C$이므로 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

③ $R^C \subset Q^C$에서 $Q \subset R$이므로 q는 r이기 위한 충분조건이다.

④ $R^C \subset Q^C$에서 $R^C \not\subset Q$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 필요조건이 아니다.

⑤ $P \subset R^C$에서 $R \subset P^C$이므로 r는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

답 ⑤

참고 두 집합 A, B에 대하여

$A \subset B \Longleftrightarrow B^C \subset A^C \Longleftrightarrow A-B=\varnothing$

19 $ab>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a+\frac{4}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)=ab+9+4+\frac{36}{ab}$$
$$=ab+\frac{36}{ab}+13$$
$$\geq 2\sqrt{ab \times \frac{36}{ab}}+13=2\times 6+13=25$$

…… ❶

등호는 $ab=\frac{36}{ab}$일 때 성립하므로 $ab=6$

따라서 $\left(a+\frac{4}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)$는 $ab=6$일 때 최솟값 25를 가지므로

…… ❷

$m=6$, $n=25$

$\therefore m+n=6+25=31$ …… ❸

답 31

채점기준	배점
❶ 주어진 식에 산술평균과 기하평균의 관계 적용하기	2
❷ 등호가 성립할 조건과 최솟값 구하기	2
❸ m, n의 값과 $m+n$의 값 구하기	2

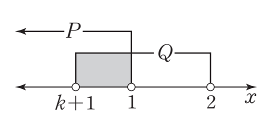
20 명제 ㈎에서 p: $x<1$, q: $(x-k-1)(x-2)<0$이라 하고, p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x<1\}$

(i) $k+1<2$, 즉 $k<1$일 때

$Q=\{x \mid k+1<x<2\}$

명제 ㈎가 참이 되려면 $P \cap Q \neq \varnothing$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

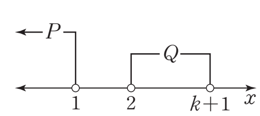


$k+1<1$ $\therefore k<0$

(ii) $k+1 \geq 2$, 즉 $k \geq 1$일 때

$Q=\{x \mid 2<x<k+1\}$

오른쪽 그림에서 $P \cap Q=\varnothing$이므로 명제 ㈎는 참이 아니다.



(i), (ii)에서 $k<0$ …… ㉠ …… ❶

명제 ㈏에서 $x>-2k-3$

이것이 $x>1$인 모든 x에 대하여 참이려면

$-2k-3 \leq 1$, $-2k \leq 4$ $\therefore k \geq -2$ …… ㉡ …… ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2 \leq k < 0$ …… ❸

따라서 실수 k의 최솟값은 -2이다. …… ❹

답 -2

채점기준	배점
❶ 명제 (가)가 참이 되기 위한 k의 값의 범위 구하기	3
❷ 명제 (나)가 참이 되기 위한 k의 값의 범위 구하기	2
❸ 명제 (가), (나) 모두 참이 되기 위한 k의 값의 범위 구하기	1
❹ k의 최솟값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제 p.34~36

1 조건 p에서 참인 명제가 되어야 하므로 이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-1\times(4k+5)<0$

$k^2-4k-5<0$, $(k+1)(k-5)<0$

$\therefore -1<k<5$ …… ㉠

조건 q가 참인 명제가 되려면

$x^2=k-2\geq0$ $\therefore k\geq2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2\leq k<5$

따라서 정수 k는 2, 3, 4이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$2+3+4=9$ 답 9

2 명제 (가)가 참이려면 부등식 $x^2-(a-2)x+1\leq0$의 해가 존재해야 하므로 이차방정식 $x^2-(a-2)x+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=\{-(a-2)\}^2-4\times1\times1\geq0$

$a^2-4a\geq0$, $a(a-4)\geq0$

$\therefore a\leq0$ 또는 $a\geq4$ …… ㉠

명제 (나)가 참이어야 하므로 이차방정식 $x^2-2ax+36=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-a)^2-1\times36<0$

$a^2-36<0$, $(a+6)(a-6)<0$

$\therefore -6<a<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-6<a\leq0$ 또는 $4\leq a<6$

따라서 정수 a는 -5, -4, -3, -2, -1, 0, 4, 5의 8개이다.

답 8

3 p: $(x+1)(x+2)(x-3)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

q: $x^2+kx+k-1=0$에서 $(x+1)(x+k-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-k+1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{-2, -1, 3\}$, $Q=\{-1, -k+1\}$

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로

$-k+1\in P$이어야 한다. 즉,

$-k+1=-2$ 또는 $-k+1=-1$ 또는 $-k+1=3$

$-k+1=-2$이면 $k=3$

$-k+1=-1$이면 $k=2$

$-k+1=3$이면 $k=-2$

따라서 모든 정수 k의 값의 곱은 $3\times2\times(-2)=-12$ 답 ④

4 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset R$

$\therefore P\subset Q\subset R$

이때 $3\in P$이므로 $3\in Q$

즉, $a=3$ 또는 $a+b^2=3$

(i) $a=3$일 때,

$Q=\{3, b^2+3\}$, $R=\{4, b+1, 9b\}$

이때 $Q\subset R$이고 $3\in Q$이므로 $3\in R$

즉, $3=b+1$ 또는 $3=9b$

b는 자연수이므로 $b=2$

따라서 $Q=\{3, 7\}$, $R=\{3, 4, 18\}$이므로 $Q\not\subset R$

(ii) $a+b^2=3$일 때,

a, b는 자연수이므로 $a=2$, $b=1$

따라서 $Q=\{2, 3\}$, $R=\{2, 3, 6\}$이므로 $Q\subset R$

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=1$이므로

$a+b=2+1=3$ 답 ②

5 두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가 각각 $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{b}$이고 두 직선이 서로 평행하므로 $\frac{a}{2}=\frac{1}{b}$ $\therefore ab=2$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(a+1)(b+2)=ab+2a+b+2$

$=2a+b+4$

$\geq2\sqrt{2a\times b}+4=2\sqrt{2ab}+4$

$=2\sqrt{2\times2}+4=8$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

따라서 $(a+1)(b+2)$의 최솟값은 8이다. 답 8

참고 등호는 $2a=b$일 때 성립하고, $ab=2$이므로

$a=1$, $b=2$

6 직선 $-x+ay=3$의 기울기는 $\frac{1}{a}$, 직선 $8x+by=4$의 기울기는 $-\frac{8}{b}$이고, 두 직선이 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다. 즉,

$\frac{1}{a}\times\left(-\frac{8}{b}\right)=-1$, $-\frac{8}{ab}=-1$ $\therefore ab=8$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(a+2)(b+1)=ab+a+2b+2=a+2b+10$

$\geq2\sqrt{a\times2b}+10=2\sqrt{2ab}+10$

$=2\times\sqrt{2\times8}+10=18$

(단, 등호는 $a=2b$일 때 성립)

따라서 $(a+2)(b+1)$의 최솟값은 18이다. 답 ④

참고 등호는 $a=2b$일 때 성립하고, $ab=8$이므로

$a=4$, $b=2$

III 함수와 그래프

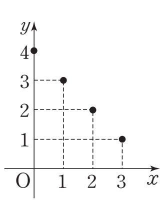
1 함수

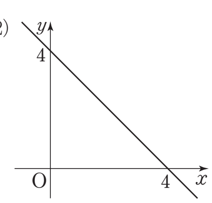
교과서 예제 p.39, 41

01 (1) X의 원소 b에 대응하는 Y의 원소가 0, 1의 2개이므로 함수가 아니다.
(2) X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다. 이때 정의역은 $\{a, b, c, d\}$, 공역은 $\{0, 1, 2\}$, 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
(3) X의 원소 d에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
(4) X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다. 이때 정의역은 $\{a, b, c, d\}$, 공역은 $\{0, 1, 2\}$, 치역은 $\{0, 2\}$이다.
답 (1) 함수가 아니다.
(2) 함수이다, 정의역: $\{a, b, c, d\}$, 공역: $\{0, 1, 2\}$, 치역: $\{0, 1, 2\}$
(3) 함수가 아니다.
(4) 함수이다, 정의역: $\{a, b, c, d\}$, 공역: $\{0, 1, 2\}$, 치역: $\{0, 2\}$

02 답 (1) 정의역은 $\{x|x$는 실수$\}$, 치역은 $\{y|y$는 실수$\}$
(2) 정의역은 $\{x|x$는 실수$\}$, 치역은 $\{y|y\le 5\}$

03 (1) $f(1)=1$, $g(1)=-1$이므로 $f(1)\neq g(1)$ $\quad\therefore f\neq g$
(2) $f(-1)=g(-1)=2$, $f(1)=g(1)=2$이므로 $f=g$
답 (1) 서로 같은 함수가 아니다. (2) 서로 같은 함수이다.

04 답 (1)


(2)


05 (1) 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.
(2) $x=a$ $(-1<a<1)$에 대응하는 y의 값이 2개이므로 함수의 그래프가 아니다.
답 (1) ○ (2) ×

06 답 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄴ (4) ㄷ

07 답 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄱ (4) ㄷ

08 (1) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=3$
(2) $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(7)=4$
(3) $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1)=5$
(4) $(f\circ g)(5)=f(g(5))=f(2)=3$
답 (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 3

09 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+1)$
$=(3x+1)^2-1=9x^2+6x$
(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)$
$=3(x^2-1)+1=3x^2-2$
(3) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(3x+1)$
$=3(3x+1)+1=9x+4$
(4) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2-1)$
$=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$
답 (1) $(g\circ f)(x)=9x^2+6x$ (2) $(f\circ g)(x)=3x^2-2$
(3) $(f\circ f)(x)=9x+4$ (4) $(g\circ g)(x)=x^4-2x^2$

10 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)=(2x)^2=4x^2$이므로
$(h\circ(g\circ f))(x)=h(4x^2)=4x^2-1$
(2) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x^2)=x^2-1$이므로
$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)(2x)$
$=(2x)^2-1=4x^2-1$
답 (1) $(h\circ(g\circ f))(x)=4x^2-1$
(2) $((h\circ g)\circ f)(x)=4x^2-1$
(3) $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

11 ㄱ. X의 원소 1, 2에 Y의 원소 a가 대응하므로 일대일대응이 아니다. 즉, 역함수가 존재하지 않는다.
ㄴ, ㄷ. 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
ㄹ. 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응이 아니다. 즉, 역함수가 존재하지 않는다.
따라서 역함수가 존재하는 함수는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

12 (1) $f^{-1}(5)=a$에서 $f(a)=5$
$2a-3=5$ $\quad\therefore a=4$
(2) $f^{-1}(a)=0$에서 $f(0)=a$
$\therefore a=-3$
답 (1) 4 (2) -3

13 (1) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=3x+6$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$3x=y-6$, $x=\frac{1}{3}y-2$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\frac{1}{3}x-2$
(2) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=-\frac{1}{2}x+5$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$\frac{1}{2}x=-y+5$, $x=-2y+10$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-2x+10$ 답 (1) $y=\frac{1}{3}x-2$ (2) $y=-2x+10$

14 (1) $f(3)=2$이므로 $f^{-1}(2)=3$

(2) $(f^{-1})^{-1}(1)=f(1)=8$

(3) $f^{-1}\circ f$는 집합 X에서의 항등함수이므로

$(f^{-1}\circ f)(4)=4$

(4) $f\circ f^{-1}$는 집합 Y에서의 항등함수이므로

$(f\circ f^{-1})(6)=6$ 답 (1) 3 (2) 8 (3) 4 (4) 6

기출 Best | 1회 p.42~46

01 ① X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 X에서 Y로의 함수가 아니다.

② X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 X에서 Y로의 함수가 아니다.

③ X의 원소 0에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 X에서 Y로의 함수가 아니다.

④ X의 원소 0에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 X에서 Y로의 함수가 아니다.

⑤ $f(-1)=1$, $f(0)=1$, $f(1)=3$이므로 X에서 Y로의 함수이다. 답 ⑤

02 $-2<1$이므로 $f(-2)=-(-2)^2+4=0$

$2>1$이므로 $f(2)=2+2=4$

$\therefore f(-2)+f(2)=0+4=4$ 답 ⑤

03 $f(-1)=6$, $f(0)=4$, $f(1)=4$, $f(2)=6$

이므로 치역은 $\{4, 6\}$

따라서 치역의 모든 원소의 합은

$4+6=10$ 답 ①

04 $f(x)+f(x+1)=f(x+2)$이므로

$f(3)=f(2)+f(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$f(4)=f(3)+f(2)=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

$f(5)=f(4)+f(3)=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$

$f(6)=f(5)+f(4)=4+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}$

$\therefore f(7)=f(6)+f(5)=\frac{13}{2}+4=\frac{21}{2}$ 답 ①

05 $f(-1)=g(-1)$에서 $-1=1-a+b$

$\therefore a-b=2$ …… ㉠

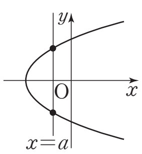
$f(1)=g(1)$에서 $1=1+a+b$

$\therefore a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

$\therefore ab=1\times(-1)=-1$ 답 ⑤

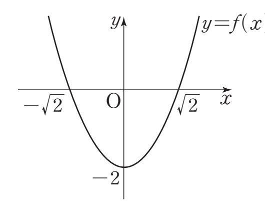
06 ⑤ 직선 $x=a$ (a는 실수)와 두 점에서 만나는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다. 답 ⑤



07 ㄱ. 일차함수는 일대일대응이다.

ㄴ. $f(x)=x^2-2$, $x_1=-1$, $x_2=1$이라 하면 $x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)=-1$

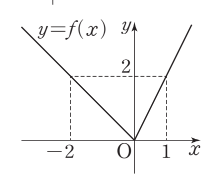
즉, 함수 $f(x)=x^2-2$는 일대일대응이 아니다.



ㄷ. $f(x)=\begin{cases}2x & (x\geq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$,

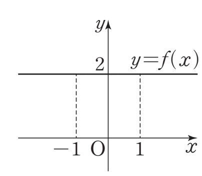
$x_1=-2$, $x_2=1$이라 하면

$x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)=2$



즉, 함수 $f(x)=\begin{cases}2x & (x\geq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$는 일대일대응이 아니다.

ㄹ. $f(x)=2$, $x_1=-1$, $x_2=1$이라 하면 $x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)=2$이므로 함수 $y=f(x)$는 일대일대응이 아니다.

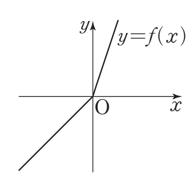


ㅁ. $f(x)=|x|+2x$라 하면

$f(x)=\begin{cases}x+2x & (x\geq 0)\\ -x+2x & (x<0)\end{cases}$

$=\begin{cases}3x & (x\geq 0)\\ x & (x<0)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 일대일대응이다.



따라서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㅁ이다. 답 ②

08 $a>0$이므로 직선 $y=f(x)$의 기울기가 양수이다.

따라서 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면

$f(-1)=2$, $f(4)=7$

$-a+b=2$, $4a+b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

$\therefore ab=1\times3=3$ 답 ④

09 함수 h는 항등함수이므로

$h(2)=2$, $h(3)=3$, $h(4)=4$, $h(5)=5$

$g(4)=f(2)+h(3)$에서 $g(4)=f(2)+3$

이때 X의 원소 중 두 수의 차가 3인 것은 2와 5뿐이므로
$f(2)=2,\ g(4)=5$
$g(3)=g(5)+2$에서 X의 원소 중 두 수의 차가 2인 것은 2, 4 또는 3, 5이고 $g(x)$는 일대일대응이므로
$g(3)=4,\ g(5)=2 \qquad \therefore g(2)=3$
$\therefore f(2)+g(2)+h(2)=2+3+2=7$ 답 ②

10 조건 (다)에서 함수 f는 일대일함수이다.
조건 (가), (나)에서
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 4, 5에서 $f(1)$의 값인 2를 제외한 3개
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 3개
$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 2개
$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 제외한 1개
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$3\times3\times2\times1=18$ 답 ②

11 $(f\circ f)(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(3)=-12$
$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(5)=-20$
$\therefore (f\circ f)(\sqrt{3})-(f\circ g)(2)=-12-(-20)=8$ 답 ③

12 $f(3)=1$, $f(g(3))=1$이고 함수 f가 일대일대응이므로
$g(3)=3$
$g(4)=2$, $g(f(1))=2$이고 함수 g가 일대일대응이므로
$f(1)=4$
즉, $f(1)=4$, $f(3)=1$, $f(4)=3$이고 함수 f는 일대일대응이므로 $f(2)=2$
$\therefore f(2)+g(3)=2+3=5$ 답 ③

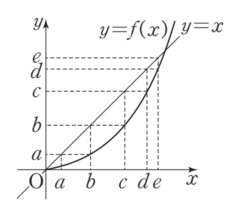
13 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)$
$\qquad =2(ax+b)+1=2ax+2b+1$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$
$\qquad =a(2x+1)+b=2ax+a+b$
$f\circ g=g\circ f$이므로 $2ax+2b+1=2ax+a+b$
$2b+1=a+b \qquad \therefore b=a-1$
$\therefore g(x)=ax+a-1=a(x+1)-1$
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로
$p=-1,\ q=-1$
$\therefore p+q=-1+(-1)=-2$ 답 ①

14 $f(h(x))=g(x)$이므로 $3h(x)+1=3x+7$
$3h(x)=3x+6 \qquad \therefore h(x)=x+2$
$\therefore (h\circ h)(7)=h(h(7))=h(9)=11$ 답 ③

15 $((f\circ g)\circ h)(a)=(f\circ(g\circ h))(a)=f((g\circ h)(a))$
$\qquad =f(2a-5)=3(2a-5)+1$
$\qquad =6a-14$
이때 $((f\circ g)\circ h)(a)=4$이므로
$6a-14=4,\ 6a=18 \qquad \therefore a=3$ 답 ③

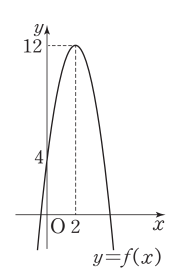
16 조건 (가)에서 $3x-2=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+2}{3}$
$f(3x-2)=3x-4$에서
$f(t)=3\times\dfrac{t+2}{3}-4=t-2$
즉, $f(x)=x-2$이므로 $f(5)=3$
$f^2(5)=f(f(5))=f(3)=1$
$f^3(5)=f(f^2(5))=f(1)=-1$
$f^4(5)=f(f^3(5))=f(-1)=-3$
$\vdots$
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $f^n(5)-f^{n+1}(5)=2$이므로
$f^{99}(5)-f^{100}(5)=2$ 답 ①

17 오른쪽 그림에서
$(f\circ f\circ f)(e)=f(f(f(e)))$
$\qquad =f(f(d))$
$\qquad =f(c)$
$\qquad =b$ 답 ②



18 $x\ge0$일 때, $f(x)=x+3\ge3$
$x<0$일 때, $f(x)=-x^2+3<3$
$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(5)=8$
$f^{-1}(-6)=k$라 하면 $f(k)=-6$이므로
$-6<3$이므로 $f(k)=-k^2+3$에 대입
$-k^2+3=-6,\ k^2=9 \qquad \therefore k=-3\ (\because k<0)$
$\therefore (f\circ f)(2)+f^{-1}(-6)=8+(-3)=5$ 답 ④

19 $f(x)=-2x^2+8x+4$
$\qquad =-2(x-2)^2+12$
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 정의역과 공역이 모두 $X=\{x\,|\,x\le k\}$일 때, 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.
함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=2$이므로 함수 $f(x)$가 일대일함수이려면
$k\le2$
이때 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\le f(k)\}$이므로 치역과 공역이 서로 같으려면
$f(k)=k$
$-2k^2+8k+4=k,\ 2k^2-7k-4=0$
$(2k+1)(k-4)=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{2}\ (\because k\le2)$ 답 ①

20 $y=-2x+a$라 하면

$2x=-y+a,\ x=-\frac{1}{2}y+\frac{a}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$

따라서 $-\frac{1}{2}=b,\ \frac{a}{2}=5$이므로 $a=10$

$\therefore ab=10\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$ 답 ①

21 세 함수 $f,\ g,\ h$가 모두 일대일대응이므로 각각의 역함수가 존재하고, 항등함수를 I라 하면

$g\circ f\circ h\circ h^{-1}=(g\circ f)\circ(h\circ h^{-1})=(g\circ f)\circ I=g\circ f$

또, $g\circ f\circ h=h$에서

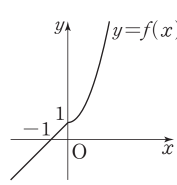
$g\circ f\circ h\circ h^{-1}=(g\circ f\circ h)\circ h^{-1}=h\circ h^{-1}=I$

$\therefore g\circ f=I$

즉, $g^{-1}(x)=f(x)$이므로

$g^{-1}(12)=f(12)=3\times12+6=42$ 답 ③

22 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다. 즉, 역함수 f^{-1}가 존재하므로



$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(-1)$

$=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(-1)$

$=(g\circ g^{-1})\circ(f^{-1}\circ g)(-1)$

$=(f^{-1}\circ g)(-1)=f^{-1}(g(-1))$

$=f^{-1}(2)$

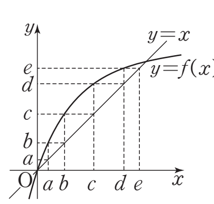
$f^{-1}(2)=k\ (k\geq0)$라 하면 $f(k)=2$

$2>1$이므로 $f(x)=x^2+1$에 대입

$k^2+1=2,\ k^2=1$

$\therefore k=1\ (\because k\geq0)$ 답 ⑤

23 $f^{-1}(d)=k$라 하면 $f(k)=d$이므로



$k=c \qquad \therefore f^{-1}(d)=c$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$이므로

$l=b \qquad \therefore f^{-1}(c)=b$

$f^{-1}(b)=m$이라 하면 $f(m)=b$이므로 $m=a$

$\therefore f^{-1}(b)=a$

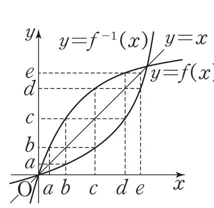
$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(d)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

$=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(b)=a$ 답 ①

다른풀이

$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$(f\circ f\circ f)^{-1}(d)$

$=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

$=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)=a$

24 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

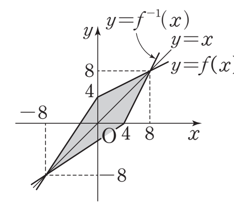
(i) $x<0$일 때,

$\frac{3}{2}x+4=x,\ \frac{1}{2}x=-4 \qquad \therefore x=-8$

(ii) $x\geq0$일 때,

$\frac{1}{2}x+4=x,\ \frac{1}{2}x=4 \qquad \therefore x=8$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

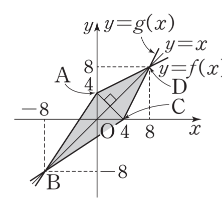


이때 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times4\times8+\frac{1}{2}\times4\times8\right)=64$ 답 ⑤

다른풀이

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{AC}=\sqrt{(4-0)^2+(0-4)^2}=4\sqrt{2}$

$\overline{BD}=\sqrt{\{8-(-8)\}^2+\{8-(-8)^2\}}$

$=16\sqrt{2}$

따라서 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times16\sqrt{2}=64$

기출 Best | 2회

p.47~51

01 ㄱ. X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

ㄴ. $f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$

ㄷ. X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

ㄹ. $f(-1)=0,\ f(0)=1,\ f(1)=0$

따라서 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ②

02 $f(-2)=-\frac{1}{2}\times(-2)^2+3\times(-2)-4=-12$

$f(7)=7^2-6\times7+8=15$

$\therefore f(-2)+f(7)=-12+15=3$ 답 ⑤

03 1의 양의 약수는 1의 1개이므로 $f(1)=1$

2, 3, 5는 소수이므로 $f(2)=f(3)=f(5)=2$

4의 양의 약수는 1, 2, 4의 3개이므로 $f(4)=3$

따라서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{1,\ 2,\ 3\}$이다. 답 ④

04 $f(xy)=f(x)+f(y)$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$, $y=8$을 대입하면

$f(8)=f(1)+f(8)$ $\quad\therefore f(1)=0$

㉠의 양변에 $x=8$, $y=\frac{1}{8}$을 대입하면

$f(1)=f(8)+f\left(\frac{1}{8}\right)$, $0=6+f\left(\frac{1}{8}\right)$

$\therefore f\left(\frac{1}{8}\right)=-6$

㉠의 양변에 $x=2$, $y=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)+f(2)=2f(2)$

㉠의 양변에 $x=2$, $y=4$를 대입하면

$f(8)=f(2)+f(4)=f(2)+2f(2)=3f(2)=6$

$\therefore f(2)=2$

$\therefore f\left(\frac{1}{8}\right)+f(2)=-6+2=-4$ 답 ①

05 (i) $x\geq0$일 때, $g(x)=x$이므로 $f=g$에서

$x^2=x$, $x(x-1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$

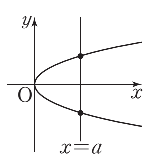
(ii) $x<0$일 때, $g(x)=-x$이므로 $f=g$에서

$x^2=-x$, $x(x+1)=0$ $\quad\therefore x=-1\ (\because x<0)$

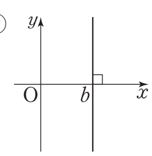
(i), (ii)에서 정의역 X는 $\{-1, 0, 1\}$의 부분집합이므로 공집합이 아닌 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$ 답 ④

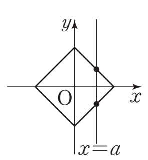
06 ①



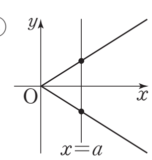
②



③



④



①, ③, ④ 직선 $x=a$와 두 점에서 만나는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

② 직선과 x축이 만나는 점의 x좌표를 b라 하면 주어진 직선은 직선 $x=b$와 무수히 많은 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.

따라서 함수의 그래프인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

07 ③ 일대일함수이지만 치역이 실수 전체의 집합이 아니므로 일대일대응은 아니다. 답 ③

08 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x\geq0$일 때와 $x<0$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$(4-a)(a+2)>0$

$(a-4)(a+2)<0$ $\quad\therefore -2<a<4$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 ③

09 함수 g는 항등함수이므로

$g(-2)=-2$, $g(0)=0$, $g(2)=2$

$f(2)+h(2)=2g(2)$에서 $f(2)+h(2)=2\times2=4$

집합 X의 두 원소의 합이 4인 경우는 $2+2=4$일 때뿐이므로

$f(2)=2$, $h(2)=2$

이때 함수 h는 상수함수이므로 $h(-2)=h(0)=h(2)=2$

$f(0)+f(2)=f(-2)$에서 $f(0)+2=f(-2)$이고 함수 f는 일대일대응이므로 $f(-2)=0$, $f(0)=-2$

$\therefore f(-2)+g(2)+h(0)=0+2+2=4$ 답 ④

10 조건 (나)에서 $f(0)=-f(0)$

$2f(0)=0$ $\quad\therefore f(0)=0$

$f(-1)=-f(1)$, $f(-2)=-f(2)$이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값만 정하면 $f(-1)$, $f(-2)$ 각각의 값이 정해진다.

$f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 -2, -1, 1, 2의 4개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 -2, -1, 1, 2 중 $f(1)$, $f(-1)$의 값을 제외한 2개

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $4\times2=8$ 답 ⑤

다른풀이 조건 (나)에서 $f(-x)=-f(x)$, 즉

$f(x)+f(-x)=0$이므로

$f(1)+f(-1)=0$, $f(2)+f(-2)=0$, $f(0)+f(0)=0$

$f(0)+f(0)=0$에서 $f(0)=0$이고 가능한 모든 경우는

$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$
-2	-1	0	1	2
-2	1	0	-1	2
2	-1	0	1	-2
2	1	0	-1	-2
-1	-2	0	2	1
-1	2	0	-2	1
1	-2	0	2	-1
1	2	0	-2	-1

따라서 구하는 함수 f의 개수는 8이다.

11 $f(5)=\frac{5+1}{2}+1=4$

$(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(2\times4-1)=f(7)=\frac{7+1}{2}+1=5$

$(f\circ f\circ f)(7)=f(f(f(7)))=f(f(5))$

$=f(4)=2\times4-1=7$

$\therefore f(5)+(f\circ f)(4)+(f\circ f\circ f)(7)=4+5+7=16$

답 ④

12 $f(4)-f(3)=2$이고 X의 원소 중 두 수의 차가 2인 것은 1, 3 또는 2, 4이다.

(i) $f(3)=1$, $f(4)=3$일 때,

$f(1)=2$이면 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=2$에서 $f(2)=2$

이때 f는 일대일대응이므로 조건을 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

$f(1)=4$이면 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=2$에서 $f(4)=2$이므로 $f(4)=3$에 모순이다.

(ii) $f(3)=2$, $f(4)=4$일 때,

$f(1)=1$이면 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=2$에서 $f(1)=2$

즉, f는 함수가 되지 못한다.

$\therefore f(1)=3,\ f(2)=1$

(i), (ii)에서

$(f\circ f)(3)+f(4)=f(f(3))+f(4)$

$\qquad =f(2)+f(4)=1+4=5$

답 ③

13 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3(ax+4)-2=3ax+10$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(3x-2)+4=3ax-2a+4$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$10=-2a+4,\ 2a=-6 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $g(x)=-3x+4$이므로

$(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(7)=21-2=19$

답 ②

14 $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(x-5)$

$\qquad =a(x-5)+b=ax-5a+b$

$h\circ f=g$이므로

$ax-5a+b=-4x+2$

따라서 $a=-4,\ -5a+b=2$이므로

$a=-4,\ b=-18$

$\therefore h(x)=-4x-18$

$\therefore (f\circ h)(-4)=f(h(-4))=f(-2)=-7$

답 ①

다른풀이 함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재하므로 $h\circ f=g$에서

$h=g\circ f^{-1}$

즉, $(f\circ h)(x)=(f\circ g\circ f^{-1})(x)$이므로

$(f\circ h)(-4)=(f\circ g\circ f^{-1})(-4)$

$\qquad =f(g(f^{-1}(-4)))$

$\qquad =f(g(1))=f(-2)$

$\qquad =-7$

15 $(f\circ(g\circ h))(5)=((f\circ g)\circ h)(5)$

$\qquad =(f\circ g)(h(5))$

$\qquad =(f\circ g)(15)$

$\qquad =3\times 15+4=49$

답 ②

16 (i) $f^1(1)=f(1)=3$

$f^2(1)=f(f(1))=f(3)=2$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(2)=4$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(4)=3$

$f^5(1)=f(f^4(1))=f(3)=2$

$\vdots$

즉, $f^n(1)$의 값으로는 3, 2, 4가 순서대로 반복된다.

이때 $1000=3\times 333+1$이므로

$f^{1000}(1)=f^1(1)=3$

(ii) (i)과 같은 방법으로 하면

$f^1(3)=2,\ f^2(3)=4,\ f^3(3)=3,\ f^4(3)=2,\ \cdots$

즉, $f^n(3)$의 값으로는 2, 4, 3이 순서대로 반복된다.

이때 $1002=3\times 334$이므로

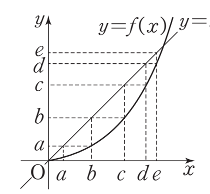
$f^{1002}(3)=f^3(3)=3$

(i), (ii)에서

$f^{1000}(1)+f^{1002}(3)=3+3=6$

답 ③

17 $f(x)=k$라 하면



$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(k)=a$

이때 오른쪽 그림에서 $f(b)=a$이므로

$k=b \qquad \therefore f(x)=b$

이때 오른쪽 그림에서 $f(c)=b$이므로

$x=c$

답 ③

18 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(6+a)=a(6+a)-7=9$이므로

$a^2+6a-16=0,\ (a+8)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

따라서 $g(x)=2x-7$이므로 $g^{-1}(11)=k$라 하면

$g(k)=11,\ 2k-7=11,\ 2k=18$

$\therefore k=g^{-1}(11)=9$

답 ④

19 (i) $2x-4\ge 0$, 즉 $x\ge 2$일 때,

$f(x)=2x-4-kx+2=(2-k)x-2$

(ii) $2x-4<0$, 즉 $x<2$일 때,

$f(x)=-2x+4-kx+2=(-2-k)x+6$

함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 한다.

따라서 $x\ge 2$일 때와 $x<2$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$(2-k)(-2-k)>0$

$(k-2)(k+2)>0 \qquad \therefore k<-2$ 또는 $k>2$

따라서 자연수 k의 최솟값은 3이다.

답 ②

20 $y=ax-1$이라 하면 $ax=y+1,\ x=\dfrac{1}{a}y+\dfrac{1}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{a}$

따라서 $\dfrac{1}{a}=2,\ \dfrac{1}{a}=b$이므로

$a=\dfrac{1}{2},\ b=2$

$\therefore ab=\dfrac{1}{2}\times 2=1$

답 ④

21 $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=(g\circ f)^{-1}(x)$이고

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$

$\qquad =-(2x+1)+3$

$\qquad =-2x+2$

$y=-2x+2$라 하면

$2x=-y+2 \qquad \therefore x=-\frac{1}{2}y+1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{2}x+1$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$

즉, $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore \frac{b}{a}=1\div\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$ 답 ①

22 $(g\circ f)^{-1}(4)=(f^{-1}\circ g^{-1})(4)=f^{-1}(g^{-1}(4))$
$=f^{-1}(1)=2$

이므로 $(g\circ f)^{-1}(4)+(g^{-1}\circ f)(k)=6$에서

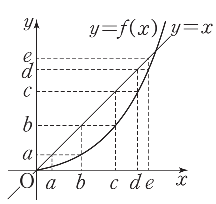
$2+(g^{-1}\circ f)(k)=6 \qquad \therefore (g^{-1}\circ f)(k)=4$

$(g^{-1}\circ f)(k)=g^{-1}(f(k))=4$에서 $g(4)=f(k)$

이때 $g(4)=2$이므로 $f(k)=2$

$f(1)=2$이므로 $k=1$ 답 ①

23 오른쪽 그림에서



$(f\circ f)(c)=f(f(c))=f(b)=a$

한편,

$(f\circ f)^{-1}(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))$에서

$f^{-1}(b)=k$라 하면 $f(k)=b$

오른쪽 그림에서 $f(c)=b$이므로 $k=c$

즉, $f^{-1}(b)=c$이므로 $(f\circ f)^{-1}(b)=f^{-1}(c)$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$

오른쪽 그림에서 $f(d)=c$이므로 $l=d$

즉, $f^{-1}(c)=d$이므로 $(f\circ f)^{-1}(b)=d$

$\therefore (f\circ f)(c)+(f\circ f)^{-1}(b)=a+d$ 답 ②

24 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

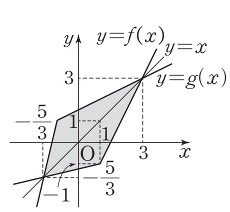
(i) $x<1$일 때,

$\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}=x$, $\frac{3}{4}x=-\frac{5}{4} \qquad \therefore x=-\frac{5}{3}$

(ii) $x\geq 1$일 때,

$2x-3=x \qquad \therefore x=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

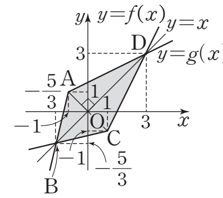


이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\times 2\times 2\right)=2\times\left(\frac{8}{3}+2\right)=\frac{28}{3}$ 답 ②

다른풀이

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{AC}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(-1-1)^2}$
$=2\sqrt{2}$

$\overline{BD}=\sqrt{\left\{3-\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}^2+\left\{3-\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}^2}=\frac{14\sqrt{2}}{3}$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{14\sqrt{2}}{3}=\frac{28}{3}$

변형유형 집중공략

p.52~55

1-1 조건 (가)에서 함수 g는 항등함수, 즉 $g(x)=x$ $(x\in X)$이므로

$g(2)=2$, $g(6)=6$

조건 (나)에서 $f(1)=g(2)=h(1)=2$

조건 (가)에서 함수 h는 상수함수, 즉 $h(x)=2$ $(x\in X)$이므로

$h(3)=2$

조건 (다)에서 $2f(6)=f(3)$이므로 $f(6)=1$, $f(3)=2$ 또는

$f(6)=3$, $f(3)=6$

그런데 함수 f는 일대일대응이므로 $f(6)=3$, $f(3)=6$

$\therefore f(2)=1$

$\therefore f(2)+g(6)+h(3)=1+6+2=9$ 답 ③

1-2 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이고, $f: X \longrightarrow X$이므로 일대일대응이다.

조건 (나)에서 $f(3)\neq 3$

또, 조건 (다)에서 $(f\circ f)(3)=f(f(3))=4$이므로

$f(3)\neq 4$

$\therefore f(3)=5$ 또는 $f(3)=6$

(i) $f(3)=5$일 때, 조건 (다)에서 $f(f(3))=4$이므로 $f(5)=4$이고, 조건 (나)에서 $f(6)\neq 6$이므로

$f(6)=3 \qquad \therefore f(4)=6$

$\therefore (f\circ f)(5)+(f\circ f)(6)=f(f(5))+f(f(6))$
$=f(4)+f(3)=6+5$
$=11$

(ii) $f(3)=6$일 때, 조건 (다)에서 $f(f(3))=4$이므로 $f(6)=4$이고, 조건 (나)에서 $f(5)\neq 5$이므로

$f(5)=3 \qquad \therefore f(4)=5$

$\therefore (f\circ f)(5)+(f\circ f)(6)=f(f(5))+f(f(6))$
$=f(3)+f(4)=6+5=11$

(i), (ii)에서 $(f\circ f)(5)+(f\circ f)(6)=11$ 답 ②

2-1 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이고, $f: X \longrightarrow X$이므로 일대일대응이다.

공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 세 수의 합이 7인 경우는 $1+2+4=7$인 경우뿐이다. 즉,

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 1, 2, 4 중 서로 다른 하나이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3!=6$

공역에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외하면 2개의 원소 3, 5가 남으므로 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 함수 f의 개수는

$6\times2=12$ 답 ③

2-2 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이고, $f: X \longrightarrow X$이므로 일대일대응이다.

조건 (다)에서 $f(f(1))=1$

(ⅰ) $f(1)=1$일 때,

가능한 $f(2)$의 값은 2, 3, 4의 3개, 가능한 $f(3)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개, 가능한 $f(4)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 1개이다.

따라서 함수 f의 개수는 $3\times2\times1=6$

(ⅱ) $f(1)=2$일 때,

$f(f(1))=f(2)=1$

가능한 $f(3)$의 값은 3, 4의 2개, 가능한 $f(4)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 제외한 1개이다.

따라서 함수 f의 개수는 $2\times1=2$

(ⅲ) $f(1)=3$일 때, $f(f(1))=f(3)=1$

(ⅱ)와 같은 방법으로 함수 f의 개수는 $2\times1=2$

(ⅳ) $f(1)=4$일 때, $f(f(1))=f(4)=1$

(ⅱ)와 같은 방법으로 함수 f의 개수는 $2\times1=2$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 함수 f의 개수는

$6+2+2+2=12$ 답 12

3-1 (ⅰ) $x\ge1$일 때, $f(x)=m(x-1)+2x-mx+m=2x$

(ⅱ) $x<1$일 때,

$$f(x)=-m(x-1)+2x-mx+m$$
$$=(-2m+2)x+2m$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$f(x)=\begin{cases}2x & (x\ge1)\\(-2m+2)x+2m & (x<1)\end{cases}$$

$x\ge1$일 때 직선 $y=2x$의 기울기가 양수이므로 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x<1$일 때 직선 $y=(-2m+2)x+2m$의 기울기도 양수이어야 한다. 즉, $-2m+2>0$, $-2m>-2$

$\therefore m<1$ 답 ④

3-2 함수 $f(x)=|3x+2|+kx+3$에서

(ⅰ) $x\ge-\frac{2}{3}$일 때, $f(x)=(3x+2)+kx+3=(k+3)x+5$

(ⅱ) $x<-\frac{2}{3}$일 때, $f(x)=-(3x+2)+kx+3=(k-3)x+1$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$f(x)=\begin{cases}(k+3)x+5 & \left(x\ge-\frac{2}{3}\right)\\(k-3)x+1 & \left(x<-\frac{2}{3}\right)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x<-\frac{2}{3}$일 때와 $x\ge-\frac{2}{3}$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$(k+3)(k-3)>0$ $\therefore k<-3$ 또는 $k>3$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=3$이므로

$\beta-\alpha=3-(-3)=6$ 답 6

4-1 $f(0)=f(2)=0$이므로 $f(x)=ax(x-2)$ ($a\ne0$인 상수)

이차방정식 $ax(x-2)-4(x-2)=0$에서

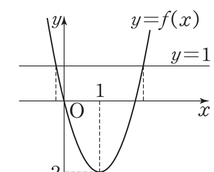
$(x-2)(ax-4)=0$

이 이차방정식의 실근의 개수가 1이므로 $ax-4=0$의 근도 $x=2$이어야 한다. 즉,

$2a-4=0$, $2a=4$ $\therefore a=2$

$\therefore f(x)=2x(x-2)=2x^2-4x=2(x-1)^2-2$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(1)=-2$이므로 $f(f(x))=-2$에서

$f(x)=1$

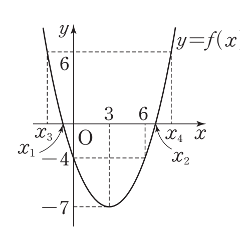
오른쪽 그림과 같이 $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값, 즉 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점이 2개이므로 방정식 $(f\circ f)(x)=-2$의 서로 다른 실근은 2개이다. 답 ②

4-2 $f(0)=-4$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$f(6)=f(0)=-4$

즉, $(f\circ f)(x)=f(f(x))=-4$에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=6$



$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 2개이므로 x_1, x_2 ($x_1\ne x_2$)라 하고

$f(x)=6$을 만족시키는 x의 값도 2개이므로 x_3, x_4 ($x_3\ne x_4$)라 하면

두 점 $(x_1, f(x_1))$과 $(x_2, f(x_2))$,

두 점 $(x_3, f(x_3))$과 $(x_4, f(x_4))$는

각각 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=3$, $\frac{x_3+x_4}{2}=3$

$\therefore x_1+x_2=6$, $x_3+x_4=6$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=6+6=12$ 답 12

서술형 What & How

p.56~59

1 $f(-1)=g(-1)$에서

$1+3=3-b \qquad \therefore b=-1$ …… ❶

즉, $g(x)=3x^2-x$이므로 $f(a)=g(a)$에서

$a^2+3=3a^2-a$, $2a^2-a-3=0$

$(a+1)(2a-3)=0 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}\ (\because a\neq-1)$ …… ❷

$\therefore 10ab=10\times\frac{3}{2}\times(-1)=-15$ …… ❸

답 -15

2 $f(0)=g(0)$에서 $a=b$

$f(1)=g(1)$에서 $1+a=a+b \qquad \therefore b=1$ …… ❶

따라서 $f(x)=x^3+1$, $g(x)=x+1$이다. …… ❷

$\therefore ab=1\times1=1$ …… ❸

답 1

채점기준	배점
❶ 상수 b의 값 구하기	2
❷ 상수 a의 값 구하기	2
❸ ab의 값 구하기	1

3 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-2x-1)$

$=4(-2x-1)-3k=-8x-3k-4$ …… ❶

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x-3k)$

$=-2(4x-3k)-1=-8x+6k-1$ …… ❷

이때 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$에서

$-8x-3k-4=-8x+6k-1$

$-9k=3 \qquad \therefore k=-\frac{1}{3}$ …… ❸

따라서 $f(x)=4x-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=4x+1$이므로

$f(3)=4\times3+1=13$ …… ❹

답 13

4 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax-5)$

$=a(ax-5)-2=a^2x-5a-2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-2)$

$=a(ax-2)-5=a^2x-2a-5$ …… ❶

$f\circ g=g\circ f$이므로

$-5a-2=-2a-5$, $-3a=-3 \qquad \therefore a=1$ …… ❷

따라서 $f(x)=x-2$, $g(x)=x-5$이므로 …… ❸

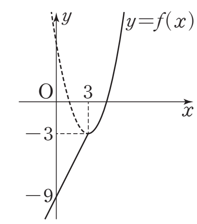
$a+f(5)+g(2)=1+3+(-3)=1$ …… ❹

답 1

채점기준	배점
❶ $(f\circ g)(x)$, $(f\circ g)(x)$ 각각 구하기	3
❷ a의 값 구하기	1
❸ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 각각 구하기	1
❹ $a+f(5)+g(2)$의 값 구하기	1

5 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하면 $f(x)$는 일대일대응이므로 오른쪽 그림과 같이 $x\geq3$일 때, 함수 $y=x^2-6x+a$의 그래프가 점 $(3, -3)$을 지나야 한다. 즉,

$-3=9-18+a \qquad \therefore a=6$ …… ❶



$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2-6x+6 & (x\geq3) \\ 2x-9 & (x<3) \end{cases}$ …… ❷

$f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$

$k^2-6k+6=-2$, $k^2-6k+8=0$

$-2>-3$이므로 $f(x)=x^2-6x+6$에 대입한다.

$(k-2)(k-4)=0 \qquad \therefore k=4\ (\because k\geq3)$

$\therefore f^{-1}(-2)=4$ …… ❸

답 4

6 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.

함수 $f(x)$가 일대일함수이려면 $y=x^2-2ax+b$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 a가 2보다 작거나 같아야 하므로 $a\leq2$

따라서 a의 최댓값은 2이므로 $M=2$ …… ❶

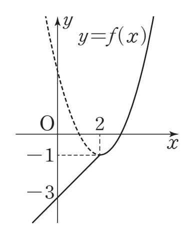
이때 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+b & (x\geq2) \\ x-3 & (x<2) \end{cases}$ …… ❷

함수 $f(x)$의 치역이 실수 전체의 집합이려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=x^2-4x+b$의 그래프가 점 $(2, -1)$을 지나야 하므로

$-1=4-8+b \qquad \therefore b=3$

따라서 $N=3$이므로 …… ❸

$MN=2\times3=6$ …… ❹

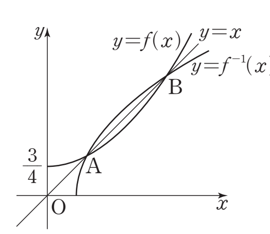


답 6

채점기준	배점
❶ M의 값 구하기	2
❷ a가 최대일 때 $f(x)$ 구하기	1
❸ N의 값 구하기	2
❹ MN의 값 구하기	1

참고 이차함수 $y=x^2-4x+b$의 그래프의 축은 직선 $x=2$이므로 꼭짓점의 좌표가 $(2, -1)$이어야 한다.

7 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 A, B는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. …… ❶



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면 $\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}=x$에서 $x^2+3=4x$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

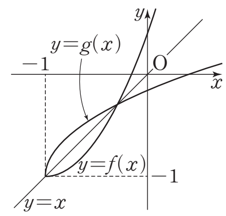
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ …… ❷

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(1, 1)$, $(3, 3)$이므로

$\overline{AB}^2=(3-1)^2+(3-1)^2=8$ …… ❸

답 8

8 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. …… ❶



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$a(x+1)^2-1=x$에서 $ax^2+(2a-1)x+a-1=0$

$(x+1)(ax+a-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{-a+1}{a}=-1+\dfrac{1}{a}$

따라서 두 교점의 좌표는

$(-1, -1), \left(-1+\dfrac{1}{a}, -1+\dfrac{1}{a}\right)$ …… ❷

이 두 점 사이의 거리가

$\sqrt{\left\{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)-(-1)\right\}^2+\left\{\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)-(-1)\right\}^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

$\sqrt{\dfrac{2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

양변을 제곱하면

$\dfrac{2}{a^2}=\dfrac{2}{64}$, $a^2=64$ $\therefore a=8$ ($\because a>0$) …… ❸

답 8

채점기준	배점
❶ $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 설명하기	2
❷ 두 교점의 좌표 구하기	2
❸ 양수 a의 값 구하기	2

실전 문제 | 1회

p.60~64

01 ① $-1\le x\le 2$에서 $0\le |x|\le 2$ $\therefore 2\le |x|+2\le 4$

② $-1\le x\le 2$에서 $-\dfrac{4}{3}\le -\dfrac{2}{3}x\le \dfrac{2}{3}$,

$-\dfrac{4}{3}+\dfrac{13}{3}\le -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{13}{3}\le \dfrac{2}{3}+\dfrac{13}{3}$

$\therefore 3\le -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{13}{3}\le 5$

③ $-1\le x\le 2$에서 $2\le x+3\le 5$

⑤ $-1\le x\le 2$에서 $0\le x^2\le 4$ $\therefore -1\le x^2-1\le 3$

즉, $\{y\,|\,-1\le y\le 3\}\not\subset Y$이므로 함수가 아니다. 답 ⑤

02 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식을 $y=g(x)$라 하면

$g(x)=f(x-2)+1$ $\therefore f(x-2)=g(x)-1$ …… ㉠

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$f(-3)=g(-1)-1=1-1=0$

㉠에 $x=3$을 대입하면

$f(1)=g(3)-1=4-1=3$

$\therefore f(-3)+f(1)=0+3=3$ 답 ①

03 조건 ㈎, ㈏에서 함수 f의 치역은 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 또는 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$이다.

(i) 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$인 경우

$f(1)+f(2)+\cdots+f(6)$의 값이 최대인 경우는 $1+2+3+4+5+5=20$일 때이므로 조건 ㈐를 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 f의 치역이 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$인 경우

$2+3+4+5+6=20$이므로 5가 하나 더 있어야 조건 ㈐를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 어떤 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)=a$를 만족시키는 자연수 a의 값은 5이다. 답 ④

04 $f(99)=f(2\times 49+1)=49+1=50$

$f(100)=f(2\times 50)=50$

$\therefore f(99)+f(100)=50+50=100$ 답 ⑤

05 $f(x)=g(x)$이어야 하므로

(i) $x\ge 0$일 때, $f(x)=g(x)$에서

$x+1=-x^2+3x+1$

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(ii) $x<0$일 때, $f(x)=g(x)$에서

$x+1=-x-1$

$2x=-2$ $\therefore x=-1$

(i), (ii)에서 집합 X는 $\{-1, 0, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$ 답 ③

06 $a_{11}=f(1)+g(1)=-2+2=0$

$a_{12}=f(1)+g(2)=-2+4=2$

$a_{21}=f(2)+g(1)=-1+2=1$

$a_{22}=f(2)+g(2)=-1+4=3$

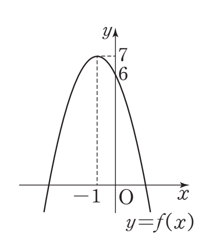
따라서 $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은

$0+2+1+3=6$ 답 ⑤

07 $f(x)=-x^2-2x+6=-(x+1)^2+7$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역이 $\{x\,|\,x\le a\}$일 때 함수 f가 일대일함수이려면

$a\le -1$ …… ㉠



이때 치역은 $\{y\,|\,y\le f(a)\}$, 공역이 $\{y\,|\,y\le -a\}$이므로 $f(a)\le -a$

$-a^2-2a+6\le -a,\ a^2+a-6\ge 0$

$(a+3)(a-2)\ge 0$

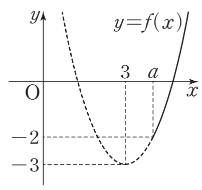
$\therefore a\le -3$ 또는 $a\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a\le -3$

따라서 실수 a의 최댓값은 -3이다. 답 ①

08 $f(x)=x^2-6x+6=(x-3)^2-3$

$a<3$이면 $x\ge a$에서 일대일함수가 아니므로 정의역이 $\{x|x\ge a\}$일 때 $f(x)$가 일대일함수이려면 $a\ge 3$



이때 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y|y\ge f(a)\}$이고, 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 치역과 공역이 같아야 하므로

$f(a)=-2$

$a^2-6a+6=-2,\ a^2-6a+8=0$

$(a-2)(a-4)=0\qquad \therefore a=4\ (\because a\ge 3)$ 답 ②

09 $f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$이어야 한다.

(i) $x\ge 0$일 때, $f(x)=x$에서

$x^2-2x=x,\ x^2-3x=0,\ x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

(ii) $x<0$일 때, $f(x)=x$에서

$x^2+2x=x,\ x^2+x=0,\ x(x+1)=0$

$\therefore x=-1\ (\because x<0)$

(i), (ii)에서 $X=\{-1, 0, 3\}$이므로

$a+b+c=-1+0+3=2$ 답 ⑤

10 X에서 Y로의 함수의 개수는 $3\times 3=9\qquad \therefore a=9$

X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 $3\times 2=6\qquad \therefore b=6$

X에서 Y로의 상수함수의 개수는 $3\qquad \therefore c=3$

한편, Y에서 X로의 함수의 개수는 $2\times 2\times 2=8$

Y에서 X로의 함수 중 치역이 $\{1\}$인 함수의 개수는 1

Y에서 X로의 함수 중 치역이 $\{2\}$인 함수의 개수는 1

따라서 Y에서 X로의 함수 중 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

$8-1-1=6\qquad \therefore d=6$

$\therefore a+b+c+d=9+6+3+6=24$ 답 ①

11 $f,\ f\circ g$의 대응을 이용하여 함수 $g(x)$의 함숫값을 구하면 다음과 같다.

$(f\circ g)(1)=2$이고 $f(1)=2$이므로 $g(1)=1$

$(f\circ g)(2)=1$이고 $f(5)=1$이므로 $g(2)=5$

$(f\circ g)(3)=4$이고 $f(2)=4$이므로 $g(3)=2$

$(f\circ g)(4)=3$이고 $f(3)=3$이므로 $g(4)=3$

$(f\circ g)(5)=5$이고 $f(4)=5$이므로 $g(5)=4$

따라서 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(4)=3$이므로

$g(3)+(g\circ f)(2)=2+3=5$ 답 ①

12 조건 (나)의 $(f\circ g)(1)=4$에서 $f(g(1))=4$

이때 $f(3)=4$이므로 $g(1)=3$

조건 (나)의 $(g\circ f)(2)=1$에서 $g(f(2))=1\qquad \therefore g(3)=1$

또, 조건 (가)에서 함수 g가 일대일대응이므로

$g(2)=2,\ g(4)=4$ 또는 $g(2)=4,\ g(4)=2$

이때 조건 (다)에서 $g(2)>g(4)$이므로

$g(2)=4,\ g(4)=2$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ g)(2)-(g\circ f)(3)&=f(g(2))-g(f(3))\\&=f(4)-g(4)\\&=1-2=-1\end{aligned}$$

답 ②

13
$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx-100)&=a(bx-100)+100\\&=abx-100a+100\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+100)&=b(ax+100)-100\\&=abx+100b-100\end{aligned}$$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$-100a+100=100b-100$

$-a+1=b-1\qquad \therefore a+b=2$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge 2\sqrt{ab},\ 2\ge 2\sqrt{ab},\ \sqrt{ab}\le 1$

$\therefore ab\le 1$ (단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

따라서 ab의 최댓값은 1이다. 답 ①

14 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)\ge 0$이므로

$(f\circ g)(x)\ge 0$에서 $f(g(x))\ge 0$

$\{g(x)\}^2-g(x)-6\ge 0,\ \{g(x)+2\}\{g(x)-3\}\ge 0$

$\therefore g(x)\le -2$ 또는 $g(x)\ge 3$

(i) $g(x)\le -2$일 때,

$g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le -2$인 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $g(x)\ge 3$일 때,

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+ax+4\ge 3$, 즉 $x^2+ax+1\ge 0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2+ax+1=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\le 0$이어야 하므로

$D=a^2-4\times 1\times 1\le 0,\ (a+2)(a-2)\le 0$

$\therefore -2\le a\le 2$

(i), (ii)에서 $-2\le a\le 2$ 답 ⑤

15 (i) a가 짝수일 때, $f(a)=\frac{a}{2}$이므로

$$\begin{aligned}(h\circ g\circ f)(a)=(h\circ g)(f(a))&=(h\circ g)\left(\frac{a}{2}\right)\\&=\frac{3}{2}a-4\end{aligned}$$

$(h\circ g\circ f)(a)=5$에서 $\frac{3}{2}a-4=5$

$\frac{3}{2}a=9\qquad \therefore a=6$

(ⅱ) a가 홀수일 때, $f(a)=a+1$이므로

$(h\circ g\circ f)(a)=(h\circ g)(f(a))=(h\circ g)(a+1)$

$=3(a+1)-4=3a-1$

$(h\circ g\circ f)(a)=5$에서 $3a-1=5$

$3a=6 \qquad \therefore a=2$

그런데 a는 짝수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=6$ 답 ⑤

16 $f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x\le 1) \\ -2x+4 & (1<x\le 2)\end{cases}$이므로

$f_1\left(\frac{1}{64}\right)=f\left(\frac{1}{64}\right)=\frac{2}{64}$

$f_2\left(\frac{1}{64}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{64}\right)\right)=f\left(\frac{2}{64}\right)=\frac{2^2}{64}$

$f_3\left(\frac{1}{64}\right)=f\left(f_2\left(\frac{1}{64}\right)\right)=f\left(\frac{2^2}{64}\right)=\frac{2^3}{64}$

이와 같은 방법으로 하면

$f_4\left(\frac{1}{64}\right)=\frac{2^4}{64}$, $f_5\left(\frac{1}{64}\right)=\frac{2^5}{64}$, $f_6\left(\frac{1}{64}\right)=\frac{2^6}{64}$이므로

$f_7\left(\frac{1}{64}\right)=\frac{2^7}{64}=2$ 답 ⑤

17 $(f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(d)=(f\circ f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(d)$

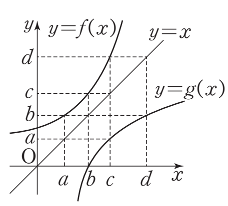
$=(g\circ f^{-1})(d)$

$=g(f^{-1}(d))$

이때 오른쪽 그림에서 $f(c)=d$이므로 $f^{-1}(d)=c$

$\therefore g(f^{-1}(d))=g(c)=a$

답 ②



18 $(f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(g(5))=f^{-1}(6)$

$f^{-1}(6)=k$라 하면 $f(k)=6$

(ⅰ) $k<0$일 때,

$f(k)=6$에서 $2k=6 \qquad \therefore k=3$

그런데 $k<0$이므로 $f(k)=6$을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $k\ge 0$일 때,

$f(k)=6$에서 $k^2+k=6$

$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$

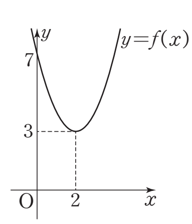
$\therefore k=2\ (\because k\ge 0)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=2$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(6)=2$ 답 ①

19 함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 한다.

$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 정의역이 $\{x\,|\,x\ge a\}$일 때, 함수 $f(x)$가 일대일함수이려면 $a\ge 2$



따라서 a의 최솟값은 2이다. $\qquad \therefore m=2$

$a=2$일 때, 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\ge f(2)\}$이고 치역과 공역이 같아야 하므로 $f(2)=b$

$b=4-8+7=3 \qquad \therefore n=3$

$\therefore mn=2\times 3=6$ 답 ②

20 $f(x)=\frac{1}{a}x+1$에서 $y=\frac{1}{a}x+1$이라 하면

$\frac{1}{a}x=y-1$, $x=ay-a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=ax-a \qquad \therefore f^{-1}(x)=ax-a$

$f=f^{-1}$이므로

$\frac{1}{a}=a$, $1=-a \qquad \therefore a=-1$ 답 ②

다른풀이

$f(x)=f^{-1}(x)$에서 $f(f(x))=x$

$f(x)=\frac{1}{a}x+1$에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}x+1\right)+1$

$=\left(\frac{1}{a}\right)^2x+\frac{1}{a}+1=x$

$\therefore \left(\frac{1}{a^2}-1\right)x+\frac{1}{a}+1=0$

따라서 $\frac{1}{a^2}-1=0$, $\frac{1}{a}+1=0$이므로 $a=-1$

21 x엔을 z달러로 환전할 때, $z=f(x)$라 하면

$f(x)=\frac{1}{150}x$

z달러를 y원으로 환전할 때, $y=g(z)$라 하면

$g(z)=1300z$

따라서 x엔을 y원으로 환전하면 $y=g(f(x))$이므로

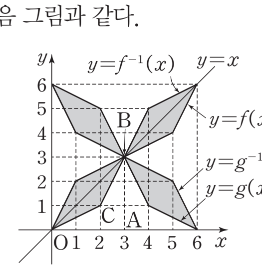
$y=g(f(x))=g\left(\frac{1}{150}x\right)=1300\times\frac{1}{150}x=\frac{26}{3}x$

$x=12000$(엔)일 때,

$y=\frac{26}{3}\times 12000=104000$(원)

이므로 104000원을 환전하면 된다. 답 ③

22 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f^{-1}(x)$, $y=g^{-1}(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



S_1+S_2의 값은 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같고, 네 사각형이 서로 합동이므로 △OCB의 넓이의 8배이다.

이때

$\triangle OCB = \triangle OAB - (\triangle OAC + \triangle ABC)$

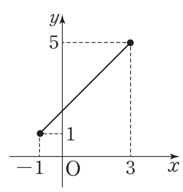
$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1\right)$

$= \frac{9}{2} - \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$

이므로

$S_1 + S_2 = 8\triangle OCB = 8 \times \frac{3}{2} = 12$ 답 ③

23 (ⅰ) $a>0$일 때, 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ 1)$, $(3,\ 5)$를 지나야 하므로



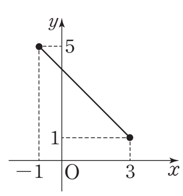
$f(-1)=1$, $f(3)=5$

$-a+b=1$, $3a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$이므로

$ab=1\times 2=2$ …… ❶

(ⅱ) $a<0$일 때, 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ 5)$, $(3,\ 1)$을 지나야 하므로



$f(-1)=5$, $f(3)=1$

$-a+b=5$, $3a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$이므로

$ab=-1\times 4=-4$ …… ❷

(ⅰ), (ⅱ)에서 ab의 최댓값은 2이다. …… ❸

답 2

채점기준	배점
❶ $a>0$일 때 ab의 값 구하기	2
❷ $a<0$일 때 ab의 값 구하기	2
❸ ab의 최댓값 구하기	1

24 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=3h(x)+2$ …… ❶

$(g\circ h)(x)=f(x)$에서

$3h(x)+2=2x^2+5$, $3h(x)=2x^2+3$

$\therefore h(x)=\frac{2}{3}x^2+1$ …… ❷

이때 $x^2\ge 0$이므로 $h(x)=\frac{2}{3}x^2+1\ge 1$

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 1이다. …… ❸

답 1

채점기준	배점
❶ $(g\circ h)(x)$를 $h(x)$를 이용하여 나타내기	1
❷ $h(x)$의 함수식 구하기	2
❸ 함수 $h(x)$의 최솟값 구하기	2

실전 문제 | 2회

p.65~69

01 ㄱ. X의 원소 -1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 X에서 Y로의 함수가 아니다.

ㄴ. $g(-1)=3$, $g(0)=2$, $g(1)=3$이므로 X에서 Y로의 함수이다.

ㄷ. X의 원소 -1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 X에서 Y로의 함수가 아니다.

ㄹ. $i(-1)=3$, $i(0)=1$, $i(1)=2$이므로 X에서 Y로의 함수이다.

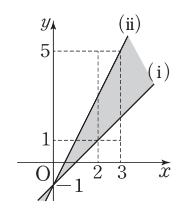
따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

02 $f(2)=9-2^2=5$

$f(25)=f(22)=f(19)=f(16)=\cdots=f(4)=f(1)=8$

$\therefore f(2)+f(25)=5+8=13$ 답 ⑤

03 직선 $y=mx-1$은 m의 값에 관계없이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 정의역이 $\{x|2\le x\le 3\}$, 공역이 $\{y|1\le y\le 5\}$이려면 직선 $y=mx-1$의 기울기 m이 오른쪽 그림과 같이 직선 (ⅰ)의 기울기보다 크거나 같고 직선 (ⅱ)의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



직선 (ⅰ)은 두 점 $(0,\ -1)$, $(2,\ 1)$을 지나므로 직선 (ⅰ)의 기울기는 $\frac{1-(-1)}{2-0}=1$

직선 (ⅱ)는 두 점 $(0,\ -1)$, $(3,\ 5)$를 지나므로 직선 (ⅱ)의 기울기는 $\frac{5-(-1)}{3-0}=2$

따라서 $1\le m\le 2$이므로

$a=1$, $b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$ 답 ③

04 ㄱ. $f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=0$, $y=1$을 대입하면

$f(0+1)=f(0)f(1)$, $f(1)=f(0)f(1)$

$4=4f(0)$ $\therefore f(0)=1$ (참)

ㄴ. $f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=1$, $y=-1$을 대입하면

$f(1+(-1))=f(1)f(-1)$, $f(0)=f(1)f(-1)$

$1=4f(-1)$ $\therefore f(-1)=\frac{1}{4}$

$f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=-1$, $y=-1$을 대입하면

$f(-1+(-1))=f(-1)f(-1)$

$\therefore f(-2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

$f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=-1$, $y=-2$를 대입하면

$f(-1+(-2))=f(-1)f(-2)$

$\therefore f(-3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{64}$ (거짓)

ㄷ. $f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)f(1)$

$\therefore f(2)=4\times4=4^2$

$f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$f(1+2)=f(1)f(2)$

$\therefore f(3)=4\times4^2=4^3$

$f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=1$, $y=3$을 대입하면

$f(1+3)=f(1)f(3)$

$\therefore f(4)=4\times4^3=4^4$

$\vdots$

즉, 자연수 n에 대하여 $f(n)=4^n$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

05 집합 X의 부분집합 중 공집합이 아닌 것의 개수가 3이 되려면 집합 X의 원소의 개수는 2이어야 한다.

따라서 이차방정식 $2x^2-3x+4=-x+k$, 즉

$2x^2-2x+4-k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2(4-k)>0$, $1-8+2k>0$, $2k>7$

$\therefore k>\frac{7}{2}$ 답 ①

06 ㄱ. 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다. 그런데 치역과 공역이 같지 않으므로 일대일대응은 아니다.

ㄴ, ㄷ, ㅁ. 어떤 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 2개 이상의 점에서 만나므로 일대일함수가 아니다.

ㄹ, ㅂ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

따라서 일대일함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄹ, ㅂ의 3개, 일대일대응의 그래프인 것은 ㄹ, ㅂ의 2개이므로

$a=3$, $b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$ 답 ③

07 조건 (가)에서 $f(1)-f(4)=f(5)$이고, 조건 (나)에서

$f(4)<f(2)<f(1)$이므로

$f(1)-f(4)\geq2$, 즉 $f(5)\geq2$

(i) $f(5)=2$일 때,

집합 X의 원소 중 두 수의 차가 2인 것은

1, 3 또는 2, 4 또는 3, 5

이때 $f(5)=2$이고, 1, 3과 3, 5에 모두 3이 있으므로 일대일대응이 되도록 하는 함수 f는 존재하지 않는다.

(ii) $f(5)=3$일 때,

집합 X의 원소 중 두 수의 차가 3인 것은 1, 4 또는 2, 5

이때 조건 (가)에서

$f(1)=4$, $f(2)=5$, $f(3)=2$, $f(4)=1$

또는 $f(1)=5$, $f(2)=4$, $f(3)=1$, $f(4)=2$

조건 (나)에서 $f(4)<f(2)<f(1)$이므로

$f(1)=5$, $f(2)=4$, $f(3)=1$, $f(4)=2$

(iii) $f(5)=4$ 또는 $f(5)=5$일 때,

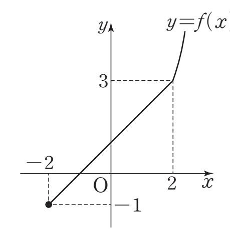
집합 X의 원소 중 두 수의 차가 4인 것은 1, 5의 한 쌍이고 두 수의 차가 5인 것은 없으므로 조건 (가)를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서

$f(1)=5$, $f(2)=4$, $f(3)=1$, $f(4)=2$, $f(5)=3$

$\therefore f(1)+f(3)+f(5)=5+1+3=9$ 답 ③

08 함수 $f(x)$가 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉, 직선 $y=(a-4)x+b$는 두 점 $(-2, -1)$, $(2, 3)$을 지나야 하므로



$-1=-2(a-4)+b$,

$3=2(a-4)+b$

두 식을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=1$

$\therefore ab=5\times1=5$ 답 ②

09 함수 f는 항등함수이므로 $f(x)=x$

함수 g는 상수함수이므로 $g(x)=g(4)$

이때 $f(3)=g(4)$이므로 $g(x)=g(4)=f(3)=3$

$\therefore h(x)=f(x)+g(x)=x+3$

$\therefore h(5)+h(11)=(5+3)+(11+3)=8+14=22$ 답 ⑤

10 조건 (나)에서 함수 f는 일대일함수이다.

$f(1)+f(2)+f(3)$의 값이 짝수이므로

(i) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 모두 짝수인 경우

공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 짝수인 것은 2, 4, 6의 3개이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 함수 f의 개수는 6

(ii) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 1개는 짝수, 나머지 2개는 홀수인 경우

공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 짝수 1개, 서로 다른 홀수 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_4C_2=3\times6=18$

각 경우에 대하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 함수 f의 개수는 $18\times6=108$

(i), (ii)에서 함수 f의 개수는

$6+108=114$ 답 ④

11 $f(x)=\begin{cases}0 & (x\text{가 3의 배수일 때})\\1 & (x\text{가 3의 배수가 아닐 때})\end{cases}$에서

$1-f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{가 3의 배수일 때})\\0 & (x\text{가 3의 배수가 아닐 때})\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} 0 & (x\text{가 5의 배수일 때}) \\ 2 & (x\text{가 5의 배수가 아닐 때}) \end{cases}$ 에서

$2-g(x)=\begin{cases} 2 & (x\text{가 5의 배수일 때}) \\ 0 & (x\text{가 5의 배수가 아닐 때}) \end{cases}$

이때 3과 5의 공배수는 15의 배수이므로

$h(x)=\begin{cases} 2 & (x\text{가 15의 배수일 때}) \\ 0 & (x\text{가 15의 배수가 아닐 때}) \end{cases}$

$\therefore h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(1000)$

$=h(15)+h(30)+h(45)+\cdots+h(990)$

$=\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{66\text{개}}=2\times66=132$ 답 ②

12 $f(5)=-5+7=2$이므로

$(f\circ f\circ f\circ f)(5)=f(f(f(f(5))))=f(f(f(2)))$

$=f(f(-1))\ (\because f(2)=2^2-5=-1)$

$=f(-4)\ (\because f(-1)=(-1)^2-5=-4)$

$=-2\times(-4)-6=2$ 답 ④

13 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)+2$이므로

$(f\circ h)(x)=g(x)$에서

$2h(x)+2=4x+2,\ 2h(x)=4x$

$\therefore h(x)=2x$

또, $(k\circ f)(x)=k(f(x))=k(2x+2)$이므로

$(k\circ f)(x)=g(x)$에서 $k(2x+2)=4x+2$

$2x+2=t$라 하면 $x=\dfrac{t-2}{2}$이므로

$k(t)=4\times\dfrac{t-2}{2}+2=2t-2 \qquad \therefore k(x)=2x-2$

$\therefore h(x)+k(x)=2x+(2x-2)=4x-2$ 답 ④

14 ㄱ. $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(-2)=-2$ (거짓)

ㄴ. $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(3)=3$ (참)

ㄷ. $f(-x)=\begin{cases} 3 & (-x>3) \\ -x & (|-x|\le3) \\ -3 & (-x<-3) \end{cases}$,

즉, $f(-x)=\begin{cases} 3 & (x<-3) \\ -x & (|x|\le3) \\ -3 & (x>3) \end{cases}$ 이므로

$(g\circ f)(-x)=g(f(-x))=\begin{cases} 3 & (x<-3) \\ x^2-6 & (|x|\le3) \\ 3 & (x>3) \end{cases}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} 3 & (x>3) \\ x^2-6 & (|x|\le3) \\ 3 & (x<-3) \end{cases}$

$\therefore (g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

15 $f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le1\right) \end{cases}$ 이므로

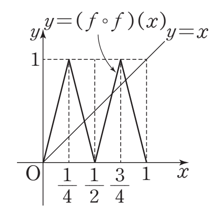
$f(f(x))=\begin{cases} 2f(x) & \left(0\le f(x)<\frac{1}{2}\right) \\ -2f(x)+2 & \left(\frac{1}{2}\le f(x)\le1\right) \end{cases}$

$=\begin{cases} 2(2x) & \left(0\le 2x<\frac{1}{2}\right) \\ 2(-2x+2) & \left(0\le -2x+2<\frac{1}{2}\right) \\ -2(2x)+2 & \left(\frac{1}{2}\le 2x<1\right) \\ -2(-2x+2)+2 & \left(\frac{1}{2}\le -2x+2\le1\right) \end{cases}$

$=\begin{cases} 4x & \left(0\le x<\frac{1}{4}\right) \\ -4x+2 & \left(\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}\right) \\ 4x-2 & \left(\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}\right) \\ -4x+4 & \left(\frac{3}{4}<x\le1\right) \end{cases}$

함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $y=(f\circ f)(x)$가 항등함수이므로

$(f\circ f)(x)=x$의 해를 구하면 다음과 같다.



(i) $4x=x$에서 $x=0$

(ii) $-4x+2=x$에서 $5x=2 \qquad \therefore x=\dfrac{2}{5}$

(iii) $4x-2=x$에서 $3x=2 \qquad \therefore x=\dfrac{2}{3}$

(iv) $-4x+4=x$에서 $5x=4 \qquad \therefore x=\dfrac{4}{5}$

(i)~(iv)에서 $A=\left\{0,\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{5}\right\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은 $0+\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{28}{15}$ 답 ①

16 $f^{-1}(4)=8$에서 $f(8)=4$

$f(x-2)=g(2x)$에 $x=10$을 대입하면

$f(8)=g(20)=4 \qquad \therefore g^{-1}(4)=20$ 답 ⑤

17 조건 (나)에서 $(f\circ g^{-1})(-2x+5)=x$이므로

$(f\circ g^{-1})^{-1}(x)=-2x+5$

$\therefore (g\circ f^{-1})(x)=-2x+5$

조건 (가)에서 $f^{-1}(x)=3x+1$이므로

$(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))=g(3x+1)=-2x+5$

이때 $3x+1=4$에서 $x=1$이므로 $g(4)=-2\times1+5=3$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(4)=f^{-1}(g(4))=f^{-1}(3)=3\times3+1=10$ 답 ⑤

18 $(g \circ f)(x)=x$에서 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다. 즉, 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.

$x \geq \frac{2}{3}$일 때, $f(x)=(3x-2)+ax+5=(3+a)x+3$

$x < \frac{2}{3}$일 때, $f(x)=-(3x-2)+ax+5=(-3+a)x+7$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}(a+3)x+3 & \left(x \geq \frac{2}{3}\right) \\ (a-3)x+7 & \left(x < \frac{2}{3}\right)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 $x \geq \frac{2}{3}$일 때와 $x < \frac{2}{3}$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다. 즉,

$(a+3)(a-3)>0 \qquad \therefore a<-3$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

19 $f(1)=3$, $f^3(1)=1$에서 $f(3)=2$, $f(2)=1$이므로

$g(1)=2$, $g(2)=3$, $g(3)=1$

$\therefore (g \circ g)(2)+((f \circ g)^{-1} \circ f)(1)$

$=g(g(2))+f(1)$ ($\because f \circ g=I$)

$=g(3)+f(1)$

$=1+3=4$

답 ③

20 함수 $f(x)=x^2+\frac{9}{4}\,(x \geq 0)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 $y=-x+k$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

선분 AB의 길이가 최소인 경우는 점 A와 직선 $y=x$ 사이의 거리가 최소일 때이므로 기울기가 1인 직선과 곡선 $y=f(x)$의 접점이 점 A일 때, 선분 AB의 길이가 최소가 된다.

따라서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식을 $y=x+a$라 할 때, 이차방정식 $x^2+\frac{9}{4}=x+a$, 즉

$x^2-x+\frac{9}{4}-a=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=(-1)^2-4\times1\times\left(\frac{9}{4}-a\right)=0$, $1-9+4a=0$

$4a=8 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 $x^2-x+\frac{9}{4}-a=0$에 대입하면

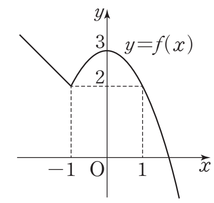
$x^2-x+\frac{1}{4}=0 \qquad \therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$

따라서 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은

$\sqrt{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$

답 ③

21 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$(f \circ g)(x)=2$에서 $f(g(x))=2$

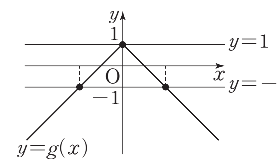
오른쪽 그림에서 $f(-1)=2$, $f(1)=2$이므로

$g(x)=-1$ 또는 $g(x)=1$

(i) $g(x)=-1$일 때,

$-|x|+1=-1$

$|x|=2 \qquad \therefore x=\pm2$



(ii) $g(x)=1$일 때,

$-|x|+1=1$

$|x|=0 \qquad \therefore x=0$

따라서 방정식 $(f \circ g)(x)=2$의 실근은 -2, 0, 2의 3개이다.

답 ③

22 $f^1(3)=f(3)=1$

$f^2(3)=(f \circ f^1)(3)=f(f^1(3))=f(1)=5$

$f^3(3)=(f \circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f(5)=4$

$f^4(3)=(f \circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(4)=3$

$f^4(3)=3$이므로 $(f^4)^{-1}(3)=3$

$(f \circ f \circ f \circ f)^{-1}(3)=3$

$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(3)=3$

$(f^{-1})^4(3)=3 \qquad \therefore g^4(3)=3$

또, $f(1)=5$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=3$, $f(5)=4$에서

$g(1)=3$, $g(2)=2$, $g(3)=4$, $g(4)=5$, $g(5)=1$

따라서

$g^{30}(3)=g^2(3)=g(g(3))=g(4)=5$

$g^{16}(3)=g^4(3)=3$

이므로

$g^{30}(3)+g^{16}(3)=5+3=8$

답 ④

23 $f(0)=g(0)$에서

$1+1=c \qquad \therefore c=2$ …… ❶

$\therefore g(x)=ax^2+bx+2$

$f(1)=g(1)$에서

$|2+1|+|1-1|=a+b+2$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠ …… ❷

$f(2)=g(2)$에서

$|4+1|+|2-1|=4a+2b+2$

$4a+2b=4 \qquad \therefore 2a+b=2$ …… ㉡ …… ❸

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=0$ …… ❹

$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+0^2+2^2=5$ …… ❺

답 5

채점기준	배점
❶ $f(0)=g(0)$에서 c의 값 구하기	1
❷ $f(1)=g(1)$에서 a, b 사이의 관계식 구하기	1
❸ $f(2)=g(2)$에서 a, b 사이의 관계식 구하기	1
❹ a, b의 값 구하기	2
❺ $a^2+b^2+c^2$의 값 구하기	1

24 조건 (가)에서 함수 f는 일대일대응이다. …… ❶

조건 (나)에서 $x=1$일 때

$f(f(1))=f(1)-3$

이때 X의 원소 중 두 수의 차가 3인 것은 3, 6이므로

$f(1)=6$, $f(f(1))=3$ $\quad\therefore f(6)=3$ …… ❷

또, 조건 (나)에서 $x=2$일 때 $f(f(2))=f(2)-6$

이때 X의 원소 중 두 수의 차가 6인 것은 1, 7이므로

$f(2)=7$, $f(f(2))=1$ $\quad\therefore f(7)=1$ …… ❸

따라서 $f(3)=2$이므로 …… ❹

$(f\circ f)(6)-(f\circ f)(1)=f(f(6))-f(f(1))$

$=f(3)-f(6)$

$=2-3=-1$ …… ❺

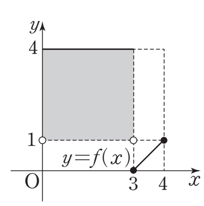
답 -1

채점기준	배점
❶ 함수 f가 일대일대응임을 설명하기	1
❷ $f(1)$, $f(6)$의 값을 각각 구하기	2
❸ $f(2)$, $f(7)$의 값을 각각 구하기	2
❹ $f(3)$의 값 구하기	1
❺ $(f\circ f)(6)-(f\circ f)(1)$의 값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.70~74

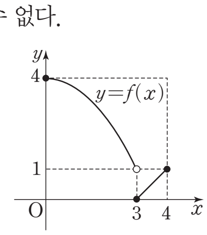
1 $3\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 집합 $\{x\,|\,0\le x<3\}$에서 정의된 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $0\le x<3$에서의 함숫값의 집합은 색칠한 부분의 y의 값인 $\{y\,|\,1<y\le 4\}$이어야 한다.



$a>0$이면 $0\le x<3$에서 함수 $y=ax^2+b$의 함숫값의 범위는 $b\le y<9a+b$이므로 치역이 $\{y\,|\,1<y\le 4\}$가 될 수 없다.

$a=0$이면 함수 $f(x)$는 일대일대응이 될 수 없다.

즉, $a<0$이고, 이를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=ax^2+b$의 그래프는 두 점 $(0, 4)$, $(3, 1)$을 지나야 한다. 즉,



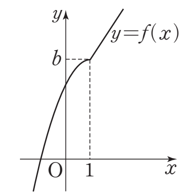
$b=4$이고, $1=a\times 3^2+4$에서 $a=-\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^2+4$ $(0\le x<3)$이므로

$f(1)=-\dfrac{1}{3}+4=\dfrac{11}{3}$

답 ⑤

2 $x<1$에서 함수 $y=-(x-1)^2+b$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 직선 $y=ax+4$의 기울기가 양수이어야 하므로 $a>0$

(ii) 직선 $y=ax+4$는 점 $(1, b)$를 지나므로

$b=a+4$

(i), (ii)에서 정수 a의 최솟값은 1, 그때의 b의 값은 $1+4=5$이므로

$m=1$, $n=5$

$\therefore m+n=1+5=6$

답 ②

3 함수 $f(x)$가 상수함수이므로 $f(0)=f(2)=f(4)=c$ $(c\in X)$이다. 이때 $f(0)=2$이므로 $f(2)=2$, $f(4)=2$

$f(2)=2$에서 $4+2a+b=2$ $\quad\therefore 2a+b=-2$ …… ㉠

$f(4)=2$에서 $16+4a+b=2$ $\quad\therefore 4a+b=-14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=10$

$\therefore a+b=-6+10=4$

답 ④

4 함수 $f(x)$가 항등함수이므로 $f(-3)=-3$, $f(-2)=-2$, $f(4)=4$이다.

$x\ge 0$일 때, $f(4)=4$

$x<0$일 때, $f(x)=ax^2+bx-6$이므로

$f(-3)=-3$에서 $9a-3b-6=-3$

$9a-3b=3$ $\quad\therefore 3a-b=1$ …… ㉠

$f(-2)=-2$에서 $4a-2b-6=-2$

$4a-2b=4$ $\quad\therefore 2a-b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-4$

$\therefore ab=(-1)\times(-4)=4$

답 ③

5 $(f\circ f)(a)=f(a)$에서 $f(f(a))=f(a)$

$f(a)=t$로 놓으면 $f(t)=t$

$t<2$일 때, $f(t)=t$에서 $2t+2=t$ $\quad\therefore t=-2$

$t\ge 2$일 때, $f(t)=t$에서 $t^2-7t+16=t$, $t^2-8t+16=0$

$(t-4)^2=0$ $\quad\therefore t=4$

(i) $t=-2$, 즉 $f(a)=-2$일 때

(ㄱ) $a<2$일 때, $f(a)=-2$에서 $2a+2=-2$

$2a=-4$ $\quad\therefore a=-2$

(ㄴ) $a\ge 2$일 때, $f(a)=-2$에서 $a^2-7a+16=-2$

$\therefore a^2-7a+18=0$

이차방정식 $a^2-7a+18=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\times 1\times 18=-23<0$

즉, $f(a)=-2$를 만족시키는 실수 a의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $t=4$, 즉 $f(a)=4$일 때

㉠ $a<2$일 때, $f(a)=4$에서 $2a+2=4$

$2a=2 \qquad \therefore a=1$

㉡ $a\ge 2$일 때, $f(a)=4$에서 $a^2-7a+16=4$

$a^2-7a+12=0$, $(a-3)(a-4)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서 $(f\circ f)(a)=f(a)$를 만족시키는 실수 a는 -2, 1, 3, 4이므로 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+1+3+4=6$ 답 6

6 $(f\circ f)(a)=f(a)$에서 $f(f(a))=f(a)$

$f(a)=t$로 놓으면 $f(t)=t$

$t<0$일 때, $f(t)=t$에서 $2t+4=t \qquad \therefore t=-4$

$t\ge 0$일 때, $f(t)=t$에서 $t^2-4t+4=t$

$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$

(i) $t=-4$, 즉 $f(a)=-4$일 때

㉠ $a<0$일 때, $f(a)=-4$에서 $2a+4=-4$

$2a=-8 \qquad \therefore a=-4$

㉡ $a\ge 0$일 때, $f(a)=-4$에서 $a^2-4a+4=-4$

$\therefore a^2-4a+8=0$

이차방정식 $a^2-4a+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-4)^2-4\times1\times8=-16<0$

즉, $f(a)=-4$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $t=1$, 즉 $f(a)=1$일 때

㉠ $a<0$일 때, $f(a)=1$에서 $2a+4=1$

$2a=-3 \qquad \therefore a=-\frac{3}{2}$

㉡ $a\ge 0$일 때, $f(a)=1$에서 $a^2-4a+4=1$

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

(iii) $t=4$, 즉 $f(a)=4$일 때

㉠ $a<0$일 때, $f(a)=4$에서 $2a+4=4$

$2a=0 \qquad \therefore a=0$

즉, $f(a)=4$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

㉡ $a\ge 0$일 때, $f(a)=4$에서 $a^2-4a+4=4$, $a^2-4a=0$

$a(a-4)=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=4$

(i), (ii), (iii)에서 $(f\circ f)(a)=f(a)$를 만족시키는 실수 a는 -4, $-\frac{3}{2}$, 1, 3, 0, 4이므로 모든 실수 a의 값의 합은

$-4-\frac{3}{2}+1+3+0+4=\frac{5}{2}$ 답 ①

7 $((f\circ g)\circ g)(a)=(f\circ(g\circ g))(a)$

$=f((g\circ g)(a))=f(3a-1)$

$=2(3a-1)+1$

$=6a-1$

이므로 $((f\circ g)\circ g)(a)=a$에서 $6a-1=a$

$5a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{5}$ 답 ①

8 $(f\circ(g\circ h))(a)=((f\circ g)\circ h)(a)$

$=(f\circ g)(h(a))$

$=(f\circ g)(a-1)$

$=(a-1)^2-5$

$=a^2-2a-4$

이므로 $(f\circ(g\circ h))(a)=a$에서 $a^2-2a-4=a$

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+4=3$ 답 ③

9 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

$f(1)+2f(3)=12$에서 $f(1)=f(3)=4$이면 등식은 성립하지만 일대일대응이 아니므로 $f(1)=2$, $f(3)=5$ ...... ㉠

$f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2$에서 $f^{-1}(1)\in X$, $f^{-1}(3)\in X$이므로

$f^{-1}(1)=3$, $f^{-1}(3)=1$

또는 $f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(3)=2$

또는 $f^{-1}(1)=5$, $f^{-1}(3)=3$

이다. 그런데 ㉠에서 $f^{-1}(2)=1$, $f^{-1}(5)=3$이고 f^{-1}은 일대일대응이므로 $f^{-1}(1)=4$, $f^{-1}(3)=2$이다.

즉, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=1$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$f(5)=4 \qquad \therefore f^{-1}(4)=5$

$\therefore f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$ 답 ②

10 $f(6)-f(4)=f(2)$에서 $f(6)>f(4)$, $f(6)>f(2)$

$f(6)+f(4)=f(8)$에서 $f(8)>f(6)$, $f(8)>f(4)$

$\therefore f(8)>f(6)>f(4)$, $f(6)>f(2)$

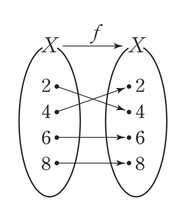
따라서 가장 큰 값은 $f(8)$이므로 $f(8)=8$

$(f(6), f(4))$는 $(6, 4)$, $(6, 2)$, $(4, 2)$ 중 하나이고,

$f(6)+f(4)=f(8)=8$이므로 $f(6)=6$, $f(4)=2$

$\therefore f(2)=f(6)-f(4)=6-2=4$

따라서 함수 $f(x)$는 오른쪽 그림과 같으므로



$(f\circ f)(2)+f^{-1}(6)$

$=f(f(2))+f^{-1}(6)$

$=f(4)+f^{-1}(6)$

$=2+6=8$ 답 ③

2 유리함수

교과서 예제 p.77

01 ㄷ. $\dfrac{2x^2-1}{3}=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{3}$이므로 다항식이다.

ㅂ. $\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{2}$이므로 다항식이다.

답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

02 (1) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+3(x+1)}{(x+1)(x-3)}$

$=\dfrac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$

(2) $\dfrac{x+7}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2+x}=\dfrac{x+7}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{3}{x(x+1)}$

$=\dfrac{x(x+7)-3(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x^2+4x+3}{x(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{\cancel{(x+1)}(x+3)}{x\cancel{(x+1)}(x-1)}=\dfrac{x+3}{x(x-1)}$

(3) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}\times\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$

$=\dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-3)}}\times\dfrac{\cancel{x-3}}{(x-1)\cancel{(x-2)}}$

$=\dfrac{x+3}{(x+1)(x-1)}$

(4) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\div\dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+4}$

$=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-1)}\div\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-1)(x-4)}$

$=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{(x+2)\cancel{(x-1)}}\times\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{(x+3)\cancel{(x-2)}}$

$=\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x+2)(x+3)}$

(5) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}$

$=\dfrac{1}{(x+2)-(x+1)}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\dfrac{2}{(x+4)-(x+2)}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{x+1}-\cancel{\dfrac{1}{x+2}}+\cancel{\dfrac{1}{x+2}}-\dfrac{1}{x+4}$

$=\dfrac{3}{(x+1)(x+4)}$

답 (1) $\dfrac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$ (2) $\dfrac{x+3}{x(x-1)}$

(3) $\dfrac{x+3}{(x+1)(x-1)}$ (4) $\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x+2)(x+3)}$

(5) $\dfrac{3}{(x+1)(x+4)}$

03 ㄱ. $y=\dfrac{3x-4}{2}=\dfrac{3}{2}x-2$이므로 다항함수이다.

ㄹ. $y=\dfrac{x^2+1}{2}=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$이므로 다항함수이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㅁ

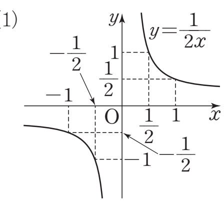
04 (1) $2x-3\neq0$에서 $x\neq\dfrac{3}{2}$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$

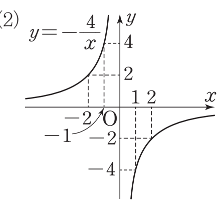
(2) $x^2+4>0$이므로 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

답 (1) $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{3}{2}\text{인 실수}\right\}$ (2) 실수 전체의 집합

05 답 (1)



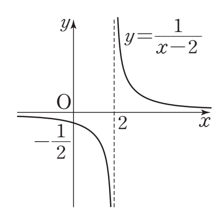
(2)



06 $y-1=\dfrac{1}{x-2}$ $\quad\therefore y=\dfrac{1}{x-2}+1$

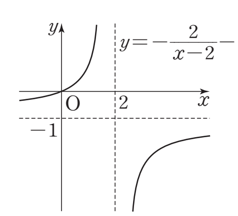
답 $y=\dfrac{1}{x-2}+1$

07 (1) $y=\dfrac{1}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



정의역: $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$,
치역: $\{y\,|\,y\neq0$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=2$, $y=0$

(2) $y=-\dfrac{2}{x-2}-1$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



정의역: $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$, 치역: $\{y\,|\,y\neq-1$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=2$, $y=-1$ 답 풀이 참조

08 (1) $y=\dfrac{3x+2}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+5}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}+3$

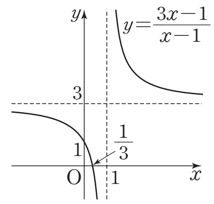
(2) $y=\dfrac{-2x+3}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+7}{x+2}=\dfrac{7}{x+2}-2$

답 (1) $y=\dfrac{5}{x-1}+3$ (2) $y=\dfrac{7}{x+2}-2$

09 (1) $y=\dfrac{3x-1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+3$

따라서 함수 $y=\dfrac{3x-1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축

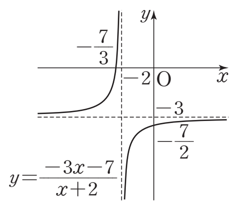
의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



정의역: $\{x \mid x \neq 1$인 실수$\}$,
치역: $\{y \mid y \neq 3$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=1$, $y=3$

(2) $y=\frac{-3x-7}{x+2}=\frac{-3(x+2)-1}{x+2}=-\frac{1}{x+2}-3$

따라서 함수 $y=\frac{-3x-7}{x+2}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



정의역: $\{x \mid x \neq -2$인 실수$\}$,
치역: $\{y \mid y \neq -3$인 실수$\}$,
점근선의 방정식: $x=-2$, $y=-3$

답 풀이 참조

기출 Best | 1회 p.78~82

01 $\frac{x^2+2x-1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{x^2+x-2}{x-1}$

$=\frac{x(x+2)-1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

$=x+2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-(x+2)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$

$=\frac{-(x+1)+x}{x(x+1)}=-\frac{1}{x(x+1)}$

답 ③

02 $\frac{x^2-4x+4}{2x^2+3x-9}\times\frac{x+1}{x^2-4}\div\frac{x^2-2x-3}{2x^2+x-6}$

$=\frac{(x-2)^2}{(2x-3)(x+3)}\times\frac{x+1}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(2x-3)(x+2)}{(x+1)(x-3)}$

$=\frac{x-2}{(x+3)(x-3)}$

답 ①

03 $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$=\frac{(a+b)x-2a-b}{x^2-3x+2}$

즉, $\frac{(a+b)x-2a-b}{x^2-3x+2}=\frac{-x+3}{x^2-3x+2}$이고 이 등식이 $x\neq1$, $x\neq2$인 x에 대한 항등식이므로

$a+b=-1$, $-2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

$\therefore ab=-2\times1=-2$

답 ①

04 $x-y+2z=0$ …… ㉠

$x+y-z=0$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2x+z=0$ $\quad\therefore z=-2x$

$z=-2x$를 ㉠에 대입하면

$x-y+2\times(-2x)=0$ $\quad\therefore y=-3x$

$\therefore \frac{x^3-y^3+z^3}{2xyz}=\frac{x^3-(-3x)^3+(-2x)^3}{2\times x\times(-3x)\times(-2x)}=\frac{20x^3}{12x^3}=\frac{5}{3}$

답 ④

05 $a+b+c=0$에서

$a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$ …… ㉠

$\therefore a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$

$=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}$ ($\because$ ㉠)

$=-1-1-1=-3$

답 ②

06 $y=\frac{ax+3}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+3}{x+b}=\frac{-ab+3}{x+b}+a$

따라서 정의역은 $\{x \mid x\neq -b$인 실수$\}$, 치역은 $\{y \mid y\neq a$인 실수$\}$이므로

$-b=4$, $a=-3$

$\therefore b=-4$

$\therefore ab=(-3)\times(-4)=12$

답 ④

07 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{2}{x-a}+b$ 꼴이다.

ㄱ. $y=\frac{x+3}{x+1}=\frac{(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+1$ (○)

ㄴ. $y=\frac{-2x}{x-1}=\frac{-2(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}-2$ (×)

ㄷ. $y=\frac{2x+6}{x+2}=\frac{2(x+2)+2}{x+2}=\frac{2}{x+2}+2$ (○)

ㄹ. $y=\frac{-x+5}{x-3}=\frac{-(x-3)+2}{x-3}=\frac{2}{x-3}-1$ (○)

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

08 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=4$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+3}+4\ (k\neq0)$ …… ㉠

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{3}+4$ $\quad\therefore k=-6$

$k=-6$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-6}{x+3}+4=\frac{-6+4(x+3)}{x+3}=\frac{4x+6}{x+3}$

따라서 $a=4$, $b=6$, $c=3$이므로

$abc=4\times6\times3=72$ 답 ⑤

09 $y=\dfrac{ax-1}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab-1}{x+b}=\dfrac{-ab-1}{x+b}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$

이때 점 $(-b, a)$는 두 직선 $y=x-2$, $y=-x+3$의 교점이므로

$a=-b-2$, $a=b+3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{5}{2}$

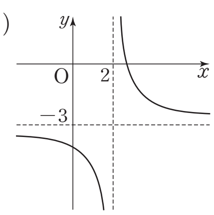
$\therefore \dfrac{b}{a}=-\dfrac{5}{2}\times2=-5$ 답 ③

참고 유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점을 지나고 기울기가 1 또는 -1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

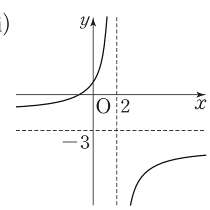
10 $y=\dfrac{-3x+k+6}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)+k}{x-2}=\dfrac{k}{x-2}-3$ …… ㉠

이므로 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-3$이다.

(i)



(ii)



(i) $k>0$일 때

그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k<0$일 때

그래프가 제2사분면을 지나려면 $x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로

$\dfrac{k+6}{-2}>0$, $k+6<0$

$\therefore k<-6$

(iii) $k=0$일 때

㉠에서 $y=-3$이므로 그래프가 제2사분면을 지나지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $k<-6$

따라서 정수 k의 최댓값은 -7이다. 답 ②

11 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-2}+3\ (k\neq0)$ …… ㉠

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{k}{-2}+3$, $\dfrac{k}{2}=-1$ $\therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-2}{x-2}+3=\dfrac{-2+3(x-2)}{x-2}=\dfrac{3x-8}{x-2}$

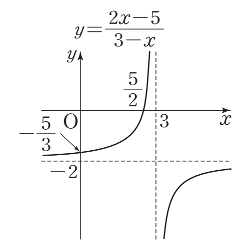
따라서 $a=-8$, $b=1$, $c=-2$이므로

$a+b+c=-8+1+(-2)=-9$ 답 ①

12 $y=\dfrac{2x-5}{3-x}=\dfrac{-2(3-x)+1}{3-x}=-\dfrac{1}{x-3}-2$

① 정의역은 $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$이다.

② 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=-2$이다.



③ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4사분면을 지난다.

④ 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=-2$이므로 그래프는 기울기가 ±1이고 점 $(3, -2)$를 지나는 두 직선 $y-(-2)=\pm(x-3)$, 즉 $y=x-5$, $y=-x+1$에 대하여 대칭이다.

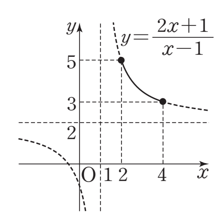
⑤ 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

13 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le4$에서 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=2$일 때 최댓값 $y=\dfrac{4+1}{2-1}=5$

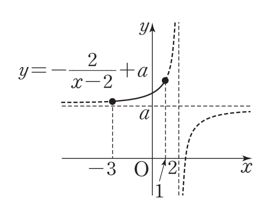
$x=4$일 때 최솟값 $y=\dfrac{8+1}{4-1}=3$

따라서 $M=5$, $m=3$이므로

$M+m=5+3=8$ 답 ⑤

14 함수 $y=-\dfrac{2}{x-2}+a$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le1$에서 함수 $y=-\dfrac{2}{x-2}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 함수는 $x=1$일 때, 최댓값 $2+a$를 갖는다.

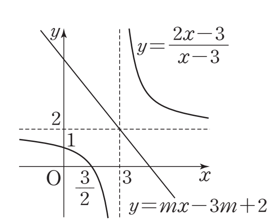


이때 최댓값이 6이므로

$2+a=6$ $\therefore a=4$ 답 ①

15 $y=\dfrac{2x-3}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+3}{x-3}=\dfrac{3}{x-3}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-3}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 또, 직선 $y=mx-3m+2$, 즉



$y=m(x-3)+2$는 m의 값에 관계없이 점 $(3,\ 2)$를 지난다.

따라서 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-3}$의 그래프와 직선 $y=mx-3m+2$가 만나지 않도록 하는 m의 값의 범위는 $m\le 0$이다. 답 ③

다른풀이 (i) $m=0$일 때,

함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-3}$의 그래프와 직선 $y=2$는 만나지 않는다.

(ii) $m\neq 0$일 때, 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x-3}$의 그래프와 직선 $y=mx-3m+2$가 만나지 않으려면 방정식

$\dfrac{2x-3}{x-3}=mx-3m+2$ ⋯⋯ ㉠

의 근이 존재하지 않아야 한다.

㉠에서 $2x-3=(mx-3m+2)(x-3)$

$mx^2-6mx+9m-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 근이 존재하지 않아야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-3m)^2-m(9m-3)<0$

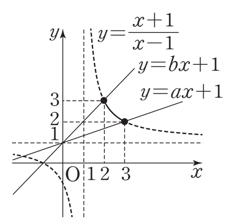
$3m<0$ $\quad\therefore m<0$

(i), (ii)에서 $m\le 0$

16 $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

이므로 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 3$에서 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$은 각각 a, b의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.



(i) 직선 $y=ax+1$이 점 $(3,\ 2)$를 지날 때,

$2=3a+1$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $ax+1\le\dfrac{x+1}{x-1}$이려면 $a\le\dfrac{1}{3}$

(ii) 직선 $y=bx+1$이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때,

$3=2b+1$ $\quad\therefore b=1$

따라서 $\dfrac{x+1}{x-1}\le bx+1$이려면 $b\ge 1$

(i), (ii)에서 a의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$, b의 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$ 답 ④

17 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ $(a>0)$이라 하면

$\mathrm{B}\left(ak,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $\mathrm{C}\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$

삼각형 ABC의 넓이가 32이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BA}}\times\overline{\mathrm{CA}}=\dfrac{1}{2}(ak-a)\times\left(\dfrac{k}{a}-\dfrac{1}{a}\right)$

$=\dfrac{1}{2}a(k-1)\times\dfrac{1}{a}(k-1)=\dfrac{1}{2}(k-1)^2=32$

$(k-1)^2=64$

$k-1=\pm 8$ $\quad\therefore k=9$ $(\because k>1)$ 답 ④

18 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{9}{a-2}\right)$ $(a>2)$라 하면 $\mathrm{Q}(a,\ 0)$, $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{9}{a-2}\right)$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{9}{a-2}$, $\overline{\mathrm{PR}}=a$

이때 $a-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{9}{a-2}+a=\dfrac{9}{a-2}+(a-2)+2$

$\ge 2\sqrt{\dfrac{9}{a-2}\times(a-2)}+2$

$=2\times 3+2=8$

$\left(\text{단, 등호는 }\dfrac{9}{a-2}=a-2,\ \text{즉 }a=5\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 8이다. 답 ②

19 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 직선 $3x+y+2=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\dfrac{|3a+b+2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$, $|3a+b+2|=10$

$3a+b+2=10$ $(\because a>0,\ b>0)$ $\quad\therefore 3a+b=8$

또, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 유리함수 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$b=\dfrac{4}{a}$ $\quad\therefore ab=4$

$\therefore 9a^2+b^2=(3a+b)^2-6ab$

$=8^2-6\times 4=40$ 답 ③

20 $f^1(2)=f(2)=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$,

$f^2(2)=(f\circ f^1)(2)=f(f^1(2))$

$=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{3}-1}{\dfrac{1}{3}+1}=\dfrac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{4}{3}}=-\dfrac{1}{2}$,

$f^3(2)=(f\circ f^2)(2)=f(f^2(2))$

$=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-\dfrac{1}{2}-1}{-\dfrac{1}{2}+1}=\dfrac{-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{1}{2}}=-3$,

$f^4(2)=(f\circ f^3)(2)=f(f^3(2))$

$=f(-3)=\dfrac{-3-1}{-3+1}=\dfrac{-4}{-2}=2$,

$f^5(2)=(f\circ f^4)(2)=f(f^4(2))$

$=f(2)=\dfrac{1}{3}$, ⋯

따라서 $f^n(2)$ (n은 자연수)의 값으로는 $\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{2}$, -3, 2가 순서대로 반복된다.

$\therefore f^1(2)+f^2(2)+f^3(2)+\cdots+f^{720}(2)$
$=\{f^1(2)+f^2(2)+f^3(2)+f^4(2)\}\times 180$
$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-3+2\right)\times 180=-\frac{7}{6}\times 180=-210$ 답 ②

21 $y=\frac{ax+1}{2x+6}$이라 하면
$y(2x+6)=ax+1,\ 2xy+6y=ax+1,\ 2xy-ax=-6y+1$
$(2y-a)x=-6y+1 \quad \therefore x=\frac{-6y+1}{2y-a}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-6x+1}{2x-a}$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-6x+1}{2x-a}$
따라서 $a=6,\ b=-6$이므로
$ab=6\times(-6)=-36$ 답 ①

22 $y=\frac{3x-4}{x+k}$라 하면 $y(x+k)=3x-4,\ xy+ky=3x-4$
$xy-3x=-ky-4,\ (y-3)x=-ky-4$
$\therefore x=\frac{-ky-4}{y-3}$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\frac{-kx-4}{x-3} \quad \therefore f^{-1}(x)=\frac{-kx-4}{x-3}$ …… ㉠
또, $f^{-1}(x)=f(x-1)-1$이므로
$f^{-1}(x)=f(x-1)-1=\frac{3(x-1)-4}{(x-1)+k}-1$
$=\frac{3x-7-(x-1+k)}{x-1+k}=\frac{2x-6-k}{x-1+k}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $-k=2,\ -4=-6-k,\ -3=-1+k$
$\therefore k=-2$ 답 ②

23 $y=\frac{x+5}{x-2}$라 하면
$y(x-2)=x+5,\ xy-2y=x+5$
$(y-1)x=2y+5 \quad \therefore x=\frac{2y+5}{y-1}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{2x+5}{x-1}$
$\therefore g(x)=\frac{2x+5}{x-1}=\frac{2(x-1)+7}{x-1}=\frac{7}{x-1}+2$
이때 $f(x)=\frac{x+5}{x-2}=\frac{(x-2)+7}{x-2}=\frac{7}{x-2}+1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-b=\frac{7}{(x-a)-2}+1 \quad \therefore y=\frac{7}{x-a-2}+1+b$
이 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 겹쳐지므로
$-a-2=-1,\ 1+b=2 \quad \therefore a=-1,\ b=1$
$\therefore a+b=-1+1=0$ 답 ③

24 $(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(6)=f^{-1}(6)$이므로
$f^{-1}(6)=k$라 하면 $f(k)=6$
$\frac{k+4}{k-1}=6,\ k+4=6k-6,\ -5k=-10$
$\therefore k=2$
$\therefore f^{-1}(6)=2$ 답 ③

기출 Best | 2회

p.83~87

01 $\frac{2}{x^3+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}$
$=\frac{2}{x^3+1}+\frac{x^2-x+1-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$
$=\frac{2}{x^3+1}+\frac{x^2-x+1-(x^2-x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$
$=\frac{2}{x^3+1}+\frac{3}{x^3+1}=\frac{5}{x^3+1}$ 답 ⑤

02 $\frac{x^2-x-12}{x^3-1}\times\frac{x^2+x+1}{x^2+x-6}\div\frac{x^2-16}{x^2-3x+2}$
$=\frac{(x+3)(x-4)}{(x-1)(x^2+x+1)}\times\frac{x^2+x+1}{(x+3)(x-2)}\times\frac{(x-1)(x-2)}{(x+4)(x-4)}$
$=\frac{1}{x+4}$ 답 ②

03 $\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+3}=\frac{a(x+3)+b(x+1)}{(x+1)(x+3)}$
$=\frac{(a+b)x+3a+b}{x^2+4x+3}$
즉, $\frac{(a+b)x+3a+b}{x^2+4x+3}=\frac{3x+7}{x^2+4x+3}$이고 이 등식이 $x\neq-3$, $x\neq-1$인 x에 대한 항등식이므로
$a+b=3,\ 3a+b=7$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$
$\therefore a^2+b^2=2^2+1^2=5$ 답 ①

04 $2x-y-z=0$ …… ㉠
$x+2y-8z=0$ …… ㉡
$2\times$㉠$+$㉡을 하면 $5x-10z=0,\ 5x=10z \quad \therefore x=2z$
$x=2z$를 ㉡에 대입하면 $2z+2y-8z=0$
$2y=6z \quad \therefore y=3z$
$\therefore \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}=\frac{2z\times 3z\times z}{8z^3+27z^3+z^3}=\frac{6z^3}{36z^3}=\frac{1}{6}$ 답 ③

05 $x-\frac{3}{z}=1$에서 $\frac{3}{z}=x-1,\ \frac{z}{3}=\frac{1}{x-1} \quad \therefore z=\frac{3}{x-1}$
$\frac{1}{x}-y=1$에서 $y=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

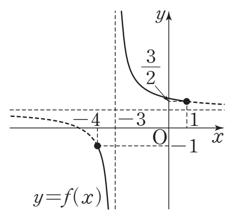
이때 $xyz=x\times\dfrac{1-x}{x}\times\dfrac{3}{x-1}=-3$이므로

$\dfrac{9}{xyz}=\dfrac{9}{-3}=-3$ 답 ②

06 $f(x)=\dfrac{x+5}{x+3}=\dfrac{x+3+2}{x+3}=\dfrac{2}{x+3}+1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le x<-3$ 또는 $-3<x\le1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$의 치역은 $\left\{y\,\middle|\,y\le-1 \text{ 또는 } y\ge\dfrac{3}{2}\right\}$이다.



답 ①

07 $y=\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{(x-1)-2}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}+1$

이므로 함수 $y=\dfrac{x-3}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\dfrac{x-3}{x-1}$의 그래프와 겹쳐지는 그래프의 식은 $y=-\dfrac{2}{x-a}+b$ 꼴이다.

① $y=\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+1$ (×)

② $y=\dfrac{4x+3}{2x-1}=\dfrac{2(2x-1)+5}{2x-1}$

$=\dfrac{5}{2x-1}+2=\dfrac{\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}+2$ (×)

③ $y=\dfrac{2x+8}{x+3}=\dfrac{2(x+3)+2}{x+3}=\dfrac{2}{x+3}+2$ (×)

④ $y=\dfrac{x+1}{2-x}=\dfrac{-(2-x)+3}{2-x}=-\dfrac{3}{x-2}-1$ (×)

⑤ $y=\dfrac{6x-7}{2x-1}=\dfrac{3(2x-1)-4}{2x-1}$

$=-\dfrac{4}{2x-1}+3=-\dfrac{2}{x-\frac{1}{2}}+3$ (○)

따라서 그래프가 평행이동에 의하여 함수 $y=\dfrac{x-3}{x-1}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

08 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=3$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+2}+3\ (k\ne0)$ …… ㉠

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(5, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{5+2}+3$, $\dfrac{k}{7}=-1$ $\quad\therefore k=-7$

$k=-7$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-7}{x+2}+3=\dfrac{-7+3(x+2)}{x+2}=\dfrac{3x-1}{x+2}$

따라서 $a=2$, $b=3$, $c=-1$이므로

$a+b+c=2+3+(-1)=4$ 답 ④

09 $y=\dfrac{ax+3}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab+3}{x+b}=\dfrac{-ab+3}{x+b}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$

이때 점 $(-b, a)$는 두 직선 $y=x+1$, $y=-x+4$의 교점이므로

$a=-b+1$, $a=b+4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{5}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$

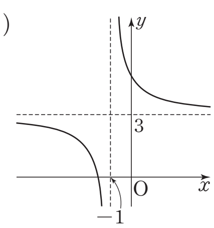
$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{5}$ 답 ③

참고 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\ne0,\ c\ne0)$의 그래프는 두 점근선의 교점을 지나고 기울기가 1 또는 -1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

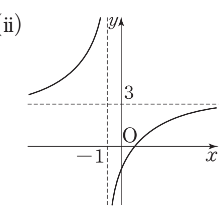
10 $y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+k-13}{x+1}=\dfrac{k-13}{x+1}+3$ …… ㉠

이므로 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3$

(i)



(ii)



(i) $k-13>0$, 즉 $k>13$일 때

그래프는 제4사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k-13<0$, 즉 $k<13$일 때

$x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로

$k-10<0$ $\quad\therefore k<10$

(iii) $k-13=0$, 즉 $k=13$일 때

㉠에서 $y=3$이므로 그래프가 제3, 4사분면을 지나지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $k<10$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, …, 9의 9개이다. 답 ②

11 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=4$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+2}+4\ (k\ne0)$ …… ㉠

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{2}+4$, $\dfrac{k}{2}=-2$ $\quad\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-4}{x+2}+4=\dfrac{-4+4(x+2)}{x+2}=\dfrac{4x+4}{x+2}$

따라서 $a=4$, $b=4$, $c=2$이므로

$abc=4\times4\times2=32$ 답 ⑤

12 $y=\dfrac{2x-4}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-6}{x+1}=-\dfrac{6}{x+1}+2$

② $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$에 $y=0$을 대입하면

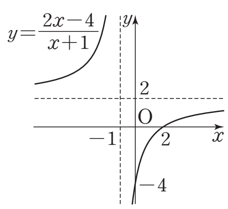
$0=\dfrac{2x-4}{x+1}$, $2x-4=0$

$2x=4$ $\quad\therefore x=2$

따라서 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

④ 그래프는 $y=-\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.



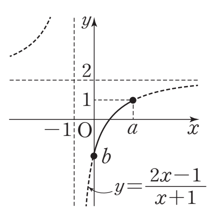
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

13 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-3}{x+1}=-\dfrac{3}{x+1}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le a$에서 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$은 $x=a$일 때 최댓값 1을 가지므로

$1=\dfrac{2a-1}{a+1}$, $2a-1=a+1$ $\quad\therefore a=2$

$x=0$일 때 최솟값 b를 가지므로

$b=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

답 ①

14 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+2}$의 그래프의 점근선은 $x=-2$, $y=a$이므로

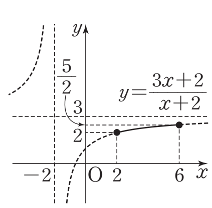
$a=3$

$y=\dfrac{3x+b}{x+2}$의 그래프가 점 $(-3,\ 7)$을 지나므로

$7=\dfrac{-9+b}{-3+2}$, $-7=-9+b$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore y=\dfrac{3x+2}{x+2}=-\dfrac{4}{x+2}+3$

$2\le x\le 6$에서 함수 $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=6$일 때 최댓값 $\dfrac{5}{2}$, $x=2$일 때 최솟값 2를 갖는다.



따라서 $M=\dfrac{5}{2}$, $m=2$이므로

$Mm=\dfrac{5}{2}\times 2=5$

답 ①

15 함수 $y=\dfrac{x-3}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1\ (k>0)$이 한 점에서 만나므로 방정식 $\dfrac{x-3}{x+1}=kx+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

의 실근이 1개이어야 한다.

㉠에서 $x-3=(kx+1)(x+1)$

$\therefore kx^2+kx+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=k^2-4\times k\times 4=0$, $k^2-16k=0$

$k(k-16)=0$

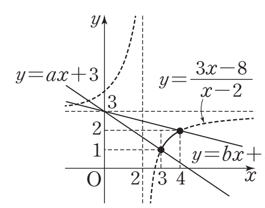
$\therefore k=16\ (\because k>0)$

답 ④

16 $y=\dfrac{3x-8}{x-2}=\dfrac{3(x-2)-2}{x-2}=-\dfrac{2}{x-2}+3$

이므로 함수 $y=\dfrac{3x-8}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\le x\le 4$에서 함수 $y=\dfrac{3x-8}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 두 직선 $y=ax+3$, $y=bx+3$은 각각 a, b의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 3)$을 지난다.



(i) 직선 $y=ax+3$이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때,

$1=3a+3$ $\quad\therefore a=-\dfrac{2}{3}$

따라서 $ax+3\le\dfrac{3x-8}{x-2}$이려면 $a\le-\dfrac{2}{3}$

$3\le x\le 4$에서 직선 $y=ax+3$은 함수 $y=\dfrac{3x-8}{x-2}$의 그래프보다 아래에 있어야 한다.

(ii) 직선 $y=bx+3$이 점 $(4,\ 2)$를 지날 때,

$2=4b+3$ $\quad\therefore b=-\dfrac{1}{4}$

따라서 $\dfrac{3x-8}{x-2}\le bx+3$이려면 $b\ge-\dfrac{1}{4}$

(i), (ii)에서 a의 최댓값은 $-\dfrac{2}{3}$, b의 최솟값은 $-\dfrac{1}{4}$이므로

$3\le x\le 4$에서 직선 $y=bx+3$은 함수 $y=\dfrac{3x-8}{x-2}$의 그래프보다 위에 있어야 한다.

$a-b$의 최댓값은

$-\dfrac{2}{3}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{5}{12}$

답 ③

17 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a-1}\right)\ (a>1)$이라 하면

$\mathrm{B}\left(ak-k+1,\ \dfrac{1}{a-1}\right)$, $\mathrm{C}\left(a,\ \dfrac{k}{a-1}\right)$

$\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{k}{x-1}$에서 $x=ak-k+1$

삼각형 ABC의 넓이가 8이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BA}}\times\overline{\mathrm{CA}}$

$=\dfrac{1}{2}(ak-k+1-a)\times\left(\dfrac{k}{a-1}-\dfrac{1}{a-1}\right)$

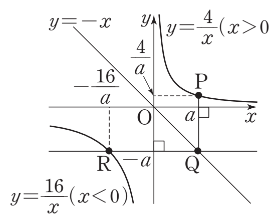
$=\dfrac{1}{2}\{k(a-1)-(a-1)\}\times\dfrac{k-1}{a-1}$

$=\dfrac{1}{2}(a-1)(k-1)\times\dfrac{k-1}{a-1}=\dfrac{1}{2}(k-1)^2=8$

$(k-1)^2=16$

$k-1=\pm 4 \qquad \therefore k=5\ (\because k>1)$ 답 ②

18 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{4}{a}\right)\ (a>0)$라 하면 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=-x$와 만나는 점이 Q이므로 점 $\mathrm{Q}(a,\ -a)$, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{16}{a},\ -a\right)$ 이므로



$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{4}{a}-(-a)=a+\dfrac{4}{a}$,

$\overline{\mathrm{QR}}=a-\left(-\dfrac{16}{a}\right)=a+\dfrac{16}{a}$

$a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\left(a+\frac{4}{a}\right)\left(a+\frac{16}{a}\right)=a^2+\frac{64}{a^2}+20$$

$$\geq 2\sqrt{a^2\times\frac{64}{a^2}}+20=36$$

$\left(\text{단, 등호는 } a^2=\dfrac{64}{a^2},\ \text{즉 } a=2\sqrt{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값은 36이다. 답 ⑤

19 점 $\mathrm{Q}(a,\ b)$가 함수 $y=\dfrac{4}{x-2}+3$의 그래프 위의 점이므로

$b=\dfrac{4}{a-2}+3 \qquad \therefore \mathrm{Q}\left(a,\ \dfrac{4}{a-2}+3\right)$

두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a-2)^2+\left(\frac{4}{a-2}+3-3\right)^2}=\sqrt{(a-2)^2+\frac{16}{(a-2)^2}}$$

이때 $(a-2)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a-2)^2+\frac{16}{(a-2)^2}\geq 2\sqrt{(a-2)^2\times\frac{16}{(a-2)^2}}$$

$$=2\times 4=8$$

$$\therefore \sqrt{(a-2)^2+\frac{16}{(a-2)^2}}\geq\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

등호는 $(a-2)^2=\dfrac{16}{(a-2)^2}$일 때 성립하므로

$(a-2)^4=16,\ (a-2)^2=4\ (\because (a-2)^2\geq 0),\ a-2=\pm 2$

$\therefore a=4\ (\because a>2)$

따라서 $b=\dfrac{4}{4-2}+3=5$이므로

$a+b=4+5=9$ 답 ④

20 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x-1+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$

함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 1\text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq 1\text{인 실수}\}$이므로 합성함수 $f^n=f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f$가 존재한다.

$f^1(x)=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$$=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\frac{x}{x-(x-1)}=x$$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

$\vdots$

따라서 자연수 n에 대하여

$$f^n(x)=\begin{cases} f(x) & (n\text{은 홀수}) \\ x & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & (n\text{은 홀수}) \\ x & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

이므로

$f^{1003}(3)=f(3)=\dfrac{3}{3-1}=\dfrac{3}{2},\ f^{1004}(2)=2$

$\therefore f^{1003}(3)+f^{1004}(2)=\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{7}{2}$ 답 ②

다른풀이 $f^1(x)=f(x),\ f^{n+1}(x)=(f\circ f^n)(x)=f(f^n(x))$ 이므로

$f^1(3)=f(3)=\dfrac{3}{2}$

$$f^2(3)=f(f^1(3))=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{2}-1}=3$$

$f^3(3)=f(f^2(3))=f(3)=\dfrac{3}{2},\ \cdots$

즉, n이 홀수일 때 $f^n(3)=\dfrac{3}{2}$, n이 짝수일 때 $f^n(3)=3$이므로

$f^{1003}(3)=\dfrac{3}{2}$

또, $f^1(2)=f(2)=2,\ f^2(2)=f(f(2))=f(2)=2,\ \cdots$

즉, 자연수 n에 대하여 $f^n(2)=2 \qquad \therefore f^{1004}(2)=2$

$\therefore f^{1003}(3)+f^{1004}(2)=\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{7}{2}$

21 $(f^{-1})^{-1}=f$이므로 $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$이라 하면

$y(x-3)=2x+1,\ xy-3y=2x+1,\ xy-2x=3y+1$

$(y-2)x=3y+1 \qquad \therefore x=\dfrac{3y+1}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{3x+1}{x-2} \qquad \therefore f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$

따라서 $a=-2,\ b=3,\ c=1$이므로

$a+b+c=-2+3+1=2$ 답 ④

다른풀이 $y=\dfrac{bx+c}{x+a}$라 하면

$y(x+a)=bx+c,\ xy+ay=bx+c,\ xy-bx=-ay+c$

$(y-b)x=-ay+c \qquad \therefore x=\dfrac{-ay+c}{y-b}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{-ax+c}{x-b}$ $\quad\therefore f^{-1}(x)=\frac{-ax+c}{x-b}$

따라서 $-a=2$, $-b=-3$, $c=1$이므로 $a=-2$, $b=3$

$\therefore a+b+c=-2+3+1=2$

22 $y=\frac{ax+1}{x-3}$이라 하면

$y(x-3)=ax+1$, $xy-3y=ax+1$

$xy-ax=3y+1$, $(y-a)x=3y+1$

$\therefore x=\frac{3y+1}{y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{3x+1}{x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-a}$

$f=f^{-1}$이므로 $\frac{ax+1}{x-3}=\frac{3x+1}{x-a}$에서

$a=3$

따라서 $f(x)=f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-3}$이므로

$f(2)=\frac{6+1}{2-3}=-7$

$f^{-1}(1)=\frac{3+1}{1-3}=-2$

$\therefore f(2)+f^{-1}(1)=-7+(-2)=-9$ 답 ②

23 $y=\frac{(2a-1)x+1}{x-a}$이라 하면

$y(x-a)=(2a-1)x+1$, $yx-ay=2ax-x+1$

$(y-2a+1)x=ay+1$ $\quad\therefore x=\frac{ay+1}{y-2a+1}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{ax+1}{x-2a+1}$

$$\therefore g(x)=\frac{ax+1}{x-2a+1}=\frac{a(x-2a+1)+2a^2-a+1}{x-2a+1}$$
$$=\frac{2a^2-a+1}{x-2a+1}+a$$

$$f(x)=\frac{(2a-1)x+1}{x-a}=\frac{(2a-1)(x-a)+2a^2-a+1}{x-a}$$
$$=\frac{2a^2-a+1}{x-a}+2a-1$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{2a^2-a+1}{x-p-a}+2a-6$

이 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 겹쳐지므로

$-p-a=-2a+1$, $2a-6=a$

따라서 $a=6$, $p=5$이므로

$a+p=6+5=11$ 답 ⑤

24 $g(f(x))=x$에서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$y=\frac{-3x+3}{2x+3}$이라 하면

$y(2x+3)=-3x+3$, $2xy+3y=-3x+3$

$2xy+3x=-3y+3$, $(2y+3)x=-3y+3$

$\therefore x=\frac{-3y+3}{2y+3}$

$\therefore g(x)=\frac{-3x+3}{2x+3}$

$$\therefore (f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ g)(0)=(f\circ f^{-1}\circ g\circ g)(0)$$
$$=(g\circ g)(0)=g(g(0))$$
$$=g(1)=0$$
답 ③

변형유형 집중공략

p.88~91

1-1 $f^{n+1}(x)=\underbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}_{(n+1)\text{개}}=f(f^n(x))$이므로

$f^1(x)=f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

$$f^2(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)+(x+1)}$$
$$=\frac{-2}{2x}=-\frac{1}{x},$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1}$$
$$=\frac{-1-x}{-1+x}=\frac{-x-1}{x-1},$$

$$f^4(x)=f(f^3(x))=f\left(\frac{-x-1}{x-1}\right)=\frac{\frac{-x-1}{x-1}-1}{\frac{-x-1}{x-1}+1}$$
$$=\frac{(-x-1)-(x-1)}{(-x-1)+(x-1)}=\frac{-2x}{-2}=x$$

즉, 자연수 n에 대하여 $f^{4n}(x)=x$이므로

$f^{50}(x)=f^{4\times12+2}(x)=f^2(f^{4\times12}(x))=f^2(x)=-\frac{1}{x}$

$\therefore f^{50}\left(-\frac{1}{5}\right)=5$ 답 ④

1-2 조건 (가)에서 $f(x)=\frac{k}{x+1}+1$ ($k\neq0$인 상수)이라 하면 조건 (나)에서

$f(0)=\frac{k}{1}+1=0$ $\quad\therefore k=-1$

$\therefore f(x)=\frac{-1}{x+1}+1=\frac{x}{x+1}$

$$f^2(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$=\frac{x}{x+(x+1)}=\frac{x}{2x+1},$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$

$$=\frac{x}{x+(2x+1)}=\frac{x}{3x+1},$$

$$f^4(x)=f(f^3(x))=f\left(\frac{x}{3x+1}\right)=\frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1}+1}$$

$$=\frac{x}{x+(3x+1)}=\frac{x}{4x+1}, \cdots$$

즉, 자연수 n에 대하여 $f^n(x)=\dfrac{x}{nx+1}$이므로

$$f^{100}(x)=\frac{x}{100x+1}$$

$$\therefore f^{100}(1)=\frac{1}{100+1}=\frac{1}{101}$$

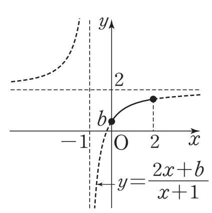
답 ①

2-1 $y=\dfrac{2x+b}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+b-2}{x+1}=\dfrac{b-2}{x+1}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+b}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{b-2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

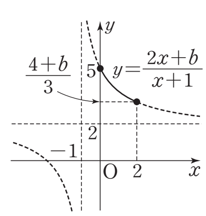
(i) $b-2<0$일 때

$0\le x\le 2$에서 함수 $y=\dfrac{2x+b}{x+1}$는 $x=2$일 때 최댓값을 갖고, 최댓값은 2보다 작으므로 최댓값이 5라는 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $b-2>0$일 때

$0\le x\le 2$에서 함수 $y=\dfrac{2x+b}{x+1}$는 $x=0$일 때 최댓값 b를 갖는다. 이때 최댓값이 5이므로



$b=5$

또, $x=2$일 때 최솟값 $\dfrac{4+b}{3}=\dfrac{4+5}{3}=3$을 가지므로

$a=3$

(iii) $b-2=0$, 즉 $b=2$일 때

주어진 함수는 $y=2$이므로 최댓값이 5라는 조건을 만족시키지 않는다.

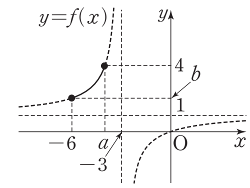
(i), (ii), (iii)에서

$a+b=3+5=8$

답 ③

2-2 $f(x)=\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{(x+3)-3}{x+3}=-\dfrac{3}{x+3}+1$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-6\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $x=a$일 때 최댓값, $x=-6$일 때 최솟값을 갖는다. 이때 치역이 $\{y\,|\,b\le y\le 4\}$이므로



$f(-6)=b,\ f(a)=4$

$f(a)=4$에서 $\dfrac{a}{a+3}=4,\ a=4a+12$

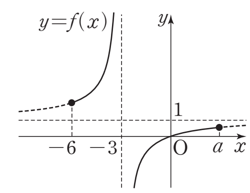
$-3a=12 \qquad \therefore a=-4$

또, $b=f(-6)=\dfrac{-6}{-3}=2$이므로

$ab=(-4)\times 2=-8$

답 ②

참고 $a\ge -3$이면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 치역이 $\{y\,|\,b\le y\le 4\}$라는 조건을 만족시킬 수 없다. 즉, $a<-3$이어야 한다.



3-1 점 P의 x좌표를 $a\ (a>1)$라 하면

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{2}{a-1}+3\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ 3)$, $\mathrm{R}\left(1,\ \dfrac{2}{a-1}+3\right)$, $\mathrm{S}(1,\ 3)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(\dfrac{2}{a-1}+3\right)-3=\dfrac{2}{a-1}$, $\overline{\mathrm{PR}}=a-1$

직사각형 PRSQ의 둘레의 길이는

$$2(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}})=2\left(\frac{2}{a-1}+a-1\right)=\frac{4}{a-1}+2(a-1)$$

이때 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{a-1}+2(a-1)\ge 2\sqrt{\frac{4}{a-1}\times 2(a-1)}=4\sqrt{2}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{4}{a-1}=2(a-1),\ \text{즉 } a=1+\sqrt{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 직사각형 PRSQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

답 ④

3-2 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{4}{a-1}+2\right)\ (a>1)$라 하면

$\overline{\mathrm{PB}}=a$, $\overline{\mathrm{PA}}=\dfrac{4}{a-1}+2$

직사각형 OAPB의 둘레의 길이는

$$2(\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PA}})=2\left(a+\frac{4}{a-1}+2\right)=2\left(a+2+\frac{4}{a-1}\right)$$

$$=2\left(a-1+\frac{4}{a-1}+3\right)$$

$a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2\left(a-1+\frac{4}{a-1}+3\right)\ge 2\left(2\sqrt{(a-1)\times\frac{4}{a-1}}+3\right)$$

$$=2\times(2\times 2+3)=14$$

$\left(\text{단, 등호는 } a-1=\dfrac{4}{a-1},\ \text{즉 } a=3\text{일 때 성립}\right)$

따라서 직사각형 OAPB의 둘레의 길이의 최솟값은 14이다.

답 ⑤

4-1 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로 $f(-1)=2$

$\dfrac{-a+b}{-2}=2 \qquad \therefore\ -a+b=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프도 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$f^{-1}(-1)=2$, 즉 $f(2)=-1$

$\dfrac{2a+b}{2-1}=-1 \qquad \therefore\ 2a+b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

답 ①

4-2 점 $(1,\ 3)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $f(1)=3$

$\dfrac{b-1}{a+2}=3,\ b-1=3a+6 \qquad \therefore\ 3a-b=-7 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 점 $(1,\ 3)$이 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이므로 $g(1)=3$, 즉 $f(3)=1$

$\dfrac{3b-1}{3a+2}=1,\ 3b-1=3a+2$

$3a-3b=-3 \qquad \therefore\ a-b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-2$

$\therefore\ ab=(-3)\times(-2)=6$

답 ④

서술형 What & How

p.92~95

1 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}=\dfrac{-1}{x+1}+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$y=\dfrac{3x-7}{x-2}=\dfrac{3(x-2)-1}{x-2}=\dfrac{-1}{x-2}+3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡ $\cdots\cdots$ ❶

함수 ㉠의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\dfrac{-1}{(x-m)+1}+2$

$\therefore\ y=\dfrac{-1}{x-m+1}+n+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉢ $\cdots\cdots$ ❷

㉡, ㉢이 일치하므로

$-m+1=-2,\ n+2=3$

$\therefore\ m=3,\ n=1 \qquad \cdots\cdots$ ❸

$\therefore\ m-n=3-1=2 \qquad \cdots\cdots$ ❹

답 2

2 함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{2}{x-3}-2=\dfrac{-2-2(x-3)}{x-3}=\dfrac{-2x+4}{x-3} \qquad \cdots\cdots$ ❶

이것이 $y=\dfrac{bx+4}{x+a}$와 일치하므로

$a=-3,\ b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ❷

$\therefore\ a+b=(-3)+(-2)=-5 \qquad \cdots\cdots$ ❸

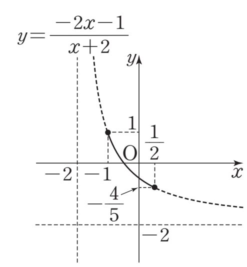
답 -5

채점기준	배점
❶ 함수 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식 구하기	3
❷ a, b의 값 각각 구하기	2
❸ $a+b$의 값 구하기	1

3 $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}-2 \qquad \cdots\cdots$ ❶

이므로 함수 $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 $-1\le x\le \dfrac{1}{2}$에서 함수 $y=\dfrac{-2x-1}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 함수는 $x=-1$일 때 최댓값 1, $x=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\dfrac{4}{5}$를 가지므로 $\cdots\cdots$ ❷

$M=1,\ m=-\dfrac{4}{5}$

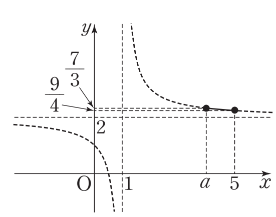
$\therefore\ 10Mm=10\times1\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-8 \qquad \cdots\cdots$ ❸

답 -8

4 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+2 \qquad \cdots\cdots$ ❶

이므로 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 $a\le x\le 5$에서 유리함수의 그래프는 다음 그림과 같다. $\cdots\cdots$ ❷



주어진 함수는 $x=a$일 때 최댓값 $\dfrac{2a-1}{a-1}$을 갖고, 최댓값이 $\dfrac{7}{3}$이므로

$\dfrac{2a-1}{a-1}=\dfrac{7}{3},\ 6a-3=7a-7,\ -a=-4 \qquad \therefore\ a=4$

$x=5$일 때 최솟값 $\dfrac{9}{4}$를 가지므로

$b=\dfrac{9}{4} \qquad \cdots\cdots$ ❸

$\therefore\ ab=4\times\dfrac{9}{4}=9 \qquad \cdots\cdots$ ❹

답 9

채점기준	배점
❶ 함수 $y=\frac{2x-1}{x-1}$을 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$ 꼴로 변형하기	1
❷ 주어진 조건에 맞게 함수의 그래프 그리기	2
❸ a, b의 값 각각 구하기	2
❹ ab의 값 구하기	1

5 $A\cap B=\varnothing$이므로 함수 $y=\frac{4x+3}{2x}$의 그래프와 직선 $y=mx+2$는 만나지 않아야 한다. ······ ❶

(i) $m\neq0$일 때, $\frac{4x+3}{2x}=mx+2$에서

$4x+3=2x(mx+2)$

$4x+3=2mx^2+4x$

$\therefore 2mx^2-3=0$

이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=0^2-2m\times(-3)<0$

$6m<0 \qquad \therefore m<0$ ······ ❷

(ii) $m=0$일 때,

함수 $y=\frac{4x+3}{2x}$, 즉 $y=\frac{3}{2x}+2$의 그래프와 직선 $y=2$는 만나지 않는다. ······ ❸

점근선이다.

(i), (ii)에서 $m\le0$

따라서 실수 m의 최댓값은 0이다. ······ ❹

답 0

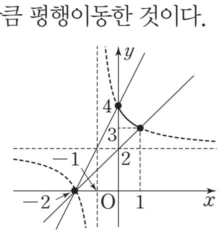
6 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 함수 $y=\frac{2x+4}{x+1}$ $(0\le x\le1)$의 그래프와 직선 $y=k(x+2)$는 적어도 한 점에서 만나야 한다. ······ ❶

$y=\frac{2x+4}{x+1}=\frac{2(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x+4}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le1$에서 함수 $y=\frac{2x+4}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

또, 직선 $y=k(x+2)$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.



(i) 직선 $y=k(x+2)$가 점 $(0,\ 4)$를 지날 때,

$4=2k \qquad \therefore k=2$ ······ ❷

(ii) 직선 $y=k(x+2)$가 점 $(1,\ 3)$을 지날 때,

$3=k(1+2)$, $3k=3 \qquad \therefore k=1$ ······ ❸

(i), (ii)에서 $1\le k\le2$

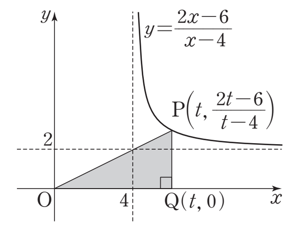
따라서 정수 k는 1, 2의 2개이다. ······ ❹

답 2

채점기준	배점
❶ $A\cap B\neq\varnothing$의 의미 설명하기	2
❷ 직선 $y=k(x+2)$가 점 $(0,\ 4)$를 지날 때 k의 값 구하기	2
❸ 직선 $y=k(x+2)$가 점 $(1,\ 3)$을 지날 때 k의 값 구하기	2
❹ k의 값의 범위와 정수 k의 개수 구하기	1

7 점 P의 x좌표를 $t\ (t>4)$라 하면 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{2t-6}{t-4}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=t$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{2t-6}{t-4}$ ······ ❶



삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\times t\times\frac{2t-6}{t-4}$

$=\frac{t^2-3t}{t-4}$

$=\frac{(t-4)^2+5(t-4)+4}{t-4}$

$=t-4+\frac{4}{t-4}+5$ ······ ❷

이때 $t-4>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t-4+\frac{4}{t-4}+5\ge2\sqrt{(t-4)\times\frac{4}{t-4}}+5$

$=2\times2+5=9$

$\left(\text{단, 등호는 } t-4=\frac{4}{t-4}\text{, 즉 } t=6\text{일 때 성립}\right)$

따라서 삼각형 POQ의 넓이의 최솟값은 9이다. ······ ❸

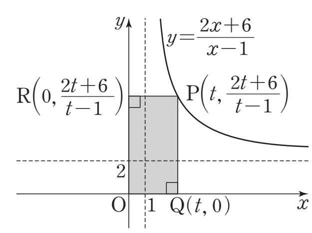
답 9

참고 $t^2-3t=(t-4)^2+5t-16$

$=(t-4)^2+5(t-4)+4$

8 점 P의 x좌표를 $t\ (t>1)$라 하면 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{2t+6}{t-1}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{2t+6}{t-1}$, $\overline{\mathrm{PR}}=t$ ······ ❶



직사각형 OQPR의 넓이는

$\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}=\frac{2t+6}{t-1}\times t$

$=\frac{2t^2+6t}{t-1}$

$=\frac{2(t-1)^2+10(t-1)+8}{t-1}$

$=2(t-1)+\frac{8}{t-1}+10$ ······ ❷

이때 $t-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2(t-1)+\frac{8}{t-1}+10\ge2\sqrt{2(t-1)\times\frac{8}{t-1}}+10$

$=2\times4+10=18$

$\left(\text{단, 등호는 } 2(t-1)=\frac{8}{t-1}\text{, 즉 } t=3\text{일 때 성립}\right)$

따라서 직사각형 OQPR의 넓이의 최솟값은 18이다. ······ ❸

답 18

채점기준	배점
❶ 점 P의 x좌표를 t라 하고, $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{PR}}$의 길이를 각각 t에 대한 식으로 나타내기	2
❷ 직사각형 OQPR의 넓이를 t에 대한 식으로 나타내기	2
❸ 직사각형 OQPR의 넓이의 최솟값 구하기	2

참고 $2t^2+6t=2(t-1)^2+10t-2$

$=2(t-1)^2+10(t-1)+8$

실전 문제 | 1회

p.96~100

01 $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+8x+15}$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+5}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+5}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x+5-(x-1)}{(x-1)(x+5)}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{(x-1)(x+5)}=\dfrac{3}{(x+5)(x-1)}$ 답 ④

참고 $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$

02 $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{x+b}{x^2+x+1}$

$=\dfrac{a(x^2+x+1)+(x+b)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{(a+1)x^2+(a+b-1)x+(a-b)}{x^3-1}$

즉, $\dfrac{(a+1)x^2+(a+b-1)x+(a-b)}{x^3-1}=\dfrac{2x+c}{x^3-1}$이고 이 등식이 $x\neq1$인 x에 대한 항등식이므로

$a+1=0$, $a+b-1=2$, $a-b=c$

$\therefore a=-1$, $b=3-a=3-(-1)=4$, $c=a-b=-1-4=-5$

$\therefore abc=-1\times4\times(-5)=20$ 답 ⑤

03 $y=\dfrac{-2x+7}{2x-1}=\dfrac{-(2x-1)+6}{2x-1}=\dfrac{6}{2x-1}-1$

y의 값이 자연수이려면 $2x-1$은 6을 제외한 6의 양의 약수이어야 한다. 즉,

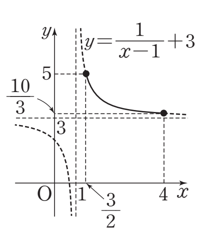
$2x-1=1$ 또는 $2x-1=2$ 또는 $2x-1=3$에서

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=2$

x는 자연수이므로 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 x좌표, y좌표가 모두 자연수인 점은 2개이다. 답 ②

04 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=5$일 때, x의 값은



$5=\dfrac{1}{x-1}+3$, $\dfrac{1}{x-1}=2$

$x-1=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\dfrac{3}{2}$

$y=\dfrac{10}{3}$일 때, x의 값은

$\dfrac{10}{3}=\dfrac{1}{x-1}+3$, $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{3}$, $x-1=3$ $\quad\therefore x=4$

따라서 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{3}{2}\le x\le4\right\}$이므로 정수 x는 2, 3, 4이고, 그 합은

$2+3+4=9$ 답 ④

05 $y=\dfrac{7x+9}{x+1}=\dfrac{7(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+7$

이므로 함수 $y=\dfrac{7x+9}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-q=\dfrac{2}{(x-p)+1}+7$ $\quad\therefore y=\dfrac{2}{x-p+1}+7+q$

이 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$x=\dfrac{2}{y-p+1}+7+q$, $x-7-q=\dfrac{2}{y-p+1}$

$y-p+1=\dfrac{2}{x-7-q}$ $\quad\therefore y=\dfrac{2}{x-7-q}+p-1$ ······ ㉠

이때 $y=\dfrac{3x-4}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+3$이고 이것이 ㉠과 일치하므로

$-7-q=-2$, $p-1=3$ $\quad\therefore p=4$, $q=-5$

$\therefore p+q=4+(-5)=-1$ 답 ①

06 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$

즉, 함수 $y=\dfrac{bx+c}{2x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식도 $x=1$, $y=2$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-1}+2$ $(k\neq0)$ ······ ㉠

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=-k+2$ $\quad\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{1}{x-1}+2=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{4x-2}{2x-2}$

따라서 $a=-2$, $b=4$, $c=-2$이므로

$a+b+c=-2+4+(-2)=0$ 답 ③

07 함수 $y=\dfrac{bx-1}{2x-a}$의 그래프가 점 $\left(-1,\ \dfrac{3}{4}\right)$에 대하여 대칭이므로 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x+1}+\dfrac{3}{4}$ $(k\neq0)$이라 하면

$y=\dfrac{k}{x+1}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{4k+3(x+1)}{4(x+1)}$

$=\dfrac{3x+4k+3}{4x+4}=\dfrac{\frac{3}{2}x+2k+\frac{3}{2}}{2x+2}$

따라서 $a=-2$, $b=\dfrac{3}{2}$이므로

$ab=-2\times\dfrac{3}{2}=-3$ 답 ①

다른풀이 함수 $y=\dfrac{bx-1}{2x-a}$의 그래프가 점 $\left(-1, \dfrac{3}{4}\right)$에 대하여 대칭이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=\dfrac{3}{4}$이다.

이때 $y=\dfrac{bx-1}{2x-a}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{a}{2}$, $y=\dfrac{b}{2}$

이므로 $\dfrac{a}{2}=-1$, $\dfrac{b}{2}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore a=-2$, $b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore ab=-2\times\dfrac{3}{2}=-3$

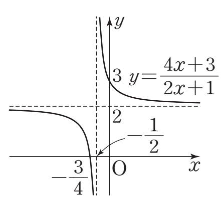
참고 유리함수 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{a}$

08 $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}=\dfrac{2(2x+1)+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}+2$

ㄱ. $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄴ. $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3사분면을 지난다. (참)



ㄷ. $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=2$

$y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$의 그래프는 점 $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$를 지나고 기울기가 1 또는 -1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

기울기가 -1이고 점 $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$를 지나는 직선의 방정식은

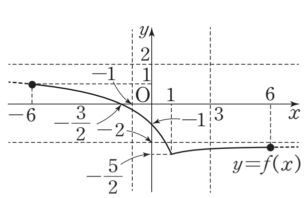
$y-2=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad\therefore y=-x+\dfrac{3}{2}$

따라서 $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$의 그래프는 직선 $y=-x+\dfrac{3}{2}$에 대하여 대칭이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

09



$-6\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

$x=-6$일 때 최댓값 $\dfrac{9}{-6-3}+2=1$

$x=1$일 때 최솟값 $-\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{5}{2}$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

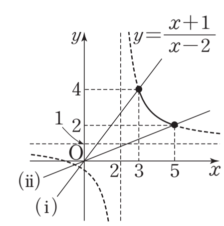
$1+\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$

답 ③

10 $y=\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+1$

이므로 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 $3\le x\le 5$에서 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax$는 원점을 지난다.



(i) 직선 $y=ax$가 점 $(3, 4)$를 지날 때,

$4=3a$ $\quad\therefore a=\dfrac{4}{3}$

(ii) 직선 $y=ax$가 점 $(5, 2)$를 지날 때,

$2=5a$ $\quad\therefore a=\dfrac{2}{5}$

(i), (ii)에서 $\dfrac{2}{5}\le a\le\dfrac{4}{3}$

따라서 a의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$, 최솟값은 $\dfrac{2}{5}$이므로 $M=\dfrac{4}{3}$, $m=\dfrac{2}{5}$

$\therefore M-m=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{14}{15}$

답 ①

11 쓰레기의 80 %를 수거하는 데 드는 비용을 y_1만 원이라 하면

$y_1=\dfrac{80k}{100-80}=4k$이다.

$\dfrac{3}{4}$배의 비용으로 쓰레기의 a %를 수거할 수 있으므로

$\dfrac{3}{4}y_1=\dfrac{ka}{100-a}$

$\dfrac{3}{4}\times 4k=\dfrac{ka}{100-a}$, $3=\dfrac{a}{100-a}$

$300-3a=a$, $4a=300$ $\quad\therefore a=75$

답 ④

12 함수 $y=\dfrac{3x-5}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=m(x-1)$이 만나야 하므로 방정식 $\dfrac{3x-5}{x+1}=m(x-1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

의 실근이 존재해야 한다.

㉠의 양변에 $x+1$을 곱하면

$3x-5=m(x-1)(x+1)$, $3x-5=m(x^2-1)$

$\therefore mx^2-3x+5-m=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

(i) $m=0$일 때,

㉡에서 $-3x+5=0$, $-3x=-5$ $\quad\therefore x=\dfrac{5}{3}$

즉, 방정식 ㉠의 실근이 존재하므로 $y=\dfrac{3x-5}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=m(x-1)$이 만난다.

(ii) $m\neq 0$일 때,

이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4m(5-m)\geq 0$

$4m^2-20m+9\geq 0$, $(2m-1)(2m-9)\geq 0$

$\therefore m\leq \frac{1}{2}$ 또는 $m\geq \frac{9}{2}$

그런데 $m\neq 0$이므로 $m<0$ 또는 $0<m\leq \frac{1}{2}$ 또는 $m\geq \frac{9}{2}$

(i), (ii)에서 $m\leq \frac{1}{2}$ 또는 $m\geq \frac{9}{2}$

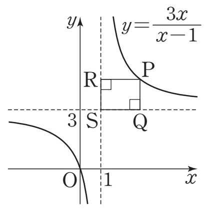
따라서 자연수 m의 최솟값은 5이다. 답 ⑤

13 $y=\frac{3x}{x-1}=\frac{3(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+3$

점 P의 x좌표를 a $(a>1)$라 하면

$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{3}{a-1}+3\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ 3)$

$\mathrm{R}\left(1,\ \frac{3}{a-1}+3\right)$, $\mathrm{S}(1,\ 3)$



이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{a-1}$, $\overline{\mathrm{PR}}=a-1$

직사각형 PRSQ의 둘레의 길이는

$2(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}})=2\left(\frac{3}{a-1}+a-1\right)=\frac{6}{a-1}+2(a-1)$

이때 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{6}{a-1}+2(a-1)\geq 2\sqrt{\frac{6}{a-1}\times 2(a-1)}$$
$$=2\times\sqrt{12}=4\sqrt{3}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{6}{a-1}=2(a-1), \text{ 즉 } a=1+\sqrt{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 직사각형 PRSQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{3}$이다.

답 ③

14 직선 $y=-x+8$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 A$(8,\ 0)$, B$(0,\ 8)$

$\therefore \triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$

한편, 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+8$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 삼각형 OAP, OQB는 서로 합동이므로

$$\triangle\mathrm{OAP}=\triangle\mathrm{OQB}=\frac{1}{2}(\triangle\mathrm{OAB}-\triangle\mathrm{OPQ})$$
$$=\frac{1}{2}\times(32-20)=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 점 P가 직선 $y=-x+8$ 위의 점이므로 P$(a,\ -a+8)$이라 하면

$$\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\times 8\times(-a+8)=4(-a+8) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$4(-a+8)=6$, $-a+8=\frac{3}{2}$ $\qquad\therefore a=\frac{13}{2}$

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{13}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이고, 점 P가 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{3}{2}=\frac{k}{\frac{13}{2}}$ $\qquad\therefore k=\frac{39}{4}$ 답 ②

15 $f(x)=\frac{4x-6}{x-3}=\frac{4(x-3)+6}{x-3}=\frac{6}{x-3}+4$

이므로 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{6}{a-3}+4\right)$, $\mathrm{B}\left(b,\ \frac{6}{b-3}+4\right)$,

$\mathrm{Q}\left(a,\ \frac{6}{b-3}+4\right)$, $\mathrm{P}\left(b,\ \frac{6}{a-3}+4\right)$

$\overline{\mathrm{PA}}=a-b$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{6}{a-3}-\frac{6}{b-3}$

직사각형 APBQ의 넓이는

$$\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{AQ}}=(a-b)\times\left(\frac{6}{a-3}-\frac{6}{b-3}\right)$$
$$=\{(a-3)+(3-b)\}\times\left(\frac{6}{a-3}+\frac{6}{3-b}\right)$$
$$=6+\frac{6(3-b)}{a-3}+\frac{6(a-3)}{3-b}+6$$
$$=6\left(\frac{3-b}{a-3}+\frac{a-3}{3-b}\right)+12$$

이때 $a-3>0$, $3-b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$6\left(\frac{3-b}{a-3}+\frac{a-3}{3-b}\right)+12\geq 6\times 2\sqrt{\frac{3-b}{a-3}\times\frac{a-3}{3-b}}+12$$
$$=6\times 2+12=24$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{3-b}{a-3}=\frac{a-3}{3-b}, \text{ 즉 } a+b=6\text{일 때 성립}\right)$

따라서 직사각형 APBQ의 넓이의 최솟값은 24이다. 답 ③

16 $f^1(x)=f(x)=\frac{x+1}{x}$

$$f^2(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{\frac{x+1}{x}+1}{\frac{x+1}{x}}$$
$$=\frac{(x+1)+x}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1},$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)=\frac{\frac{2x+1}{x+1}+1}{\frac{2x+1}{x+1}}$$
$$=\frac{(2x+1)+x+1}{2x+1}=\frac{3x+2}{2x+1}$$

$$\therefore f^4(x)=f(f^3(x))=f\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)=\frac{\frac{3x+2}{2x+1}+1}{\frac{3x+2}{2x+1}}$$
$$=\frac{(3x+2)+(2x+1)}{3x+2}=\frac{5x+3}{3x+2}$$

따라서 $a=3$, $b=3$이므로

$a+b=3+3=6$ 답 ⑤

17 $(f\circ g\circ f)(x)=-\dfrac{9}{2x-4}$에서 $f(g(f(x)))=-\dfrac{9}{2x-4}$

$\therefore f\left(g\left(\dfrac{a}{x-2}\right)\right)=-\dfrac{9}{2x-4}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{a}{x-2}=1$이면 $a=x-2$, 즉 $x=a+2$이므로 ㉠에 $x=a+2$를 대입하면

$f(g(1))=-\dfrac{9}{2(a+2)-4}$, $f(0)=-\dfrac{9}{2a}$ $(\because g(1)=0)$

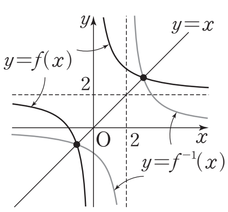
$-\dfrac{a}{2}=-\dfrac{9}{2a}$, $2a^2=18$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ $(\because a>0)$

답 ②

18 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x}=\dfrac{3}{x}+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$f(x)=x$에서

$\dfrac{2x+3}{x}=x$, $x^2=2x+3$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-1,\ -1)$, $(3,\ 3)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{3-(-1)\}^2}=4\sqrt{2}$

답 ②

19 일차함수 $f(x)$의 역함수 f^{-1}가 존재하므로

$y=x-2$라 하면 $x=y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x+2$

$\therefore f^{-1}(x)=x+2$

$(f\circ h)(x)=g(x)$에서

$$\begin{aligned}h(x)&=(f^{-1}\circ g)(x)\\&=f^{-1}(g(x))\\&=f^{-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)=\frac{2x}{x+1}+2\\&=\frac{2(x+1)-2}{x+1}+2=-\frac{2}{x+1}+4\end{aligned}$$

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 ④이다.

답 ④

참고 $f\circ h=g$에서 $f^{-1}\circ f\circ h=f^{-1}\circ g$ $\quad\therefore h=f^{-1}\circ g$

20 조건 ㈏에서 $g(2)=3$

조건 ㈎에서 $f(g(x))=\dfrac{2x-10}{2x-5}$

양변에 $x=2$를 대입하면

$f(g(2))=\dfrac{4-10}{4-5}=6$, $f(3)=6$

$\dfrac{3a+3}{3-2}=6$, $3a=3$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{5}{x-2}+1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$

$y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 1 또는 -1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

즉, 직선 $y=x+b$가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1=2+b$ $\quad\therefore b=-1$

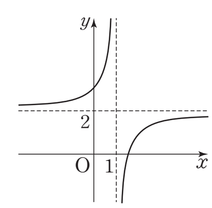
$\therefore a+b=1+(-1)=0$

답 ③

21 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\dfrac{k}{x-1}+2$이므로 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=2$이다.

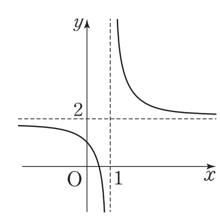
(ⅰ) $k<0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{k}{x-1}+2$의 그래프는 k의 값에 관계없이 제3사분면을 지나지 않는다.



(ⅱ) $k>0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{k}{x-1}+2$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 $x=0$일 때, $y\geq 0$이어야 하므로



$\dfrac{k}{0-1}+2\geq 0$, $-k\geq -2$ $\quad\therefore k\leq 2$

$\therefore 0<k\leq 2$ $(\because k>0)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k<0$ 또는 $0<k\leq 2$

답 ⑤

22 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=2$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+\frac{1}{2}}+2$ $(k\neq 0)$

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=\dfrac{k}{0+\frac{1}{2}}+2$, $2k=-3$ $\quad\therefore k=-\dfrac{3}{2}$

$$\therefore y=\frac{-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}+2=\frac{-3}{2x+1}+2=\frac{4x-1}{2x+1}$$

이것이 $y=\dfrac{bx-c}{ax+1}$와 일치하므로 $a=2$, $b=4$, $c=1$

$\therefore a+b+c=2+4+1=7$

답 ④

23 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+3$ …… ❶

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$

이때 점 $(1,\ 3)$은 두 직선 $y=x+a$, $y=-x+b$의 교점이므로

$3=1+a$, $3=-1+b$ …… ❷

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$a+b=2+4=6$ …… ❸

답 6

채점기준	배점
❶ 함수 $y=\frac{3x-2}{x-1}$를 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$ 꼴로 변형하기	2
❷ a, b에 대한 관계식 각각 세우기	2
❸ a, b의 값과 $a+b$의 값 구하기	1

24 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이다.

$y=\dfrac{5x-9}{2x-6}$라 하면 $y(2x-6)=5x-9$

$2xy-6y=5x-9$, $2xy-5x=6y-9$

$(2y-5)x=6y-9 \qquad \therefore x=\dfrac{6y-9}{2y-5}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{6x-9}{2x-5}$

$\therefore g(x)=\dfrac{6x-9}{2x-5}$ …… ❶

이때

$g(x)=\dfrac{6x-9}{2x-5}=\dfrac{3(2x-5)+6}{2x-5}=\dfrac{3}{x-\frac{5}{2}}+3$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{5}{2}$, $y=3$ …… ❷

따라서 $\alpha=\dfrac{5}{2}$, $\beta=3$이므로

$10\alpha\beta=10\times\dfrac{5}{2}\times3=75$ …… ❸

답 75

채점기준	배점
❶ $g(x)$의 함수식 구하기	2
❷ 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식 구하기	2
❸ α, β의 값과 $10\alpha\beta$의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.101~105

01 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=-2(ab+bc+ca)\ (\because a+b+c=0)$

주어진 식의 분모, 분자에 abc를 각각 곱하면

$$\dfrac{\dfrac{c}{ab}+\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}=\dfrac{c^2+a^2+b^2}{bc+ca+ab}$$

$$=\dfrac{-2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=-2$$

답 ②

02 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\dfrac{b-ac}{x+c}+a$

이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 $A=\{x\,|\,x\neq-c$인 실수$\}$,

치역은 $B=\{y\,|\,y\neq a$인 실수$\}$이다.

이때 $a=-c$이면 두 집합 $A-B$, $B-A$가 모두 공집합이므로

$a\neq-c$이고, $A-B=\{a\}$, $B-A=\{-c\}$이다.

따라서 $a=-4$, $c=-2$이므로 $f(x)=\dfrac{-4x+b}{x-2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{-4+b}{1-2}$, $-4+b=-2 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b+c=-4+2+(-2)=-4$

답 ④

03 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+5}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\dfrac{5}{(x-m)-1}+2 \qquad \therefore y=\dfrac{5}{x-m-1}+2+n$

이것이 $y=\dfrac{5}{x-4}+6$과 일치하므로

$-m-1=-4$, $2+n=6 \qquad \therefore m=3$, $n=4$

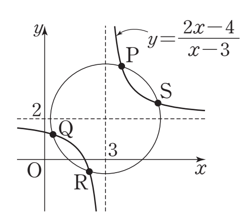
$\therefore m+n=3+4=7$

답 ②

04 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=2$이고, 점근선의 교점의 좌표는 $(3,\ 2)$이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$의 그래프와 중심이 점 $(3,\ 2)$인 원이 만나는 네 점을 각각 P, Q, R, S라 하고 네 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면 두 점 P, R와 두 점 S, Q는 각각 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭이다. 즉, 점 $(3,\ 2)$는 $\overline{PR}$, $\overline{QS}$의 중점이므로



$\dfrac{x_1+x_3}{2}=3$, $\dfrac{x_2+x_4}{2}=3$

$x_1+x_3=6$, $x_2+x_4=6$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=6+6=12$

답 ③

05 $y=\dfrac{2x-1}{x-k}=\dfrac{2(x-k)+2k-1}{x-k}=\dfrac{2k-1}{x-k}+2$

이므로 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-k}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=k$, $y=2$

$y=\dfrac{-kx+2}{x-1}=\dfrac{-k(x-1)-k+2}{x-1}=\dfrac{-k+2}{x-1}-k$

이므로 함수 $y=\dfrac{-kx+2}{x-1}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=-k$

즉, 네 직선 $x=k$, $y=2$, $x=1$, $y=-k$로 둘러싸인 부분의 넓이가 10이므로

$|k-1|\times|2-(-k)|=10$, $|(k-1)(k+2)|=10$

$\therefore (k-1)(k+2)=-10$ 또는 $(k-1)(k+2)=10$

(i) $(k-1)(k+2)=-10$일 때,

$k^2+k-2=-10 \qquad \therefore k^2+k+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times8=-31<0$

이므로 이를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $(k-1)(k+2)=10$일 때,

$k^2+k-2=10$, $k^2+k-12=0$

$(k+4)(k-3)=0 \qquad \therefore k=3\ (\because k>0)$

(i), (ii)에서 $k=3$

답 ②

06 $y=\dfrac{2x+9}{x+4}=\dfrac{2(x+4)+1}{x+4}=\dfrac{1}{x+4}+2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=2$

즉, 함수 $y=\dfrac{2x+9}{x+4}$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-4,\ 2)$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(-4,\ 2)$

또, $y=\dfrac{5x-7}{x-3}=\dfrac{5(x-3)+8}{x-3}=\dfrac{8}{x-3}+5$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=5$

즉, 함수 $y=\dfrac{5x-7}{x-3}$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(3,\ 5)$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{Q}(3,\ 5)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}^2=\{3-(-4)\}^2+(5-2)^2=58$

답 ⑤

07 유리함수 $y=\dfrac{b}{x-a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=c$이므로 주어진 그래프에서

$a<0$, $c>0$

또, $x<a$, $x>a$에서 각각 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$b<0$

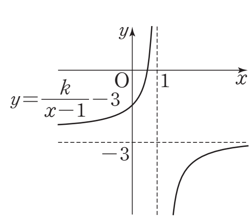
이때 $a<0$이므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록하고, $-\dfrac{b}{2a}<0$이므로 그래프의 축은 y축의 왼쪽에 있으며

$c>0$이므로 그래프와 y축과의 교점은 x축보다 위쪽에 있다.

따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ③이다.

답 ③

08 함수 $y=\dfrac{k}{x-1}-3\ (k<0)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉,



$x=0$일 때 $y\le0$이어야 하므로

$\dfrac{k}{-1}-3\le0$, $-k\le3 \qquad \therefore k\ge-3$

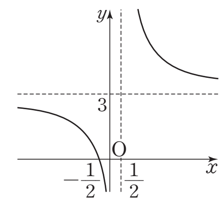
그런데 $k<0$이므로 $-3\le k<0$

따라서 실수 k의 최솟값은 -3이다.

답 ③

09 $y=\dfrac{6x+3}{2x-1}=\dfrac{3(2x-1)+6}{2x-1}=\dfrac{6}{2x-1}+3=\dfrac{3}{x-\frac{1}{2}}+3$

① 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=3$이므로 그래프는 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ 3\right)$에 대하여 대칭이다.



④ 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $x>\dfrac{1}{2}$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

답 ⑤

10 $f(x)=\dfrac{bx+1}{x-a}=\dfrac{b(x-a)+ab+1}{x-a}=\dfrac{ab+1}{x-a}+b$

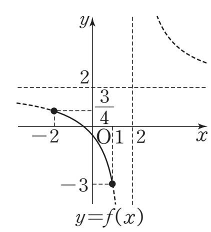
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=b$

$\therefore a=2$, $b=2$

$\therefore f(x)=\dfrac{5}{x-2}+2$

$-2\le x\le1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $\dfrac{3}{4}$, $x=1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.



따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$\dfrac{3}{4}+(-3)=-\dfrac{9}{4}$

답 ①

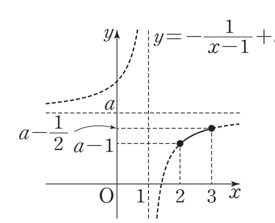
11 함수 $y=-\dfrac{1}{x-1}+a$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le3$에서

$y=-\dfrac{1}{x-1}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$2\le x\le3$에서 함수

$y=-\dfrac{1}{x-1}+a$는



$x=3$일 때 최댓값 $a-\dfrac{1}{2}$, $x=2$일 때 최솟값 $a-1$을 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 3이므로

$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)+(a-1)=3$에서

$2a-\dfrac{3}{2}=3$, $2a=\dfrac{9}{2} \qquad \therefore a=\dfrac{9}{4}$

답 ③

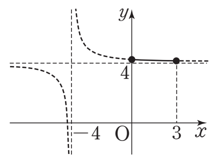
12 $y=\dfrac{4x+a}{x+4}=\dfrac{4(x+4)-16+a}{x+4}=\dfrac{a-16}{x+4}+4$

이때 $a=16$이면 $y=4$이므로 최댓값이 2가 아니다.

$\therefore a\neq16$

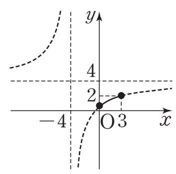
(ⅰ) $a-16>0$, 즉 $a>16$일 때

$0\le x\le 3$에서 $y=\dfrac{4x+a}{x+4}$는 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 최댓값을 갖고, 최댓값이 4보다 크므로 최댓값이 2라는 조건을 만족시키지 않는다.



(ⅱ) $a-16<0$, 즉 $a<16$일 때

$0\le x\le 3$에서 $y=\dfrac{4x+a}{x+4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=3$일 때 최댓값 $\dfrac{12+a}{7}$를 갖는다. 이때 최댓값이 2이므로



$\dfrac{12+a}{7}=2$, $12+a=14$ $\quad\therefore a=2$

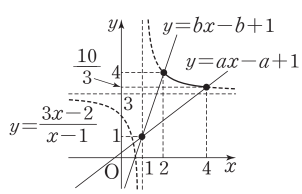
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$

따라서 $0\le x\le 3$에서 함수 $y=\dfrac{4x+2}{x+4}$는 $x=0$일 때 최솟값 $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$을 갖는다. 답 ①

13 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+3$

이므로 함수 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 4$에서 함수 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$y=ax-a+1=a(x-1)+1$,

$y=bx-b+1=b(x-1)+1$

이므로 두 직선 $y=ax-a+1$, $y=bx-b+1$은 각각 a, b의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

(ⅰ) 직선 $y=ax-a+1$이 점 $\left(4,\ \dfrac{10}{3}\right)$을 지날 때,

$\dfrac{10}{3}=3a+1$, $3a=\dfrac{7}{3}$ $\quad\therefore a=\dfrac{7}{9}$

따라서 $ax-a+1\le\dfrac{3x-2}{x-1}$이려면 $a\le\dfrac{7}{9}$

(ⅱ) 직선 $y=bx-b+1$이 점 $(2,\ 4)$를 지날 때,

$4=b+1$ $\quad\therefore b=3$

따라서 $\dfrac{3x-2}{x-1}\le bx-b+1$이려면 $b\ge 3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 a의 최댓값은 $\dfrac{7}{9}$, b의 최솟값은 3이므로 $b-a$의 최솟값은 $3-\dfrac{7}{9}=\dfrac{20}{9}$ 답 ⑤

14 $y=\dfrac{-x+7}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+5}{x-2}=\dfrac{5}{x-2}-1$

이므로 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{5}{a-2}-1\right)$이라 하면 점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$을 중심으로 하고 점 P를 지나는 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(a-2)^2+\left\{\left(\dfrac{5}{a-2}-1\right)-(-1)\right\}^2}$

$=\sqrt{(a-2)^2+\dfrac{25}{(a-2)^2}}$

원의 넓이는

$\pi\overline{\mathrm{AP}}^2=\pi\left\{(a-2)^2+\dfrac{25}{(a-2)^2}\right\}$

이때 $(a-2)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\pi\left\{(a-2)^2+\dfrac{25}{(a-2)^2}\right\}\ge\pi\left\{2\sqrt{(a-2)^2\times\dfrac{25}{(a-2)^2}}\right\}$

$=\pi\times2\times5=10\pi$

$\left(\text{단, 등호는 } (a-2)^2=\dfrac{25}{(a-2)^2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 원의 넓이의 최솟값은 10π이다. 답 ⑤

15 $\triangle\mathrm{DMP}\backsim\triangle\mathrm{DBC}$ (AA 닮음)이고

$\overline{\mathrm{BM}}=2$, $\overline{\mathrm{BD}}=x$, $\overline{\mathrm{DM}}=\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{BM}}=x-2$이므로

$\overline{\mathrm{DB}}:\overline{\mathrm{DM}}=\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{MP}}$에서

$x:(x-2)=4:\overline{\mathrm{MP}}$, $x\times\overline{\mathrm{MP}}=4x-8$

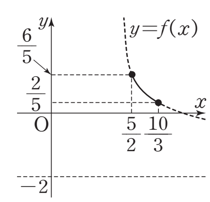
$\therefore \overline{\mathrm{MP}}=4-\dfrac{8}{x}$ $(2<x<4)$

이때 $\overline{\mathrm{MN}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{PN}}=\overline{\mathrm{MN}}-\overline{\mathrm{MP}}=2-\left(4-\dfrac{8}{x}\right)=\dfrac{8}{x}-2$ $(2<x<4)$

$f(x)=\dfrac{8}{x}-2$ $(2<x<4)$라 하면

$\dfrac{5}{2}\le x\le\dfrac{10}{3}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{2}$일 때 최댓값 $\dfrac{6}{5}$을 갖는다.



따라서 $\overline{\mathrm{PN}}$의 길이의 최댓값은 $\dfrac{6}{5}$이다. 답 ②

16 점 P의 x좌표를 a $(a>3)$라 하면

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{a-3}+2\right)$, $\mathrm{Q}(a,\ -a)$

이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(\dfrac{1}{a-3}+2\right)-(-a)$

$=a+2+\dfrac{1}{a-3}$

$=a-3+\dfrac{1}{a-3}+5$

이때 $a-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=a-3+\dfrac{1}{a-3}+5$

$\ge2\sqrt{(a-3)\times\dfrac{1}{a-3}}+5$

$=2\times1+5=7$

$\left(\text{단, 등호는 } a-3=\dfrac{1}{a-3}\text{, 즉 } a=4\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값은 7이다. 답 ②

17 $f^1(x)=f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=f\left(\dfrac{3x+1}{x-3}\right)=\dfrac{3\times\dfrac{3x+1}{x-3}+1}{\dfrac{3x+1}{x-3}-3}$

$=\dfrac{3(3x+1)+(x-3)}{3x+1-3(x-3)}=\dfrac{10x}{10}=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(f(x))=f^2(x)=x$

⋮

따라서 자연수 n에 대하여 $f^n(x)=\begin{cases} f(x) & (n\text{이 홀수}) \\ x & (n\text{이 짝수})\end{cases}$이므로

$f^{99}(-2)=f(-2)=\dfrac{3\times(-2)+1}{-2-3}=1$

$f^{100}(99)=99$

$\therefore f^{99}(-2)+f^{100}(99)=1+99=100$ 답 ③

18 $g(1)=-2$에서 $f(-2)=1$

$\dfrac{-4+b}{-2+a}=1$, $-4+b=-2+a$

$\therefore a-b=-2$ ······ ㉠

또, $(f\circ f)(-2)=\dfrac{5}{2}$에서 $f(f(-2))=\dfrac{5}{2}$

$f(1)=\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{2+b}{1+a}=\dfrac{5}{2}$

$4+2b=5+5a$ $\therefore 5a-2b=-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

$\therefore f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$

$g\left(\dfrac{3}{2}\right)=k$라 하면 $f(k)=\dfrac{3}{2}$이므로 $\dfrac{2k+3}{k+1}=\dfrac{3}{2}$

$4k+6=3k+3$ $\therefore k=-3$

$\therefore g\left(\dfrac{3}{2}\right)=-3$ 답 ①

19 조건 (가)에서

$f(x)=\dfrac{k}{x-1}+2$ $(k\neq0)$

이때 조건 (나)에서

$y=\dfrac{5x+2}{x-1}=\dfrac{5(x-1)+7}{x-1}=\dfrac{7}{x-1}+5$

이고, $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하였을 때 이 함수의 그래프와 겹쳐지므로 $k=7$

$\therefore f(x)=\dfrac{7}{x-1}+2$

$g(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$\dfrac{7}{a-1}+2=3$, $\dfrac{7}{a-1}=1$, $a-1=7$ $\therefore a=8$

$\therefore g(3)=8$ 답 ①

20 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=0$이다. 따라서

$f(x)=\dfrac{k}{x-1}$ $(k\neq0)$

이라 하면 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(3, 5)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(5, 3)$을 지난다. 즉,

$3=\dfrac{k}{5-1}$ $\therefore k=12$

$\therefore f(x)=\dfrac{12}{x-1}$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이려면 $x-1$이 12의 양의 약수이어야 하므로

$x-1=1, 2, 3, 4, 6, 12$

$\therefore x=2, 3, 4, 5, 7, 13$

따라서 x좌표, y좌표가 모두 자연수인 점은 6개이다. 답 ①

21 $y=\dfrac{3x+2}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+5}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}+3$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$

따라서 함수 $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$의 그래프는 점 $(1, 3)$에 대하여 대칭이므로 $a=1$, $b=3$

또 함수 $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$의 그래프는 두 점근선의 교점을 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이므로 점 $(1, 3)$은 두 직선 $y=x+c$, $y=-x+d$의 교점이다. 즉,

$3=1+c$, $3=-1+d$ $\therefore c=2$, $d=4$

$\therefore a+b+c+d=1+3+2+4=10$ 답 ②

22 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$y=\dfrac{4x+9}{3x-6}$라 하면 $(3x-6)y=4x+9$

$3xy-6y=4x+9$, $3xy-4x=6y+9$

$(3y-4)x=6y+9$ $\therefore x=\dfrac{6y+9}{3y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{6x+9}{3x-4}$

$\therefore g(x)=\dfrac{6x+9}{3x-4}=\dfrac{2(3x-4)+17}{3x-4}=\dfrac{17}{3x-4}+2$

따라서 $a=17$, $b=-4$, $c=2$이므로

$a+b+c=17+(-4)+2=15$ 답 ⑤

23 $\dfrac{f(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-3}$

의 양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)$을 곱하면

$f(x)=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$

······ ❶

$f(1)=4$에서

$a\times(-1)\times(-2)=4$ $\therefore a=2$

$f(2)=7$에서

$b\times1\times(-1)=7 \qquad \therefore b=-7$

$f(3)=6$에서

$c\times2\times1=6 \qquad \therefore c=3$ …… ❷

따라서

$f(x)=2(x-2)(x-3)-7(x-1)(x-3)+3(x-1)(x-2)$

이므로

$$f(0)=2\times(-2)\times(-3)-7\times(-1)\times(-3)+3\times(-1)\times(-2)$$
$$=12-21+6=-3$$ …… ❸

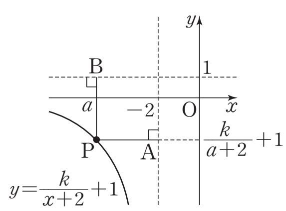
답 -3

채점기준	배점
❶ $f(x)$의 식 구하기	2
❷ a, b, c의 값을 각각 구하기	3
❸ $f(0)$의 값 구하기	1

24 함수 $y=\dfrac{k}{x+2}+1\ (k>0)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2$, $y=1$

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{k}{a+2}+1\right)\ (a<-2)$이라 하면



$\mathrm{A}\left(-2,\ \dfrac{k}{a+2}+1\right)$, $\mathrm{B}(a,\ 1)$ …… ❶

이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=-2-a$, $\overline{\mathrm{PB}}=1-\left(\dfrac{k}{a+2}+1\right)=-\dfrac{k}{a+2}=\dfrac{k}{-2-a}$

$-2-a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=(-2-a)+\frac{k}{-2-a}$$
$$\geq2\sqrt{(-2-a)\times\frac{k}{-2-a}}=2\sqrt{k}$$

$\left(\text{단, 등호는 } -2-a=\dfrac{k}{-2-a}\text{일 때 성립}\right)$ …… ❷

이때 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값이 6이므로

$2\sqrt{k}=6$, $\sqrt{k}=3 \qquad \therefore k=9$ …… ❸

답 9

채점기준	배점
❶ 점 P의 x좌표를 a라 할 때, 점 P의 좌표와 두 점 A, B의 좌표를 각각 a에 대하여 나타내기	2
❷ $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$를 a에 대하여 나타내고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값 구하기	3
❸ k의 값 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.106~110

1 함수 $y=\dfrac{b}{x-a}$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{b}{2-a} \qquad \therefore 4a+b=8$ …… ㉠

함수 $y=\dfrac{b}{x-a}$의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $x=4$이므로

$a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-8$

$\therefore a-b=4-(-8)=12$

답 ④

2 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 그래프가 점 $(2,\ 5)$를 지나므로

$5=\dfrac{2a+b}{2-1} \qquad \therefore 2a+b=5$ …… ㉠

$y=\dfrac{ax+b}{x-1}=\dfrac{a(x-1)+a+b}{x-1}=\dfrac{a+b}{x-1}+a$이고 이 함수의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $y=a$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b=1+3=4$

답 ①

3 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(a+2,\ \dfrac{k}{a+2}\right)$이므로 조건 ㈎에서

$\dfrac{\dfrac{k}{a+2}-\dfrac{k}{a}}{a+2-a}=-1$, $\dfrac{k}{a+2}-\dfrac{k}{a}=-2$

$\dfrac{-2k}{a(a+2)}=-2 \qquad \therefore k=a(a+2)$

즉, $f(a)=\dfrac{k}{a}=a+2$, $f(a+2)=\dfrac{k}{a+2}=a$이므로

$\mathrm{P}(a,\ a+2)$, $\mathrm{Q}(a+2,\ a)$이고

조건 ㈏에서 $\mathrm{R}(-a,\ -a-2)$, $\mathrm{S}(-a-2,\ -a)$

직선 PS의 기울기는 $\dfrac{(-a)-(a+2)}{-a-2-a}=1$이고, 직선 RS의 기울기는 $\dfrac{-a-(-a-2)}{-a-2-(-a)}=-1$, 직선 QR의 기울기는 $\dfrac{-a-2-a}{-a-(a+2)}=1$이므로 사각형 PQRS는 직사각형이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+2-a)^2+\{a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PS}}=\sqrt{(-a-2-a)^2+\{-a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}(a+1)$

이고, 사각형 PQRS의 넓이가 $8\sqrt{5}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PS}}=2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}(a+1)=8(a+1)=8\sqrt{5}$

따라서 $a=\sqrt{5}-1$이므로

$k=a(a+2)=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=5-1=4$

답 ④

4 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ \beta)$는 함수 $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$\beta=\dfrac{6}{\alpha} \qquad \therefore \alpha\beta=6$ …… ㉠

조건 ㈎에서 $\mathrm{B}(\beta,\ \alpha)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)\ (\because \alpha<\beta)$

한편, 두 점 C, D도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 사각형 ABCD가 직사각형이므로 두 점 A, C와 두 점 B, D는 각각 원점에 대하여 대칭이다. 즉,

$\mathrm{C}(-\alpha,\ -\beta)$, $\mathrm{D}(-\beta,\ -\alpha)$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{\{\alpha-(-\beta)\}^2+\{\beta-(-\alpha)\}^2}=\sqrt{2}(\alpha+\beta)$

사각형 ABCD의 넓이가 10이므로

$\overline{AB}\times\overline{AD}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)\times\sqrt{2}(\alpha+\beta)=10,\ 2(\beta^2-\alpha^2)=10$

$\therefore\ \beta^2-\alpha^2=5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{36}{\alpha^2}-\dfrac{36}{\beta^2}=\dfrac{36(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{36(\beta^2-\alpha^2)}{(\alpha\beta)^2}=\dfrac{36\times5}{36}=5$ 답 ③

5 $g(x)=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$라 하면

$g(x)=\left\{\dfrac{a}{(x+a)-6}+b\right\}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{x+a-6}+\dfrac{a}{2}+b$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a+6,\ y=\dfrac{a}{2}+b$

이때 함수 $y=|g(x)|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=0,\ y=0$이어야 하므로

$-a+6=0,\ \dfrac{a}{2}+b=0$

$\therefore\ a=6,\ b=-3$

따라서 $f(x)=\dfrac{6}{x-6}-3$이므로

$f(b)=f(-3)=\dfrac{6}{-3-6}-3$

$=-\dfrac{2}{3}-3=-\dfrac{11}{3}$ 답 ④

6 $g(x)=f\left(x+\dfrac{a}{3}\right)+\dfrac{2}{3}a$라 하면

$g(x)=\left\{\dfrac{a}{\left(x+\dfrac{a}{3}\right)-3}+b\right\}+\dfrac{2}{3}a$

$=\dfrac{a}{x+\dfrac{a}{3}-3}+\dfrac{2}{3}a+b$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{a}{3}+3,\ y=\dfrac{2}{3}a+b$

이때 함수 $y=|g(x)|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=0,\ y=0$이어야 하므로

$-\dfrac{a}{3}+3=0,\ \dfrac{2}{3}a+b=0$

$\therefore\ a=9,\ b=-6$

따라서 $f(x)=\dfrac{9}{x-3}-6$이므로

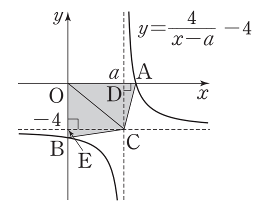
$f(b)=f(-6)=\dfrac{9}{-6-3}-6=-1-6=-7$ 답 -7

7 유리함수 $y=\dfrac{4}{x-a}-4\ (a>1)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=a,\ y=-4$이므로 $\mathrm{C}(a,\ -4)$이고

$\mathrm{A}(a+1,\ 0),\ \mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{4}{a}-4\right)$

$0=\dfrac{4}{x-a}-4$에서 $x=a+1$

유리함수 $y=f(x)$의 그래프와 사각형 OBCA는 다음 그림과 같다.



사각형 OBCA의 넓이는 삼각형 OCA의 넓이와 삼각형 OBC의 넓이의 합과 같다.

점 C에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$\square\mathrm{OBCA}=\triangle\mathrm{OCA}+\triangle\mathrm{OBC}$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{CD}+\dfrac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{CE}$

$=\dfrac{1}{2}\times(a+1)\times4+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{a}+4\right)\times a=4a+4$

이때 사각형 OBCA의 넓이는 24이므로

$4a+4=24,\ 4a=20\quad\therefore\ a=5$ 답 ⑤

8 함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (x>0,\ y>0)$의 그래프 위의 임의의 점 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{k}{p}\right)$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼각형 OPQ의 넓이는

$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\times p\times\dfrac{k}{p}=\dfrac{k}{2}$로 일정하다.

함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프에서 $\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OCD}=\dfrac{k}{2}$이고

$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OMB}+\triangle\mathrm{OAM}$ ⋯⋯ ㉠

$\triangle\mathrm{OCD}=\triangle\mathrm{OMB}+\square\mathrm{BDCM}$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $0=\triangle\mathrm{OAM}-\square\mathrm{BDCM}$

$\therefore\ \square\mathrm{BDCM}=\triangle\mathrm{OAM}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{k}{2}=\dfrac{k}{4}=6$

$\therefore\ k=24$ 답 ⑤

다른풀이 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$라 하면 $\mathrm{B}(a,\ 0),\ \mathrm{M}\left(a,\ \dfrac{k}{2a}\right)$

직선 OM의 방정식은 $y=\dfrac{k}{2a^2}x$이므로 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프와의 교점 C는

$\mathrm{C}\left(\sqrt{2}a,\ \dfrac{k}{\sqrt{2}a}\right)\quad\therefore\ \mathrm{D}(\sqrt{2}a,\ 0)$

$\therefore\ \square\mathrm{BDCM}=\dfrac{1}{2}\times(\overline{MB}+\overline{CD})\times\overline{BD}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{k}{2a}+\dfrac{k}{\sqrt{2}a}\right)\times(\sqrt{2}a-a)$

$=\dfrac{k}{4}$

이때 $\square\mathrm{BDCM}=6$이므로 $\dfrac{k}{4}=6\quad\therefore\ k=24$

9 조건 ㈎에서 $|f(x)|=2$, 즉 $f(x)=2$ 또는 $f(x)=-2$의 해의 개수가 1임을 의미한다. 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합은 1이다. 곡선 $y=f(x)$의 한 점근선은 $y=2$ 또는 $y=-2$이므로

$b=2$ 또는 $b=-2$

$f(x)=\frac{a}{x}+b$에서 $y=\frac{a}{x}+b$라 하면

$\frac{a}{x}=y-b \qquad \therefore x=\frac{a}{y-b}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{a}{x-b} \qquad \therefore f^{-1}(x)=\frac{a}{x-b}$

조건 (나)에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$이므로

$\frac{a}{2-b}=\frac{a}{2}+b-1$

이때 $b\neq2$이므로 $b=-2$를 대입하면

$\frac{a}{4}=\frac{a}{2}-3,\ a=2a-12 \qquad \therefore a=12$

따라서 $f(x)=\frac{12}{x}-2$이므로

$f(8)=\frac{12}{8}-2=-\frac{1}{2}$

답 ①

10 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 $x=a,\ y=b$이고, 그래프는 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이므로 조건 (가)에서

$a=2$

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 한 점근선은 $y=-3$ 또는 $y=3$이므로

$b=-3$ 또는 $b=3$

조건 (다)에서 $f(1)=-2$이므로

(i) $b=-3$일 때, $f(x)=\frac{k}{x-2}-3$이고

$f(1)=\frac{k}{1-2}-3=-2,\ -k=1 \qquad \therefore k=-1$

(ii) $b=3$일 때, $f(x)=\frac{k}{x-2}+3$이고

$f(1)=\frac{k}{1-2}+3=-2,\ -k=-5 \qquad \therefore k=5$

(i), (ii)에서 $k=5$ ($\because k>0$)

따라서 $f(x)=\frac{5}{x-2}+3$이므로

$f(0)=\frac{5}{0-2}+3=\frac{1}{2}$

답 ④

3 무리함수

교과서 예제

p.113

01 (1) $x-5\geq0$이므로 $x\geq5$

(2) $x+1\geq0$이고, $4-x\geq0$이므로 $-1\leq x\leq4$

(3) $x-2\geq0$이고, $5-x>0$이므로 $2\leq x<5$

답 (1) $x\geq5$ (2) $-1\leq x\leq4$ (3) $2\leq x<5$

02 (1) $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

(2) $\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}$

$=\frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}$

$=\frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}{x+1-(x+3)}$

$=-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})$

$=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$

(3) $\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}$

$=\frac{x-1-2\sqrt{(x-1)x}+x}{x-1-x}$

$=-2x+1+2\sqrt{x^2-x}$

답 (1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ (2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$
(3) $-2x+1+2\sqrt{x^2-x}$

03 ㄱ. $y=\sqrt{3}x$는 다항함수이다.

ㄷ. $y=\sqrt{(x+3)^2}$, 즉 $y=|x+3|$은 무리함수가 아니다.

따라서 무리함수인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ이다.

답 ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ

04 (1) $x-2\geq0$에서 $x\geq2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\geq2\}$

(2) $1-2x\geq0$에서 $-2x\geq-1 \qquad \therefore x\leq\frac{1}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\middle|x\leq\frac{1}{2}\right\}$

(3) $2x-3\geq0$에서 $2x\geq3 \qquad \therefore x\geq\frac{3}{2}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\middle|x\geq\frac{3}{2}\right\}$

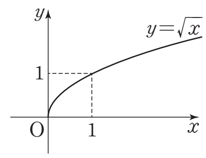
답 (1) $\{x|x\geq2\}$ (2) $\left\{x\middle|x\leq\frac{1}{2}\right\}$ (3) $\left\{x\middle|x\geq\frac{3}{2}\right\}$

05 (1) $y=\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x\geq0\}$,

치역은 $\{y|y\geq0\}$

이다.

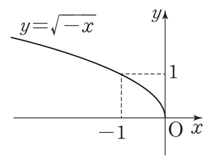


(2) $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x\leq0\}$,

치역은 $\{y|y\geq0\}$

이다.

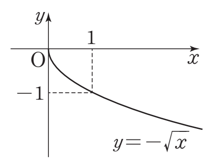


(3) $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x\geq0\}$,

치역은 $\{y|y\leq0\}$

이다.

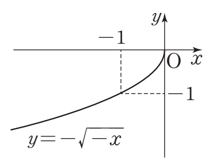


(4) $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x\leq0\}$,

치역은 $\{y|y\leq0\}$

이다.



답 (1) 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x|x\geq0\}$, 치역: $\{y|y\geq0\}$
(2) 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x|x\leq0\}$, 치역: $\{y|y\geq0\}$
(3) 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x|x\geq0\}$, 치역: $\{y|y\leq0\}$
(4) 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x|x\leq0\}$, 치역: $\{y|y\leq0\}$

06 (1) $y=\sqrt{3x}$에 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{3x}\qquad\therefore y=-\sqrt{3x}$

(2) $y=\sqrt{3x}$에 x 대신 $-x$를 대입하면 $y=\sqrt{-3x}$

(3) $y=\sqrt{3x}$에 x 대신 $-x$를, y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=\sqrt{-3x}\qquad\therefore y=-\sqrt{-3x}$

답 (1) $y=-\sqrt{3x}$ (2) $y=\sqrt{-3x}$ (3) $y=-\sqrt{-3x}$

07 $y=\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-4=\sqrt{5(x+2)}\qquad\therefore y=\sqrt{5x+10}+4$

답 $y=\sqrt{5x+10}+4$

08 $y=\sqrt{-4x+8}-1=\sqrt{-4(x-2)}-1$

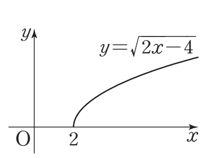
따라서 $y=\sqrt{-4x+8}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore a=2,\ b=-1$

답 $a=2,\ b=-1$

09 (1) $y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-2)}$

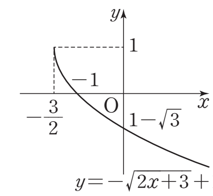
따라서 $y=\sqrt{2x-4}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 정의역은 $\{x|x\geq2\}$, 치역은 $\{y|y\geq0\}$이다.



(2) $y=-\sqrt{2x+3}+1=-\sqrt{2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}+1$

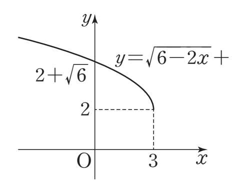
따라서 $y=-\sqrt{2x+3}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 정의역은 $\left\{x\middle|x\geq-\dfrac{3}{2}\right\}$,

치역은 $\{y|y\leq1\}$이다.



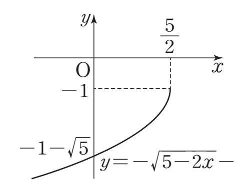
(3) $y=\sqrt{6-2x}+2=\sqrt{-2(x-3)}+2$

따라서 $y=\sqrt{6-2x}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 정의역은 $\{x|x\leq3\}$, 치역은 $\{y|y\geq2\}$이다.



(4) $y=-\sqrt{5-2x}-1=-\sqrt{-2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)}-1$

따라서 $y=-\sqrt{5-2x}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{5}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고 정의역은 $\left\{x\middle|x\leq\dfrac{5}{2}\right\}$, 치역은 $\{y|y\leq-1\}$이다.



답 (1) 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x|x\geq2\}$, 치역: $\{y|y\geq0\}$
(2) 그래프는 풀이 참조,
정의역: $\left\{x\middle|x\geq-\dfrac{3}{2}\right\}$, 치역: $\{y|y\leq1\}$
(3) 그래프는 풀이 참조, 정의역: $\{x|x\leq3\}$, 치역: $\{y|y\geq2\}$
(4) 그래프는 풀이 참조,
정의역: $\left\{x\middle|x\leq\dfrac{5}{2}\right\}$, 치역: $\{y|y\leq-1\}$

기출 Best | 1회

p.114~118

01 $4x+8\geq0$에서 $4x\geq-8\qquad\therefore x\geq-2$

$9-3x\geq0$에서 $-3x\geq-9\qquad\therefore x\leq3$

따라서 $-2\leq x\leq3$이므로 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 3$의 6개이다.

답 ③

02 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$+\dfrac{2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(x+1)-x}+\dfrac{2(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(x+2)-x}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}$ 답 ①

03 $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{2}{x-1}$

$x=\sqrt{5}$를 대입하면

$\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

$=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 답 ③

04 $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\dfrac{2x+2}{x-1}$

$x=3-\sqrt{2}$를 대입하면

$\dfrac{2x+2}{x-1}=\dfrac{2(3-\sqrt{2})+2}{(3-\sqrt{2})-1}$

$=\dfrac{8-2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{(8-2\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{16+8\sqrt{2}-4\sqrt{2}-4}{4-2}=6+2\sqrt{2}$ 답 ⑤

05 $2x-6\geq 0$에서 $2x\geq 6$ $\quad\therefore x\geq 3$

따라서 함수 $y=\sqrt{2x-6}+b$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 3\}$이므로

$a=3$

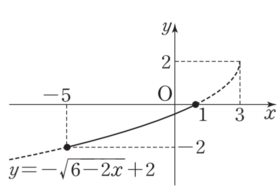
또, $\sqrt{2x-6}\geq 0$에서 $\sqrt{2x-6}+b\geq b$

따라서 함수 $y=\sqrt{2x-6}+b$의 치역은 $\{y\,|\,y\geq b\}$이므로

$b=8$

$\therefore ab=3\times 8=24$ 답 ③

06 $y=-2$일 때,



$-2=-\sqrt{6-2x}+2,\ \sqrt{6-2x}=4$

양변을 제곱하면

$6-2x=16,\ -2x=10$

$\therefore x=-5$

$y=0$일 때,

$0=-\sqrt{6-2x}+2,\ \sqrt{6-2x}=2$

양변을 제곱하면

$6-2x=4,\ -2x=-2$ $\quad\therefore x=1$

따라서 정의역은 $\{x\,|\,-5\leq x\leq 1\}$이다. 답 ⑤

07 함수 $y=\sqrt{3x-1}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=\sqrt{3(x-1)-1}$ $\quad\therefore y=\sqrt{3x-4}-3$

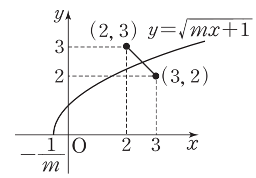
이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{3x-4}-3$ $\quad\therefore y=-\sqrt{3x-4}+3$

따라서 $a=3,\ b=-4,\ c=3$이므로

$a+b+c=3+(-4)+3=2$ 답 ④

08 함수 $y=\sqrt{mx+1}=\sqrt{m\left(x+\dfrac{1}{m}\right)}\ (m>0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{mx}\ (m>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{m}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(i) 함수 $y=\sqrt{mx+1}$의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지날 때

$2=\sqrt{3m+1},\ 4=3m+1,\ 3m=3$ $\quad\therefore m=1$

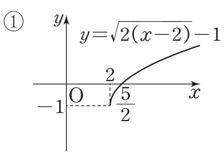
(ii) 함수 $y=\sqrt{mx+1}$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지날 때

$3=\sqrt{2m+1},\ 9=2m+1,\ 2m=8$ $\quad\therefore m=4$

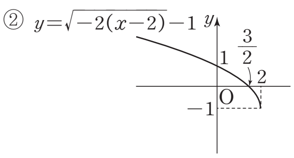
(i), (ii)에서 m의 값의 범위는 $1\leq m\leq 4$이므로 $\alpha=1,\ \beta=4$

$\therefore \beta-\alpha=4-1=3$ 답 ⑤

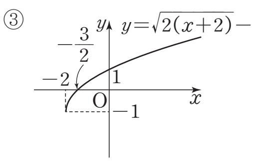
09 ①



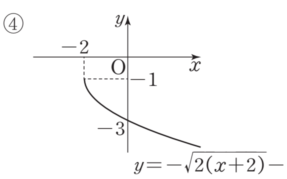
②



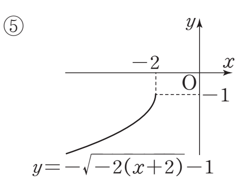
③



④



⑤



따라서 제2사분면을 지나는 것은 ②, ③이다. 답 ②, ③

10 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y+1=\sqrt{2(x+3)}$ $\quad\therefore y=\sqrt{2x+6}-1$

따라서 $a=6,\ b=-1$이므로

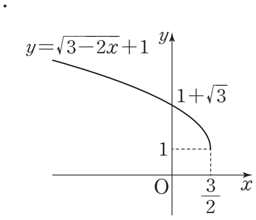
$a+b=6+(-1)=5$ 답 ⑤

11 $y=\sqrt{3-2x}+1=\sqrt{-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}+1$

③ $x=-3$이면 $y=\sqrt{3-2\times(-3)}+1=4$

④ 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 함수 $y=\sqrt{3-2x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다.



따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

12 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점 P의 x좌표를 a라 하면

$\mathrm{P}(a,\ \sqrt{a})$

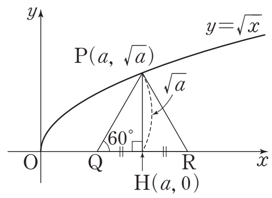
점 P에서 $\overline{QR}$에 수선의 발 H를 내리면

H$(a, 0)$

삼각형 PQR가 정삼각형이므로

$\angle PQR=60^\circ$

직각삼각형 PQH에서



$\dfrac{\sqrt{a}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \overline{PQ}=\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3a}}{3}$

즉, 정삼각형 PQR의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{PQ}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{4a}{3}=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$

한편, $\triangle PQR=\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{\sqrt{3}a}{3}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=3$

즉, $\overline{PQ}=\dfrac{2\sqrt{3\times3}}{3}=2$이므로 $\overline{QR}=2$

$\overline{PH}$는 $\overline{QR}$를 수직이등분하므로

$\overline{QH}=\overline{HR}=1$

따라서 점 R의 x좌표의 값은 $3+1=4$이다. 답 ④

13 점 A$(a, 0)$이므로 B$(a, \sqrt{6a})$

이때 두 점 B, C의 y좌표가 같으므로 $\sqrt{3x}=\sqrt{6a}$에서

$3x=6a$ $\quad\therefore x=2a$

즉, C$(2a, \sqrt{6a})$이고, $\overline{AD}=\overline{CD}$이므로

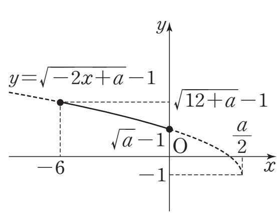
$2a-a=\sqrt{6a}$, $a^2=6a$, $a^2-6a=0$

$a(a-6)=0$ $\quad\therefore a=6$ ($\because a>0$) 답 ③

14 $y=\sqrt{-2x+a}-1=\sqrt{-2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)}-1$

이므로 함수 $y=\sqrt{-2x+a}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{a}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-6\le x\le0$일 때, 함수 $y=\sqrt{-2x+a}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-6$에서 최댓값 $\sqrt{12+a}-1$, $x=0$에서 최솟값 $\sqrt{a}-1$을 갖는다. 이때 최댓값이 3이므로



$3=\sqrt{12+a}-1$, $\sqrt{12+a}=4$

$12+a=16$ $\quad\therefore a=4$

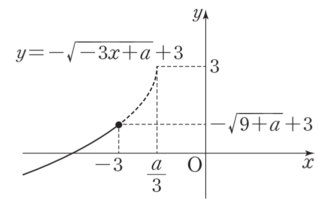
따라서 최솟값은 $\sqrt{4}-1=1$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore a+b=4+1=5$ 답 ⑤

15 $y=-\sqrt{-3x+a}+3=-\sqrt{-3\left(x-\dfrac{a}{3}\right)}+3$

이므로 함수 $y=-\sqrt{-3x+a}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{a}{3}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $x\le-3$일 때, 함수 $y=-\sqrt{-3x+a}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-3$에서 최댓값 $-\sqrt{9+a}+3$을 갖는다. 이때 최댓값이 1이므로



$-\sqrt{9+a}+3=1$, $\sqrt{9+a}=2$

$9+a=4$ $\quad\therefore a=-5$

함수 $y=-\sqrt{-3x-5}+3$의 그래프가 점 $(b, -1)$을 지나므로

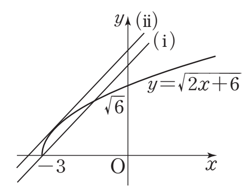
$-1=-\sqrt{-3b-5}+3$, $\sqrt{-3b-5}=4$, $-3b-5=16$

$-3b=21$ $\quad\therefore b=-7$

$\therefore ab=-5\times(-7)=35$ 답 ②

16 $y=\sqrt{2x+6}=\sqrt{2(x+3)}$

이므로 함수 $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-3, 0)$을 지날 때,

$0=-3+k$ $\quad\therefore k=3$

(ii) 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프에 접할 때,

$x+k=\sqrt{2x+6}$의 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=2x+6$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-6)=0$

$-2k+7=0$ $\quad\therefore k=\dfrac{7}{2}$

함수 $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이므로

$3\le k<\dfrac{7}{2}$

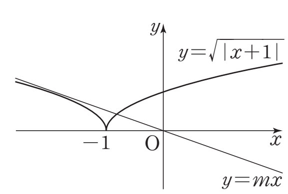
따라서 $\alpha=3$, $\beta=\dfrac{7}{2}$이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{7}{2}-3=\dfrac{1}{2}$ 답 ⑤

17 $x\ge-1$일 때, $y=\sqrt{x+1}$

$x<-1$일 때, $y=\sqrt{-x-1}$

함수 $y=\sqrt{|x+1|}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx$가 함수 $y=\sqrt{-x-1}$의 그래프와 접하면 된다.



$\sqrt{-x-1}=mx$에서 양변을 제곱하면

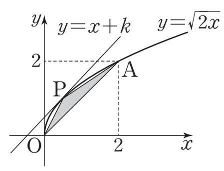
$-x-1=m^2x^2$ $\quad\therefore m^2x^2+x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4m^2=0,\ 4m^2=1$

$m^2=\frac{1}{4}\qquad \therefore m=-\frac{1}{2}\ (\because m<0)$ 답 ②

18 직선 OA의 기울기는 1이므로 삼각형 OAP의 넓이가 최대인 경우는 오른쪽 그림과 같이 점 P가 기울기가 1인 직선 $y=x+k$와 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프의 접점일 때이다.



$x+k=\sqrt{2x}$에서 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=2x\qquad \therefore x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-1\times k^2=0,\ k^2-2k+1-k^2=0$

$-2k+1=0,\ -2k=-1\qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

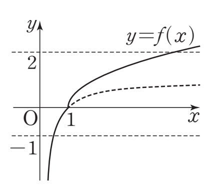
△OAP에서 $\overline{OA}$를 밑변으로 생각하면 높이는 원점 O$(0,\ 0)$과 직선 $y=x+\frac{1}{2}$, 즉 $2x-2y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 $\overline{OA}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}$ 답 ③

19 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$

이때 $f(a)=-1<0$이므로 점 $(a,\ -1)$은 함수 $y=\frac{x-1}{x}$의 그래프 위의 점이다. 즉,

$\frac{a-1}{a}=-1,\ a-1=-a,\ 2a=1\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f^{-1}(-1)=\frac{1}{2}$

또, $f^{-1}(2)=b$라 하면 $f(b)=2$

이때 $f(b)=2>0$이므로 점 $(b,\ 2)$는 함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프 위의 점이다. 즉,

$\sqrt{b-1}=2,\ b-1=4\qquad \therefore b=5$

$\therefore f^{-1}(2)=5$

$\therefore f^{-1}(-1)\times f^{-1}(2)=\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$ 답 ①

20 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$f(1)=3,\ \sqrt{a+b}=3\qquad \therefore a+b=9\qquad \cdots\cdots$ ㉠

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3,\ 1)$을 지난다.

$f(3)=1,\ \sqrt{3a+b}=1$

$\therefore 3a+b=1\qquad \cdots\cdots$ ㉡

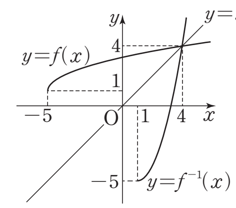
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=13$

$\therefore b-a=13-(-4)=17$ 답 ①

21 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=\sqrt{x+5}+1$

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. 즉,



$\sqrt{x+5}+1=x$에서 $\sqrt{x+5}=x-1$

양변을 제곱하면

$x+5=x^2-2x+1,\ x^2-3x-4=0$

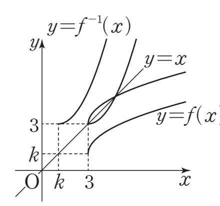
$(x+1)(x-4)=0\qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$

이때 $x\geq 1$이므로 $x=4$

따라서 $p=4,\ q=4$이므로

$p+q=4+4=8$ 답 ③

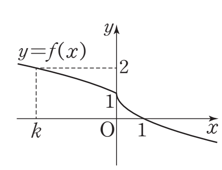
22 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 상수 k의 값이 최대인 경우는 함수 $y=\sqrt{x-3}+k$의 그래프가 점 $(3,\ 3)$을 지날 때이므로

$k=3$ 답 ②

23 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$

$f(k)=2>1$이므로 점 $(k,\ 2)$는 $y=\sqrt{1-x}$의 그래프 위의 점이다. 즉,

$f(k)=\sqrt{1-k}=2,\ 1-k=4\qquad \therefore k=-3$

즉, $f^{-1}(2)=-3$이므로

$(f^{-1}\circ f^{-1})(2)=f^{-1}(f^{-1}(2))=f^{-1}(-3)$

$f^{-1}(-3)=l$이라 하면 $f(l)=-3$

$f(l)=-3<1$이므로

점 $(l,\ -3)$은 $y=1-\sqrt{x}$의 그래프 위의 점이다. 즉,

$1-\sqrt{l}=-3,\ \sqrt{l}=4\qquad \therefore l=16$

즉, $f^{-1}(-3)=16$이므로

$(f^{-1}\circ f^{-1})(2)=f^{-1}(-3)=16$ 답 ④

24 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=2$이므로

$y=\frac{k}{x+1}+2\ (k\neq 0)$

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{-2+1}+2 \qquad \therefore k=2$

$\therefore y=\dfrac{2}{x+1}+2=\dfrac{2(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2x+4}{x+1}$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=1$이므로

$y=-\sqrt{2x+4}+1=-\sqrt{2(x+2)}+1$

함수 $y=-\sqrt{2x+4}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 ③이다.

답 ③

25 $(f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(7)=(f\circ f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(7)$

$=(g\circ f^{-1})(7)$

$=g(f^{-1}(7))$

$f^{-1}(7)=k$라 하면

$f(k)=7$이므로

$\sqrt{4k-3}=7$, $4k-3=49$

$4k=52 \qquad \therefore k=13$

즉, $f^{-1}(7)=13$이므로

$g(f^{-1}(7))=g(13)=\dfrac{39-7}{13-3}=\dfrac{16}{5}$

답 ②

기출 Best | 2회

p.119~123

01 $x+5\geq0$에서 $x\geq-5$

$6-2x>0$에서 $-2x>-6 \qquad \therefore x<3$

따라서 $-5\leq x<3$이므로 정수 x는 -5, -4, -3, $\cdots$, 2의 8개이다.

답 ③

02 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})-(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}}{(x+2)-x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{2}=\sqrt{x}$

답 ③

03 $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

이때

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(4\sqrt{2})^2-4\times4=16$이므로

$x-y=4$ ($\because x>y$)

$\therefore \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}=\dfrac{4\sqrt{2}-2\sqrt{4}}{4}=\sqrt{2}-1$

답 ①

04 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+4}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+4})(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}}{(x+5)-(x+4)}$

$=\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}$

$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(20)$

$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$

$=\sqrt{25}-\sqrt{4}=3$

답 ②

05 $3-x\geq0$에서 $x\leq3$

따라서 함수 $y=-\sqrt{3-x}+1$의 정의역은 $\{x\,|\,x\leq3\}$이므로

$a=3$

또, $\sqrt{3-x}\geq0$에서 $-\sqrt{3-x}\leq0 \qquad \therefore -\sqrt{3-x}+1\leq1$

따라서 함수 $y=-\sqrt{3-x}+1$의 치역은 $\{y\,|\,y\leq1\}$이므로 $b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

답 ④

06 유리함수 $y=\dfrac{ax-1}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$이므로 $-b=-9$, $a=-2 \qquad \therefore b=9$

무리함수 $y=\sqrt{-2x+9}$에서

$-2x+9\geq0$, $-2x\geq-9 \qquad \therefore x\leq\dfrac{9}{2}$

따라서 무리함수 $y=\sqrt{-2x+9}$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\leq\dfrac{9}{2}\right\}$이므로 정의역에 속하는 자연수는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 ④

참고 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$이다.

07 $y=\sqrt{4-2x}+b=\sqrt{-2(x-2)}+b$

이므로 함수 $y=\sqrt{4-2x}+b$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $k=-2$, $a=2$, $b=4$이므로

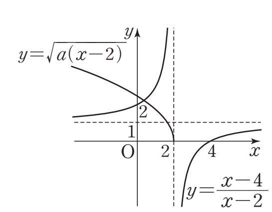
$a+b+k=2+4+(-2)=4$

답 ⑤

08 $y=\dfrac{x-4}{x-2}=\dfrac{(x-2)-2}{x-2}=-\dfrac{2}{x-2}+1$

이므로 함수 $y=\dfrac{x-4}{x-2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$

따라서 함수 $y=\dfrac{x-4}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 그래프와 함수 $y=\sqrt{a(x-2)}$ $(a<0)$의 그래프가 제1사분면에서 만나려면 함수 $y=\sqrt{a(x-2)}$의 $x=0$에서의 함숫값이 2보다 커야 한다.



$x=0$일 때 $y=\sqrt{-2a}>2$에서

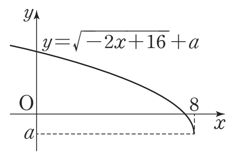
$-2a>4 \qquad \therefore a<-2$

답 ①

09 $y=\sqrt{-2x+16}+a=\sqrt{-2(x-8)}+a$

이므로 이 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

$y=\sqrt{-2x+16}+a$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{-2x+16}+a$의 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로 $4+a\geq 0$



$\therefore a\geq -4$

답 ③

10 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x+2)}+1$

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{2a}+1$, $\sqrt{2a}=2$, $2a=4$ $\qquad\therefore a=2$

$\therefore y=-\sqrt{2(x+2)}+1=-\sqrt{2x+4}+1$

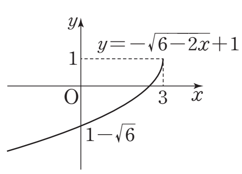
따라서 $b=4$, $c=1$이므로

$a+b+c=2+4+1=7$

답 ④

11 $y=-\sqrt{6-2x}+1=-\sqrt{-2(x-3)}+1$

이므로 함수 $y=-\sqrt{6-2x}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 정의역은 $\{x|x\leq 3\}$, 치역은 $\{y|y\leq 1\}$이다. (거짓)

ㄴ. 그래프는 제1, 3, 4사분면만을 지난다. (참)

ㄷ. $y=-\sqrt{4-2x}=-\sqrt{-2(x-2)}$이므로 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=-\sqrt{6-2x}+1$의 그래프를 평행이동하면 함수 $y=-\sqrt{4-2x}$의 그래프와 겹쳐진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

12 $A(a,\ b)\ (0<a<9,\ 0<b<3)$라 하면

점 A는 $y=\sqrt{9-x}$의 그래프 위의 점이므로

$b=\sqrt{9-a}$, $b^2=9-a$ $\qquad\therefore a=9-b^2$

$B(a,\ 0)$, $C(0,\ b)$이므로 직사각형 OBAC의 둘레의 길이는

$2(\overline{OB}+\overline{OC})=2(a+b)=2(9-b^2)+2b$

$$=-2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{37}{2}\ (0<b<3)$$

따라서 직사각형 OBAC의 둘레의 길이의 최댓값은 $b=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{37}{2}$이다.

답 ⑤

13 두 함수 $y=\sqrt{x+2}$, $y=\sqrt{x+1}$의 그래프가 직선 $x=k$와 만나는 점은 각각 $P_k(k,\ \sqrt{k+2})$, $Q_k(k,\ \sqrt{k+1})$이므로

$\overline{P_kQ_k}=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$

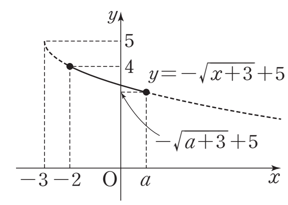
$\therefore \overline{P_0Q_0}+\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\cdots+\overline{P_{47}Q_{47}}$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$

$=-1+\sqrt{49}=-1+7=6$

답 ②

14 함수 $y=-\sqrt{x+3}+5$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $-2\leq x\leq a$일 때, $y=-\sqrt{x+3}+5$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $x=-2$에서 최댓값 4를 갖는다.

$\therefore b=4$

또, $x=a$에서 최솟값 $-\sqrt{a+3}+5$를 갖고, 최솟값이 3이므로

$3=-\sqrt{a+3}+5$, $\sqrt{a+3}=2$

$a+3=4$ $\qquad\therefore a=1$

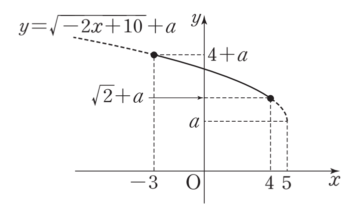
$\therefore a+b=1+4=5$

답 ⑤

15 $f(x)=\sqrt{-2x+10}+a=\sqrt{-2(x-5)}+a$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\leq x\leq 4$일 때, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 $4+a$를 갖는다.



이때 최댓값이 7이므로

$4+a=7$ $\qquad\therefore a=3$

따라서 $f(x)=\sqrt{-2x+10}+3$이므로

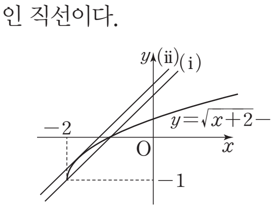
$f(a)=f(3)=\sqrt{-6+10}+3=2+3=5$

답 ④

16 $n(A\cap B)=2$이므로 함수 $y=\sqrt{x+2}-1$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

이때 함수 $y=\sqrt{x+2}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1인 직선이다.

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2,\ -1)$을 지날 때,
$-1=-2+k$ $\qquad\therefore k=1$



(ii) 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{x+2}-1$의 그래프에 접할 때,
$x+k=\sqrt{x+2}-1$에서 $x+(k+1)=\sqrt{x+2}$
양변을 제곱하면
$x^2+2(k+1)x+k^2+2k+1=x+2$
$\therefore x^2+(2k+1)x+k^2+2k-1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(2k+1)^2-4(k^2+2k-1)=0$
$-4k+5=0$ $\qquad\therefore k=\frac{5}{4}$

이때 함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이므로

$1 \le k < \frac{5}{4}$

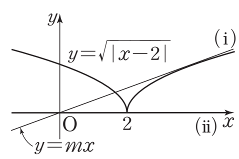
따라서 $\alpha=1$, $\beta=\frac{5}{4}$이므로

$\alpha+\beta=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$ 답 ①

17 $x \ge 2$일 때, $y=\sqrt{x-2}$

$x<2$일 때, $y=\sqrt{-x+2}$

함수 $y=\sqrt{|x-2|}$의 그래프와 직선 $y=mx$는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 직선 $y=mx$가 함수 $y=\sqrt{x-2}$의 그래프에 접할 때,

$mx=\sqrt{x-2}$에서 양변을 제곱하면

$m^2x^2=x-2 \qquad \therefore m^2x^2-x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times m^2\times 2=0$, $8m^2=1$

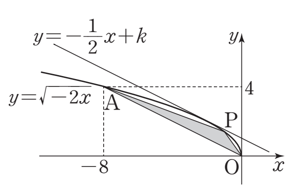
$m^2=\frac{1}{8} \qquad \therefore m=\frac{\sqrt{2}}{4}$ $(\because m>0)$

(ii) 직선 $y=mx$가 점 $(2, 0)$을 지날 때, $m=0$

이때 함수의 그래프와 직선이 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 직선이 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이므로

$0<m<\frac{\sqrt{2}}{4}$ 답 ③

18 직선 OA의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 삼각형 AOP의 넓이가 최대인 경우는 오른쪽 그림과 같이 점 P가 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선



$y=-\frac{1}{2}x+k$와 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프의 접점일 때이다.

$-\frac{1}{2}x+k=\sqrt{-2x}$에서 양변을 제곱하면

$\frac{1}{4}x^2-kx+k^2=-2x \qquad \therefore x^2-4(k-2)x+4k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(k-2)\}^2-4k^2=0$, $-16k+16=0 \qquad \therefore k=1$

△AOP에서 $\overline{OA}$를 밑변으로 생각하면 높이는 원점 O$(0, 0)$과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$, 즉 $x+2y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 삼각형 AOP의 넓이의 최댓값은

$\overline{OA}=\sqrt{(-8)^2+4^2}=4\sqrt{5}$이므로

$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=4$ 답 ④

19 $1<\frac{10}{9}\le 2$이므로

$f\left(\frac{10}{9}\right)=\dfrac{-\frac{10}{9}+2}{\frac{10}{9}-1}=\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{9}}=8$

이것을 $f\left(\frac{10}{9}\right)\times f^{-1}(k)=24$에 대입하면

$8f^{-1}(k)=24 \qquad \therefore f^{-1}(k)=3$

즉, $f(3)=k$이므로

$k=f(3)=-\sqrt{3-2}=-1$ 답 ②

20 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로 $f(2)=3$

$\sqrt{2a+b}=3 \qquad \therefore 2a+b=9$ …… ㉠

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$f^{-1}(2)=3$, 즉 $f(3)=2$

$\sqrt{3a+b}=2 \qquad \therefore 3a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=19$

$\therefore f(x)=\sqrt{-5x+19}$

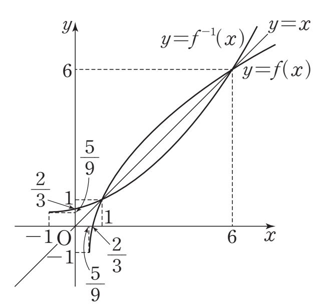
$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$\sqrt{-5k+19}=7$, $-5k+19=49$

$-5k=30 \qquad \therefore k=-6$

$\therefore f^{-1}(7)=-6$ 답 ①

21 함수 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 x의 값이 커질 때 y의 값도 커지는 함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 일치한다.



$\sqrt{9x-5}-1=x$에서 $\sqrt{9x-5}=x+1$

양변을 제곱하면

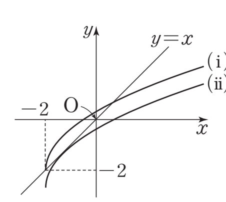
$9x-5=x^2+2x+1$, $x^2-7x+6=0$

$(x-1)(x-6)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=6$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(6, 6)$이므로 이 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(6-1)^2+(6-1)^2}=5\sqrt{2}$ 답 ②

22 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



(i) 함수 $y=\sqrt{3x+6}+m$의 그래프가 점 $(-2, -2)$를 지날 때,

$-2=\sqrt{-6+6}+m \qquad \therefore m=-2$

(ii) 함수 $y=\sqrt{3x+6}+m$의 그래프가 직선 $y=x$와 접할 때,

$\sqrt{3x+6}+m=x$에서 $\sqrt{3x+6}=x-m$

양변을 제곱하면

$3x+6=x^2-2mx+m^2$

$\therefore x^2-(2m+3)x+m^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2m+3)\}^2-4(m^2-6)=0$

$12m+33=0 \qquad \therefore m=-\dfrac{11}{4}$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이므로

$-\dfrac{11}{4}<m\le -2$

따라서 $a=-\dfrac{11}{4}$, $b=-2$이므로

$ab=-\dfrac{11}{4}\times(-2)=\dfrac{11}{2}$ 답 ②

23 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(a))=27$에서

$f(27)=f^{-1}(a)$

$\therefore a=f(f(27))=f(1-\sqrt{3\times 27})$

$=f(-8)=\sqrt{1-3\times(-8)}=5$ 답 ⑤

24 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=a\sqrt{-x}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$y=a\sqrt{-(x-1)}+3=a\sqrt{-x+1}+3$

이 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=a+3 \qquad \therefore a=-3$

또, $b=1$, $c=3$이므로

$y=\dfrac{-3x+1}{x+3}=\dfrac{-3(x+3)+10}{x+3}=\dfrac{10}{x+3}-3$

따라서 함수 $y=\dfrac{-3x+1}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{10}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고, $x=0$일 때 $y=\dfrac{1}{3}>0$이므로 ⑤이다. 답 ⑤

25 $((g\circ f)^{-1}\circ g\circ g)(13)=(f^{-1}\circ g^{-1}\circ g\circ g)(13)$

$=(f^{-1}\circ g)(13)=f^{-1}(g(13))$

$=f^{-1}\left(\dfrac{2\times 13+7}{13-2}\right)=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$

$\sqrt{k+2}=3$, $k+2=9 \qquad \therefore k=7$

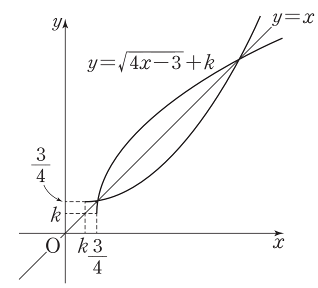
즉, $f^{-1}(3)=7$이므로

$((g\circ f)^{-1}\circ g\circ g)(13)=f^{-1}(3)=7$ 답 ③

변형유형 집중공략

p.124~125

1-1 함수 $y=\sqrt{4x-3}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=\sqrt{4x-3}+k$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{4x-3}+k$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{4x-3}+k=x$에서 $\sqrt{4x-3}=x-k$

양변을 제곱하면

$4x-3=x^2-2kx+k^2 \qquad \therefore x^2-2(k+2)x+k^2+3=0$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k+4$, $\alpha\beta=k^2+3$

이때 두 교점의 좌표는 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$

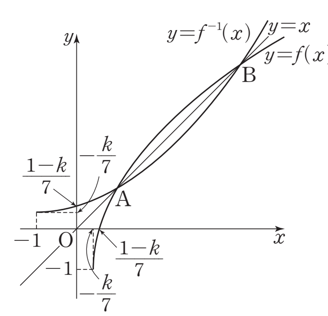
$=\sqrt{2\{(2k+4)^2-4(k^2+3)\}}$

$=\sqrt{2(16k+4)}=2\sqrt{8k+2}$

이때 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{6}$이므로

$2\sqrt{8k+2}=2\sqrt{6}$, $8k+2=6 \qquad \therefore k=\dfrac{1}{2}$ 답 ④

1-2 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 교점 A, B는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{7x+k}-1=x$에서

$\sqrt{7x+k}=x+1$

양변을 제곱하면

$7x+k=x^2+2x+1 \qquad \therefore x^2-5x+1-k=0$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=1-k$ …… ㉠

또, 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=3\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

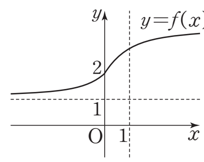
$2(\alpha-\beta)^2=18 \qquad \therefore (\alpha-\beta)^2=9$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$9=5^2-4(1-k)$ ($\because$ ㉠)

$9=25-4+4k$, $4k=-12 \qquad \therefore k=-3$ 답 ②

2-1 함수 $f(x)$의 치역이 $\{y|y>1\}$이고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 일대일함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(0)=2$이므로

$f(0)=\sqrt{0}+k=2 \qquad \therefore k=2$

이때 $f(-1)=\dfrac{-1-2}{-1-1}=\dfrac{3}{2}$이므로

$f(-1)+f(a)=\dfrac{13}{2}$에서

$\dfrac{3}{2}+f(a)=\dfrac{13}{2} \qquad \therefore f(a)=5$

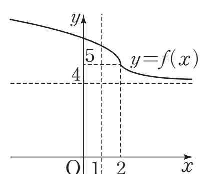
$f(a)=5>2$에서 $a>0$이므로

$f(a)=\sqrt{a}+2=5,\ \sqrt{a}=3 \qquad \therefore a=9$

답 9

2-2 $y=\dfrac{4x-3}{x-1}=\dfrac{4(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+4$

함수 $f(x)$의 치역이 $\{y|y>4\}$이고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 일대일함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉, $f(2)=5$이므로



$a\sqrt{2-2}+b=5 \qquad \therefore b=5$

이때 $f(-2)=7$이므로

$2a+b=7,\ 2a+5=7,\ 2a=2 \qquad \therefore a=1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x-3}{x-1} & (x>2) \\ \sqrt{2-x}+5 & (x\le 2) \end{cases}$$

이때 $f(1)=\sqrt{2-1}+5=6$이므로 $f(1)f(k)=27$에서

$6f(k)=27 \qquad \therefore f(k)=\dfrac{9}{2}$

$f(k)=\dfrac{9}{2}<5$에서 $k>2$이므로 $f(k)=\dfrac{4k-3}{k-1}=\dfrac{9}{2}$

$8k-6=9k-9 \qquad \therefore k=3$

답 3

서술형 What & How

p.126~129

1 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+5=-\sqrt{-2(x-5)}$

$y=-\sqrt{-2x+10}-5$ …… ❶

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\sqrt{-2\times(-x)+10}-5$

$\therefore y=\sqrt{2x+10}+5$ …… ❷

즉, $g(x)=\sqrt{2x+10}+5$이므로

$g(3)=\sqrt{6+10}+5=4+5=9$ …… ❸

답 9

2 함수 $y=\sqrt{2x+5}-3$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{-2x+5}-3 \qquad \therefore y=-\sqrt{-2x+5}+3$ …… ❶

이 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=-\sqrt{-2(x-m)+5}+3$

$\therefore y=-\sqrt{-2x+2m+5}+3+n$ …… ❷

이것이 $y=-\sqrt{-2x+1}+4$와 일치하므로

$2m+5=1,\ 3+n=4 \qquad \therefore m=-2,\ n=1$

$\therefore m+n=-2+1=-1$ …… ❸

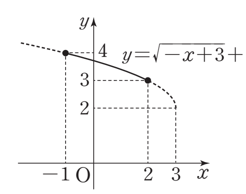
답 -1

채점기준	배점
❶ 대칭이동한 그래프의 식 구하기	2
❷ 평행이동한 그래프의 식 구하기	2
❸ $m+n$의 값 구하기	1

3 $y=\sqrt{-x+3}+2=\sqrt{-(x-3)}+2$

이므로 함수 $y=\sqrt{-x+3}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. …… ❶

따라서 $-1\le x\le 2$일 때 함수 $y=\sqrt{-x+3}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 함수는 $x=-1$에서 최댓값 4, $x=2$에서 최솟값 3을 갖는다. …… ❷



$\therefore M=4,\ m=3$

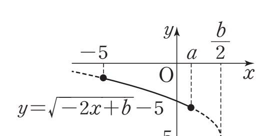
$\therefore Mm=4\times 3=12$ …… ❸

답 12

4 $y=\sqrt{-2x+b}-5=\sqrt{-2\left(x-\dfrac{b}{2}\right)}-5$

이므로 $y=\sqrt{-2x+b}-5$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{b}{2}$만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다. …… ❶

따라서 $-5\le x\le a$일 때 함수 $y=\sqrt{-2x+b}-5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 함수는



$x=-5$에서 최댓값 $\sqrt{10+b}-5$,

$x=a$에서 최솟값 $\sqrt{-2a+b}-5$

를 갖는다. 이때 최댓값이 -1, 최솟값이 -3이므로

$\sqrt{10+b}-5=-1,\ \sqrt{-2a+b}-5=-3$ …… ❷

$\sqrt{10+b}-5=-1$에서 $\sqrt{10+b}=4,\ 10+b=16 \qquad \therefore b=6$

$\sqrt{-2a+b}-5=-3$에서

$\sqrt{-2a+6}=2,\ -2a+6=4$

$-2a=-2 \qquad \therefore a=1$ …… ❸

$\therefore a+b=1+6=7$ …… ❹

답 7

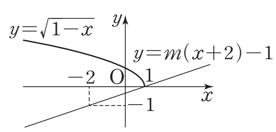
채점기준	배점
❶ 주어진 함수의 그래프의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형하여 평행이동 파악하기	2
❷ 주어진 함수의 그래프를 그리고, 최댓값과 최솟값을 a, b에 대한 식으로 나타내기	2
❸ a, b의 값 각각 구하기	2
❹ $a+b$의 값 구하기	1

5 $y=\sqrt{1-x}=\sqrt{-(x-1)}$

이므로 함수 $y=\sqrt{1-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이고, 직선 $y=m(x+2)-1$은 기울기가 m이고 점 $(-2,\ -1)$을 지나는 직선이다. …… ❶

(i) $m\geq 0$일 때

직선의 기울기 m은 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때의 기울기보다 크거나 같아야 한다.



직선 $y=m(x+2)-1$이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때,

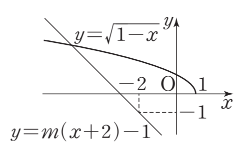
$0=3m-1,\ 3m=1\qquad \therefore m=\frac{1}{3}$

따라서 $y=\sqrt{1-x}$의 그래프와 한 점에서 만나려면 직선

$m\geq\frac{1}{3}$ …… ❷

(ii) $m<0$일 때

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=m(x+2)-1$과 함수 $y=\sqrt{1-x}$의 그래프는 항상 한 점에서 만난다. …… ❸



(i), (ii)에서 $m<0$ 또는 $m\geq\frac{1}{3}$ …… ❹

따라서 $\alpha=0,\ \beta=\frac{1}{3}$이므로

$30(\alpha+\beta)=30\times\left(0+\frac{1}{3}\right)=10$

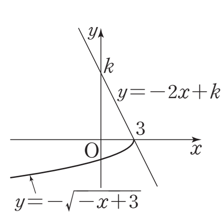
답 10

6 $y=-\sqrt{-x+3}=-\sqrt{-(x-3)}$

이므로 함수 $y=-\sqrt{-x+3}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이고, 직선 $y=-2x+k$는 기울기가 -2이고, y절편이 k인 직선이다.

…… ❶

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=-\sqrt{-x+3}$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나야 한다. …… ❷



직선 $y=-2x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때

$0=-6+k\qquad \therefore k=6$ …… ❸

$y=-\sqrt{-x+3}$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $k\leq 6$ …… ❹

따라서 k의 최댓값은 6이다. …… ❺

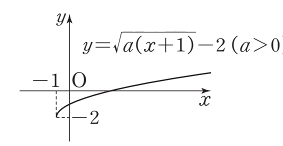
답 6

채점기준	배점
❶ 주어진 조건에 맞게 그래프 그리기	2
❷ $A\cap B\neq\varnothing$의 의미 설명하기	1
❸ 직선 $y=-2x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때의 k의 값 구하기	1
❹ $y=-\sqrt{-x+3}$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나기 위한 k의 값의 범위 구하기	2
❺ 실수 k의 최댓값 구하기	1

7 $y=\sqrt{ax+a}-2=\sqrt{a(x+1)}-2$

(i) $a>0$일 때,

$x=0$일 때 $y\leq 0$이어야 하므로

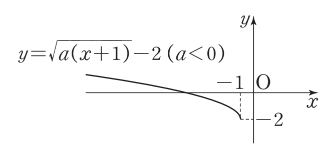


$\sqrt{a}-2\leq 0,\ \sqrt{a}\leq 2$

$\therefore a\leq 4$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\leq 4$ …… ❶

(ii) $a<0$일 때, 함수 $y=\sqrt{ax+a}-2$의 그래프는 제2사분면을 항상 지난다. …… ❷



(i), (ii)에서 $0<a\leq 4$

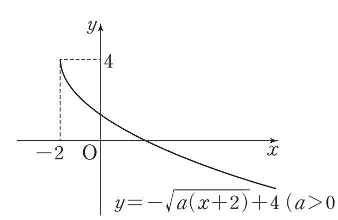
따라서 실수 a의 최댓값은 4이다. …… ❸

답 4

8 $y=-\sqrt{ax+2a}+4=-\sqrt{a(x+2)}+4$

(i) $a>0$일 때,

$x=0$일 때, $y\geq 0$이어야 하므로



$-\sqrt{2a}+4\geq 0$

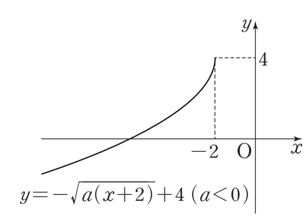
$\sqrt{2a}\leq 4$

$2a\leq 16\qquad \therefore a\leq 8$

그런데 $a>0$이므로

$0<a\leq 8$ …… ❶

(ii) $a<0$일 때, 함수 $y=-\sqrt{ax+2a}+4$의 그래프는 제3사분면을 항상 지난다. …… ❷



(i), (ii)에서 $0<a\leq 8$

따라서 실수 a의 최댓값은 8이다. …… ❸

답 8

채점기준	배점
❶ $a>0$일 때, a의 값의 범위 구하기	2
❷ $a<0$일 때, 함수의 그래프가 제3사분면을 항상 지남을 설명하기	2
❸ a의 최댓값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.130~134

01 근호 안의 식의 값이 0보다 크거나 같고 분모는 0이 아니어야 하므로

$6-x>0$에서 $x<6$

$x-2>0$에서 $x>2$

$\therefore\ 2<x<6$

따라서 정수 x는 3, 4, 5이므로 정수 x의 값의 합은

$3+4+5=12$ 답 ③

02 $\dfrac{x}{\sqrt{x+4}+2}+\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\dfrac{x(\sqrt{x+4}-2)+x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{x+4}-2)}$

$=\dfrac{x\sqrt{x+4}-2x+x\sqrt{x+4}+2x}{(x+4)-4}$

$=\dfrac{2x\sqrt{x+4}}{x}=2\sqrt{x+4}$ 답 ⑤

03 $x=\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$y=\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

이므로 $x+y=2\sqrt{6}$, $x-y=-2\sqrt{2}$, $xy=4$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}+2\sqrt{4}}{-2\sqrt{2}}=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 답 ②

04 조건 (다)에서

$f(100)=f(94)=f(88)=\cdots=f(4)=f(-2)$

조건 (나)에서 $f(-2)=f(2)$

조건 (가)에서 $f(2)=\sqrt{6}$

$\therefore\ f(100)=f(-2)=f(2)=\sqrt{6}$ 답 ④

05 $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+1$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$이고, 그래프는 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ a=2,\ b=1$

조건 (나)에서 $y=\sqrt{2x+1}+c$의 그래프가 점 $(4,\ 6)$을 지나므로

$6=\sqrt{9}+c,\ 6=3+c \qquad \therefore\ c=3$

즉, $f(x)=\sqrt{2x+1}+3$에서 $\sqrt{2x+1}\ge 0$이므로 $f(x)\ge 3$

따라서 함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\ge 3\}$이다. 답 ⑤

06 ① $y=\sqrt{-2x+2}=\sqrt{-2(x-1)}$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\sqrt{2x}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

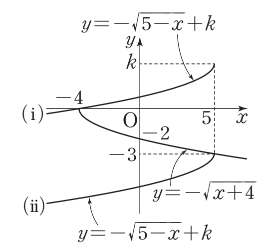
④ $y=-\sqrt{-2x-4}+3=-\sqrt{-2(x+2)}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=-\sqrt{6-2x}+5=-\sqrt{-2(x-3)}+5$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐지지 않는 것은 ③이다. 답 ③

다른풀이 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 평행이동 또는 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\pm\sqrt{\pm 2(x-p)}+q$ 꼴이므로 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프와 겹쳐지지 않는 것은 ③이다.

07 두 함수 $y=-\sqrt{x+4}$, $y=-\sqrt{5-x}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(ⅰ) 함수 $y=-\sqrt{5-x}+k$의 그래프가 점 $(-4,\ 0)$을 지날 때,

$0=-\sqrt{9}+k \qquad \therefore\ k=3$

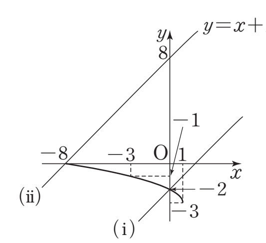
(ⅱ) 함수 $y=-\sqrt{5-x}+k$의 그래프가 점 $(5,\ -3)$을 지날 때

$-3=-\sqrt{5-5}+k \qquad \therefore\ k=-3$

두 함수 $y=-\sqrt{x+4}$, $y=-\sqrt{5-x}+k$의 그래프가 만나는 경우는 함수 $y=-\sqrt{5-x}+k$의 그래프가 (ⅰ) 또는 (ⅱ)이거나 (ⅰ)과 (ⅱ) 사이에 있을 때이므로

$-3\le k\le 3$ 답 ②

08 함수 $y=\sqrt{1-x}-3$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 오른쪽 그림과 같으므로



(ⅰ) 직선 $y=x+k$가 점 $(0,\ -2)$를 지날 때

$k=-2$

(ⅱ) 직선 $y=x+k$가 점 $(-8,\ 0)$을 지날 때

$0=-8+k \qquad \therefore\ k=8$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $y=\sqrt{1-x}-3$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 제3사분면에서 만나려면

$-2<k<8$

따라서 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 7$의 9개이다. 답 ⑤

09 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\dfrac{-ac+b}{x+c}+a$이므로

점근선의 방정식은

$x=-c,\ y=a$

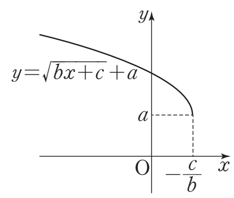
주어진 그래프에서 $-c<0$, $a>0$이므로 $a>0$, $c>0$

한편, $x=0$일 때, $y<0$이므로 $\dfrac{b}{c}<0$

$\therefore\ b<0\ (\because\ c>0)$

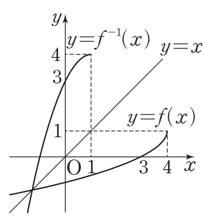
함수 $y=\sqrt{bx+c}+a=\sqrt{b\left(x+\frac{c}{b}\right)}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{bx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 $b<0$, $-\frac{c}{b}>0$, $a>0$이므로 함수 $y=\sqrt{bx+c}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 그래프가 지나는 사분면은 제1, 2사분면이다. 답 ①

10 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore f(x)=-\sqrt{a(x-4)}+1\ (a<0)$ …… ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로 $f(3)=0$

$-\sqrt{-a}+1=0$, $\sqrt{-a}=1$, $-a=1$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$\therefore f(x)=-\sqrt{-(x-4)}+1=-\sqrt{-x+4}+1$

따라서 $b=4$, $c=1$이므로

$abc=-1\times4\times1=-4$ 답 ②

11 $f(x)=-\sqrt{-2x+9}+3=-\sqrt{-2\left(x-\frac{9}{2}\right)}+3$

ㄱ. $-2x+9\geq0$에서 $-2x\geq-9$

$\therefore x\leq\frac{9}{2}$

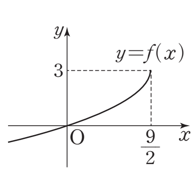
따라서 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\leq\frac{9}{2}\right\}$이다. 또, $\sqrt{-2x+9}\geq0$에서

$-\sqrt{-2x+9}\leq0$

$\therefore -\sqrt{-2x+9}+3\leq3$

따라서 치역은 $\{y\,|\,y\leq3\}$이다. (참)

ㄴ. $f(0)=-\sqrt{9}+3=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지난다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 제1, 3사분면을 지난다.



(거짓)

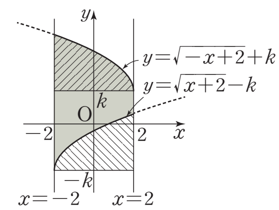
ㄷ. $f(4)=-\sqrt{-8+9}+3=-1+3=2$이므로

$f^{-1}(2)=4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

12 함수 $y=\sqrt{x+2}-k$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\sqrt{-x+2}+k=\sqrt{-(x-2)}+k$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 두 함수 $y=\sqrt{x+2}-k$, $y=\sqrt{-x+2}+k$의 그래프와 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같고, 빗금 친 두 부분의 넓이는 같으므로 구하는 도형의 넓이는

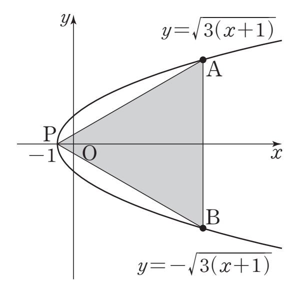


$\{2-(-2)\}\times\{k-(-k)\}=8k$

이때 도형의 넓이가 40이므로

$8k=40$ $\quad\therefore k=5$ 답 ⑤

13 삼각형 APB가 정삼각형이고, 두 함수 $y=\sqrt{3(x+1)}$, $y=-\sqrt{3(x+1)}$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{A}(a,\ \sqrt{3(a+1)})\ (a>-1)$이라 하면 $\mathrm{B}(a,\ -\sqrt{3(a+1)})$



$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3(a+1)}$

이때 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$이므로

$(a+1)^2+3(a+1)=12(a+1)$, $a^2-7a-8=0$

$(a+1)(a-8)=0$ $\quad\therefore a=8\ (\because a>-1)$

$\therefore \mathrm{A}(8,\ 3\sqrt{3})$, $\mathrm{B}(8,\ -3\sqrt{3})$

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{3}-(-3\sqrt{3})=6\sqrt{3}$이므로 삼각형 APB의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{3})^2=27\sqrt{3}$ 답 ④

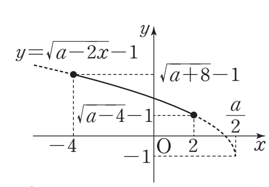
참고 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이 h와 넓이 S는

$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

14 $y=\sqrt{a-2x}-1=\sqrt{-2\left(x-\frac{a}{2}\right)}-1$

이므로 함수 $y=\sqrt{a-2x}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{a}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\leq x\leq2$일 때 함수 $y=\sqrt{a-2x}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-4$에서 최댓값 $\sqrt{a+8}-1$, $x=2$에서 최솟값 $\sqrt{a-4}-1$을 갖는다. 이때 최솟값이 1이므로



$1=\sqrt{a-4}-1$, $\sqrt{a-4}=2$

$a-4=4$ $\quad\therefore a=8$

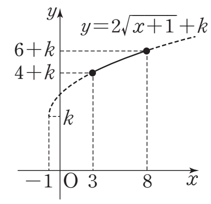
따라서 함수 $y=\sqrt{-2x+8}-1$은 $x=-4$에서 최댓값

$\sqrt{8+8}-1=4-1=3$

을 갖는다. 답 ②

15 $y=2\sqrt{x+1}+k$의 그래프는 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\le x\le 8$일 때 $y=2\sqrt{x+1}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 함수는



$x=8$에서 최댓값 $6+k$,

$x=3$에서 최솟값 $4+k$

를 갖는다.

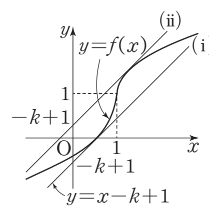
이때 최댓값과 최솟값의 합이 20이므로

$(6+k)+(4+k)=20,\ 10+2k=20$

$2k=10 \qquad \therefore k=5$

답 ②

16 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



(i) 직선 $y=x-k+1$이 함수 $y=-\sqrt{-2x+2}+1$의 그래프에 접할 때,

$x-k+1=-\sqrt{-2x+2}+1$에서

$x-k=-\sqrt{-2x+2}$

양변을 제곱하면

$x^2-2kx+k^2=-2x+2$

$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-2)=0$

$-2k+3=0,\ -2k=-3 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$

(ii) 직선 $y=x-k+1$이 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 그래프에 접할 때,

$x-k+1=\sqrt{x-1}+1$에서 $x-k=\sqrt{x-1}$

양변을 제곱하면

$x^2-2kx+k^2=x-1$

$\therefore x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(2k+1)\}^2-4(k^2+1)=0$

$4k-3=0,\ 4k=3 \qquad \therefore k=\frac{3}{4}$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-k+1$이 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이므로 $\frac{3}{4}<k<\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{3}{4},\ \beta=\frac{3}{2}$이므로

$\beta-\alpha=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

답 ③

참고 직선 $y=x-k+1$의 y절편은 $-k+1$이므로 $k=\frac{3}{2}$일 때 $-\frac{1}{2}$, $k=\frac{3}{4}$일 때 $\frac{1}{4}$이다. 즉, 이 직선과 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$-\frac{1}{2}<-k+1<\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{3}{4}<k<\frac{3}{2}$

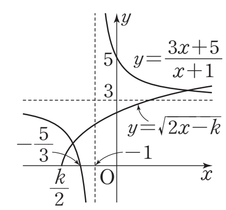
17 $n(A\cap B)=2$이므로 두 함수 $y=\frac{3x+5}{x+1}$, $y=\sqrt{2x-k}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+3$

이므로 함수 $y=\frac{3x+5}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

또, $y=\sqrt{2x-k}=\sqrt{2\left(x-\frac{k}{2}\right)}$이므로 함수 $y=\sqrt{2x-k}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{k}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 두 함수 $y=\frac{3x+5}{x+1}$, $y=\sqrt{2x-k}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 그리면 오른쪽 그림과 같으므로



$\frac{k}{2}\le -\frac{5}{3} \qquad \therefore k\le -\frac{10}{3}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -4이다.

답 ②

18 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-3=\sqrt{a(x-4)+b}+c$

$\therefore y=\sqrt{ax-4a+b}+c+3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$y=\frac{1}{4}x^2\ (x\ge 0)$에서 $x^2=4y$

$x=\sqrt{4y}\ (\because x\ge 0)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\sqrt{4x} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 일치하므로

$a=4,\ -4a+b=0,\ c+3=0$

따라서 $a=4,\ b=16,\ c=-3$이므로

$a+b+c=4+16+(-3)=17$

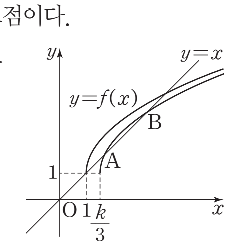
답 ③

19 $f(x)=\sqrt{3x-k}+1=\sqrt{3\left(x-\frac{k}{3}\right)}+1$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{k}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점 A, B는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점이다.

$\overline{AB}$의 길이가 최대인 경우는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지날 때이므로 $f(1)=1$에서



$\sqrt{3-k}+1=1,\ \sqrt{3-k}=0$

$3-k=0 \qquad \therefore k=3$

따라서 함수 $y=\sqrt{3x-3}+1$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점의 x좌표는

$\sqrt{3x-3}+1=x$에서

$\sqrt{3x-3}=x-1$, $3x-3=x^2-2x+1$

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 $A(1, 1)$, $B(4, 4)$ 또는 $A(4, 4)$, $B(1, 1)$이므로

$\overline{AB}$의 길이의 최댓값은

$\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$ 답 ②

20 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로

$y=\dfrac{k}{x-1}+2\ (k\neq 0)$

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=k+2 \qquad \therefore k=-2$

$\therefore y=-\dfrac{2}{x-1}+2=\dfrac{2(x-1)-2}{x-1}=\dfrac{2x-4}{x-1}$

따라서 $a=2$, $b=-4$, $c=-1$이므로

$y=\sqrt{bx-c}+a=\sqrt{-4x+1}+2=\sqrt{-4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)}+2$

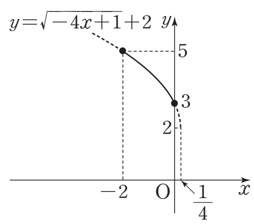
$-2\le x\le 0$일 때, 함수

$y=\sqrt{-4x+1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 함수는

$x=-2$에서 최댓값

$\sqrt{8+1}+2=5$

를 갖는다. 답 ⑤



21 $f(-1)=1$에서 $\sqrt{-a+b}=1$

양변을 제곱하면 $-a+b=1$ …… ㉠

또, $g(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로 $\sqrt{a+b}=3$

양변을 제곱하면 $a+b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=5$

$\therefore ab=4\times 5=20$ 답 ③

22 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x+4)$

$=\sqrt{4-(-2x+4)}+3$

$=\sqrt{2x}+3\ (x\ge 0)$ ← 정의역은 $\{x|x\ge 0\}$, 치역은 $\{y|y\ge 3\}$

$y=\sqrt{2x}+3$이라 하면

$\sqrt{2x}=y-3$, $2x=(y-3)^2$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}(y-3)^2\ (y\ge 3)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{2}(x-3)^2\ (x\ge 3)$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(x-3)^2\ (x\ge 3)$ 답 ④

참고 $f(x)$의 치역 $\{y|y\le 4\}$가 $g(x)$의 정의역 $\{x|x\le 4\}$에 포함되므로(같은 집합이므로) 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 정의된다. 또, $f(x)$, $g(x)$가 모두 일대일대응이므로 $(g\circ f)(x)$도 일대일대응이고 그 역함수가 존재한다.

23 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(2)$

$=(g^{-1}\circ f)(2)$

$=g^{-1}(f(2))$

$=g^{-1}\left(\dfrac{2+3}{2-1}\right)=g^{-1}(5)$ …… ❶

$g^{-1}(5)=a$라 하면 $g(a)=5$이므로

$\sqrt{2a-2}+1=5$, $\sqrt{2a-2}=4$

$2a-2=16$, $2a=18 \qquad \therefore a=9$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(5)=9$ …… ❷

답 9

채점기준	배점
❶ $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(5)$로 나타내기	2
❷ $g^{-1}(5)$의 값을 구하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)$의 값 구하기	2

24 함수 $y=2(\sqrt{x}-1)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=2(\sqrt{x+3}-1) \qquad \therefore y=2\sqrt{x+3}-1$

$\therefore g(x)=2\sqrt{x+3}-1$

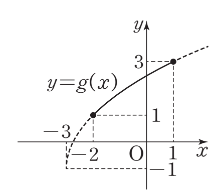
함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

또, 함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x|1\le x\le 4\}$이므로 함수 $g(x)$의 정의역은

$\{x|1\le x+3\le 4\} \qquad \therefore \{x|-2\le x\le 1\}$

$-2\le x\le 1$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$에서 최댓값 3, $x=-2$에서 최솟값 1을 갖고 함수 $g(x)$의 치역은

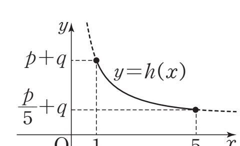
$\{y|1\le y\le 3\}$ …… ㉠ …… ❶



한편, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{p}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $1\le x\le 5$일 때 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=5$에서 최솟값 $\dfrac{p}{5}+q$, $x=1$에서 최댓값 $p+q$를 갖고, $h(x)$의 치역은



$\left\{y\,\middle|\,\dfrac{p}{5}+q\le y\le p+q\right\}$ …… ㉡ …… ❷

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$\dfrac{p}{5}+q=1$, $p+q=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $p=\dfrac{5}{2}$, $q=\dfrac{1}{2}$

$\therefore p-q=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}=2$ …… ❸

답 2

채점기준	배점
❶ 함수 $g(x)$의 치역 구하기	3
❷ 함수 $h(x)$의 치역 구하기	2
❸ $p-q$의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회 p.135~139

01 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(k+1)x^2-(k+1)x+3}$의 값이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $(k+1)x^2-(k+1)x+3\ge0$이 성립해야 한다.

(ⅰ) $k=-1$일 때, $(k+1)x^2-(k+1)x+3=3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ⅱ) $k\ne-1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식
$(k+1)x^2-(k+1)x+3\ge0$이 성립하려면
$k+1>0 \qquad \therefore k>-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $(k+1)x^2-(k+1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 하므로
$D=\{-(k+1)\}^2-4(k+1)\times3\le0,\ (k+1)(k-11)\le0$
$\therefore -1\le k\le11 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $-1<k\le11$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-1\le k\le11$
따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, \cdots, 11$의 13개이다. 답 ⑤

02 $\dfrac{1}{b-\sqrt{ab}}-\dfrac{1}{\sqrt{ab}-a}=\dfrac{1}{\sqrt{b^2}-\sqrt{ab}}-\dfrac{1}{\sqrt{ab}-\sqrt{a^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}-\dfrac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$

$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$

$=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}=\dfrac{-(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{ab}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ 답 ④

03 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})+(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

$x=4,\ y=3+\sqrt{2}$를 대입하면

$\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{4}}{4-(3+\sqrt{2})}$

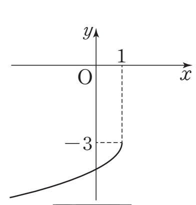
$=\dfrac{4}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{4(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{4+4\sqrt{2}}{1-2}=-4-4\sqrt{2}$ 답 ①

04 ㄱ. 정의역이 $\{x|x\le1\}$, 치역이 $\{y|y\le-3\}$이므로
$y=a\sqrt{b(x-1)}-3\ (a<0,\ b<0) \qquad \therefore ab>0$ (참)

ㄴ. $y=a\sqrt{b(x-1)}-3=a\sqrt{bx-b}-3$이므로
$c=-b,\ d=-3$
$\therefore cd=3b<0$ (거짓)

ㄷ. 함수 $y=a\sqrt{b(x-1)}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역의 x의 값이 증가할수록 y의 값도 증가한다. (참)



$y=a\sqrt{b(x-1)}-3$

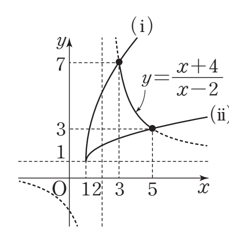
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

05 $ax+2a\ge0$에서 $ax\ge-2a$
이때 정의역이 $\{x|x\ge-2\}$이므로 $a>0$
치역이 $\{y|y\ge4\}$이므로 $b=4$
$y=\sqrt{ax+2a}+4$의 그래프가 점 $(0, 6)$을 지나므로
$6=\sqrt{2a}+4,\ \sqrt{2a}=2,\ 2a=4 \qquad \therefore a=2$
$\therefore a+b=2+4=6$ 답 ⑤

06 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-4=\sqrt{a(x+3)+b}+c$
$\therefore y=\sqrt{a(x+3)+b}+c+4$
이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{a(-x+3)+b}+c+4$
$\therefore y=\sqrt{-ax+3a+b}+c+4$
이것이 $y=\sqrt{-3x+8}+7$과 일치하므로
$-a=-3,\ 3a+b=8,\ c+4=7$
따라서 $a=3,\ b=-1,\ c=3$이므로
$a+b+c=3+(-1)+3=5$ 답 ①

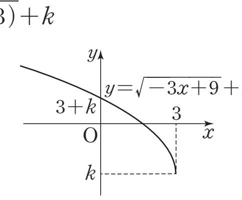
07 $y=\dfrac{x+4}{x-2}=\dfrac{(x-2)+6}{x-2}$

$=\dfrac{6}{x-2}+1$



이므로 함수 $y=\dfrac{x+4}{x-2}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=1$이다.
또, $y=\sqrt{ax-a}+1=\sqrt{a(x-1)}+1$이므로
함수 $y=\sqrt{ax-a}+1$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 1)$을 지난다.
(ⅰ) 함수 $y=\sqrt{ax-a}+1$의 그래프가 점 $(3, 7)$을 지날 때,
$7=\sqrt{3a-a}+1,\ \sqrt{2a}=6,\ 2a=36 \qquad \therefore a=18$
(ⅱ) 함수 $y=\sqrt{ax-a}+1$의 그래프가 점 $(5, 3)$을 지날 때,
$3=\sqrt{5a-a}+1,\ \sqrt{4a}=2,\ 4a=4 \qquad \therefore a=1$
이때 두 함수의 그래프가 만나는 경우는 함수 $y=\sqrt{ax-a}+1$의 그래프가 (ⅰ) 또는 (ⅱ)이거나 (ⅰ)과 (ⅱ) 사이에 있을 때이므로
$1\le a\le18$
따라서 실수 a의 최댓값은 18, 최솟값은 1이므로 최댓값과 최솟값의 곱은
$18\times1=18$ 답 ⑤

08 함수 $y=\sqrt{-3x+9}+k=\sqrt{-3(x-3)}+k$의 그래프가 제1사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y>0$이어야 하므로



$\sqrt{9}+k>0$에서
$k>-3$
따라서 정수 k의 최솟값은 -2이다. 답 ②

09 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a(x-2)}-3\ (a>0)$

이 함수의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

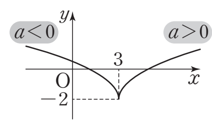
$0=\sqrt{a(3-2)}-3,\ \sqrt{a}=3 \qquad \therefore a=9$

따라서 $f(x)=\sqrt{9x-18}-3$이므로

$f(6)=\sqrt{54-18}-3=6-3=3$

답 ③

10 함수 $y=\sqrt{a(x-3)}-2$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



① $y=\sqrt{a(x-3)}-2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프의 식은

$-y=\sqrt{a(x-3)}-2 \qquad \therefore y=-\sqrt{a(x-3)}+2$

② $\sqrt{a(x-3)}\geq 0$에서 $\sqrt{a(x-3)}-2\geq -2$

즉, 치역은 $\{y\,|\,y\geq -2\}$이다.

③ $a<0$일 때, $x=0$에서 $y\leq 0$이면 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

④ $a>0$일 때, $a(x-3)\geq 0$에서

$x-3\geq 0 \qquad \therefore x\geq 3$

즉, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 3\}$이다.

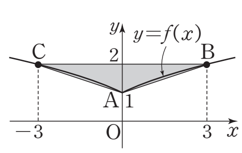
⑤ 그래프가 원점을 지나면 $0=\sqrt{-3a}-2$

$\sqrt{-3a}=2,\ -3a=4 \qquad \therefore a=-\dfrac{4}{3}$

따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

11 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (x\geq 0)\\ \sqrt{-x+1} & (x<0)\end{cases}$이므로



$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $f(0)=1$을 가지므로 $\mathrm{A}(0,\ 1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는

$2=\sqrt{|x|+1}$에서 $|x|+1=4$

$|x|=3 \qquad \therefore x=\pm 3$

즉, $\mathrm{B}(3,\ 2)$라 하면 $\mathrm{C}(-3,\ 2)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\{3-(-3)\}\times(2-1)=3$

답 ③

12 점 P의 y좌표를 a라 하면

$a=\dfrac{1}{2}x+1$에서 $x=2a-2$이므로 $\mathrm{P}(2a-2,\ a)$

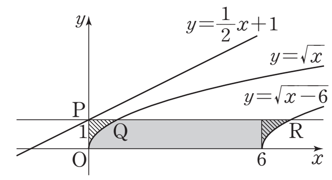
$a=\sqrt{x}$에서 $x=a^2$이므로 $\mathrm{Q}(a^2,\ a)$

이때

$\overline{\mathrm{PQ}}=a^2-(2a-2)=(a-1)^2+1$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 $a=1$일 때 최소이다.

또, 곡선 $y=\sqrt{x-6}$은 곡선 $y=\sqrt{x}$를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같다.



따라서 $a=1$일 때, 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x-6}$과 직선 QR 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 1인 직사각형의 넓이와 같으므로

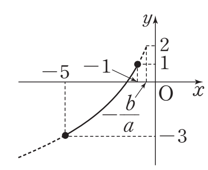
$6\times 1=6$

답 ②

13 주어진 그래프에서 $a<0,\ -\dfrac{b}{2a}<0,\ c>0 \qquad \therefore b<0$

따라서 $-5\leq x\leq -1$일 때 함수

$y=-\sqrt{ax+b}+2=-\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+2$



의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $x=-1$에서 최댓값 $-\sqrt{-a+b}+2$를 갖고, 최댓값이 1이므로

$1=-\sqrt{-a+b}+2,\ \sqrt{-a+b}=1$

$\therefore -a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=-5$에서 최솟값 $-\sqrt{-5a+b}+2$를 갖고, 최솟값이 -3이므로

$-3=-\sqrt{-5a+b}+2,\ \sqrt{-5a+b}=5$

$\therefore -5a+b=25 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6,\ b=-5$

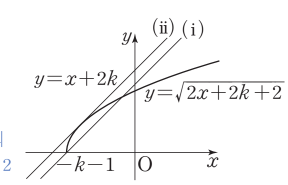
$\therefore a+b=-6+(-5)=-11$

답 ①

14 $y=\sqrt{2x+2k+2}=\sqrt{2(x+k+1)}$

(i) 직선 $y=x+2k$가 점 $(-k-1,\ 0)$을 지날 때,

$0=-k-1+2k$에서 $k=1$ ← 직선의 y절편 2



(ii) 직선 $y=x+2k$가 $y=\sqrt{2x+2k+2}$의 그래프와 접할 때,

$x+2k=\sqrt{2x+2k+2}$의 양변을 제곱하면

$x^2+4kx+4k^2=2x+2k+2$

$\therefore x^2+2(2k-1)x+4k^2-2k-2=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k-1)^2-(4k^2-2k-2)=0$

$-2k+3=0 \qquad \therefore k=\dfrac{3}{2}$ ← 직선 $y=x+2k$의 y절편 3

직선 $y=x+2k$의 y절편은 $2k$이므로

$2k>3$, 즉 $k>\dfrac{3}{2}$일 때 교점의 개수는 0

$2k=3$, 즉 $k=\dfrac{3}{2}$일 때 교점의 개수는 1

$2\leq 2k<3$, 즉 $1\leq k<\dfrac{3}{2}$일 때 교점의 개수는 2

$2k<2$, 즉 $k<1$일 때 교점의 개수는 1

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

15 인공위성 A, B의 공전 속도를 각각 v_A, v_B라 하고, 고도를 각각 r_A, r_B라 하면 $r_A=5000$이고

$v_A=\sqrt{\dfrac{GM}{r_A}}$, $v_B=\sqrt{\dfrac{GM}{r_B}}$

인공위성 A의 공전 속도는 인공위성 B의 공전 속도의 2배이므로 $v_A=2v_B$,

$\sqrt{\dfrac{GM}{r_A}}=2\sqrt{\dfrac{GM}{r_B}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{r_A}}=\dfrac{2}{\sqrt{r_B}}$, $\sqrt{r_B}=2\sqrt{r_A}$

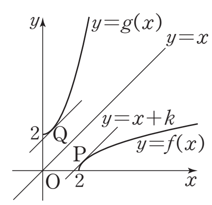
$\therefore r_B=4r_A$

즉, 인공위성 B의 고도는 인공위성 A의 고도의 4배이다.

따라서 인공위성 B의 고도는 $5000\times4=20000(\text{km})$이다.

답 ③

16 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 P는 기울기가 1인 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때 그 접점이고, 점 Q는 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점이어야 한다.



즉, 점 P는 직선 $y=x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 접할 때 그 접점이므로

$\sqrt{x-2}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x-2=x^2+2kx+k^2$, $x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2+2)=0$

$-4k-7=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{7}{4}$

구하는 거리의 최솟값은 직선 $y=x$와 직선 $y=x-\dfrac{7}{4}$ 사이의 거리의 2배와 같다.

이때 두 직선 $y=x$, $y=x-\dfrac{7}{4}$ 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x-\dfrac{7}{4}$, 즉 $4x-4y-7=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-7|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{8}$

따라서 구하는 거리의 최솟값은

$2\times\dfrac{7\sqrt{2}}{8}=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$

답 ⑤

17 $y=(x-1)^2+1\ (x\geq1)$이라 하면

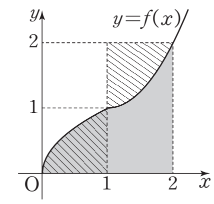
$(x-1)^2=y-1$

$x-1=\sqrt{y-1}\ (\because x-1\geq0) \qquad \therefore x=\sqrt{y-1}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{x-1}+1$

즉, 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$은 함수 $y=(x-1)^2+1\ (x\geq1)$의 역함수이고, 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $f(2)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고, 빗금 친 두 부분의 넓이는 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$(2-1)\times2=2$

답 ②

18 $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(\sqrt{1+3}+2)=f(4)=-11$

함수 $g(x)$에서

$x\geq-3$일 때 $\sqrt{x+3}+2\geq2$

$x<-3$일 때 $\dfrac{2}{3}x+4<2$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이고, $g(k)=3>2$이므로 $x\geq-3$

즉, $g(k)=3$에서

$\sqrt{k+3}+2=3$, $\sqrt{k+3}=1$

$k+3=1 \qquad \therefore k=-2$

$\therefore g^{-1}(3)=-2$

$\therefore (f\circ g)(1)-g^{-1}(3)=-11+2=-9$

답 ②

19 $f(3)=\sqrt{6-2}+1=3$이므로

$f(3)+(f^{-1}\circ f^{-1})(k)=1$에서

$3+(f^{-1}\circ f^{-1})(k)=1 \qquad \therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(k)=-2$

즉, $(f\circ f)^{-1}(k)=-2$이므로

$k=(f\circ f)(-2)$

$\quad=f(f(-2))=f(-\sqrt{2+2}+2)$

$\quad=f(0)=2-\sqrt{2}$

답 ④

20 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로 유리함수의 식을

$y=\dfrac{a}{x-2}+1$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

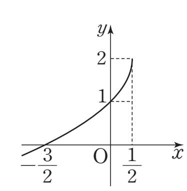
$0=\dfrac{a}{-2}+1 \qquad \therefore a=2$

즉, $a=2$, $b=-2$, $c=1$이므로

$y=-\sqrt{bx+c}+a=-\sqrt{-2x+1}+2$

$\quad=-\sqrt{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}+2$

$x=0$일 때, $y=1$이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 그래프가 지나는 사분면은 제1, 2, 3사분면이다.

답 ④

21 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프의 식은

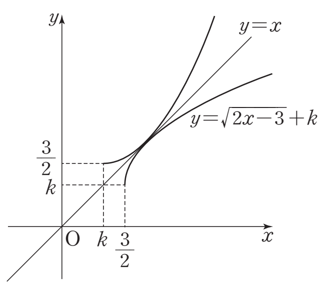
$y-6=\sqrt{a(x-1)+b} \qquad \therefore y=\sqrt{ax-a+b}+6$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-ax-a+b}+6$

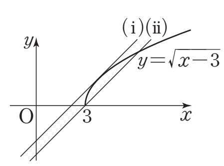
이 함수의 그래프가 함수 $y=\sqrt{3-2x}-2c$의 그래프와 일치하므로
$-a=-2,\ -a+b=3,\ -2c=6$
$a=2,\ b=5,\ c=-3$
함수 $y=\dfrac{1}{x+2c}-ab$, 즉 $y=\dfrac{1}{x-6}-10$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=6,\ y=-10$
따라서 구하는 점근선의 교점의 좌표는 $(6,\ -10)$이다. 답 ③

22 함수 $y=\sqrt{2x-3}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=\sqrt{2x-3}+k$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 한 점에서 접하려면 함수 $y=\sqrt{2x-3}+k$의 그래프와 직선 $y=x$가 접하면 된다.



$\sqrt{2x-3}+k=x$에서
$\sqrt{2x-3}=x-k$
양변을 제곱하면
$2x-3=x^2-2kx+k^2$
$\therefore x^2-2(k+1)x+k^2+3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2+3)=0,\ 2k-2=0$
$2k=2 \qquad \therefore k=1$ 답 ①

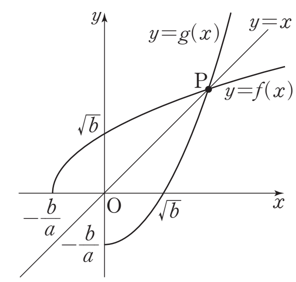
23 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1인 직선이다. …… ❶



(i) 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프에 접할 때,
$x+k=\sqrt{x-3}$에서 양변을 제곱하면
$x^2+2kx+k^2=x-3$
$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2+3=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(2k-1)^2-4(k^2+3)=0$
$-4k-11=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{11}{4}$ …… ❷
(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때,
$0=3+k \qquad \therefore k=-3$ …… ❸
이때 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만나는 경우는 직선이 (i)이거나 (ii)보다 아래에 있을 때이므로
$k=-\dfrac{11}{4}$ 또는 $k<-3$ …… ❹
따라서 $\alpha=-\dfrac{11}{4},\ \beta=-3$이므로
$100\alpha\beta=100\times\left(-\dfrac{11}{4}\right)\times(-3)=825$ …… ❺
답 825

채점기준	배점
❶ 주어진 조건에 맞게 그래프 그리기	2
❷ 직선 $y=x+k$가 함수의 그래프에 접할 때의 k의 값 구하기	2
❸ 직선 $y=x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때의 k의 값 구하기	1
❹ 주어진 조건을 만족시키는 실수 k의 값 또는 값의 범위 구하기	1
❺ $100\alpha\beta$의 값 구하기	1

24 $g(1)=-1$에서 $f(-1)=1$이므로
$\sqrt{-a+b}=1 \qquad \therefore -a+b=1$ …… ㉠ …… ❶
$a>0,\ b>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

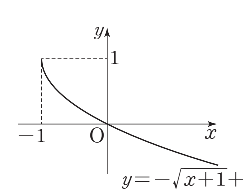


이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점을 $\mathrm{P}(c,\ c)$라 하면 원점 O에서 점 P까지의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{c^2+c^2}=3\sqrt{2}$
$\sqrt{2}c=3\sqrt{2} \qquad \therefore c=3$
$\therefore \mathrm{P}(3,\ 3)$ …… ❷
점 P는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $f(3)=3$
$\sqrt{3a+b}=3 \qquad \therefore 3a+b=9$ …… ㉡ …… ❸
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=3$
$\therefore a+b=2+3=5$ …… ❹
답 5

채점기준	배점
❶ $g(1)=-1$임을 이용하여 $a,\ b$ 사이의 관계식 구하기	2
❷ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 좌표 구하기	2
❸ ❷의 교점의 좌표를 이용하여 $a,\ b$ 사이의 관계식 구하기	1
❹ $a+b$의 값 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제 p.140~144

1 함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+2$의 그래프가 점 $(a,\ -a)$를 지나므로
$-a=-\sqrt{a-a}+a+2,\ -2a=2 \qquad \therefore a=-1$
$\therefore y=-\sqrt{x+1}+1$
함수 $y=-\sqrt{x}$의 치역은 $\{y\,|\,y\le 0\}$이고 함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 치역은 $\{y\,|\,y\le 1\}$이다. 답 ①



2 $ax+9\ge 0$에서 $ax\ge -9$
이때 정의역이 $\{x\,|\,x\le 3\}$이므로 $a<0 \qquad \therefore x\le -\dfrac{9}{a}$

즉, $-\dfrac{9}{a}=3$이므로 $a=-3$

$\therefore f(x)=\sqrt{-3x+9}+b$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ -3)$을 지나므로 $f(3)=-3$

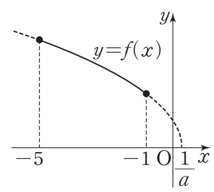
$\therefore b=-3$

이때 $\sqrt{-3x+9}\geq 0$에서 $\sqrt{-3x+9}-3\geq -3$

따라서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\mid y\geq -3\}$이다. 답 ②

3 $f(x)=\sqrt{-ax+1}=\sqrt{-a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{-ax}\ (a>0)$의 그래프는 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{a}$만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $-5\leq x\leq -1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-5$에서 최댓값 $\sqrt{5a+1}$을 갖고, 최댓값이 4이므로

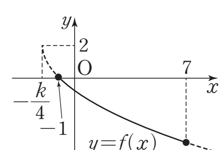
$\sqrt{5a+1}=4$

양변을 제곱하면

$5a+1=16,\ 5a=15 \qquad \therefore a=3$ 답 3

4 $f(x)=-\sqrt{4x+k}+2=-\sqrt{4\left(x+\dfrac{k}{4}\right)}+2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{k}{4}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $-1\leq x\leq 7$일 때 함수 $f(x)$는 $x=7$에서 최솟값 $-\sqrt{28+k}+2$를 갖고, 최솟값이 -4이므로

$-\sqrt{28+k}+2=-4$

$\sqrt{28+k}=6,\ 28+k=36 \qquad \therefore k=8$ 답 8

5 $f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$f(k)=\sqrt{k-2}+2=7,\ \sqrt{k-2}=5$

양변을 제곱하면 $k-2=25 \qquad \therefore k=27$

$\therefore f^{-1}(7)=27$ 답 27

다른풀이 $y=\sqrt{x-2}+2$라 하면

$y-2=\sqrt{x-2}\ (x\geq 2,\ y\geq 2)$

양변을 제곱하면 $y^2-4y+4=x-2$

$\therefore x=y^2-4y+6\ (y\geq 2)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x^2-4x+6\ (x\geq 2)$

즉, $f^{-1}(x)=x^2-4x+6\ (x\geq 2)$

$\therefore f^{-1}(7)=49-28+6=27$

6 $f^{-1}(-1)=6$이므로 $f(6)=-1$

$-\sqrt{18+k}+4=-1,\ \sqrt{18+k}=5$

양변을 제곱하면

$18+k=25 \qquad \therefore k=7$

$\therefore f(x)=-\sqrt{3x+7}+4$

$f^{-1}(0)=a$라 하면 $f(a)=0$이므로

$-\sqrt{3a+7}+4=0,\ \sqrt{3a+7}=4$

양변을 제곱하면 $3a+7=16,\ 3a=9 \qquad \therefore a=3$

$\therefore f^{-1}(0)=3$ 답 3

7 $f^{-1}(g(x))=2x$에서 $g(x)=f(2x)$

즉, $g(x)=\sqrt{3\times 2x-12}=\sqrt{6x-12}$

$\therefore g(3)=\sqrt{18-12}=\sqrt{6}$ 답 ③

8 $f^{-1}(g(x))=3x$에서 $g(x)=f(3x)$

$\therefore g(x)=\sqrt{3x-a}$

이때 $g(2)=1$에서 $6-a=1 \qquad \therefore a=5$

따라서 $f(x)=\sqrt{x-5}$이므로

$f(6a)=f(30)=\sqrt{30-5}=5$ 답 ④

9 $\mathrm{B}(k,\ \sqrt{k}),\ \mathrm{C}(k,\ k)$이고 삼각형 OBC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 2배이므로 $\triangle\mathrm{OBC}=2\triangle\mathrm{OAB}$에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BC}}=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{AB}}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{k},\ \overline{\mathrm{BC}}=k-\sqrt{k}$이므로

$k-\sqrt{k}=2\sqrt{k} \qquad \therefore k=3\sqrt{k}$

양변을 제곱하면 $k^2=9k$

$k^2-9k=0,\ k(k-9)=0$

$\therefore k=9\ (\because k>1)$

따라서 $\mathrm{B}(9,\ 3),\ \mathrm{C}(9,\ 9),\ \overline{\mathrm{BC}}=9-3=6,\ \overline{\mathrm{OA}}=9$이므로 삼각형 OBC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\times 9\times 6=27$ 답 ⑤

10 두 점 A, B의 y좌표가 k이므로 점 A의 x좌표는

$k=\sqrt{x}$에서 $x=k^2$

점 B의 x좌표는 $k=\sqrt{3x}$에서 $k^2=3x \qquad \therefore x=\dfrac{1}{3}k^2$

$\therefore \mathrm{A}(k^2,\ k),\ \mathrm{B}\left(\dfrac{k^2}{3},\ k\right)$

점 C의 x좌표는 k^2이므로 y좌표는

$y=\sqrt{3k^2}=\sqrt{3}k\ (\because k>0) \qquad \therefore \mathrm{C}(k^2,\ \sqrt{3}k)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=k^2-\dfrac{k^2}{3}=\dfrac{2}{3}k^2,\ \overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}k-k=(\sqrt{3}-1)k$이므로 삼각형 ACB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}k^2\times(\sqrt{3}-1)k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}k^3$

이때 삼각형 ACB의 넓이가 $9\sqrt{3}-9$이므로

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}k^3=9(\sqrt{3}-1)$

$k^3=27 \qquad \therefore k=3$ 답 ④

참고 $k^3=27$에서 $k^3-3^3=0$

$(k-3)(k^2+3k+9)=0$

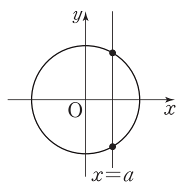
$\therefore k=3\ \left(\because k^2+3k+9=\left(k+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}>0\right)$

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.146~149

01 ③



직선 $x=a$와 두 점에서 만나는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다. 답 ③

02 $f(-1)=2\times(-1)+1=-1$

$f(3)=-3^2+4=-5$

$\therefore f(-1)+f(3)=-1+(-5)=-6$ 답 ①

03 $f^{-1}(5)=1$에서 $f(1)=5$이므로 $2+k=5$ $\quad\therefore k=3$ 답 ③

04 $f(5)=9$, $(f\circ f)(9)=f(f(9))=f(3)=7$

$\therefore f(5)+(f\circ f)(9)=9+7=16$ 답 ②

05 $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2x^2-8x}{x^2+x-6}\div\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$

$=\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2x^2-8x}{x^2+x-6}\times\dfrac{x-2}{x^2-3x-4}$

$=\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2x(x-4)}{(x+3)(x-2)}\times\dfrac{x-2}{(x+1)(x-4)}$

$=\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2x}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{3(x+1)-2x}{(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{x+3}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{x+1}$ 답 ④

06 조건 p의 진리집합을 P라 하면 전체집합 U의 원소 중에서 짝수는 2, 4, 6, 8이고, 6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로

$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{5, 7\}$이므로

구하는 모든 원소의 합은 $5+7=12$ 답 ②

07 $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

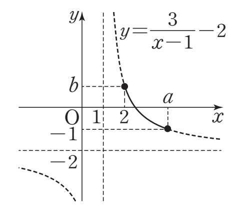
$=\dfrac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})+2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{4\sqrt{x+1}}{(x+1)-(x-1)}=2\sqrt{x+1}$

$2\sqrt{x+1}$에 $x=15$를 대입하면

$2\sqrt{15+1}=2\sqrt{16}=2\times4=8$ 답 ②

08 $2\le x\le a$일 때, 함수 $y=\dfrac{3}{x-1}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 치역이 $\{y\mid -1\le y\le b\}$이므로



$x=2$일 때 $y=b$, 즉

$b=\dfrac{3}{2-1}-2 \qquad \therefore b=1$

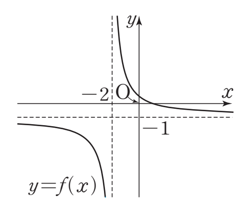
$x=a$일 때 $y=-1$, 즉

$-1=\dfrac{3}{a-1}-2$, $\dfrac{3}{a-1}=1$

$a-1=3 \qquad \therefore a=4$

$\therefore a+b=4+1=5$ 답 ①

09 $f(x)=\dfrac{a}{x+2}-1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-1$이므로 $a<0$이면 제1사분면을 지나지 않는다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제1사분면을 지나려면 $a>0$, $f(0)>0$이어야 하므로



$f(0)=\dfrac{a}{2}-1>0$에서 $a>2$

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다. 답 ③

10 $2a>0$, $3b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$6=2a+3b\ge2\sqrt{2a\times3b}=2\sqrt{6ab}$

에서

$\sqrt{6ab}\le3$ (단, 등호는 $2a=3b$일 때 성립)

위의 식의 양변을 제곱하면

$6ab\le9 \qquad \therefore ab\le\dfrac{3}{2}$

$\therefore \dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{2a+3b}{ab}=\dfrac{6}{ab}\ge\dfrac{6}{\frac{3}{2}}=4$

따라서 구하는 최솟값은 4이다. 답 ④

11 $(x+y)^2-3xy=(x^2+2xy+y^2)-3xy$

$=x^2-\boxed{xy}+y^2$

$=\left(x^2-xy+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}\right)+y^2$

$=\left(x-\boxed{\dfrac{y}{2}}\right)^2+\boxed{\dfrac{3}{4}}y^2$

그런데 $\left(x-\boxed{\dfrac{y}{2}}\right)^2\ge0$, $\boxed{\dfrac{3}{4}}y^2\boxed{\ge}0$이므로

$(x+y)^2-3xy\ge0$이 되어 $(x+y)^2\ge3xy$이다.

여기서 등호는 $x-\boxed{\dfrac{y}{2}}=0$이고 $\boxed{\dfrac{3}{4}}y^2=0$일 때, 즉

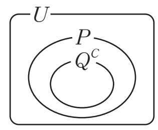
$\boxed{x=y=0}$일 때 성립한다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

12 $\sim q$가 p이기 위한 충분조건이므로

$Q^C \subset P$

두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $P-Q^C=P\cap Q$

② $P\cap Q^C=Q^C$

③ $P\cup Q^C=P$

④ $P\cup Q=(P\cup Q^C)\cup Q$ ($\because$ ③)

$\quad =P\cup(Q^C\cup Q)$

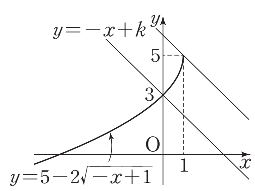
$\quad =P\cup U=U$

⑤ $Q^C-P=\varnothing$

답 ④

13 $y=5-2\sqrt{-x+1}=-2\sqrt{-(x-1)}+5$

이므로 함수 $y=5-2\sqrt{-x+1}$의 그래프는 함수 $y=-2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1,\ 5)$를 지날 때,

$5=-1+k \qquad \therefore k=6$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0,\ 3)$을 지날 때,

$3=0+k \qquad \therefore k=3$

(i), (ii)에서 함수 $y=5-2\sqrt{-x+1}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

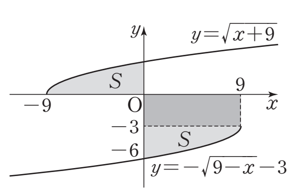
$3<k\le 6$

따라서 정수 k의 값은 4, 5, 6이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$4+5+6=15$

답 ③

14 함수 $y=-\sqrt{9-x}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x+9}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.



따라서 구하는 넓이는

$S+9\times 3=S+27$

답 ③

15 ㄱ. $y=-a\sqrt{-bx}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-a\sqrt{-b\times(-x)} \qquad \therefore y=a\sqrt{bx}$ (참)

ㄴ. $a<0$, $b>0$이면 그래프는 제4사분면을 지난다. (거짓)

ㄷ. $y=a\sqrt{bx}$의 그래프를 x축의 방향으로 c만큼, y축의 방향으로 $-d$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+d=a\sqrt{b(x-c)} \qquad \therefore y=a\sqrt{bx-bc}-d$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

16 $f^1(x)=f(x)=1-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x-1}{2x}$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))$

$$=f\left(\frac{2x-1}{2x}\right)=\frac{2\times\frac{2x-1}{2x}-1}{2\times\frac{2x-1}{2x}}=\frac{x-1}{2x-1}$$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$$=f\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)=\frac{2\times\frac{x-1}{2x-1}-1}{2\times\frac{x-1}{2x-1}}=\frac{-1}{2x-2}$$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$

$$=f\left(\frac{-1}{2x-2}\right)=\frac{2\times\frac{-1}{2x-2}-1}{2\times\frac{-1}{2x-2}}=x$$

⋮

즉, $f^{4k-3}(x)=\dfrac{2x-1}{2x}$, $f^{4k-2}(x)=\dfrac{x-1}{2x-1}$,

$f^{4k-1}(x)=\dfrac{-1}{2x-2}$, $f^{4k}(x)=x$ (k는 자연수)

$\therefore f^{111}(x)=f^{4\times 28-1}(x)=\dfrac{-1}{2x-2}$

따라서 $a=-2$, $b=0$, $c=-1$이므로

$a+b+c=-2+0+(-1)=-3$

답 ①

17 명제 '집합 P의 어떤 원소 x에 대하여 x는 3의 배수이다.'가 참이 되려면 집합 P의 원소 중에는 3의 배수가 적어도 하나 존재해야 한다. …… ❶

$\{3\}\subset P\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$을 만족시키는 집합 P의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

$\{6\}\subset P\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$을 만족시키는 집합 P의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

$\{3,\ 6\}\subset P\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$을 만족시키는 집합 P의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$ …… ❷

따라서 구하는 집합 P의 개수는

$8+8-4=12$ …… ❸

답 12

채점기준	배점
❶ 주어진 명제가 참이 될 조건 제시하기	2
❷ $\{3\}\subset P\subset\{1, 2, 3, 6\}$, $\{6\}\subset P\subset\{1, 2, 3, 6\}$, $\{3, 6\}\subset P\subset\{1, 2, 3, 6\}$을 만족시키는 집합 P의 개수를 각각 구하기	3
❸ 집합 P의 개수 구하기	1

18 함수 f는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

조건 (가)의 $(f\circ f)(x)+f^{-1}(x)=2x$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(f\circ f)(1)+f^{-1}(1)=2$

이때 $(f\circ f)(1)\in X$, $f^{-1}(1)\in X$이므로

$(f\circ f)(1)=f^{-1}(1)=1$

즉, $f(1)=1$

조건 (가)의 $(f\circ f)(x)+f^{-1}(x)=2x$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$(f\circ f)(2)+f^{-1}(2)=4$

이때 $(f\circ f)(2)\in X$, $f^{-1}(2)\in X$이므로

$(f\circ f)(2)=1$, $f^{-1}(2)=3$

또는 $(f\circ f)(2)=2$, $f^{-1}(2)=2$

또는 $(f\circ f)(2)=3$, $f^{-1}(2)=1$

$(f\circ f)(2)=1$이면 $f(2)=1$이고 이는 함수 f가 일대일대응인 것에 모순이다.

$f^{-1}(2)=1$이면 $f(1)=2$이고 이는 $f(1)=1$에 모순이다.

즉, $(f\circ f)(2)=f^{-1}(2)=2$이므로 $f(2)=2$ …… ❶

조건 ㈎의 $(f\circ f)(x)+f^{-1}(x)=2x$의 양변에 $x=6$을 대입하면

$(f\circ f)(6)+f^{-1}(6)=12$

이때 $(f\circ f)(6)\in X$, $f^{-1}(6)\in X$이고 $f(6)\neq 6$이므로

$(f\circ f)(6)=5$, $f^{-1}(6)=7$

또는 $(f\circ f)(6)=7$, $f^{-1}(6)=5$ …… ❷

(ⅰ) $(f\circ f)(6)=5$, $f^{-1}(6)=7$일 때,

$f^{-1}(6)=7$이므로 $f(7)=6$

조건 ㈏에서 $f(3)+f(5)=10$이므로

$f(3)=3$, $f(5)=7$ 또는 $f(3)=7$, $f(5)=3$

즉, $f(6)=4$ 또는 $f(6)=5$

㈀ $f(6)=4$일 때,

$(f\circ f)(6)=5$에서 $f(4)=5$

㈁ $f(6)=5$일 때,

$(f\circ f)(6)=5$에서 $f(5)=5$

이는 함수 f가 일대일대응인 것에 모순이다.

(ⅱ) $(f\circ f)(6)=7$, $f^{-1}(6)=5$일 때,

$f^{-1}(6)=5$이므로 $f(5)=6$

조건 ㈏에서 $f(3)+f(5)=10$이므로 $f(3)=4$

즉, $f(6)=3$ 또는 $f(6)=5$ 또는 $f(6)=7$

㈀ $f(6)=3$이면 $(f\circ f)(6)=f(f(6))=f(3)=4$이므로 $(f\circ f)(6)=7$에 모순이다.

㈁ $f(6)=5$이면 $(f\circ f)(6)=f(f(6))=f(5)=6$이므로 $(f\circ f)(6)=7$에 모순이다.

㈂ $f(6)=7$이면 $(f\circ f)(6)=f(f(6))=f(7)=7$이므로 함수 f가 일대일대응인 것에 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(4)=5$, $f(6)=4$, $f(7)=6$ …… ❸

$\therefore f(4)\times\{f(6)+f(7)\}=5\times(4+6)=50$ …… ❹

답 50

채점기준	배점
❶ $f(1)$, $f(2)$의 값을 각각 구하기	2
❷ $(f\circ f)(6)$, $f^{-1}(6)$의 값이 될 수 있는 수를 각각 구하기	2
❸ $f(4)$, $f(6)$, $f(7)$의 값을 각각 구하기	2
❹ $f(4)\times\{f(6)+f(7)\}$의 값을 구하기	1

19 $y=\dfrac{2x}{6x-9}=\dfrac{3}{6x-9}+\dfrac{1}{3}$

점 P의 x좌표를 $a\left(a>\dfrac{3}{2}\right)$라 하면

$A(a, 0)$, $B\left(0, \dfrac{2a}{6a-9}\right)$, $P\left(a, \dfrac{2a}{6a-9}\right)$

이때 사각형 OAPB가 정사각형이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}$에서

$a=\dfrac{2a}{6a-9}$, $6a^2-9a=2a$

$6a^2-11a=0$, $a(6a-11)=0$

$\therefore a=\dfrac{11}{6}\left(\because a>\dfrac{3}{2}\right)$

즉, $P\left(\dfrac{11}{6}, \dfrac{11}{6}\right)$ …… ❶

또, 점 Q의 x좌표를 $b\left(0<b<\dfrac{3}{2}\right)$라 하면

$C(b, 0)$, $D\left(0, \dfrac{2b}{6b-9}\right)$, $Q\left(b, \dfrac{2b}{6b-9}\right)$

이때 사각형 ODQC가 정사각형이므로 $\overline{OC}=\overline{OD}$에서

$b=-\dfrac{2b}{6b-9}$, $6b^2-9b=-2b$

$6b^2-7b=0$, $b(6b-7)=0$

$\therefore b=\dfrac{7}{6}\left(\because 0<b<\dfrac{3}{2}\right)$

즉, $Q\left(\dfrac{7}{6}, -\dfrac{7}{6}\right)$ …… ❷

이때

$\overline{OP}=\sqrt{\left(\dfrac{11}{6}\right)^2+\left(\dfrac{11}{6}\right)^2}=\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$,

$\overline{OQ}=\sqrt{\left(\dfrac{7}{6}\right)^2+\left(-\dfrac{7}{6}\right)^2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$

이므로

$\overline{OP}:\overline{OQ}=\dfrac{11\sqrt{2}}{6}:\dfrac{7\sqrt{2}}{6}=11:7$

따라서 $m=11$, $n=7$이므로

$m+n=11+7=18$ …… ❸

답 18

채점기준	배점
❶ 점 P의 좌표 구하기	3
❷ 점 Q의 좌표 구하기	3
❸ $m+n$의 값 구하기	1

20 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 역함수의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 점 $(0, 2)$를 지난다.

즉, $2=\sqrt{b}$에서 $b=4$ …… ❶

함수 $y=\sqrt{ax+4}$의 역함수의 그래프가 점 $(5, 7)$을 지나므로 함수 $y=\sqrt{ax+4}$의 그래프는 점 $(7, 5)$를 지난다.

즉, $5=\sqrt{7a+4}$에서

$7a+4=25$, $7a=21$ $\quad\therefore a=3$ …… ❷

$\therefore a+b=3+4=7$ …… ❸

답 7

채점기준	배점
❶ b의 값 구하기	2
❷ a의 값 구하기	2
❸ $a+b$의 값 구하기	1

실전 모의고사 2회

p.150~153

01 $f(-1)=1-2=-1$

$f(0)=0-2=-2$

$f(1)=1-2=-1$

$f(2)=4-2=2$

즉, 함수 $f(x)$의 치역은 $\{-2, -1, 2\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은 $-2+(-1)+2=-1$

답 ①

02 ② 모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다. (참)

③ $x=1$일 때 성립하므로 주어진 명제는 참이다.

④ [반례] $a=0$이면 $\sqrt{2}a$는 유리수이므로 명제 'a가 유리수이면 $\sqrt{2}a$는 무리수이다.'는 거짓이다.

답 ④

03 ① 역: $x>10$이면 $x>5$이다. (참)

대우: $x\le 10$이면 $x\le 5$이다. (거짓)

[반례] $x=8$이면 $x\le 10$이지만 $x>5$이다.

② 역: $a\ne 2$ 또는 $b\ne 3$이면 $ab\ne 6$이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=6$이면 $a\ne 2$ 또는 $b\ne 3$이지만 $ab=6$이다.

대우: $a=2$이고 $b=3$이면 $ab=6$이다. (참)

③ 역: ab가 정수이면 $a+b$도 정수이다. (거짓)

[반례] $a=4$, $b=\frac{3}{2}$이면 $ab=4\times\frac{3}{2}=6$은 정수이지만 $a+b=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$은 정수가 아니다.

대우: ab가 정수가 아니면 $a+b$도 정수가 아니다. (거짓)

[반례] $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이면 $ab=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$은 정수가 아니지만 $a+b=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$은 정수이다.

④ 역: x가 무리수이면 x^2은 유리수이다. (거짓)

[반례] $x=1+\sqrt{2}$이면 x는 무리수이지만 $x^2=3+2\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

대우: x가 유리수이면 x^2은 무리수이다. (거짓)

[반례] $x=3$이면 x는 유리수이지만 $x^2=9$는 무리수가 아니다.

⑤ 역: x 또는 y가 짝수이면 xy가 짝수이다. (참)

대우: x, y가 모두 홀수이면 xy는 홀수이다. (참)

따라서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ⑤이다.

답 ⑤

04 $\left(4x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+16y\right)=4+64xy+\frac{1}{xy}+16$

$=64xy+\frac{1}{xy}+20$

$64xy>0$, $\frac{1}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(4x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+16y\right)=64xy+\frac{1}{xy}+20$

$\ge 2\sqrt{64xy\times\frac{1}{xy}}+20$

$=2\times 8+20=36$

$\left(\text{단, 등호는 } 64xy=\frac{1}{xy}\text{, 즉 } xy=\frac{1}{8}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\left(4x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+16y\right)$의 최솟값은 36이다.

답 ②

05 $(g\circ f)(1)=g(f(1))$

이때 $f(1)=\frac{1+1}{1-3}=-1$이므로

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-1)$

$=-4+a=-2$

$\therefore a=2$

답 ⑤

06 $x+a\ge 0$에서 $x\ge -a$

즉, 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x\ge -a\}$이므로

$a=1$

또, 함수 $y=\sqrt{x+1}+2$의 치역이 $\{y|y\ge 2\}$이므로 $b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

답 ③

07 $y=\frac{4x+2}{2x-1}=\frac{2x+1}{x-\frac{1}{2}}=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2}{x-\frac{1}{2}}=\frac{2}{x-\frac{1}{2}}+2$

즉, 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$a=\frac{1}{2}$, $b=2$, $k=2$

$\therefore abk=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

답 ④

08 $x-1\ge 0$에서 $x\ge 1$ …… ㉠

$3-x\ge 0$에서 $x\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le x\le 3$

이때

$\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{4x^2-32x+64}$

$=\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{4(x^2-8x+16)}$

$=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{4(x-4)^2}$

$=|x+2|-|2(x-4)|$

이고, $1\le x\le 3$에서

$x+2>0$, $x-4<0$

이므로

$\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{4x^2-32x+64}=|x+2|-|2(x-4)|$

$=(x+2)+2(x-4)$

$=x+2+2x-8$

$=3x-6$

답 ⑤

09 주어진 그림에서 $f(1)=3$, $f(2)=4$, $f(3)=2$, $f(4)=1$

$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(g(1))=g(f(1))$

$f(4)=g(3)$ $\quad\therefore g(3)=1$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(g(3))=g(f(3))$

$f(1)=g(2)$ $\quad\therefore g(2)=3$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(g(2))=g(f(2))$

$f(3)=g(4)$ $\quad\therefore g(4)=2$

$\therefore g(2)\times g(4)=3\times 2=6$

답 ②

10 점 A의 좌표를 $(a,\ 2\sqrt{a})\ (a>0)$라 하면

$\mathrm{B}(4a,\ 2\sqrt{a})$, $\mathrm{C}(a,\ \sqrt{a})$

삼각형 ACB가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$에서

$4a-a=2\sqrt{a}-\sqrt{a}$, $3a=\sqrt{a}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$9a^2=a$, $9a^2-a=0$

$a(9a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{9}\ (\because a>0)$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}=3a=3\times\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$이므로 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

답 ①

11 ㄱ. $(x-y)(y-z)=0$에서 $x=y$ 또는 $y=z$

즉, $p\longrightarrow q$는 거짓이고, $q\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄴ. $|x|+|y|=0$에서 $x=0$, $y=0$

$|x+y|=|x-y|$의 양변을 제곱하면

$x^2+2xy+y^2=x^2-2xy+y^2$ $\quad\therefore xy=0$

즉, $p\Longrightarrow q$이고, $q\longrightarrow p$는 거짓

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄷ. $x>y$이고 $y>z$이면 $x>y>z$

즉, $p\Longrightarrow q$이고, $q\longrightarrow p$는 거짓

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

12 $f(x)=\frac{k}{x+1}+3$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3$

(i) $k>0$일 때

$0\le x\le 3$에서 $f(x)>3$이므로 최댓값이 2가 될 수 없다.

(ii) $k<0$일 때

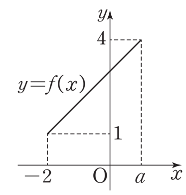
$0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $\frac{k}{4}+3$을 갖고, 최댓값이 2이므로

$\frac{k}{4}+3=2$, $\frac{k}{4}=-1$ $\quad\therefore k=-4$

(i), (ii)에서 $k=-4$

답 ④

13 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이고, $a\ge -2$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ 4)$를 지나야 하므로

$f(-2)=1$에서 $-2+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(a)=4$에서 $a+b=4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

$\therefore ab=1\times 3=3$

답 ⑤

14 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=a$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-3}+a\ (k>0)$ $\cdots\cdots$ ㉠

라 하면 ㉠의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\frac{k}{-3}+a$, $\frac{k}{3}=a$ $\quad\therefore k=3a$

$k=3a$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{3a}{x-3}+a=\frac{3a+a(x-3)}{x-3}=\frac{ax}{x-3}$

따라서 $a=1$, $b=0$, $c=-3$이므로

$a+b+c=1+0+(-3)=-2$

답 ①

15 $f^1(2)=f(2)=3$

$f^2(2)=f(f^1(2))=f(3)=1$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(1)=2$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(2)=3$

$\vdots$

즉, $f^n(2)$의 값은 3, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $999=3\times 333$이므로

$f^{999}(2)=f^3(2)=2$

또,

$f^1(3)=f(3)=1$

$f^2(3)=f(f^1(3))=f(1)=2$

$f^3(3)=f(f^2(3))=f(2)=3$

$f^4(3)=f(f^3(3))=f(3)=1$

$\vdots$

즉, $f^n(3)$의 값은 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $1000=3\times 333+1$이므로

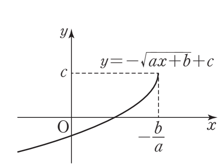
$f^{1000}(3)=f^1(3)=1$

$\therefore f^{999}(2)+f^{1000}(3)=2+1=3$

답 ②

16 $f(x)=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지나므로 오른쪽 그림과 같다.



즉, $a<0$, $-\dfrac{b}{a}>0$, $c>0$이므로

$a<0$, $b>0$, $c>0$

이때 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$에서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $a<0$이므로 위로 볼록하고, $-\dfrac{b}{2a}>0$이므로 축이 y축의 오른쪽에 있으며, $c>0$이므로 y축과 x축의 위쪽에서 만난다.

따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

17 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$|x-1|<k$에서 $-k<x-1<k$

$\therefore 1-k<x<1+k$

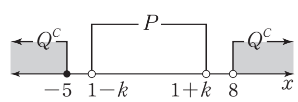
즉, $P=\{x|1-k<x<1+k\}$ …… ❶

또, $Q=\{x|-5<x\le 8\}$에서

$Q^C=\{x|x\le -5$ 또는 $x>8\}$ …… ❷

명제 '어떤 x에 대하여 p이고 $\sim q$이다.'가 거짓이려면

$P\cap Q^C=\varnothing$이어야 한다.



위의 그림에서 $-5\le 1-k$, $1+k\le 8$

$-5\le 1-k$에서 $k\le 6$ …… ㉠

$1+k\le 8$에서 $k\le 7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $k\le 6$ …… ❸

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 모든 자연수 k의 값의 합은 $1+2+3+4+5+6=21$ …… ❹

답 21

채점기준	배점
❶ 조건 p의 진리집합 구하기	2
❷ 조건 $\sim q$의 진리집합 구하기	2
❸ k의 값의 범위 구하기	2
❹ 모든 자연수 k의 값의 합 구하기	1

18 함수 $f(x)$가 정의역이 $X=\{-2, -1, 3\}$인 항등함수이므로

$f(-2)=-2$, $f(-1)=-1$, $f(3)=3$

$f(-2)=-2$에서

$4a-2b-2=-2 \quad \therefore 2a-b=0$ …… ㉠ …… ❶

$f(-1)=-1$에서

$a-b-2=-1 \quad \therefore a-b=1$ …… ㉡ …… ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-2$

$\therefore a+b=-1+(-2)=-3$ …… ❸

답 -3

채점기준	배점
❶ $f(-2)$의 값을 이용하여 a, b에 대한 일차방정식 세우기	2
❷ $f(-1)$의 값을 이용하여 a, b에 대한 일차방정식 세우기	2
❸ a, b의 값과 $a+b$의 값 구하기	2

19 집 A와 집 B에 있는 덕트 안의 공기의 속력의 비가 3 : 5이므로 두 집 A, B에 있는 덕트 안의 공기의 속력을 각각 $3v$, $5v$ $(v>0)$라 하자. …… ❶

두 집 A, B의 덕트 안의 압력은 각각

$P_A=\dfrac{c\times(3v)^2}{2g}=\dfrac{9cv^2}{2g}$

$P_B=\dfrac{2c\times(5v)^2}{2g}=\dfrac{50cv^2}{2g}$ …… ❷

따라서 $P_B=kP_A$에서

$k=\dfrac{P_B}{P_A}=\dfrac{\dfrac{50cv^2}{2g}}{\dfrac{9cv^2}{2g}}=\dfrac{50}{9}$

$\therefore 180k=180\times\dfrac{50}{9}=1000$ …… ❸

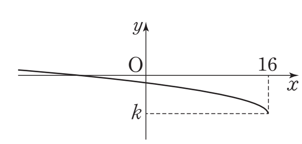
답 1000

채점기준	배점
❶ P_A, P_B를 각각 구하기	4
❷ k의 값과 $180k$의 값 구하기	2

20 함수 $y=\sqrt{-x+16}$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-x+16}+k$

$y=\sqrt{-x+16}+k=\sqrt{-(x-16)}+k$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 16만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=\sqrt{-x+16}+k$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y\le 0$이어야 하므로



$\sqrt{16}+k\le 0 \quad \therefore k\le -4$ …… ❶

따라서 정수 k의 최댓값은 -4이다. …… ❷

답 -4

채점기준	배점
❶ k의 값의 범위 구하기	4
❷ 정수 k의 최댓값 구하기	2

실전 모의고사 3회

p.154~157

01 $\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}+\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}=\dfrac{(\sqrt{a}+1)^2+(\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$

$=\dfrac{(a+2\sqrt{a}+1)+(a-2\sqrt{a}+1)}{a-1}$

$=\dfrac{2(a+1)}{a-1}$

답 ⑤

02 명제와 그 명제의 대우의 참, 거짓은 같으므로 대우가 참이 되도록 하는 a의 값을 구해도 된다.

주어진 명제의 대우는

'$x-a=0$이면 $x^2-6x+7=0$이다.'

이다.

$x=a$를 $x^2-6x+7=0$에 대입하면 $a^2-6a+7=0$

따라서 이차방정식의 두 근은 모두 실수이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 상수 a의 값의 합은 6이다. 답 ①

03 $\dfrac{x^2-2x+9}{x-2}=\dfrac{x(x-2)+9}{x-2}=x+\dfrac{9}{x-2}$

$=x-2+\dfrac{9}{x-2}+2$

$x>2$, 즉 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x-2+\dfrac{9}{x-2}+2\ge2\sqrt{(x-2)\times\dfrac{9}{x-2}}+2=2\times3+2=8$

$\left(\text{단, 등호는 } x-2=\dfrac{9}{x-2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\dfrac{x^2-2x+9}{x-2}$의 최솟값은 8이다. 답 ④

04 $f(1)=9-1^2=8$

$f(32)=f(32-3)=f(29-3)=f(26-3)=\cdots$

$=f(5-3)=f(2)=9-2^2=5$

$\therefore f(1)+f(32)=8+5=13$ 답 ③

05 $(f\circ h)(x)=g(x)$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$(f\circ h)(3)=g(3)$

이때

$(f\circ h)(3)=f(h(3))=\dfrac{1}{2}h(3)+1$,

$g(3)=-9+5=-4$

이므로

$\dfrac{1}{2}h(3)+1=-4$, $\dfrac{1}{2}h(3)=-5$

$\therefore h(3)=-10$ 답 ①

06 $y=\dfrac{ax}{x-b}=\dfrac{a(x-b)+ab}{x-b}=\dfrac{ab}{x-b}+a$

이므로 함수 $y=\dfrac{ax}{x-b}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=b$, $y=a$

따라서 $a=4$, $b=1$이므로

$ab=4\times1=4$ 답 ④

07 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{-ax}$

이 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-a(x-3)}-1$

이때 함수 $y=\sqrt{-a(x-3)}-1$의 그래프가 점 $(4,1)$을 지나므로

$1=\sqrt{-a}-1$, $\sqrt{-a}=2$, $-a=4$ $\quad\therefore a=-4$ 답 ⑤

08 세 명제 $\sim p\longrightarrow r$, $r\longrightarrow\sim q$, $\sim r\longrightarrow q$가 모두 참이므로

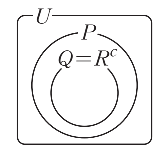
$P^C\subset R$, $R\subset Q^C$, $R^C\subset Q$

$R\subset Q^C$에서 $Q\subset R^C$

$R^C\subset Q$, $Q\subset R^C$이므로 $Q=R^C$

$P^C\subset R$이므로 $R^C\subset P$

세 집합 P, Q, R에 대하여 $Q=R^C$, $R^C\subset P$를 만족시키도록 벤다이어그램을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



① $Q\subset P$

③ $Q=R^C$, $R^C\subset P$이므로 $Q\subset P$

즉, $P\cup Q=P$

④ ③에서 $Q\subset P$이므로 $P\cup Q^C=U$

⑤ ③에서 $Q\subset P$이므로 $P-Q=\varnothing$인지는 알 수 없다.

따라서 항상 옳은 것은 ②이다. 답 ②

09 $\dfrac{3x^2+3x+4}{x^2+x}+\dfrac{2x^2-6}{x^2-1}=\dfrac{3(x^2+x)+4}{x^2+x}+\dfrac{2(x^2-1)-4}{x^2-1}$

$=3+\dfrac{4}{x^2+x}+2+\dfrac{-4}{x^2-1}$

$=5+\dfrac{4}{x(x+1)}+\dfrac{-4}{(x+1)(x-1)}$

$=5+\dfrac{4(x-1)-4x}{x(x+1)(x-1)}=5+\dfrac{-4}{x^3-x}$

따라서 $a=5$, $b=-4$이므로 $a+b=5+(-4)=1$ 답 ④

10 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 조건 (가)에서 점 A와 점 C도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 $\mathrm{A}(2,4)$이므로 $\mathrm{C}(4,2)$

즉, $f(2)=4$이므로 $f(2)-f^{-1}(2)=13$에서

$4-f^{-1}(2)=13$ $\quad\therefore f^{-1}(2)=-9$

즉, $f(-9)=2$이므로 $\mathrm{B}(-9,2)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(4+9)\times(4-2)=13$ 답 ①

11 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=2$

이므로 $f(x)=\dfrac{k}{x-1}+2$ $(k\ne0)$이라 하자.

함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$g(-1)=2$에서 $f(2)=-1$

$\dfrac{k}{2-1}+2=-1$ $\quad\therefore k=-3$

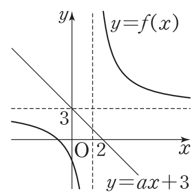
따라서 $f(x)=-\dfrac{3}{x-1}+2$이므로

$f(-2)+f(4)=\left(-\dfrac{3}{-2-1}+2\right)+\left(-\dfrac{3}{4-1}+2\right)$

$=3+1=4$ 답 ⑤

12 $f(x)=\dfrac{3x+4}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+10}{x-2}=\dfrac{10}{x-2}+3$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{10}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
또, 직선 $y=ax+3$은 a의 값에 관계없이 점 $(0, 3)$을 지난다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=ax+3$이 접할 때,



$\dfrac{3x+4}{x-2}=ax+3$에서

$3x+4=(ax+3)(x-2)$

$ax^2-2ax-10=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-a\times(-10)=0$, $a^2+10a=0$

$a(a+10)=0$ $\therefore a=-10$ ($\because a<0$)

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=ax+3$이 만나지 않도록 하는 정수 a의 값의 범위는 $-10<a\le 0$

따라서 $M=0$, $m=-9$이므로

$M-m=0-(-9)=9$ 답 ③

13 A, B, C, D, E 다섯 명의 진술 각각에 대하여 빵을 가져간 사람을 ○, 가져가지 않은 사람을 ×로 표시하여 나타내면 다음과 같다.

진술 \ 가져간 사람	A	B	C	D	E
A	×	×	×	○	×
B	○	×	○	×	×
C	○	○	×	○	○
D	×	○	×	×	×
E	×	○	○	○	×

따라서 빵을 가져간 사람이 E이면 A, B, D, E는 모두 거짓말을 한 것이고, C만 참말을 한 것이므로 조건을 만족시킨다. 답 ⑤

14 $n=5$일 때, $f(5)\times f(7)$의 값이 짝수이므로 $f(5)$, $f(7)$의 값 중 적어도 하나는 짝수이다.
$n=6$일 때, $f(6)\times f(8)$의 값이 짝수이므로 $f(6)$, $f(8)$의 값 중 적어도 하나는 짝수이다.
$n=7$일 때, $f(7)\times f(9)$의 값이 짝수이므로 $f(7)$, $f(9)$의 값 중 적어도 하나는 짝수이다.
집합 X의 원소 중에서 짝수는 6, 8의 2개이므로 $f(6)$, $f(8)$의 값 중 하나만 짝수이고 $f(5)$, $f(7)$, $f(9)$의 값 중 하나만 짝수이다.
이때 $f(5)$, $f(7)$의 값 중 적어도 하나가 짝수이고, $f(7)$, $f(9)$의 값 중 적어도 하나가 짝수이므로 $f(7)$의 값이 짝수이다.
따라서 $f(5)$, $f(9)$의 값은 모두 홀수이고 함수 f는 일대일함수이므로 $f(5)+f(9)$의 최솟값은 $5+7=12$ 답 ②

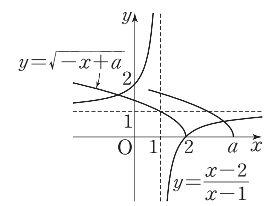
15 $n(A\cap B)=2$이므로 두 함수 $y=\dfrac{x-2}{x-1}$, $y=\sqrt{-x+a}$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때

$y=\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+1$,

$y=\sqrt{-x+a}=\sqrt{-(x-a)}$

이므로 함수 $y=\dfrac{x-2}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\sqrt{-x+a}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 함수 $y=\dfrac{x-2}{x-1}$, $y=\sqrt{-x+a}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{-x+a}$의 x절편 a가 2보다 크거나 같을 때이다.



따라서 $a\ge 2$이므로 실수 a의 최솟값은 2이다. 답 ①

16 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=a\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=a\sqrt{x+2}+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로 $f(-1)=0$

$a\sqrt{-1+2}+2=0$ $\therefore a=-2$

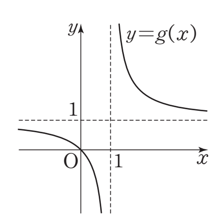
따라서 $f(x)=-2\sqrt{x+2}+2$이므로 $a=-2$, $b=2$, $c=2$

ㄱ. $a+b+c=-2+2+2=2$ (참)

ㄴ. $g(x)=-\dfrac{-2x}{2x-2}=\dfrac{x}{x-1}$

$=\dfrac{(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다. (참)



ㄷ. $y=-2\sqrt{x+2}+2$ $(x\ge -2,\ y\le 2)$라 하면

$2\sqrt{x+2}=2-y$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4(x+2)=(2-y)^2$, $x+2=\dfrac{1}{4}(y-2)^2$

$\therefore x=\dfrac{1}{4}(y-2)^2-2$

x와 y를 서로 바꾸면

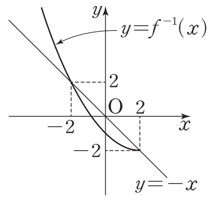
$y=\dfrac{1}{4}(x-2)^2-2$ $(x\le 2)$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}(x-2)^2-2$ $(x\le 2)$

또, $y=\dfrac{c}{a}x$에서 $y=\dfrac{2}{-2}x=-x$

따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=-x$는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

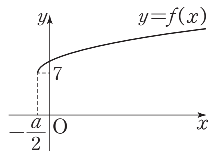
(참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

17 $f(x)=\sqrt{2x+a}+7$

$=\sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+7$



이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{a}{2}$에서 최솟값 7을 가지므로

$m=7$ ...... ❶

$-\frac{a}{2}=-2,\ m=7 \qquad \therefore a=4$ ...... ❷

$\therefore a+m=4+7=11$ ...... ❸

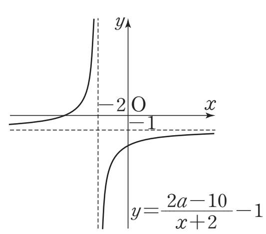
답 11

채점기준	배점
❶ m의 값 구하기	2
❷ a의 값 구하기	2
❸ $a+m$의 값 구하기	1

18 (i) $a<5$일 때

함수 $y=\frac{2a-10}{x+2}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.

...... ❶

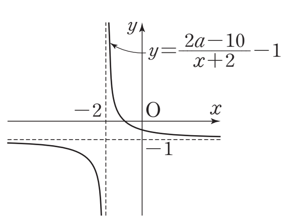


(ii) $a=5$일 때, $y=-1$이므로 제1사분면을 지나지 않는다.

...... ❷

(iii) $a>5$일 때

오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 하므로



$\frac{2a-10}{2}-1\le 0$

$a-5\le 1 \qquad \therefore a\le 6$

$\therefore 5<a\le 6$ ...... ❸

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a\le 6$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은 21이다. ...... ❹

답 21

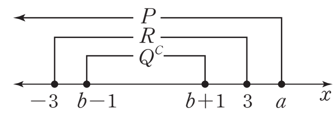
채점기준	배점
❶ $a<5$일 때 그래프가 제1사분면을 지나지 않음을 설명하기	2
❷ $a=5$일 때 그래프가 제1사분면을 지나지 않음을 설명하기	2
❸ $a>5$일 때 그래프가 제1사분면을 지나지 않을 조건을 구하고, 조건을 만족시키는 a의 값의 범위 구하기	2
❹ 자연수 a의 값의 합 구하기	1

19 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 하자.

$P=\{x\,|\,x\le a\},\ Q=\{x\,|\,|x-b|>1\},\ R=\{x\,|\,-3\le x\le 3\}$

$\therefore Q^C=\{x\,|\,|x-b|\le 1\}=\{x\,|\,b-1\le x\le b+1\}$

p는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset P$, $\sim q$는 r이기 위한 충분조건이므로 $Q^C\subset R \qquad \therefore Q^C\subset R\subset P$ ...... ❶



즉, $a\ge 3$이고, $-3\le b-1,\ b+1\le 3$이므로

$a\ge 3,\ -2\le b\le 2$ ...... ❷

따라서 $|a-b|$의 최솟값은 $|3-2|=1$이다. ...... ❸

답 1

채점기준	배점
❶ 세 집합 $P,\ Q^C,\ R$의 포함 관계 구하기	2
❷ a와 b의 값의 범위 각각 구하기	2
❸ $|a-b|$의 최솟값 구하기	2

20 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(g(x))=f(x)$에서

$g(x)=x$ 또는 $\frac{g(x)+x}{2}=1$

$g(x)=x$에서

$x^2+2x+a=x \qquad \therefore x^2+x+a=0$ ...... ㉠

$\frac{g(x)+x}{2}=1$에서

$\frac{(x^2+2x+a)+x}{2}=1,\ x^2+3x+a=2$

$\therefore x^2+3x+a-2=0$ ...... ㉡ ...... ❶

두 이차방정식 ㉠, ㉡의 판별식을 각각 $D_1,\ D_2$라 하면 방정식 $f(g(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우는 다음과 같다.

(i) 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차방정식 ㉡은 실근을 갖지 않는 경우

$D_1=1-4a>0$에서 $a<\frac{1}{4}$ ...... ㉢

$D_2=9-4(a-2)<0$에서 $a>\frac{17}{4}$ ...... ㉣

이때, ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(ii) 두 이차방정식 ㉠, ㉡이 모두 중근을 갖는 경우

$D_1=1-4a=0$에서 $a=\frac{1}{4}$ ...... ㉤

$D_2=9-4(a-2)=0$에서 $a=\frac{17}{4}$ ...... ㉥

이때, ㉤, ㉥을 동시에 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(iii) 이차방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고, 이차방정식 ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$D_1=1-4a<0$에서 $a>\frac{1}{4}$ ...... ㉦

$D_2=9-4(a-2)>0$에서 $a<\frac{17}{4}$ ...... ㉧

㉦, ㉧의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{4}<a<\frac{17}{4}$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{1}{4}<a<\frac{17}{4}$ …… ❷

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다. …… ❸

답 4

채점기준	배점
❶ 방정식 $f(g(x))=f(x)$의 해를 근으로 갖는 두 이차방정식 구하기	2
❷ 방정식 $f(g(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 a의 값의 범위 구하기	4
❸ 정수 a의 개수 구하기	1

실전 모의고사 4회

p.158~161

01 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-ax+2a\le 0$이다.'가 거짓이므로 이것의 부정인 '모든 실수 x에 대하여 $x^2-ax+2a>0$이다.'는 참이다. 즉, 이차방정식 $x^2-ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8a=a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$

따라서 실수 a의 값이 아닌 것은 ⑤ 8이다.

답 ⑤

02 $\frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{3}$에서

$3x-3y=x+y,\ 2x=4y \qquad \therefore x=2y$

$x=2y$를 $\frac{x^2+xy-2y^2}{2x^2-3xy+y^2}$에 대입하면

$\frac{x^2+xy-2y^2}{2x^2-3xy+y^2}=\frac{4y^2+2y^2-2y^2}{8y^2-6y^2+y^2}=\frac{4y^2}{3y^2}=\frac{4}{3}$

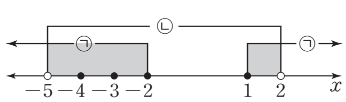
답 ⑤

03 $x^2+x-2\ge 0$에서 $(x-1)(x+2)\ge 0$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 1$ …… ㉠

$10-3x-x^2>0$에서 $x^2+3x-10<0,\ (x-2)(x+5)<0$

$\therefore -5<x<2$ …… ㉡



㉠, ㉡의 공통범위를 구하면

$-5<x\le -2$ 또는 $1\le x<2$

따라서 구하는 정수 x는 $-4,\ -3,\ -2,\ 1$의 4개이다.

답 ④

04 $(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))$

$=h(x)-1=(ax+7)-1=ax+6$

이때 $(f\circ(g\circ h))(x)=5x+3b$이므로

$5x+3b=ax+6$에서 $a=5,\ b=2$

$\therefore a+b=5+2=7$

답 ⑤

05 $f(a)=g(a)$이므로 $a^2+2a=a^3$에서

$a^3-a^2-2a=0,\ a(a^2-a-2)=0$

$a(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

이때, $a\ne -1,\ a\ne 0$이므로

$a=2$

답 ②

06 $f(3)=(2^3$의 일의 자리의 수$)=8$

$f(4)=(2^4$의 일의 자리의 수$)=6$

$f(5)=(2^5$의 일의 자리의 수$)=2$

$f(6)=(2^6$의 일의 자리의 수$)=4$

$g(3)=(8^3$의 일의 자리의 수$)=2$

$g(4)=(8^4$의 일의 자리의 수$)=6$

$g(5)=(8^5$의 일의 자리의 수$)=8$

$g(6)=(8^6$의 일의 자리의 수$)=4$

$\therefore (f^{-1}\circ g)(5)+(f\circ g^{-1})(4)$

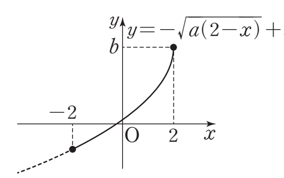
$=f^{-1}(g(5))+f(g^{-1}(4))$

$=f^{-1}(8)+f(6)=3+4=7$

답 ④

07 $y=-\sqrt{a(2-x)}+b=-\sqrt{-a(x-2)}+b\ (a>0)$

함수 $y=-\sqrt{a(2-x)}+b$의 그래프는 $y=-\sqrt{-ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같고 $-2\le x\le 2$일 때, 함수 $y=-\sqrt{a(2-x)}+b$는 $x=-2$에서 최솟값 $-2\sqrt{a}+b$를 갖는다. 이때 최솟값이 -1이므로



$-2\sqrt{a}+b=-1$ …… ㉠

또, 함수 $y=-\sqrt{a(2-x)}+b$의 그래프가 점 (1, 1)을 지나므로

$1=-\sqrt{a}+b \qquad \therefore \sqrt{a}=b-1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-2(b-1)+b=-1,\ -2b+2+b=-1$

$-b=-3 \qquad \therefore b=3$

이것을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{a}=3-1=2 \qquad \therefore a=4$

$\therefore a+b=4+3=7$

답 ③

08 $f(x)=\frac{2x-k}{x+1}=\frac{2(x+1)-k-2}{x+1}=\frac{-k-2}{x+1}+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-3=\frac{-k-2}{(x+2)+1}+2 \qquad \therefore y=\frac{-k-2}{x+3}+5$

$\therefore g(x)=\frac{-k-2}{x+3}+5$

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=5$이므로 두 점근선의 교점은 $(-3,\ 5)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 이 점을 지나므로 $f(-3)=5$

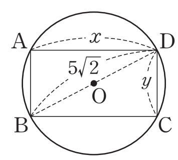
$\frac{-6-k}{-2}=5$

$-6-k=-10 \qquad \therefore k=4$

답 ④

09 (가)의 '친절한 사람은 호감을 주는 사람이다.'가 참이므로 대우인 '호감을 주지 못하는 사람은 친절하지 않은 사람이다.'가 참이다.
(나)의 '표정이 밝은 사람은 친절한 사람이다.'가 참이므로 대우인 '친절하지 않은 사람은 표정이 밝지 않은 사람이다.'가 참이다.
즉, '호감을 주지 못하는 사람은 표정이 밝지 않은 사람이다.'는 항상 참인 문장이다. 답 ③

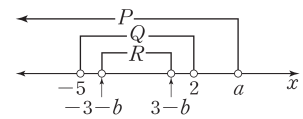
10 반지름의 길이가 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, 즉 지름의 길이가 $5\sqrt{2}$인 원에 내접하는 직사각형의 대각선의 길이는 $5\sqrt{2}$이다.



원에 내접하는 직사각형이 원과 접하는 점을 각각 A, B, C, D라 하고, 직사각형 ABCD의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면
(직사각형 ABCD의 넓이)$=xy$
(직사각형 ABCD의 둘레의 길이)$=2(x+y)$
삼각형 ABD는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해
$x^2+y^2=(5\sqrt{2})^2=50$
$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해
$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}$, $50\ge 2xy$
$\therefore 25\ge xy$
즉, 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 25이므로 $a=25$
이때, 등호는 $x^2=y^2$일 때, 즉 $x=y$ ($\because x>0, y>0$)일 때 성립하므로
$x^2+y^2=x^2+x^2=2x^2=50$, $x^2=25 \qquad \therefore x=5$
그때의 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$2(x+y)=2(x+x)=4x=4\times 5=20 \qquad \therefore b=20$
$\therefore a+b=25+20=45$ 답 ②

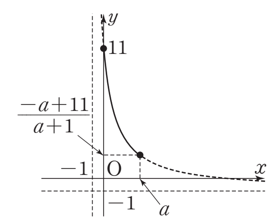
11 $f(x)=\frac{3x-5}{x-2}=\frac{3(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+3$
ㄱ. $\frac{3x-5}{x-2}=0$을 만족시키는 x의 값을 구하면 $x=\frac{5}{3}$이므로 x축과 점 $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$에서 만난다. (참)
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(2, 3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선 $y=-x+5$에 대하여 대칭이다. (참)
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이므로 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

12 $x^2+3x-10<0$, $(x+5)(x-2)<0 \qquad \therefore -5<x<2$
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.
p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$
r가 q이기 위한 충분조건이므로 $R\subset Q$
$\therefore R\subset Q\subset P$
$P=\{x\mid x<a\}$, $Q=\{x\mid -5<x<2\}$,
$R=\{x\mid -3-b<x<3-b\}$
이므로 $R\subset Q\subset P$가 성립하도록 세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$a\ge 2$이므로 a의 최솟값은 2이다.
또, $-5\le -3-b$이고 $3-b\le 2$이므로 $1\le b\le 2$
즉, b의 최댓값은 2이다.
따라서 구하는 합은 $2+2=4$ 답 ③

13 $f(x)=\frac{-x+11}{x+1}=\frac{-(x+1)+12}{x+1}=\frac{12}{x+1}-1$
$0\le x\le a$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $M=11$, $x=a$에서 최솟값 $\frac{-a+11}{a+1}$을 갖는다. 이때 최솟값이 2이므로



$\frac{-a+11}{a+1}=2$, $2(a+1)=-a+11$
$3a=9 \qquad \therefore a=3$
$\therefore a+M=3+11=14$ 답 ③

14 주어진 무리함수의 그래프에서
$y=-\sqrt{a(x-2)}+1$ $(a<0)$이다. 이때 이 함수의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로
$-1=-\sqrt{-2a}+1$, $\sqrt{-2a}=2$, $-2a=4 \qquad \therefore a=-2$
$y=-\sqrt{-2(x-2)}+1=-\sqrt{-2x+4}+1$
$\therefore b=4$, $c=1$
이때 $y=\frac{bx-c}{x-a}=\frac{4x-1}{x+2}=\frac{4(x+2)-9}{x+2}=-\frac{9}{x+2}+4$이므로 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=4$이다.
따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-2, 4)$이다. 답 ④

15 (i) $x<-2$일 때,
$f(x)=-a(x+2)-4x=-(a+4)x-2a$
(ii) $x\ge -2$일 때,
$f(x)=a(x+2)-4x=(a-4)x+2a$
즉, $f(x)=\begin{cases} -(a+4)x-2a & (x<-2) \\ (a-4)x+2a & (x\ge -2) \end{cases}$
함수 f가 일대일대응이 되려면 $x<-2$일 때와 $x\ge -2$일 때의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.
즉, $-(a+4)(a-4)>0$에서
$(a+4)(a-4)<0 \qquad \therefore -4<a<4$
따라서 정수 a는 $-3, -2, -1, \cdots, 3$의 7개이다. 답 ③

16 ㄱ. $X \cap Y = \{2, 3, 4\}$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(2)-f(2)=1$, $g(3)-f(3)=1$, $g(4)-f(4)=1$

$\therefore g(2)=f(2)+1$, $g(3)=f(3)+1$, $g(4)=f(4)+1$

조건 (가)에 의하여 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 모두 서로 다르므로 $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$의 값도 서로 다르다.

이때 $n(Z)=3$이고 조건 (가)에서 함수 f는 일대일대응이므로 함수 $g \circ f$의 치역은 Z이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $g(2)=f(2)+1$, $g(3)=f(3)+1$, $g(4)=f(4)+1$이고 $Z=\{3, 4, 5\}$이므로

$\{f(2), f(3), f(4)\}=\{2, 3, 4\}$

이때 조건 (가)에서 함수 f가 일대일대응이므로

$f(1)=5$

즉, $f^{-1}(5)=1$ (거짓)

ㄷ. $f(3)<g(2)<f(1)$에서

$g(3)-1<g(2)<5$

(i) $g(2)=4$일 때,

$g(3)-1<4$이므로 $g(3)<5$

즉, $g(3)=3$, $g(4)=5$이므로

$f(2)=3$, $f(3)=2$, $f(4)=4$

따라서 $f(4)+g(2)=4+4=8$

(ii) $g(2)=3$일 때,

$g(3)-1<3$에서 $g(3)<4$

$g(3)=3$이어야 하는데 이것은 $g(2) \neq g(3)$에 모순이다.

(i), (ii)에서

$f(4)+g(2)=4+4=8$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

17 $x-1 \le k \le x$이면 $k \le x \le k+1$

$x^2-x-12 \le 0$에서

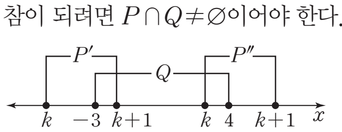
$(x+3)(x-4) \le 0$

$\therefore -3 \le x \le 4$

여기서 두 조건 p, q를 p: $k \le x \le k+1$, q: $-3 \le x \le 4$라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid k \le x \le k+1\}$, $Q=\{x \mid -3 \le x \le 4\}$ …… ❶

주어진 명제가 참이 되려면 $P \cap Q \neq \varnothing$이어야 한다.



위의 그림과 같이 집합 P가 P' 또는 P'', 즉

$-3 \le k+1$, $k \le 4$이어야 하므로

$-4 \le k \le 4$ …… ❷

따라서 정수 k는 -4, -3, -2, $\cdots$, 2, 3, 4의 9개이다. …… ❸

답 9

채점기준	배점
❶ 주어진 명제에서 두 조건을 p, q라 하고, 각각의 진리집합 P, Q 구하기	3
❷ k의 값의 범위 구하기	2
❸ 정수 k의 개수 구하기	1

18 $f(4)=2$, $g(4)=3$이고 $2<3$이므로

$h(4)=3$

$g(3)=3$에서 $h(3) \ge 3$이고 함수 $h(x)$가 일대일대응이므로

$h(3)=4$ …… ❶

$g(1)=2$에서 $h(1) \ge 2$이고 함수 $h(x)$가 일대일대응이므로

$h(1)=2$

$h(1)=2$, $h(3)=4$, $h(4)=3$이고 $g(2)=1$이므로

$h(2)=1$, $f(2)=1$ …… ❷

$\therefore f(2)+h(3)=1+4=5$ …… ❸

답 5

채점기준	배점
❶ $h(3)$의 값 구하기	3
❷ $f(2)$의 값 구하기	3
❸ $f(2)+h(3)$의 값 구하기	1

19 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(a)=(f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(a)$

$=(g^{-1} \circ f)(a)$ ($\because f \circ f^{-1}=I$)

$=g^{-1}(f(a))$ …… ❶

이때 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(a)=-\dfrac{2}{3}$이므로

$g^{-1}(f(a))=-\dfrac{2}{3}$

$g\left(-\dfrac{2}{3}\right)=f(a)$

이때 $g\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\sqrt{3 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)+3}-1=-2$이므로

$-2=\dfrac{-a-3}{a+1}$, $-2a-2=-a-3$

$\therefore a=1$ …… ❷

답 1

채점기준	배점
❶ 주어진 식 간단히 정리하기	2
❷ a의 값 구하기	3

20 원점 O와 직선 $y=-x+8$, 즉 $x+y-8=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$

삼각형 POQ의 넓이가 16이므로

$\dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \overline{\mathrm{PQ}}=16$ $\quad \therefore \overline{\mathrm{PQ}}=4\sqrt{2}$ …… ㉠ …… ❶

한편, $y=\dfrac{k}{x}$에서 $x=\dfrac{k}{y}$

x와 y를 바꾸면 $y=\dfrac{k}{x}$

즉, 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 역함수는 자기 자신이므로 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 P, Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(a, -a+8)$이라 하면 $\mathrm{Q}(-a+8, a)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\{(-a+8)-a\}^2+\{a-(-a+8)\}^2}$

$=\sqrt{2}\,|2a-8|$ …… ❷

즉, ㉠에 의하여

$\sqrt{2}\,|2a-8|=4\sqrt{2},\ |2a-8|=4$

$2|a-4|=4,\ |a-4|=2$

$a-4=-2$ 또는 $a-4=2$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=6$ …… ❸

따라서 P(2, 6), Q(6, 2)라 하면 점 P가 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$6=\dfrac{k}{2}\qquad \therefore\ k=12$ …… ❹

답 12

채점기준	배점
❶ $\overline{PQ}$의 길이 구하기	2
❷ 점 P의 x좌표를 a로 놓고 $\overline{PQ}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타내기	2
❸ a의 값 구하기	2
❹ k의 값 구하기	1

실전 모의고사 5회

p.162~165

01 ④ $a=1,\ b=-1,\ c=0$일 때, $ac=bc$이지만 $a\neq b$이다.
그런데 $a=b$이면 $ac=bc$가 참이므로 $ac=bc$는 $a=b$이기 위한 필요조건이다.

답 ④

02 명제 'q이면 p이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 Q의 원소 중에서 집합 P의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
따라서 구하는 원소는 $Q\cap P^C=Q-P$의 원소인 4, 6, 8이다.

답 ⑤

03 $\dfrac{1}{k^2+k}=\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$
이므로

$\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+2}+\dfrac{1}{3^2+3}+\cdots+\dfrac{1}{k^2+k}$

$=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{k}{k+1}$

즉, $\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{51}{52}$이므로

$k=51$

답 ④

04 ① 명제 $p\longrightarrow q$와 명제 $q\longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p\longrightarrow \sim r$는 참이다.
② 명제 $q\longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r\longrightarrow \sim q$도 참이다.
③ 명제 $p\longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q\longrightarrow \sim p$도 참이다.
④ 명제 $r\longrightarrow \sim q$와 명제 $\sim q\longrightarrow \sim p$가 모두 참이므로 명제 $r\longrightarrow \sim p$도 참이다.
⑤ $\sim p\longrightarrow r$의 참, 거짓은 알 수 없다.
따라서 항상 참인 명제가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

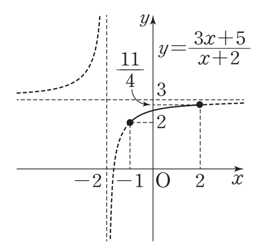
05 유리함수 $y=\dfrac{ax+5}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=3$이므로

$y=\dfrac{k}{x+2}+3=\dfrac{3x+6+k}{x+2}$ (단, $k\neq 0$인 상수)

이것이 $y=\dfrac{ax+5}{x+b}$와 일치하므로

$a=3,\ b=2,\ 6+k=5\qquad \therefore\ k=-1$

$-1\le x\le 2$일 때, 함수 $y=\dfrac{3x+5}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



이 함수는 $x=2$에서 최댓값 $\dfrac{11}{4}$, $x=-1$에서 최솟값 2를 갖는다.

$\therefore\ M=\dfrac{11}{4},\ m=2$

$\therefore\ a+b+4M+m=3+2+4\times\dfrac{11}{4}+2=18$

답 ①

06 $f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=0,\ y=1$을 대입하면
$f(1)=f(0)f(1),\ 3=3f(0)$
$\therefore\ f(0)=1$
$f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=1,\ y=-1$을 대입하면
$f(0)=f(1)f(-1),\ 1=3f(-1)$
$\therefore\ f(-1)=\dfrac{1}{3}$
$f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=1,\ y=1$을 대입하면
$f(2)=f(1)f(1)=3\times 3=9$
$f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=2,\ y=2$를 대입하면
$f(4)=f(2)f(2)=9\times 9=81$
$f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=1,\ y=4$를 대입하면
$f(5)=f(1)f(4)=3\times 81=243$

$\therefore\ \dfrac{f(-1)\times f(5)}{f(0)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times 243}{1}=81$

답 ④

07 주어진 함수의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3,\ y=4$이므로 $f^{-1}(x)=\dfrac{k}{x-3}+4\ (k\neq 0)$이라 하면
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (0, 2)를 지나므로

$2=\dfrac{k}{0-3}+4,\ \dfrac{k}{-3}=-2\qquad \therefore\ k=6$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{6}{x-3}+4=\dfrac{4x-6}{x-3}$

$f^{-1}(x)$의 역함수는 $f(x)$이므로

$y=\dfrac{4x-6}{x-3}$으로 놓으면

$yx-3y=4x-6,\ x=\dfrac{3y-6}{y-4}$

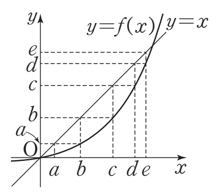
x와 y를 바꾸면

$y=\dfrac{3x-6}{x-4}$이므로 $f(x)=\dfrac{3x-6}{x-4}$

$\therefore a=3,\ b=-6,\ c=-4$

$\therefore abc=3\times(-6)\times(-4)=72$ 답 ⑤

08 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(b)=k$라 하면

$f(k)=b \qquad \therefore k=c$

즉, $f^{-1}(b)=c$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면

$f(l)=c \qquad \therefore l=d$

즉, $f^{-1}(c)=d$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ f)^{-1}(b)&=(f^{-1}\circ f^{-1})(b)\\&=f^{-1}(f^{-1}(b))\\&=f^{-1}(c)=d\end{aligned}$$

답 ④

09 $f^{-1}(2)=5$에서 $f(5)=2$

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=3$에서 f가 일대일대응이고, $f(1)=3$이므로 $f(2)=1$

또, f가 일대일대응이므로 $f(4)=5$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ f)(3)+(f\circ f)(4)&=f(f(3))+f(f(4))\\&=f(4)+f(5)\\&=5+2=7\end{aligned}$$

답 ⑤

10
$$\begin{aligned}\{(P\cap Q)\cup(P-Q)\}\cup Q^C&=\{(P\cap Q)\cup(P\cap Q^C)\}\cup Q^C\\&=\{(P\cap(Q\cup Q^C)\}\cup Q^C\\&=(P\cap U)\cup Q^C\\&=P\cup Q^C=P\end{aligned}$$

$\therefore Q^C\subset P,\ P^C\subset Q$

① $Q^C\subset P$이므로 p는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.

② $P^C\subset Q$이므로 $\sim p$는 q이기 위한 충분조건이다.

③ $Q^C\subset P$이므로 $\sim q$는 p이기 위한 충분조건이다.

④ $Q^C\not\subset P^C$이므로 $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이 아니다.

⑤ $P\not\subset Q,\ Q\not\subset P$이므로 q는 p이기 위한 필요충분조건이 아니다.

따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

11 ㄱ. $y=-\sqrt{kx+2k}+4$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

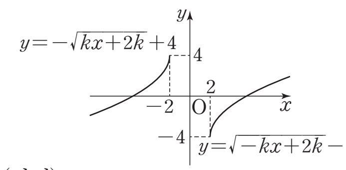
$-y=-\sqrt{-kx+2k}+4 \qquad \therefore y=\sqrt{-kx+2k}-4$

따라서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $y=-\sqrt{kx+2k}+4=-\sqrt{k(x+2)}+4$,

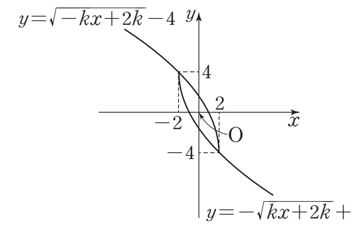
$y=\sqrt{-kx+2k}-4=\sqrt{-k(x-2)}-4$

이므로 $k<0$일 때 두 곡선은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $k<0$이면 두 곡선은 만나지 않는다. (거짓)

ㄷ. 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값은 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{-kx+2k}-4$가 점 $(-2,\ 4)$를 지날 때 최대이다.



$4=\sqrt{2k+2k}-4,\ \sqrt{4k}=8$

$4k=64 \qquad \therefore k=16$

따라서 k의 최댓값은 16이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

12 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=-1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x+1}-1\ (k>0)$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $f(0)=1$

$\dfrac{k}{0+1}-1=1 \qquad \therefore k=2$

$\therefore f(x)=\dfrac{2}{x+1}-1=\dfrac{-x+1}{x+1}$

이것이 $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$과 일치하므로 $a=-1,\ b=1,\ c=1$

$\therefore g(x)=-\sqrt{-x+1+1}=-\sqrt{-x+2}$

$g^{-1}(p)=-7$에서 $p=g(-7)$이므로

$p=-\sqrt{-(-7)+2}=-3$ 답 ③

13 $\dfrac{2x-9}{x-3}=3x+k$에서 $x\neq3$이므로 $(3x+k)(x-3)=2x-9$

$3x^2+(k-11)x+9-3k=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

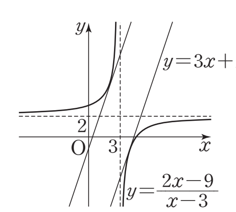
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(k-11)^2-4\times3\times(9-3k)<0$

$k^2+14k+13<0$

$(k+13)(k+1)<0$

$\therefore -13<k<-1$ 답 ①



14 $(f\circ f)(x)=x$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$이다.

이때 함수 $f(x)=\dfrac{ax+6}{x-3}$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\dfrac{-3x-6}{-x+a}=\dfrac{3x+6}{x-a}$(참고)이므로

$\dfrac{ax+6}{x-3}=\dfrac{3x+6}{x-a}$에서 $a=3$

따라서 $f(x)=\dfrac{3x+6}{x-3}$이므로 $f(6)=\dfrac{3\times6+6}{6-3}=\dfrac{24}{3}=8$

답 ②

다른풀이 $(f \circ f)(x)=x$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$이다.

$f(x)=\dfrac{ax+6}{x-3}=\dfrac{a(x-3)+3a+6}{x-3}=\dfrac{3a+6}{x-3}+a$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(3,\ a)$이고, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a,\ 3)$이다.

이때 $f(x)=f^{-1}(x)$에서 두 점 $(3,\ a)$와 $(a,\ 3)$이 같아야 하므로 $a=3$

따라서 $f(x)=\dfrac{3x+6}{x-3}$이므로

$f(6)=\dfrac{3\times6+6}{6-3}=\dfrac{24}{3}=8$

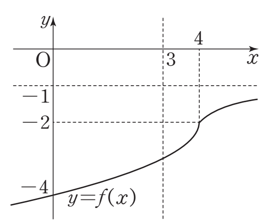
참고 유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$이면 그 역함수는

$f^{-1}(x)=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$로 간단히 구할 수 있다.

15 $f(x)=\dfrac{a-x}{x-3}=\dfrac{-(x-3)+a-3}{x-3}=\dfrac{a-3}{x-3}-1$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{a-3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

또, 조건 (가), (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(4)=-2$이므로 $\dfrac{a-4}{4-3}=-2$ $\quad\therefore a=2$

이때 $f(3)=-\sqrt{4-3}-2=-3,\ f(6)=\dfrac{2-6}{6-3}=-\dfrac{4}{3}$이므로

$f(3)\times f(6)=-3\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=4$ 답 ⑤

참고 $a<2$이면 $f(x)$는 일대일함수가 아니고 $a>2$이면 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y<-2$ 또는 $a-4\le y<-1\}$

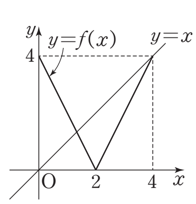
따라서 $a=2$이다.

16 ㄱ. $f(1)=|2-4|=2$이므로

$f(f(1))=f(2)=|4-4|=0$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같다.

이때 오른쪽 그림에서 교점의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=x$의 실근의 개수는 2이다. (참)



ㄷ. $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=k$라 하면

$f(k)=k,\ |2k-4|=k$

$2k-4=k$ 또는 $2k-4=-k$

$\therefore k=\dfrac{4}{3}$ 또는 $k=4$

(i) $f(x)=\dfrac{4}{3}$일 때,

$|2x-4|=\dfrac{4}{3},\ 2x-4=\pm\dfrac{4}{3}$

$\therefore x=\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=\dfrac{8}{3}$

(ii) $f(x)=4$일 때,

$|2x-4|=4,\ 2x-4=\pm4$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서

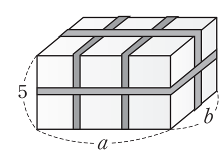
$x=0$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=\dfrac{8}{3}$ 또는 $x=4$

즉, 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은

$0+\dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{3}+4=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

17 상자의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $a,\ b$라 하면 밑면의 넓이가 54이므로



$ab=54$ ...... ㉠

상자를 묶은 네 개의 끈의 길이의 합은

$4a+6b+30$ ...... ❶

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+6b+30\ge2\sqrt{4a\times6b}+30$

$=2\sqrt{24ab}+30$

$=2\sqrt{24\times54}+30$

$=102$

이때 등호는 $4a=6b$일 때 성립한다.

$4a=6b$, 즉 $a=\dfrac{3}{2}b$ ...... ㉡

를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{3}{2}b^2=54,\ b^2=36$

$\therefore b=6\ (\because b>0)$

이것을 ㉡에 대입하면

$a=9$ ...... ❷

따라서 상자의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+5)=4\times(9+6+5)=80$ ...... ❸

답 80

채점기준	배점
❶ 상자를 묶은 네 개의 끈의 길이의 합을 $a,\ b$에 대한 식으로 나타내기	2
❷ $a,\ b$의 값 각각 구하기	3
❸ 상자의 모든 모서리의 길이의 합 구하기	1

18 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이다.

조건 (나)에서 $f(1) \neq 2$이고 $f(2) \neq 5$

(i) $f(1)=5$인 경우

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 5를 제외한 5개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 5, $f(2)$의 값을 제제외한 4개

즉, 함수 f의 개수는 $5 \times 4 = 20$ …… ❶

(ii) $f(1)$의 값이 1, 3, 4, 6 중 하나인 경우

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 5, $f(1)$의 값을 제외한 4개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 4개

즉, 함수 f의 개수는 $4 \times 4 \times 4 = 64$ …… ❷

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는 $20+64=84$ …… ❸

답 84

채점기준	배점
❶ $f(1)=5$인 경우의 함수 f의 개수 구하기	3
❷ $f(1)$의 값이 1, 3, 4, 6 중 하나인 경우의 함수 f의 개수 구하기	3
❸ 조건을 만족시키는 함수 f의 개수 구하기	1

19 $f(x)=\dfrac{6x}{x+a}=\dfrac{6(x+a)-6a}{x+a}=\dfrac{-6a}{x+a}+6$

이므로 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y \mid y \neq 6$인 실수$\}$이다.

이때 주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 치역은

$\{y \mid y \neq 3a$인 실수$\}$이므로 $6=3a$에서 $a=2$ …… ❶

따라서 $f(x)=-\dfrac{12}{x+2}+6$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

함수 $y=-\dfrac{12}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것과 같으므로

$b=-12$, $c=-2$, $d=6$ …… ❷

$\therefore a+b+c+d=2+(-12)+(-2)+6=-6$ …… ❸

답 -6

채점기준	배점
❶ a의 값 구하기	2
❷ b, c, d의 값 각각 구하기	3
❸ $a+b+c+d$의 값 구하기	1

20 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 A의 좌표는 A$(4,\ 2)$이고 점 B의 좌표를 B$(b^2,\ b)$, 곡선 $y=\sqrt{x-4}$ 위의 점 C의 좌표를 C$(c^2+4,\ c)$ $(c>0)$라 하자.

이때 두 점 A, C를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{c^2+8}{2},\ \dfrac{c+2}{2}\right)$, 두 점 O, B를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{b^2}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$이고 사각형 AOCB가 평행사변형이므로 두 선분 OB, AC의 중점이 일치한다. …… ❶

$b^2=c^2+8$에서 $b^2-c^2=8$이고

$b=c+2$에서 $b-c=2$ …… ㉠

$b^2-c^2=(b+c)(b-c)=8$에 $b-c=2$를 대입하면

$2(b+c)=8$ $\quad\therefore b+c=4$ …… ㉡ …… ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=3$이므로 점 B의 좌표는 B$(9,\ 3)$이다. …… ❸

$\therefore \overline{AB}^2=(9-4)^2+(3-2)^2=25+1=26$ …… ❹

답 26

채점기준	배점
❶ 두 선분 AC, OB의 중점이 일치함을 파악하기	2
❷ b, c에 대한 관계식 세우기	2
❸ 점 B의 좌표 구하기	2
❹ $\overline{AB}^2$의 값 구하기	1