

정답 및 해설

고등 내신 1등급을 위한 기출문제집

100발100중

고등 기출
문제집

대수 상

내신에 날개를 달아 주는 100발100중!



I 지수함수와 로그함수

1 지수

교과서 예제

p.7

- 01** (1) $-9, 9$ (2) $2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i$
 (3) $-3, \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$ (4) $-2, 2, -2i, 2i$
- 02** (1) $-7, 7$ (2) 5 (3) $-\frac{2}{3}$ (4) 없다.
- 03** (1) 4 (2) 0.2 (3) $-\frac{3}{10}$ (4) 5
- 04** (1) 2 (2) 5 (3) 2 (4) $\sqrt{2}$ (5) $\frac{3}{2}$ (6) 5
- 05** (1) 1 (2) $\frac{1}{27}$ (3) $\frac{1}{16}$ (4) 81
- 06** (1) $a^{\frac{1}{5}}$ (2) $a^{\frac{6}{7}}$ (3) $a^{-\frac{4}{5}}$ (4) $a^{\frac{9}{4}}$
- 07** (1) $\sqrt{5}$ (2) $3\sqrt[3]{3}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (4) $\sqrt[3]{4}$
- 08** (1) 9 (2) a^3 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 108 (5) $a\sqrt{b}$
 (6) $a^{19}b^{40}$ (7) $2^{4\sqrt{3}}$ (8) $7^{4\sqrt{6}}$ (9) a^2 (10) a^2b^4

기출 Best | 1회

p.8~10

- 01** ② **02** ⑤ **03** ⑤ **04** ① **05** ② **06** ①
07 ③ **08** ④ **09** ④ **10** ⑤ **11** ③ **12** ③
13 ② **14** ① **15** ① **16** ③ **17** ④

기출 Best | 2회

p.11~13

- 01** ④ **02** ③ **03** ④ **04** ③ **05** ③ **06** ①
07 ③ **08** ② **09** ③ **10** ⑤ **11** ① **12** ④
13 ⑤ **14** ④ **15** ③ **16** ⑤ **17** ②

변형유형 집중공략

p.14~15

- 1-1** 15 **1-2** ② **2-1** ① **2-2** 14

서술형 What & How

p.16~17

- 1** 15 **2** 4 **3** 8 **4** 20

실전 문제 | 1회

p.18~20

- 01** ⑤ **02** ② **03** ⑤ **04** ① **05** ① **06** ①
07 ① **08** ③ **09** ③ **10** ② **11** ④ **12** ⑤
13 ① **14** ① **15** 4 **16** 5

실전 문제 | 2회

p.21~23

- 01** ② **02** ⑤ **03** ④ **04** ② **05** ② **06** ①
07 ② **08** ⑤ **09** ① **10** ② **11** ③ **12** ⑤
13 ③ **14** ③ **15** 15 **16** 64

수능형 기출문제 & 변형문제

p.24~26

- 1** ① **2** ① **3** ③ **4** ④ **5** ② **6** 16

2 로그

교과서 예제

p.29

- 01** (1) $3=\log_4 64$ (2) $-4=\log_3 \frac{1}{81}$
 (3) $\frac{1}{2}=\log_{36} 6$ (4) $0=\log_7 1$
- 02** (1) $5^3=125$ (2) $3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$ (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$ (4) $(\sqrt{5})^2=5$
- 03** (1) 7 (2) 5 (3) -1 (4) 4
- 04** (1) $x<3$ (2) $x<0$ 또는 $x>5$
 (3) $x\neq 4$ 인 모든 실수 (4) $-5<x<-4$ 또는 $x>-4$
- 05** (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 2 (4) 5 **06** (1) 0 (2) $\frac{5}{2}$ (3) 1 (4) 3
- 07** (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) 1 (4) $\frac{7}{4}$ (5) 15 (6) $2\sqrt{3}$
- 08** (1) 4 (2) $\frac{3}{2}$ (3) -1 (4) $\frac{1}{2}$
- 09** (1) $3,8287$ (2) $1,8287$ (3) $-0,1713$ (4) $-1,1713$

기출 Best | 1회

p.30~32

- 01** ④ **02** ① **03** ② **04** ③ **05** ⑤ **06** ④
07 ③ **08** ⑤ **09** ② **10** ⑤ **11** ② **12** ①
13 ③ **14** ④ **15** ④ **16** ③ **17** ②

기출 Best | 2회

p.33~35

- 01** ③ **02** ① **03** ② **04** ⑤ **05** ③ **06** ④
07 ① **08** ⑤ **09** ② **10** ⑤ **11** ① **12** ②
13 ① **14** ④ **15** ③ **16** ② **17** ③

변형유형 집중공략

p.36~37

- 1-1** 24 **1-2** ⑤ **2-1** ④ **2-2** ③

서술형 What & How

p.38~39

- 1** 3 **2** 12 **3** 2 **4** 10

실전 문제 | 1회

p.40~43

- 01** ① **02** ② **03** ① **04** ④ **05** ⑤ **06** ③
07 ① **08** ③ **09** ① **10** ② **11** ③ **12** ④
13 ① **14** ① **15** ③ **16** ⑤ **17** ⑤ **18** ⑤
19 9 **20** 9

실전 문제 | 2회

p.44~47

- 01** ⑤ **02** ④ **03** ① **04** ② **05** ⑤ **06** ③
07 ② **08** ② **09** ③ **10** ⑤ **11** ③ **12** ④
13 ⑤ **14** ③ **15** ③ **16** ② **17** ④ **18** ④
19 73 **20** 5

수능형 기출문제 & 변형문제

p.48~50

- 1** ③ **2** ⑤ **3** 56 **4** 111 **5** 13 **6** 8

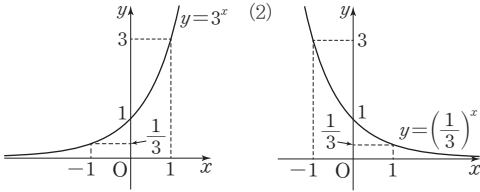
3 지수함수

교과서 예제

p.53

01 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅅ

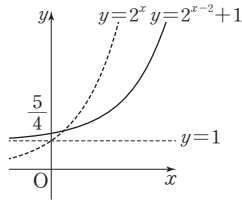
02 (1)



03 ㄱ, ㄷ, ㄹ

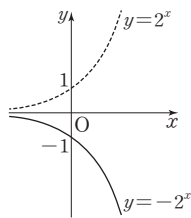
04 (1) $27^{\frac{1}{4}} > (\sqrt[5]{3})^3$ (2) $\frac{1}{\sqrt[3]{8}} < \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

05 (1) 그래프:



치역: $\{y|y>1\}$, 점근선의 방정식: $y=1$

(2) 그래프:



치역: $\{y|y<0\}$, 점근선의 방정식: $y=0$

06 (1) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{81}$ (2) 최댓값: 7, 최솟값: 1

07 (1) $x=-\frac{1}{6}$ (2) $x=\frac{9}{8}$ (3) $x=-9$ 또는 $x=2$

08 (1) $x\leq 5$ (2) $x<-4$ (3) $x\leq -2$ 또는 $x\geq 5$

09 4년 후

기출 Best | 1회

p.54~57

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| 01 ① | 02 ③ | 03 ④ | 04 ⑤ | 05 ⑤ | 06 ① |
| 07 ③ | 08 ③ | 09 ① | 10 ③ | 11 ③ | 12 ⑤ |
| 13 ① | 14 ② | 15 ① | 16 ④ | 17 ⑤ | 18 ⑤ |
| 19 ② | 20 ② | 21 ② | 22 ① | | |

기출 Best | 2회

p.58~61

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| 01 ② | 02 ③ | 03 ① | 04 ① | 05 ④ | 06 ① |
| 07 ① | 08 ③ | 09 ⑤ | 10 ① | 11 ④ | 12 ③ |
| 13 ① | 14 ④ | 15 ② | 16 ④ | 17 ② | 18 ② |
| 19 ③ | 20 ① | 21 ② | 22 ④ | | |

변형유형 집중공략

p.62~65

- | | | | |
|-------|-------|-------|--------|
| 1-1 ② | 1-2 ④ | 2-1 ① | 2-2 25 |
| 3-1 ⑤ | 3-2 ① | 4-1 ② | 4-2 ⑤ |

서술형 What & How

p.66~69

- | | | | |
|------|------|---------|------|
| 1 32 | 2 2 | 3 $x=2$ | 4 34 |
| 5 5 | 6 30 | 7 25 | 8 8 |

실전 문제 | 1회

p.70~73

- | | | | | | |
|--------|-------|------|------|------|------|
| 01 ⑤ | 02 ① | 03 ③ | 04 ④ | 05 ② | 06 ④ |
| 07 ④ | 08 ③ | 09 ① | 10 ④ | 11 ④ | 12 ⑤ |
| 13 ③ | 14 ① | 15 ③ | 16 ② | 17 ④ | 18 ③ |
| 19 -48 | 20 10 | | | | |

실전 문제 | 2회

p.74~77

- | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|
| 01 ① | 02 ② | 03 ③ | 04 ③ | 05 ① | 06 ④ |
| 07 ② | 08 ⑤ | 09 ① | 10 ① | 11 ② | 12 ① |
| 13 ③ | 14 ① | 15 ③ | 16 ③ | 17 ④ | 18 8 |
| 19 32 | | | | | |

수능형 기출문제 & 변형문제

p.78~82

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------|
| 1 ④ | 2 ⑤ | 3 ③ | 4 ② | 5 ③ |
| 6 ⑤ | 7 ⑤ | 8 ② | 9 ① | 10 ④ |

4 로그함수

교과서 예제

p.85

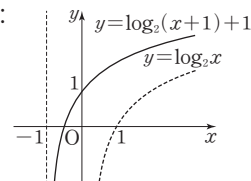
01 (1) $y=\log_3 x$ (2) $y=7^x$

02 ㄱ, ㄷ

03 ㄱ, ㄴ, ㄹ

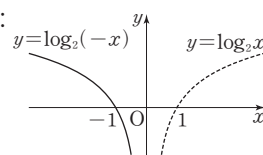
04 (1) $2\log_5 \sqrt{15} < 4\log_5 2$ (2) $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{6}} 125 > 3\log_{\frac{1}{6}} 2$

05 (1) 그래프:



정의역: $\{x|x>-1\}$, 점근선의 방정식: $x=-1$

(2) 그래프:



정의역: $\{x|x<0\}$, 점근선의 방정식: $x=0$

06 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 1 (2) 최댓값: -1, 최솟값: -2

07 (1) $x=-2$ (2) $x=4$ (3) $x=8$

08 (1) $\frac{3}{2} < x < 3$ (2) $-\frac{1}{4} < x \leq 1$ (3) $2 < x < 7$

09 40

기출 Best | 1회

p.86~89

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| 01 ③ | 02 ⑤ | 03 ④ | 04 ① | 05 ③ | 06 ④ |
| 07 ③ | 08 ③ | 09 ② | 10 ⑤ | 11 ③ | 12 ③ |
| 13 ⑤ | 14 ⑤ | 15 ① | 16 ① | 17 ① | 18 ① |
| 19 ① | 20 ② | 21 ② | 22 ② | | |

기출 Best | 2회

p.90~93

- 01 ③ 02 ④ 03 ② 04 ③ 05 ③ 06 ④
07 ② 08 ② 09 ② 10 ② 11 ③ 12 ②
13 ⑤ 14 ② 15 ② 16 ① 17 ① 18 ④
19 ① 20 ⑤ 21 ② 22 ⑤

변형유형 집중공략

p.94~97

- 1-1 ④ 1-2 ③ 2-1 ① 2-2 ③
3-1 36 3-2 ③ 4-1 ① 4-2 ②

서술형 What & How

p.98~101

- 1 1 2 2 3 18 4 8
5 8 6 146 7 9 8 5

실전 문제 | 1회

p.102~105

- 01 ④ 02 ⑤ 03 ③ 04 ① 05 ② 06 ③
07 ④ 08 ② 09 ④ 10 ③ 11 ④ 12 ③
13 ① 14 ③ 15 ① 16 ② 17 ⑤ 18 11
19 10

실전 문제 | 2회

p.106~109

- 01 ③ 02 ② 03 ④ 04 ③ 05 ② 06 ③
07 ② 08 ② 09 ⑤ 10 ③ 11 ① 12 ①
13 ② 14 ③ 15 ② 16 ⑤ 17 ④ 18 1
19 13

수능형 기출문제 & 변형문제

p.110~114

- 1 ③ 2 ② 3 14 4 36 5 ⑤
6 ④ 7 ② 8 ④ 9 13 10 6

II 삼각함수

1 삼각함수

교과서 예제

p.117

- 01 (1) $360^\circ \times n + 50^\circ$ (단, n 은 정수)
(2) $360^\circ \times n + 30^\circ$ (단, n 은 정수)
(3) $360^\circ \times n + 120^\circ$ (단, n 은 정수)
(4) $360^\circ \times n + 200^\circ$ (단, n 은 정수)
02 (1) 제3사분면 (2) 제2사분면 (3) 제4사분면 (4) 제1사분면
03 (1) $\frac{19}{6}\pi$ (2) 315° (3) $-\frac{9}{4}\pi$ (4) -960°
04 (1) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ (단, n 은 정수) (2) $2n\pi + \frac{9}{5}\pi$ (단, n 은 정수)
05 호의 길이: π , 넓이: 2π 06 (1) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (2) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (3) $\frac{1}{3}$
07 (1) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$
(2) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$
(3) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

08 (1) 제1사분면 (2) 제2사분면 (3) 제2사분면 또는 제4사분면

09 $\cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$

10 $\frac{15}{32}$

11 (1) 2 (2) $\frac{2}{\cos^2 \theta}$

기출 Best | 1회

p.118~120

- 01 ④ 02 ③ 03 ④ 04 ③ 05 ⑤ 06 ⑤
07 ② 08 ② 09 ⑤ 10 ② 11 ② 12 ②
13 ④ 14 ① 15 ① 16 ①

기출 Best | 2회

p.121~123

- 01 ③ 02 ③ 03 ④ 04 ② 05 ⑤ 06 ⑤
07 ⑤ 08 ③ 09 ① 10 ① 11 ③ 12 ⑤
13 ① 14 ① 15 ① 16 ③

변형유형 집중공략

p.124~125

- 1-1 ⑤ 1-2 ② 2-1 ④ 2-2 ②

서술형 What & How

p.126~127

- 1 315 2 189 3 41 4 -7

실전 문제 | 1회

p.128~130

- 01 ⑤ 02 ③ 03 ④ 04 ④ 05 ① 06 ③
07 ⑤ 08 ④ 09 ① 10 ④ 11 ② 12 ①
13 ① 14 ③ 15 30 16 6

실전 문제 | 2회

p.131~133

- 01 ② 02 ③ 03 ④ 04 ② 05 ② 06 ②
07 ③ 08 ④ 09 ① 10 ① 11 ① 12 ⑤
13 ③ 14 -100 15 -11

수능형 기출문제 & 변형문제

p.134~136

- 1 6 2 ① 3 80 4 ⑤ 5 ③ 6 ⑤

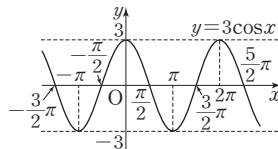
2 삼각함수의 그래프

교과서 예제

p.139

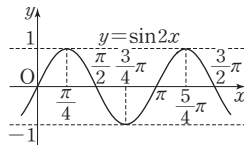
01 (1) 치역: $\{y | -3 \leq y \leq 3\}$, 주기: 2π

함수의 그래프:



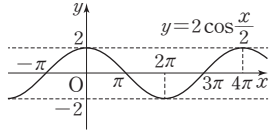
(2) 치역: $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$, 주기: π

함수의 그래프:



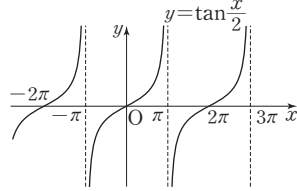
(3) 치역: $\{y | -2 \leq y \leq 2\}$, 주기: 4π

함수의 그래프:



(4) 치역: 실수 전체의 집합, 주기: 2π

함수의 그래프:



02 (1) 주기: $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값: 2, 최솟값: -2

(2) 주기: π , 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: $-\frac{1}{4}$

(3) 주기: 2π , 최댓값: 4, 최솟값: -2

(4) 주기: 2, 최댓값: 없다., 최솟값: 없다.

03 (1) 주기: π , 최댓값: 2, 최솟값: 0

(2) 주기: 2π , 최댓값: 1, 최솟값: 0

(3) 주기: $\frac{\pi}{2}$, 최댓값: 없다., 최솟값: 0

04 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (6) $\sqrt{3}$

05 (1) 0.2250 (2) -0.2419 (3) -0.2679

06 (1) $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ (2) $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

(3) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$

07 (1) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ (2) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

(3) $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

기출 Best | 1회

p.140~143

01 ③ 02 ⑤ 03 ④ 04 ⑤ 05 ② 06 ①
07 ⑤ 08 ③ 09 ① 10 ④ 11 ② 12 ⑤
13 ② 14 ④ 15 ② 16 ② 17 ③ 18 ⑤
19 ④ 20 ⑤ 21 ⑤

기출 Best | 2회

p.144~147

01 ② 02 ② 03 ③ 04 ① 05 ② 06 ①
07 ② 08 ⑤ 09 ② 10 ② 11 ⑤ 12 ①
13 ③ 14 ⑤ 15 ③ 16 ④ 17 ③ 18 ①
19 ② 20 ① 21 ④

변형유형 집중공략

p.148~149

1-1 0 1-2 4 2-1 ④ 2-2 ①

서술형 What & How

p.150~153

1 -6 2 -2 3 -125 4 4
5 4 6 1 7 8 8 8

실전 문제 | 1회

p.154~157

01 ② 02 ⑤ 03 ③ 04 ③ 05 ① 06 ②
07 ⑤ 08 ② 09 ④ 10 ⑤ 11 ③ 12 ④
13 ④ 14 ③ 15 ① 16 ① 17 ③ 18 ④
19 ④ 20 ④ 21 3 22 6

실전 문제 | 2회

p.158~161

01 ④ 02 ③ 03 ③ 04 ② 05 ① 06 ②
07 ⑤ 08 ④ 09 ③ 10 ① 11 ⑤ 12 ③
13 ③ 14 ⑤ 15 ③ 16 ② 17 ④ 18 ①
19 ① 20 12 21 6

수능형 기출문제 & 변형문제

p.162~166

1 ④ 2 ⑤ 3 ③ 4 ③ 5 ①
6 ② 7 ② 8 ⑤ 9 ① 10 ②

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.168~171

01 ③ 02 ⑤ 03 ⑤ 04 ① 05 ②
06 ③ 07 ④ 08 ⑤ 09 ③ 10 ④
11 ③ 12 ① 13 ② 14 ③ 15 ⑤
16 ⑤ 17 5 18 6 19 -39 20 23

실전 모의고사 2회

p.172~175

01 ⑤ 02 ② 03 ⑤ 04 ② 05 ①
06 ④ 07 ④ 08 ① 09 ② 10 ①
11 ④ 12 ③ 13 ④ 14 ② 15 ①
16 ① 17 -18 18 1 19 11 20 5

실전 모의고사 3회

p.176~179

01 ④ 02 ① 03 ③ 04 ④ 05 ⑤
06 ③ 07 ① 08 ② 09 ① 10 ③
11 ① 12 ⑤ 13 ④ 14 ⑤ 15 ⑤
16 ② 17 6 18 5 19 12 20 30

실전 모의고사 4회

p.180~183

01 ① 02 ④ 03 ① 04 ⑤ 05 ②
06 ④ 07 ② 08 ② 09 ⑤ 10 ⑤
11 ① 12 ⑤ 13 ⑤ 14 ④ 15 ④
16 ⑤ 17 75 18 5 19 -7 20 4

실전 모의고사 5회

p.184~187

01 ③ 02 ② 03 ⑤ 04 ③ 05 ③
06 ② 07 ② 08 ⑤ 09 ④ 10 ③
11 ③ 12 ③ 13 ① 14 ③ 15 ④
16 ② 17 216 18 16 19 4 20 -72

I 지수함수와 로그함수

1 지수

교과서 예제

p.7

01 (1) 81의 제곱근을 x 라 하면 $x^2=81$ 이므로 $x=\pm 9$

따라서 81의 제곱근은 $-9, 9$ 이다.

(2) 8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=8$ 이므로

$$x^3-8=0, (x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=-1\pm\sqrt{3}i$$

따라서 8의 세제곱근은 $2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i$ 이다.

(3) -27 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-27$ 이므로

$$x^3+27=0, (x+3)(x^2-3x+9)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=\frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -27 의 세제곱근은 $-3, \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

(4) 16의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=16$ 이므로

$$x^4-16=0, (x+2)(x-2)(x^2+4)=0$$

$$\therefore x=\pm 2 \text{ 또는 } x=\pm 2i$$

따라서 16의 네제곱근은 $-2, 2, -2i, 2i$ 이다.

답 (1) $-9, 9$

$$(2) 2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i$$

$$(3) -3, \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$$

$$(4) -2, 2, -2i, 2i$$

02 (1) 49의 제곱근을 x 라 하면 $x^2=49$ 이므로 $x=\pm 7$

따라서 49의 제곱근 중 실수인 것은 $-7, 7$ 이다.

(2) 125의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=125$ 이므로

$$x^3-125=0, (x-5)(x^2+5x+25)=0$$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } x=\frac{-5\pm5\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 125의 세제곱근 중 실수인 것은 5이다.

(3) $-\frac{8}{27}$ 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-\frac{8}{27}$ 이므로

$$27x^3+8=0, (3x+2)(9x^2-6x+4)=0$$

$$\therefore x=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{3}$$

따라서 $-\frac{8}{27}$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 $-\frac{2}{3}$ 이다.

(4) -0.0081 의 네제곱근은 없다.

답 (1) $-7, 7$ (2) 5 (3) $-\frac{2}{3}$ (4) 없다.

03 (1) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

$$(2) \sqrt[4]{0.0016}=\sqrt[4]{0.2^4}=0.2$$

$$(3) \sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{10}\right)^3}=-\frac{3}{10}$$

$$(4) \sqrt[6]{(-5)^6}=\sqrt[6]{5^6}=5$$

답 (1) 4 (2) 0.2 (3) $-\frac{3}{10}$ (4) 5

$$04 (1) \sqrt[4]{8}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{8\times 2}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$$

$$(2) \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\frac{625}{5}}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$$

$$(3) (\sqrt[6]{4})^3=(\sqrt[6]{2^2})^3=\sqrt[6]{(2^2)^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$$

$$(4) \sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}=\sqrt[12]{64}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[6\times 2]{2^{6\times 2}}=\sqrt{2}$$

$$(5) \sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{9\times\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=\frac{3}{2}$$

$$(6) \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{64}}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[3]{25^2}}{\sqrt[3]{4^3}}} \\ =\sqrt[3]{8}\times\sqrt{\frac{25}{4}} \\ =\sqrt[3]{2^3}\times\frac{5}{2}=2\times\frac{5}{2}=5$$

답 (1) 2 (2) 5 (3) 2 (4) $\sqrt{2}$ (5) $\frac{3}{2}$ (6) 5

$$05 (2) 3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$$

$$(3) (-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16}$$

$$(4) \left(-\frac{1}{9}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{9}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{81}}=81$$

답 (1) 1 (2) $\frac{1}{27}$ (3) $\frac{1}{16}$ (4) 81

$$06 (3) \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}=\frac{1}{a^{\frac{4}{5}}}=a^{-\frac{4}{5}}$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt[4]{a^{-9}}}=\frac{1}{a^{-\frac{9}{4}}}=a^{\frac{9}{4}}$$

답 (1) $a^{\frac{1}{5}}$ (2) $a^{\frac{6}{7}}$ (3) $a^{-\frac{4}{5}}$ (4) $a^{\frac{9}{4}}$

$$07 (1) 625^{0.125}=(5^4)^{0.125}=5^{4\times 0.125}=5^{0.5}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$$

$$(2) 27^{\frac{4}{9}}=(3^3)^{\frac{4}{9}}=3^{3\times\frac{4}{9}}=3^{\frac{4}{3}}=3^{1+\frac{1}{3}}=3\times 3^{\frac{1}{3}}=3\sqrt[3]{3}$$

$$(3) 4^{-\frac{3}{4}}=(2^2)^{-\frac{3}{4}}=2^{2\times(-\frac{3}{4})}=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2^{1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\times 2^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(4) \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{6}}=\left(\frac{1}{2^4}\right)^{-\frac{1}{6}}=(2^{-4})^{-\frac{1}{6}}=2^{-4\times(-\frac{1}{6})} \\ =2^{\frac{2}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4}$$

답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $3\sqrt[3]{3}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (4) $\sqrt[3]{4}$

다른풀이 (3) $4^{-\frac{3}{4}} = (2^2)^{-\frac{3}{4}} = 2^{2 \times (-\frac{3}{4})} = 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{-2 + \frac{1}{2}}$
 $= 2^{-2} \times 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^2} \times 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

08 (1) $3^{\frac{7}{3}} \times 9^{-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{7}{3}} \times (3^2)^{-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{7}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}}$
 $= 3^{\frac{7}{3} + (-\frac{1}{3})} = 3^2 = 9$

(2) $a^{\frac{15}{4}} \div a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{15}{4} - \frac{3}{4}} = a^3$

(3) $(2^{\frac{2}{9}})^3 \times \sqrt[3]{2} \div (2^{\frac{1}{4}})^8 = 2^{\frac{2}{9} \times 3} \times 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{4} \times 8}$
 $= 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \div 2^2$
 $= 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(4) $(\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{9})^6 = (\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{3^2})^6 = (2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}})^6$
 $= 2^{\frac{1}{3} \times 6} \times 3^{\frac{1}{2} \times 6} = 2^2 \times 3^3 = 108$

(5) $(\sqrt[6]{a^2} \times \sqrt[12]{b^2})^3 = (a^{\frac{2}{6}} \times b^{\frac{2}{12}})^3 = a^{\frac{2}{6} \times 3} \times b^{\frac{2}{12} \times 3}$
 $= ab^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{b}$

(6) $(a^2b^4)^8 \times (a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{3}})^{12} = a^{2 \times 8}b^{4 \times 8} \times a^{\frac{1}{4} \times 12}b^{\frac{2}{3} \times 12}$
 $= a^{16}b^{32} \times a^3b^8$
 $= a^{16+3}b^{32+8}$
 $= a^{19}b^{40}$

(7) $2^{\sqrt{3}} \times 2^{\sqrt{27}} = 2^{\sqrt{3} + \sqrt{27}} = 2^{\sqrt{3} + 3\sqrt{3}} = 2^{4\sqrt{3}}$

(8) $7^{\sqrt{54}} \div 7^{\sqrt{6}} \times 7^{\sqrt{24}} = 7^{\sqrt{54} - \sqrt{6} + \sqrt{24}}$
 $= 7^{3\sqrt{6} - \sqrt{6} + 2\sqrt{6}}$
 $= 7^{4\sqrt{6}}$

(9) $(a^{\frac{\sqrt{2}}{5}})^{5\sqrt{2}} = a^{\frac{\sqrt{2}}{5} \times 5\sqrt{2}} = a^2$

(10) $(a^{\sqrt{2}}b^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}b^{\sqrt{8} \times \sqrt{2}} = a^2b^4$

답 (1) 9 (2) a^3 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 108 (5) $a\sqrt{b}$

(6) $a^{19}b^{40}$ (7) $2^{4\sqrt{3}}$ (8) $7^{4\sqrt{6}}$ (9) a^2 (10) a^2b^4

기출 Best | 1회

p.8~10

01 $-64 < 0$ 이므로 -64 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-64} = -4$ 의 1개이다. $\therefore a = 1$

$5 > 0$ 이므로 5의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{5}$ 의 2개이다.
 $\therefore b = 2$

$\therefore a - b = 1 - 2 = -1$

답 ②

02 $\sqrt[4]{3 \times 216} + 4\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{3 \times 6^3} + 4\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{6^2}$
 $= \sqrt[4]{6} + 4\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{6}$
 $= 6\sqrt[4]{6}$

답 ⑤

다른풀이 $\sqrt[4]{3 \times 216} + 4\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{36} = \sqrt[12]{6^3} + 4\sqrt[4]{6} + \sqrt[6]{6^2}$
 $= 6^{\frac{1}{4}} + 4 \times 6^{\frac{1}{4}} + 6^{\frac{1}{4}}$
 $= 6 \times 6^{\frac{1}{4}} = 6\sqrt[4]{6}$

03 $\sqrt[3]{\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{32}}} \times \sqrt{\frac{n\sqrt{2}}{\sqrt[6]{3}}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt[6]{32}} \times \frac{2n\sqrt{2}}{\sqrt[12]{3}} = \frac{2n\sqrt{2}}{\sqrt[6]{32}}$
 $\therefore \frac{2n\sqrt{2}}{\sqrt[6]{32}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$ 이므로

$\frac{2n\sqrt{2}}{\sqrt[6]{32}} = \frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{12\sqrt[6]{2^{10}}}{12\sqrt[12]{2^9}} = 12\sqrt{2}$

$2n = 12 \quad \therefore n = 6$

답 ⑤

04 $\sqrt[5]{\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{15\sqrt{x}}{10\sqrt{x}} \times \frac{6\sqrt{x}}{15\sqrt{x}} \times \frac{10\sqrt{x}}{6\sqrt{x}} = 1$

답 ①

05 3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$A = \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}, B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216},$

$C = \sqrt[6]{12} = \sqrt[12]{12^2} = \sqrt[12]{144}$

이때 $81 < 144 < 216$ 이므로 $\sqrt[12]{81} < \sqrt[12]{144} < \sqrt[12]{216}$

$\therefore A < C < B$

답 ②

참고 n 이 2 이상의 정수일 때, $0 < A < B$ 이면

$\sqrt[n]{A} < \sqrt[n]{B}$

06 $(3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}+3} \times (3^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}})^{\frac{9}{2}} \times (8^{\sqrt{2}})^{\frac{\sqrt{2}}{6}}$

$= 3^{\sqrt{3}(\sqrt{3}+3)} \times 3^{-\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{9}{2}} \times 8^{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{6}}$

$= 3^{3+3\sqrt{3}} \times 3^{-3\sqrt{3}} \times 8^{\frac{1}{3}}$

$= 3^{3+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}} \times (2^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 3^3 \times 2 = 54$

답 ①

07 ① $1^0 \times 4^{\frac{1}{2}} = 1 \times (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2$

② $9^{\frac{5}{2}} \times 3^{-2} = (3^2)^{\frac{5}{2}} \times 3^{-2} = 3^5 \times 3^{-2} = 3^3 = 27$

③ $3^{\frac{2}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times (2^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 2 = 2^{\frac{2}{3}} \times 9$

④ $\sqrt[4]{2} \times 8^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \times (2^3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2$

⑤ $\{(-7)^2\}^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

08 $\sqrt{a^2 \times 3\sqrt{a^3 \times 4\sqrt{a}}} = \sqrt{a^2} \times \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[4]{4\sqrt{a}}$

$= \sqrt{a^2} \times \sqrt[6]{a^3} \times 2\sqrt[4]{a}$

$= a \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{24}}$

$= a^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24}} = a^{\frac{37}{24}}$

따라서 $m = 24, n = 37$ 이므로

$m + n = 24 + 37 = 61$

답 ④

09 $(\sqrt[5]{2^3 \times 4\sqrt{16}})^n = (\sqrt[5]{2^3 \times 4 \times 2^2})^n = (\sqrt[5]{2^3 \times 2})^n$
 $= (\sqrt[5]{2^4})^n = (2^{\frac{4}{5}})^n = 2^{\frac{4n}{5}}$

이것이 자연수가 되려면 $\frac{4}{5}n$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다. 즉, 자연수 n 은 5의 배수이어야 하므로 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

답 ④

10 $5^4=a$ 에서 $5=a^{\frac{1}{4}}$
 $8^2=b$ 에서 $(2^3)^2=b$, $2^6=b$ $\therefore 2=b^{\frac{1}{6}}$
 $\therefore 200^{10}=(2^3 \times 5^2)^{10}=\{(b^{\frac{1}{6}})^3 \times (a^{\frac{1}{4}})^2\}^{10}$
 $= (b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}})^{10}=a^5b^5$ 답 ⑤

11 $(n^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}=n^{\frac{1}{4}}=k$ (k 는 자연수)로 놓으면
 $n=k^4$
 즉, n 이 될 수 있는 수는 $1^4, 2^4, 3^4, 4^4, \dots$ 이고, n 은 두 자리 자연수이므로
 $n=2^4=16$ 또는 $n=3^4=81$
 따라서 구하는 두 자리 자연수 n 의 값의 합은
 $16+81=97$ 답 ③

12 $2^{\frac{2}{3}}=X$, $2^{-\frac{1}{3}}=Y$ 로 놓으면
 $(X+Y)^3+(X-Y)^3$
 $=(X^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3)+(X^3-3X^2Y+3XY^2-Y^3)$
 $=2(X^3+3XY^2)$
 $=2 \times \{(2^{\frac{2}{3}})^3+3 \times 2^{\frac{2}{3}} \times (2^{-\frac{1}{3}})^2\}$
 $=2 \times (2^2+3 \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{2}{3}})$
 $=2 \times (4+3)=14$ 답 ③

13 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$
 $=3^3-3 \times 3=18$ 답 ②

14 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 의 분모와 분자에 a^x 를 각각 곱하면
 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x-a^{-x}) \times a^x}{(a^x+a^{-x}) \times a^x}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{5-1}{5+1}=\frac{2}{3}$ 답 ①

15 $13^x=9$ 에서 $13=9^{\frac{1}{x}}=(3^2)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{x}}$ ㉠
 $117^y=27$ 에서 $117=27^{\frac{1}{y}}=(3^3)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$ ㉡
 ㉠ $\div$ ㉡을 하면
 $\frac{13}{117}=3^{\frac{2}{x} \div \frac{3}{y}}, 3^{\frac{2}{x} \div \frac{3}{y}}=\frac{1}{9}=3^{-2}$
 $\therefore \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-2$ 답 ①

16 $a^x=81$ 에서 $a=81^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{4}{x}}$ ㉠
 $b^y=81$ 에서 $b=81^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ ㉡
 $c^z=81$ 에서 $c=81^{\frac{1}{z}}=3^{\frac{4}{z}}$ ㉢
 ㉠ $\times$ ㉡ $\times$ ㉢을 하면
 $abc=3^{\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}}$
 이때 $abc=9$ 이므로 $3^{\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}}=9=3^2$
 $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}=2 \quad \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ 답 ③

17 $T=250$ 일 때 $P=10$ 이므로
 $10=C \times 10^{-\frac{1000}{250+250}}$
 $10=C \times 10^{-2} \quad \therefore C=10 \times 10^2=1000$
 $\therefore P=1000 \times 10^{-\frac{1000}{T+250}}$
 따라서 $T=500$ 일 때 증기압 P 는
 $P=1000 \times 10^{-\frac{1000}{500+250}}=10^3 \times 10^{-\frac{4}{3}}=10^{\frac{5}{3}}$ 답 ④

기출 Best | 2회

p.11~13

01 $-3 < 0$ 이므로 -3 의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.
 $\therefore a=0$
 $100 > 0$ 이므로 100 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{100}$ 의 1개이다.
 $\therefore b=1$
 $\therefore b-a=1-0=1$ 답 ④

02 $\sqrt[4]{16^2} \times (\sqrt{2})^6 \div \sqrt[3]{64}=(\sqrt[4]{2^4})^2 \times (\sqrt{2})^6 \div \sqrt[3]{2^6}$
 $=2^2 \times 2^3 \div 2=2^{2+3-1}$
 $=2^4=16$ 답 ③

03 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{3}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[6]{3}} \times \frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt[4]{3}} \times \frac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[8]{3}}$
 $=\frac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[6]{3}}=\frac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[12]{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3}{3^2}}$
 $=\sqrt[12]{\frac{1}{3}}$
 즉, $\sqrt[n]{\frac{1}{3}}=\sqrt[12]{\frac{1}{3}}$ 이므로 $n=12$ 답 ④

04 $\sqrt[3]{ab^2} \times \sqrt[12]{a^3b^6} \div \sqrt[6]{a^2b}= \sqrt[12]{a^4b^8} \times \sqrt[12]{a^3b^6} \div \sqrt[12]{a^4b^2}$
 $=\sqrt[12]{\frac{a^4b^8 \times a^3b^6}{a^4b^2}}$
 $=\sqrt[12]{a^3b^{12}}=b\sqrt[4]{a}$ 답 ③

다른풀이 $\sqrt[3]{ab^2} \times \sqrt[12]{a^3b^6} \div \sqrt[6]{a^2b}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}$
 $=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}$
 $=a^{\frac{1}{4}}b=b\sqrt[4]{a}$

05 $A=\sqrt[3]{2\sqrt{6}}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}\sqrt{3}}=\sqrt[6]{24}$
 $B=\sqrt[3]{\sqrt{21}}=\sqrt[6]{21}$
 $C=\sqrt[3]{2\sqrt[3]{6}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{48}}=\sqrt[6]{48}$
 이때 $21 < 24 < 48$ 이므로 $\sqrt[6]{21} < \sqrt[6]{24} < \sqrt[6]{48}$
 $\therefore B < A < C$ 답 ③

06 $(a^2)^{\sqrt{2}-2} \div (a^{\sqrt{2}+1})^2 \times a^4=a^{2\sqrt{2}-4} \div a^{2\sqrt{2}+2} \times a^4$
 $=a^{2\sqrt{2}-4-(2\sqrt{2}+2)+4}=a^{-2}$
 즉, $a^k=a^{-2}$ 이므로 $k=-2$ 답 ①

07 $\neg$. $(16^{-2})^{\frac{1}{4}} = (4^2)^{-\frac{1}{2}} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ (거짓)

$\neg$. $\sqrt[4]{3\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \sqrt[4]{12\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = a^{\frac{1}{12}} \times a^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{12} + \frac{1}{8}} = a^{\frac{5}{24}}$ (참)

$\neg$. $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$ (참)

$\neg$. $\sqrt[4]{a^3 \times \sqrt[3]{a}} \div \sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{4}} = a^{-\frac{1}{6}}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ③

08 $\sqrt[4]{a \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt{a^5}} = \sqrt[4]{a \times \sqrt[12]{a^2} \times \sqrt[24]{a^5}}$
 $= a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{5}{24}}$
 $= a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{24}} = a^{\frac{5}{8}}$

따라서 $m=8, n=5$ 이므로

$m-n=8-5=3$

답 ②

09 $(\sqrt[7]{3^2 \times \sqrt[3]{9}})^n = (\sqrt[7]{3^2 \times \sqrt[3]{3^2}})^n$
 $= (\sqrt[7]{3^2 \times 21\sqrt[3]{3^2}})^n$
 $= (3^{\frac{2}{7}} \times 3^{\frac{2}{21}})^n = 3^{\frac{8}{21}n}$

이것이 자연수가 되려면 $\frac{8}{21}n$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다. 즉, 자연수 n 은 21의 배수이어야 하므로 자연수 n 의 최솟값은 21이다.

답 ③

10 $2^3=a$ 에서 $2=a^{\frac{1}{3}}$
 $3^4=b$ 에서 $3=b^{\frac{1}{4}}$
 $\therefore 54^6 = (2 \times 3)^6 = \{a^{\frac{1}{3}} \times (b^{\frac{1}{4}})^3\}^6 = (a^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{3}{4}})^6 = a^2 b^{\frac{9}{2}}$

답 ⑤

11 $(\frac{1}{64})^{\frac{1}{n}} = (\frac{1}{2^6})^{\frac{1}{n}} = (2^{-6})^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$

이것이 자연수가 되려면 $-\frac{6}{n}$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다. 즉,

$-n$ 이 6의 양의 약수이어야 하므로

$-n=1, 2, 3, 6$

$\therefore n=-1, -2, -3, -6$

따라서 모든 정수 n 의 값의 합은

$-1+(-2)+(-3)+(-6)=-12$

답 ①

12 $(x^{\frac{1}{8}} - y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{8}} + y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}) = \{(x^{\frac{1}{8}})^2 - (y^{\frac{1}{8}})^2\}(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})$
 $= (x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})$
 $= (x^{\frac{1}{4}})^2 - (y^{\frac{1}{4}})^2$
 $= x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$
 $= \sqrt{x} - \sqrt{y}$

답 ④

13 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$ 이므로
 $x + x^{-1} = (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 - 2 = (\sqrt{6})^2 - 2 = 4$
 $\therefore x^3 + x^{-3} = (x + x^{-1})^3 - 3(x + x^{-1})$
 $= 4^3 - 3 \times 4 = 52$

답 ⑤

14 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 분모와 분자에 a^x 을 각각 곱하면
 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{(a^{3x} + a^{-3x}) \times a^x}{(a^x + a^{-x}) \times a^x} = \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} = \frac{a^{4x} + (a^{4x})^{-\frac{1}{2}}}{(a^{4x})^{\frac{1}{2}} + 1}$
 $= \frac{5 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1} = \frac{5\sqrt{5} + 1}{5 + \sqrt{5}}$
 $= \frac{(5\sqrt{5} + 1)(5 - \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}$
 $= \frac{24\sqrt{5} - 20}{20} = \frac{6\sqrt{5} - 5}{5}$

답 ④

15 $12^x = 16$ 에서 $12 = 16^{\frac{1}{x}} = (2^4)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{4}{x}}$ ㉠
 $3^y = 16$ 에서 $3 = 16^{\frac{1}{y}} = (2^4)^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{4}{y}}$ ㉡
 $\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면
 $4 = 2^{\frac{4}{x} - \frac{4}{y}}, 2^{\frac{4}{x} - \frac{4}{y}} = 2^2$
 $\frac{4}{x} - \frac{4}{y} = 2 \quad \therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

답 ③

16 $40^x = 2$ 에서 $40 = 2^{\frac{1}{x}}$ ㉠
 $(\frac{1}{10})^y = 8$ 에서 $\frac{1}{10} = 8^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{3}{y}}$ ㉡
 $a^z = 4$ 에서 $a = 4^{\frac{1}{z}} \quad \therefore a^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{z}}$ ㉢
 $\textcircled{1} \times \textcircled{2} \div \textcircled{3}$ 을 하면
 $40 \times \frac{1}{10} \div a^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z}}$
이때 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = -1$ 이므로 $\frac{4}{\sqrt{a}} = 2^{-1}$
 $\sqrt{a} = 8 \quad \therefore a = 8^2 = 64$

답 ⑤

17 $1 \text{ nm} = \frac{1}{10^9} \text{ m}$ 에서
 $10^3 \text{ nm} = 10^3 \times \frac{1}{10^9} \text{ m} = \frac{1}{10^6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}$
 $\therefore 1 \mu\text{m} = 1000 \text{ nm}$
따라서 머리카락의 평균 굵기는
 $80 \mu\text{m} = 80000 \text{ nm} = 40000 \times 2 \text{ nm}$
이므로 DNA의 평균 폭의 40000배이다.
 $40000 = 4 \times 10^4$ 이므로 $a=4, n=4$
 $\therefore a+n=4+4=8$

답 ②

변형유형 집중공략

p.14~15

1-1 $f(a, n) = \begin{cases} 2 & (n \text{은 짝수}) \\ 1 & (n \text{은 홀수}) \end{cases}$ 이므로
 $f(a, 2) = f(a, 4) = f(a, 6) = \dots = 2$
 $f(a, 3) = f(a, 5) = f(a, 7) = \dots = 1$

이때 k 가 짝수, 즉 $k+4$ 가 짝수이면

$$\begin{aligned} f(a, 5) + f(a, 6) + f(a, 7) + \cdots + f(a, k+4) \\ = 1 + 2 + 1 + 2 + \cdots + 1 + 2 = 3 \times \frac{k}{2} = \frac{3}{2}k \end{aligned}$$

k 가 홀수, 즉 $k+4$ 가 홀수이면

$$\begin{aligned} f(a, 5) + f(a, 6) + f(a, 7) + \cdots + f(a, k+4) \\ = 1 + 2 + 1 + 2 + \cdots + 1 + 2 + 1 = 3 \times \frac{k-1}{2} + 1 = \frac{3k-1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore f(a, 5) + f(a, 6) + f(a, 7) + \cdots + f(a, k+4)$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{2}k & (k \text{는 짝수}) \\ \frac{3k-1}{2} & (k \text{는 홀수}) \end{cases}$$

이때 $\frac{3}{2}k = 22$ 를 만족시키는 자연수 k 는 존재하지 않으므로

$$\frac{3k-1}{2} = 22, 3k-1=44$$

$$3k=45 \quad \therefore k=15$$

답 15

참고 자연수 k 에 대하여 5 이상 $k+4$ 이하의 자연수의 개수는 $(k+4) - 5 + 1 = k$

$$1-2 \quad f(k, k+1) = \begin{cases} 1 & (k \text{는 짝수}) \\ 2 & (k \text{는 홀수}) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(1, 2) = f(3, 4) = f(5, 6) = \cdots = 2$$

$$f(2, 3) = f(4, 5) = f(6, 7) = \cdots = 1$$

이때 k 가 짝수, 즉 $k+1$ 이 홀수이면

$$\begin{aligned} f(1, 2) + f(2, 3) + f(3, 4) + \cdots + f(k, k+1) \\ = 2 + 1 + 2 + 1 + \cdots + 2 + 1 \\ = 3 \times \frac{k}{2} = \frac{3}{2}k \end{aligned}$$

k 가 홀수, 즉 $k+1$ 이 짝수이면

$$\begin{aligned} f(1, 2) + f(2, 3) + f(3, 4) + \cdots + f(k, k+1) \\ = 2 + 1 + 2 + 1 + \cdots + 2 + 1 + 2 \\ = 3 \times \frac{k-1}{2} + 2 = \frac{3k+1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore f(1, 2) + f(2, 3) + f(3, 4) + \cdots + f(k, k+1)$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{2}k & (k \text{는 짝수}) \\ \frac{3k+1}{2} & (k \text{는 홀수}) \end{cases}$$

이때 $\frac{3}{2}k = 35$ 를 만족시키는 자연수 k 는 존재하지 않으므로

$$\frac{3k+1}{2} = 35, 3k+1=70$$

$$3k=69 \quad \therefore k=23$$

답 2

$$2-1 \quad \sqrt[n+2]{27} \text{이 어떤 자연수 } x \text{의 } n \text{제곱근이라 하면}$$

$$x = (\sqrt[n+2]{27})^4 = (\sqrt[n+2]{3^3})^4 = (3^{\frac{3}{n+2}})^4 = 3^{\frac{12}{n+2}}$$

이것이 자연수가 되려면 $\frac{12}{n+2}$ 가 음이 아닌 정수이어야 한다.

즉, $n+2$ 는 12의 양의 약수이어야 하므로

$$n+2=1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$\therefore n=-1, 0, 1, 2, 4, 10$$

그런데 n 은 자연수이므로 $n=1, 2, 4, 10$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$1+2+4+10=17$$

답 ①

$$2-2 \quad \sqrt[n+3]{121} \text{이 어떤 자연수 } x \text{의 세제곱근이므로}$$

$$x = (\sqrt[n+3]{121})^3 = (\sqrt[n+3]{11^2})^3 = (11^{\frac{2}{n+3}})^3 = 11^{\frac{6}{n+3}}$$

이것이 자연수이므로 $\frac{6}{n+3}$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다. 즉,

$n+3$ 은 6의 양의 약수이어야 하므로

$$n+3=1, 2, 3, 6$$

$$\therefore n=-2, -1, 0, 3$$

그런데 n 은 자연수이므로 $n=3$

$$\text{이때 } x = 11^{\frac{6}{3+3}} = 11 \text{이므로}$$

$$n+x=3+11=14$$

답 14

서술형 What & How

p.16~17

1 (i) n 이 짝수일 때

$n^2 - 10n + 21$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하려면

$n^2 - 10n + 21 > 0$ 이어야 하므로

$$(n-3)(n-7) > 0 \quad \therefore n < 3 \text{ 또는 } n > 7$$

이때 n 은 $1 < n < 10$ 인 짝수이므로

$$n=2 \text{ 또는 } n=8$$

..... ①

(ii) n 이 홀수일 때

$n^2 - 10n + 21$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면

$n^2 - 10n + 21 < 0$ 이어야 하므로

$$(n-3)(n-7) < 0 \quad \therefore 3 < n < 7$$

이때 n 은 $1 < n < 10$ 인 홀수이므로

$$n=5$$

..... ②

(i), (ii)에서 $n=2, 5, 8$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$2+5+8=15$$

..... ③

답 15

2 (i) n 이 짝수일 때

$-n^2 + 13n - 36$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면

$-n^2 + 13n - 36 > 0$ 이어야 하므로

$$-(n-4)(n-9) > 0$$

$$(n-4)(n-9) < 0 \quad \therefore 4 < n < 9$$

이때 n 은 $2 \leq n \leq 11$ 인 짝수이므로

$$n=6 \text{ 또는 } n=8$$

..... ①

(ii) n 이 홀수일 때

$-n^2 + 13n - 36$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면

$-n^2 + 13n - 36 < 0$ 이어야 하므로

$$-(n-4)(n-9) < 0$$

$$(n-4)(n-9) > 0 \quad \therefore n < 4 \text{ 또는 } n > 9$$

이때 n 은 $2 \leq n \leq 11$ 인 홀수이므로

$$n=3 \text{ 또는 } n=11$$

(i), (ii)에서 자연수 n 은 3, 6, 8, 11의 4개이다.

..... ②

..... ③

답 4

채점기준	배점
① 짝수 n 의 값 구하기	2
② 홀수 n 의 값 구하기	2
③ n 의 개수 구하기	1

3 $a^3=3$ 에서 $a=3^{\frac{1}{3}}$

$b^4=5$ 에서 $b=5^{\frac{1}{4}}$

$c^6=7$ 에서 $c=7^{\frac{1}{6}}$

..... ①

$$\therefore (abc)^n = (3^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{6}})^n = 3^{\frac{n}{3}} \times 5^{\frac{n}{4}} \times 7^{\frac{n}{6}}$$

..... ②

이때 $(abc)^n$ 이 자연수가 되려면 $\frac{n}{3}, \frac{n}{4}, \frac{n}{6}$ 이 모두 음이 아닌

정수이어야 하므로 자연수 n 은 3, 4, 6의 공배수이어야 한다. 즉, n 은 3, 4, 6의 최소공배수인 12의 배수이므로 100 이하의 자연수 n 은

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96

의 8개이다.

..... ③

답 8

4 $a^2=7$ 에서 $a=7^{\frac{1}{2}}$

$b^4=3$ 에서 $b=3^{\frac{1}{4}}$

$c^{10}=5$ 에서 $c=5^{\frac{1}{10}}$

..... ①

$$\therefore (abc)^n = (7^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{10}})^n = 7^{\frac{n}{2}} \times 3^{\frac{n}{4}} \times 5^{\frac{n}{10}}$$

..... ②

이때 $(abc)^n$ 이 자연수가 되려면 $\frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \frac{n}{10}$ 이 모두 음이 아닌

정수이어야 하므로 자연수 n 은 2, 4, 10의 공배수이어야 한다.

즉, 자연수 n 의 최솟값은 2, 4, 10의 최소공배수인 20이다.

..... ③

답 20

채점기준	배점
① a, b, c 를 각각 거듭제곱 꼴로 나타내기	2
② $(abc)^n$ 을 거듭제곱 꼴로 나타내기	2
③ n 의 최솟값 구하기	2

실전 문제 | 1회

p.18~20

01 ① 54의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{54}$ 이다.

② -125의 세제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[3]{-125} = -5$ 의 1개이다.

③ $a < 0$ 일 때, $-a > 0$ 이므로 $(\sqrt[3]{-a})^3 = -a$

④ n 이 짝수일 때, -4의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

⑤ n 이 홀수일 때, 8의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[n]{8}$ 의 1개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

02 $A = \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

$$B = \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

$$C = \sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100}$$

이때 $81 < 100 < 125$ 이므로 $\sqrt[12]{81} < \sqrt[12]{100} < \sqrt[12]{125}$

$$\therefore A < C < B$$

답 ②

03 $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \times \sqrt[4]{a^3} \div \sqrt[6]{a \times \sqrt[3]{a^k}} \times (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{8}}$

$$= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[12]{a^3} \div (\sqrt[6]{a} \times \sqrt[18]{a^k}) \times a^{\frac{1}{16}}$$

$$= a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{4}} \div (a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{k}{18}}) \times a^{\frac{1}{16}}$$

$$= a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - (\frac{1}{6} + \frac{k}{18}) + \frac{1}{16}} = a^{\frac{13}{12} - \frac{k}{18}}$$

$$\text{즉, } a^{\frac{13}{12} - \frac{k}{18}} = 1 = a^0 \text{이므로}$$

$$\frac{13}{12} - \frac{k}{18} = 0, \quad \frac{k}{18} = \frac{13}{12}$$

$$\therefore k = \frac{39}{2}$$

답 ⑤

04 $a = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} \quad \therefore a^{\frac{3}{2}} = 2$

$$b = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \quad \therefore b^2 = 3$$

$$\therefore \sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}} = (2 \times 3)^{\frac{1}{6}} = (a^{\frac{3}{2}} \times b^2)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{3}}$$

답 ①

다른풀이 $\sqrt[6]{6} = \sqrt[6]{2 \times 3} = \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{2^2} \times \sqrt[6]{3}$

$$= \sqrt[12]{4} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[4]{3} \times \sqrt[3]{3}$$

$$= \sqrt[4]{a} \times \sqrt[3]{b} = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{3}}$$

05 $(\sqrt[3]{5})^{\frac{1}{3}}$ 이 어떤 자연수 x 의 n 제곱근이라 하면

$$x = \{(\sqrt[3]{5})^{\frac{1}{3}}\}^n = \{(5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}\}^n = 5^{\frac{n}{9}}$$

$5^{\frac{n}{9}}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{n}{9}$ 이 음이 아닌 정수이어야 하므로 자

연수 n 은 9의 배수이고, $2 \leq n \leq 200$ 이므로 자연수 n 은

9, 18, 27, ..., 198

의 22개이다.

답 ①

06 $A_n \cap N \neq \emptyset$ 이므로 집합 A_n 의 원소 중 자연수인 것이 있어야 한다. 즉, 5^{100} 의 양의 n^2 제곱근

$$\sqrt[n^2]{5^{100}} = 5^{\frac{100}{n^2}}$$

이 자연수이어야 하므로 $\frac{100}{n^2}$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다. 즉,

자연수 n^2 이 100의 양의 약수이어야 한다.

100의 양의 약수 중 자연수의 제곱인 수는 $1^2, 2^2, 5^2, 10^2$ 이고,

$n \geq 2$ 에서 $n^2 \geq 4$ 이므로

$$n^2 = 2^2, 5^2, 10^2$$

$$\therefore n = 2, 5, 10$$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$2 + 5 + 10 = 17$$

답 ①

07 $\frac{a^{-3}+a^{-5}+a^{-7}}{a^3+a^5+a^7} = \frac{a^{-10}(a^7+a^5+a^3)}{a^3+a^5+a^7}$
 $= a^{-10} = (a^5)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ 답 ①

08 $x^2-5x+2=0$ 의 두 근이 $2^a, 2^b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2^a+2^b=5, 2^a \times 2^b=2$
 $\therefore 8^a+8^b=(2^a)^3+(2^b)^3$
 $= (2^a+2^b)^3 - 3 \times 2^a \times 2^b \times (2^a+2^b)$
 $= 5^3 - 3 \times 2 \times 5 = 95$ 답 ③

09 $a - \frac{1}{a} = 36$ 에서 $(\sqrt[3]{a})^3 - (\frac{1}{\sqrt[3]{a}})^3 = 36$
 $(\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}})^3 + 3(\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}}) = 36$
 이때 $\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = A$ 로 놓으면
 $A^3 + 3A = 36, A^3 + 3A - 36 = 0, (A-3)(A^2+3A+12)=0$
 $\therefore A=3 \left(\because A^2+3A+12 = \left(A+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0 \right)$
 $\therefore \sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = A = 3$ 답 ③

10 $\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}} = \frac{(2^x)^3+(2^{-x})^3}{2^x+2^{-x}} = \frac{21}{5}$ 에서
 $\frac{(2^x+2^{-x})(2^{2x}-1+2^{-2x})}{2^x+2^{-x}} = \frac{21}{5}$
 $2^{2x}-1+2^{-2x} = \frac{21}{5} \quad \therefore 2^{2x}+2^{-2x} = \frac{26}{5}$
 $2^{2x}=t$ 로 놓으면 $t + \frac{1}{t} = \frac{26}{5}$
 $5t^2+5=26t, 5t^2-26t+5=0$
 $(5t-1)(t-5)=0 \quad \therefore t = \frac{1}{5} \text{ 또는 } t=5$
 이때 $2^x > 1$ 에서 $t=2^{2x} = (2^x)^2 > 1$ 이므로
 $t=5$
 즉, $2^{2x}=5$ 이므로
 $2^{4x} = (2^{2x})^2 = 5^2 = 25$ 답 ②

11 $4^x=k$ 에서 $4=k^{\frac{1}{x}}$ ㉠
 $6^y=k$ 에서 $6=k^{\frac{1}{y}}$ ㉡
 $9^z=k$ 에서 $9=k^{\frac{1}{z}}$ ㉢
 ㉠ $\div$ ㉡ $\times$ ㉢을 하면
 $6=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}, 6=k^2 \quad \therefore k=\sqrt{6}$ 답 ④

12 $2=24^a, 3=24^b$ 이므로
 $24=2^3 \times 3 = (24^a)^3 \times 24^b = 24^{3a+b}$
 $\therefore 3a+b=1$
 즉, $b=1-3a$ 이므로
 $8^{\frac{2(1-a-b)}{1-b}} = 8^{\frac{2(1-a-(1-3a))}{1-(1-3a)}} = 8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$ 답 ⑤

13 9번 건반의 진동수를 f_9 라 하면

$$f_9 = F \times 2^{\frac{9-1}{12}} = 2^{\frac{2}{3}} F$$

3번 건반의 진동수를 f_3 이라 하면

$$f_3 = F \times 2^{\frac{3-1}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} F$$

이므로

$$\frac{f_9}{f_3} = \frac{2^{\frac{2}{3}} F}{2^{\frac{1}{6}} F} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore f_9 = \sqrt{2} f_3$$

따라서 9번 건반의 진동수는 3번 건반의 진동수의 $\sqrt{2}$ 배이다.

답 ①

14 배터리를 완전히 방전시킨 후 24시간 동안 충전했을 때의 충전 용량을 H_{24} , 배터리를 완전히 방전시킨 후 12시간 동안 충전했을 때의 충전 용량을 H_{12} 라 하면

$$H_{24} = Q \times (1 - 2^{-\frac{24}{3}}) = Q \times (1 - 2^{-8})$$

$$H_{12} = Q \times (1 - 2^{-\frac{12}{3}}) = Q \times (1 - 2^{-4})$$

이므로

$$\frac{H_{24}}{H_{12}} = \frac{Q \times (1 - 2^{-8})}{Q \times (1 - 2^{-4})} = \frac{1 - 2^{-8}}{1 - 2^{-4}}$$

$$= \frac{(1 + 2^{-4})(1 - 2^{-4})}{1 - 2^{-4}} = 1 + 2^{-4}$$

$$= 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$$

$$\therefore H_{24} = \frac{17}{16} H_{12}$$

따라서 배터리를 완전히 방전시킨 후 24시간 동안 충전했을 때의 충전 용량은 배터리를 완전히 방전시킨 후 12시간 동안 충전했을 때의 충전 용량의 $\frac{17}{16}$ 배이다. 답 ①

15 -6의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-6}$ 의 1개이므로

$$R_3(-6) = 1$$

-3의 네제곱근 중 실수인 것은 없으므로

$$R_4(-3) = 0$$

4의 제곱근 중 실수인 것은 ± 2 의 2개이므로

$$R_2(4) = 2$$

8의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{8}$ 의 1개이므로

$$R_5(8) = 1$$

..... ①

$$\therefore R_3(-6) + R_4(-3) + R_2(4) + R_5(8)$$

$$= 1 + 0 + 2 + 1 = 4$$

..... ②

답 4

채점기준	배점
① $R_3(-6), R_4(-3), R_2(4), R_5(8)$ 의 값 각각 구하기	4
② $R_3(-6) + R_4(-3) + R_2(4) + R_5(8)$ 의 값 구하기	1

참고 2 이상의 자연수 n 에 대하여

① n 이 짝수일 때

$$R_n(a) = \begin{cases} 2 & (a > 0) \\ 1 & (a = 0) \\ 0 & (a < 0) \end{cases}$$

② n 이 홀수일 때

$$R_n(a)=1$$

16 $(a-2)(b-2)=4$ 에서

$$ab-2(a+b)+4=4, ab=2(a+b)$$

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2} \quad \therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$$

이때 $2^a=3^b=k$ ($k>1$)로 놓으면

$$2^a=k \text{에서 } 2=k^{\frac{1}{a}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$3^b=k \text{에서 } 3=k^{\frac{1}{b}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$6=k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=k^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore k=6^2=36$$

즉, $2^a=3^b=36$ 이므로

$$2^{a-2}-3^{b-2}=\frac{1}{4} \times 2^a - \frac{1}{9} \times 3^b$$

$$=\frac{1}{4} \times 36 - \frac{1}{9} \times 36$$

$$=5$$

..... ①

..... ②

..... ③

답 5

채점기준	배점
① $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 의 값 구하기	2
② $2^a=3^b=k$ 로 놓고 k 의 값 구하기	2
③ $2^{a-2}-3^{b-2}$ 의 값 구하기	2

실전 문제 | 2회

p.21~23

01 $\neg$. -4의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-4}$ 의 1개이다. (거짓)

$\square$. n 이 홀수일 때, $x^n=-5$ 를 만족시키는 실수 x 는 $\sqrt[n]{-5}$ 의 1개이다. (참)

$\square$. n 이 짝수일 때, $x^n=5$ 를 만족시키는 실수 x 는 $\sqrt[n]{5}$, $-\sqrt[n]{5}$ 의 2개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\square$ 이다.

답 ②

$$02 \sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{\frac{16}{2}} - \sqrt[4]{\sqrt{16}} + \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{81}$$

$$=\sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{\frac{16}{2}} - \sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3^4}$$

$$=\sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{2^3} - \sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2}$$

$$=2 + \sqrt[3]{3 \times 3^2} = 2 + \sqrt[3]{3^3}$$

$$=2+3=5$$

답 ⑤

03 $\neg$. $f(2, 4)=\sqrt{4}=2$, $f(4, 8)=\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}$

이므로 $f(2, 4) \neq f(4, 8)$ (거짓)

$$\square$$
. $f(n^2, a)=\sqrt[n^2]{a}=\sqrt[n \times n]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}$

$$=\sqrt[n]{f(n, a)}=f(n, f(n, a)) \text{ (참)}$$

$$\square$$
. $f(6, 4) \times f(6, 16) \times f(6, 32) \times f(6, 128)$

$$=\sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{16} \times \sqrt[6]{32} \times \sqrt[6]{128}$$

$$=\sqrt[6]{4 \times 16 \times 32 \times 128} = \sqrt[6]{2^2 \times 2^4 \times 2^5 \times 2^7}$$

$$=\sqrt[6]{2^{2+4+5+7}} = \sqrt[6]{2^{18}} = \sqrt[6]{(2^3)^6} = 2^3 = 8 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\square$ 이다.

답 ④

$$04 2^{a+\frac{b}{2}}=\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2^{a-\frac{b}{2}}=9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$2^{(a+\frac{b}{2})+(a-\frac{b}{2})}=3$$

$$2^{2a}=3 \quad \therefore 2^a=3^{\frac{1}{2}}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$2^{(a+\frac{b}{2})-(a-\frac{b}{2})}=\frac{1}{27} \quad \therefore 2^b=3^{-3}$$

$$\therefore \sqrt{2^{3a}} \times \sqrt[3]{2^b} = 2^{\frac{3a}{2}} \times 2^{\frac{b}{3}}$$

$$=(2^a)^{\frac{3}{2}} \times (2^b)^{\frac{1}{3}}$$

$$=(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}} \times (3^{-3})^{\frac{1}{3}}$$

$$=3^{\frac{3}{4}} \times 3^{-1}$$

$$=3^{\frac{3}{4}-1}=3^{-\frac{1}{4}}$$

답 ②

05 3의 네제곱근 중 양수인 것은 $x=\sqrt[4]{3}$ 이므로

$$x^n=(\sqrt[4]{3})^n=3^{\frac{n}{4}}$$

이것이 자연수가 되려면 $\frac{n}{4}$ 이 음이 아닌 정수이어야 하므로 자연

수 n 은 4의 배수이어야 한다. 즉,

$$n=4, 8, 12, 16, 20, \dots$$

$$\therefore x^n=3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \dots$$

이때 x^n 은 두 자리 자연수이므로 $n=12$ 또는 $n=16$ 일 때

$$x^n=3^3=27 \text{ 또는 } x^n=3^4=81$$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$12+16=28$$

답 ②

$$06 \frac{2}{1-a^{\frac{1}{8}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{8}}} + \frac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2(1+a^{\frac{1}{8}})+2(1-a^{\frac{1}{8}})}{(1-a^{\frac{1}{8}})(1+a^{\frac{1}{8}})} + \frac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{4}{1-a^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{4(1+a^{\frac{1}{4}})+4(1-a^{\frac{1}{4}})}{(1-a^{\frac{1}{4}})(1+a^{\frac{1}{4}})} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{8}{1-a^{\frac{1}{2}}} + \frac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{8(1+a^{\frac{1}{2}})+8(1-a^{\frac{1}{2}})}{(1-a^{\frac{1}{2}})(1+a^{\frac{1}{2}})}$$

$$=\frac{16}{1-a} = \frac{16}{1-(1+2\sqrt{2})}$$

$$=-\frac{16}{2\sqrt{2}} = -4\sqrt{2}$$

답 ①

07 $ab = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$ 이므로

$$a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = (ab)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + 3x &= (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})^3 + 3(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}) \\ &= (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})^3 + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}) \\ &= (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3 = a - b \\ &= (2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ②

08 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^{-n}+1} + \frac{1}{3^n+1} &= \frac{(3^n+1) + (3^{-n}+1)}{(3^{-n}+1)(3^n+1)} \\ &= \frac{3^n+1+3^{-n}+1}{1+3^{-n}+3^n+1} = 1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^{-10}+1} + \frac{1}{3^{-9}+1} + \cdots + \frac{1}{3^{-1}+1} + \frac{1}{3^0+1} \\ + \frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^{10}+1} \\ = \left(\frac{1}{3^{-10}+1} + \frac{1}{3^{10}+1} \right) + \left(\frac{1}{3^{-9}+1} + \frac{1}{3^9+1} \right) \\ + \cdots + \left(\frac{1}{3^{-1}+1} + \frac{1}{3^1+1} \right) + \frac{1}{3^0+1} \\ = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{10\text{개}} + \frac{1}{2} \\ = 1 \times 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

09 $\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x+2^{-x}} = \frac{2^x(2^{3x}-2^{-3x})}{2^x(2^x+2^{-x})}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^{4x}-2^{-2x}}{2^{2x}+1} = \frac{(2^{2x})^2 - (2^{-2x})^{-1}}{2^{2x}+1} \\ &= \frac{5^2 - \frac{1}{5}}{5+1} = \frac{62}{15} \end{aligned}$$

답 ①

10 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{1}{3}$ 에서 $3a^x - 3a^{-x} = a^x + a^{-x}$

$$2a^x = 4a^{-x}, a^x = 2a^{-x}, a^{2x} = 2$$

$$\therefore a^x = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^{\frac{3}{2}x} - a^{-\frac{x}{2}}}{a^{-\frac{3}{2}x} + a^{\frac{x}{2}}} &= \frac{a^{\frac{x}{2}}(a^{\frac{3}{2}x} - a^{-\frac{x}{2}})}{a^{\frac{x}{2}}(a^{-\frac{3}{2}x} + a^{\frac{x}{2}})} \\ &= \frac{a^{2x} - 1}{a^{-x} + a^x} = \frac{2-1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}} \quad \leftarrow \text{분모와 분자에 } \sqrt{2} \text{를 곱한다.} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1+2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

답 ②

11 $a^x = 3$ 에서 $a = 3^{\frac{1}{x}}$ ㉠

$$\left(\frac{1}{10} \right)^y = 81 \text{에서 } \frac{1}{10} = 81^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$b^z = 3 \text{에서 } b = 3^{\frac{1}{z}} \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

$$\text{㉠} \times \text{㉡} \text{을 하면 } \frac{a}{10} = 3^{\frac{1}{x} + \frac{4}{y}} = 3^2 = 9 \quad \therefore a = 90$$

$$\text{㉡} \div \text{㉢} \text{을 하면 } \frac{1}{10b} = 3^{\frac{4}{y} - \frac{1}{z}} = 3^1 = 3 \quad \therefore b = \frac{1}{30}$$

$$\therefore ab = 90 \times \frac{1}{30} = 3$$

답 ③

12 $R_A = 1200, R_B = 1600$ 이므로

$$E_A = \frac{1}{1+10^{\frac{1600-1200}{400}}} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11},$$

$$E_B = \frac{1}{1+10^{\frac{1200-1600}{400}}} = \frac{1}{1+10^{-1}} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

$$\therefore E_B - E_A = \frac{10}{11} - \frac{1}{11} = \frac{9}{11}$$

답 ⑤

13 $\sqrt{\frac{n}{5}} = k$ (k 는 자연수)라 하면

$$\frac{n}{5} = k^2 \quad \therefore n = 5k^2$$

$$\sqrt[3]{\frac{n}{3}} = l \quad (l \text{은 자연수}) \text{이라 하면}$$

$$\frac{n}{3} = l^3 \quad \therefore n = 3l^3$$

$5k^2 = 3l^3$ 에서 k 는 3의 배수이고, l 은 5의 배수이므로

$$k = 3p, l = 5q \quad (p, q \text{는 자연수})$$

라 하면

$$n = 5k^2 = 5 \times (3p)^2 = 5 \times 3^2 \times p^2$$

$$n = 3l^3 = 3 \times (5q)^3 = 3 \times 5^3 \times q^3 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

즉, $5 \times 3^2 \times p^2 = 3 \times 5^3 \times q^3$ 이므로

$$3p^2 = 5^2 q^3 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

이때 q 는 3의 배수이고, $q = 3$ 일 때,

$$3p^2 = 5^2 \times 3^3, p^2 = 5^2 \times 3^2 = 15^2$$

$$\therefore p = 15 \quad (\because p > 0)$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 ㉠에서

$$n = 3 \times 5^3 \times 3^3 = 3^4 \times 5^3$$

$$\text{이므로 } a = 4, b = 3$$

$$\therefore a + b = 4 + 3 = 7$$

답 ③

참고 ㉡에서 q 는 3의 배수이므로 $q = 3m$ (m 은 자연수)이라 하면

$$3p^2 = 5^2 \times (3m)^3, 3p^2 = 5^2 \times 3^3 m^3$$

$$p^2 = 5^2 \times 3^2 m^3 \quad \therefore p = 15m^{\frac{3}{2}} \quad (\because p > 0)$$

p 가 자연수이려면 m 이 어떤 자연수의 제곱인 수이어야 하므로

$$m = j^2 \quad (j \text{는 자연수}) \text{이라 하면}$$

$$p = 15 \times (j^2)^{\frac{3}{2}} = 15j^3$$

$$\text{즉, } j = 1 \text{일 때, } p = 15, q = 3$$

$$j = 2 \text{일 때, } p = 120, q = 12$$

$\vdots$

자연수 n 은 p, q 가 최소일 때 최소이므로 $p = 15, q = 3$ 일 때

$$n = 5 \times 3^2 \times 15^2 = 3 \times 5^3 \times 3^3 = 3^4 \times 5^3$$

14 $2^{2x}=t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{2^{6x}+1}{2^{4x}+2^{2x}} &= \frac{t^3+1}{t^2+t} = \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t(t+1)} \\ &= \frac{t^2-t+1}{t} = t-1+\frac{1}{t} \\ &= 2^{2x}-1+\frac{1}{2^{2x}} = 4^x-1+4^{-x} \\ &= 14-1=13\end{aligned}$$

답 ③

15 n^2-5n-6 의 세제곱근 중 실수인 것은 항상 1개이므로

$$f(n)=1 \quad \dots\dots ①$$

한편, $n^2-5n-6=(n+1)(n-6)$ 이므로

(i) $n^2-5n-6>0$ 일 때, n^2-5n-6 의 네제곱근 중 실수인 것은 2개이다.

이때 $(n+1)(n-6)>0$ 에서 $n<-1$ 또는 $n>6$

$\therefore n>6$ ($\because n$ 은 자연수)

(ii) $n^2-5n-6=0$ 일 때, n^2-5n-6 의 네제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

이때 $(n+1)(n-6)=0$ 에서 $n=-1$ 또는 $n=6$

$\therefore n=6$ ($\because n$ 은 자연수)

(iii) $n^2-5n-6<0$ 일 때, n^2-5n-6 의 네제곱근 중 실수인 것은 0개이다.

이때 $(n+1)(n-6)<0$ 에서 $-1<n<6$

$\therefore 1\leq n<6$ ($\because n$ 은 자연수)

$$(i), (ii), (iii)에서 g(n)=\begin{cases} 2 & (n>6) \\ 1 & (n=6) \\ 0 & (1\leq n<6) \end{cases} \quad \dots\dots ②$$

즉, $f(n)>g(n)$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값의 범위는

$$1\leq n<6 \quad \therefore n=1, 2, 3, 4, 5$$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$1+2+3+4+5=15 \quad \dots\dots ③$$

답 15

채점기준	배점
① $f(n)$ 구하기	2
② $g(n)$ 구하기	3
③ n 의 값의 합 구하기	1

16 수심이 6m인 곳에서의 빛의 세기를 T_6 , 수심이 30m인 곳에서의 빛의 세기를 T_{30} 이라 하면

$$T_6=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{4}}L=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}L$$

$$T_{30}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{4}}L=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{2}}L \quad \dots\dots ①$$

이므로

$$\frac{T_6}{T_{30}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}L}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{2}}L}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}-\frac{15}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}=2^6=64$$

$$\therefore T_6=64T_{30} \quad \dots\dots ②$$

따라서 수심이 6m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 30m인 곳

에서의 빛의 세기의 64배이다.

$$\therefore m=64$$

$\dots\dots ③$

답 64

채점기준	배점
① 수심이 6m, 30m인 곳에서의 빛의 세기 각각 구하기	2
② ①에서의 빛의 세기의 비 구하기	2
③ m 의 값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.24~26

1 (i) $n=3$ 일 때, $m-2n=m-6$

$m-6$ 의 세제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 m 의 값에 관

계없이 항상 1이므로 $f(3)=1$

따라서 $f(2)+f(3)+f(4)=3$ 에서

$$f(2)+1+f(4)=3 \quad \therefore f(2)+f(4)=2 \quad \dots\dots ⑦$$

(ii) $n=2$ 일 때, $m-2n=m-4$

(ㄱ) $m-4>0$, 즉 $m>4$ 일 때

$m-4$ 의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 2

(ㄴ) $m-4=0$, 즉 $m=4$ 일 때,

$m-4$ 의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 1
 $=0$

(ㄷ) $m-4<0$, 즉 $m<4$ 일 때

$m-4$ 의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 0

$$(ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)에서 f(2)=\begin{cases} 2 & (m>4) \\ 1 & (m=4) \\ 0 & (m<4) \end{cases}$$

(iii) $n=4$ 일 때, $m-2n=m-8$

$$(ii)와 같은 방법으로 하면 f(4)=\begin{cases} 2 & (m>8) \\ 1 & (m=8) \\ 0 & (m<8) \end{cases}$$

$$(ii), (iii)에서 f(2)+f(4)=\begin{cases} 0 & (m<4) \\ 1 & (m=4) \\ 2 & (4<m<8) \\ 3 & (m=8) \\ 4 & (m>8) \end{cases}$$

따라서 ⑦을 만족시키는 자연수 m 의 값의 범위는

$$4<m<8$$

즉, 자연수 m 은 5, 6, 7이므로 모든 자연수 m 의 값의 합은

$$5+6+7=18 \quad \text{답 } ①$$

2 (i) $n=3$ 일 때, $m-3n=m-9$

$m-9$ 의 세제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 m 의 값에 관

계없이 항상 1이므로 $f(3)=1$

따라서 $|f(2)+f(4)-2|=f(3)$ 에서

$$|f(2)+f(4)-2|=1$$

$$f(2)+f(4)-2=-1 \text{ 또는 } f(2)+f(4)-2=1$$

$$\therefore f(2)+f(4)=1 \text{ 또는 } f(2)+f(4)=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=2$ 일 때, $m-3n=m-6$

(ㄱ) $m-6>0$, 즉 $m>6$ 일 때

$m-6$ 의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 2

(ㄴ) $m-6=0$, 즉 $m=6$ 일 때,

$m-6$ 의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 1

(ㄷ) $m-6<0$, 즉 $m<6$ 일 때

$m-6$ 의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 0

$$(ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)에서 f(2)=\begin{cases} 2 & (m>6) \\ 1 & (m=6) \\ 0 & (m<6) \end{cases}$$

(iii) $n=4$ 일 때, $m-3n=m-12$

$$(ii)와 같은 방법으로 하면 f(4)=\begin{cases} 2 & (m>12) \\ 1 & (m=12) \\ 0 & (m<12) \end{cases}$$

$$(ii), (iii)에서 f(2)+f(4)=\begin{cases} 0 & (m<6) \\ 1 & (m=6) \\ 2 & (6<m<12) \\ 3 & (m=12) \\ 4 & (m>12) \end{cases}$$

따라서 ㉠을 만족시키는 자연수 m 의 값은 $m=6$ 또는 $m=12$ 이므로 모든 자연수 m 의 값의 합은

$$6+12=18$$

답 ①

3 $\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{2}}\right)^m \times n = 100$ 에서

$$\frac{5^{\frac{m}{6}}}{2^{\frac{m}{4}}} \times n = 2^2 \times 5^2 \quad \therefore n = 2^{2+\frac{m}{4}} \times 5^{2-\frac{m}{6}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 m, n 이 자연수이므로 $2+\frac{m}{4}, 2-\frac{m}{6}$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다. 따라서 자연수 m 은 4와 6의 공배수이어야 하고,

$$2-\frac{m}{6} \geq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\frac{m}{6} \leq 2 \quad \therefore m \leq 12$$

$$\therefore m=12$$

따라서 ㉠에서

$$n = 2^{2+\frac{12}{4}} \times 5^{2-\frac{12}{6}} = 2^5 \times 5^0 = 32$$

$$\therefore m+n=12+32=44$$

답 ③

4 $\left(\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)^m \times n = 54$ 에서 $\frac{3^{\frac{m}{5}}}{2^{\frac{m}{3}}} \times n = 2 \times 3^3$

$$\therefore n = 2^{1+\frac{m}{3}} \times 3^{3-\frac{m}{5}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 m, n 이 자연수이므로 $1+\frac{m}{3}, 3-\frac{m}{5}$ 은 음이 아닌 정수이어야 한다. 따라서 자연수 m 은 3과 5의 공배수이어야 하고

$$3-\frac{m}{5} \geq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\frac{m}{5} \leq 3 \quad \therefore m \leq 15$$

$$\therefore m=15$$

따라서 ㉠에서 $n = 2^{1+\frac{15}{3}} \times 3^{3-\frac{15}{5}} = 2^6 \times 3^0 = 64$

$$\therefore m+n=15+64=79$$

답 ④

5 $\sqrt[3]{3^{f(n)}}$, 즉 $3^{\frac{f(n)}{3}}$ 의 네제곱근 중 실수인 것은

$$\sqrt[4]{3^{\frac{f(n)}{2}}}, -\sqrt[4]{3^{\frac{f(n)}{2}}}$$

의 2개이고, 이것을 곱한 값이 -9 이므로

$$\sqrt[4]{3^{\frac{f(n)}{2}}} \times \left(-\sqrt[4]{3^{\frac{f(n)}{2}}}\right) = \left\{3^{\frac{f(n)}{2}}\right\}^{\frac{1}{4}} \times \left[-\left\{3^{\frac{f(n)}{2}}\right\}^{\frac{1}{4}}\right] = 3^{\frac{f(n)}{8}} \times \left\{-3^{\frac{f(n)}{8}}\right\}$$

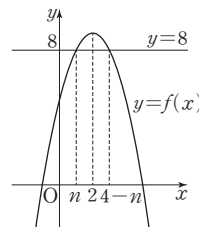
$$= -3^{\frac{f(n)}{8} + \frac{f(n)}{8}} = -3^{\frac{f(n)}{4}} = -9$$

$$\text{즉, } 3^{\frac{f(n)}{4}} = 9 = 3^2 \text{ 이므로}$$

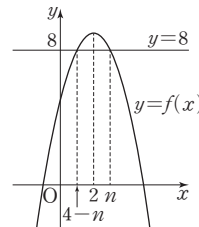
$$\frac{f(n)}{4} = 2 \quad \therefore f(n) = 8$$

이차함수 $f(x) = -(x-2)^2 + k$ 에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로 임의의 실수 t 에 대하여 $f(2-t) = f(2+t)$

즉, $f(n)=8$ 이면 $f(4-n)=8$ 이고, $f(n)=8$ 을 만족시키는 자연수 n 이 2개이므로 $4-n$ 도 자연수이어야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 [그림 1]에서 $n=1 \leftarrow n<2$ 인 자연수 n 은 1뿐이다.

[그림 2]에서 $4-n=1$ 이므로 $n=3$

$$\therefore n=1 \text{ 또는 } n=3$$

따라서 $f(1)=8, f(3)=8$ 이므로

$$f(1) = -(1-2)^2 + k = 8 \text{ 에서 } k=9$$

답 ②

6 $2^{f(t)}$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 $a = \sqrt[3]{2^{f(t)}} = 2^{\frac{f(t)}{3}}$

$4^{f(t)}$ 의 네제곱근 중 양의 실수인 것은

$$b = \sqrt[4]{4^{f(t)}} = 4^{\frac{f(t)}{4}} = (2^2)^{\frac{f(t)}{4}} = 2^{\frac{f(t)}{2}}$$

이때 $ab=1024$ 이므로

$$2^{\frac{f(t)}{3}} \times 2^{\frac{f(t)}{2}} = 2^{\frac{f(t)}{3} + \frac{f(t)}{2}} = 2^{\frac{5}{6}f(t)} = 1024 = 2^{10}$$

$$\text{즉, } \frac{5}{6}f(t) = 10 \text{ 이므로 } f(t) = 12$$

$f(t)=12$ 를 만족시키는 실수 t 가 1개뿐이므로 점 $(t, 12)$ 는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점이다. 또, $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) = (x-t)^2 + 12$$

$$\therefore f(2+t) = (2+t-t)^2 + 12 = 16$$

답 16

2 로그

교과서 예제

p.29

01

답 (1) $3 = \log_4 64$ (2) $-4 = \log_3 \frac{1}{81}$

(3) $\frac{1}{2} = \log_{36} 6$ (4) $0 = \log_7 1$

02

답 (1) $5^3 = 125$ (2) $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$ (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ (4) $(\sqrt{5})^2 = 5$

03

(1) $\log_2 128 = x$ 라 하면 $2^x = 128$

이때 $2^7 = 128$ 이므로 $x = 7$

$\therefore \log_2 128 = 7$

(2) $\log_3 243 = x$ 라 하면 $3^x = 243$

이때 $3^5 = 243$ 이므로 $x = 5$

$\therefore \log_3 243 = 5$

(3) $\log_{\frac{1}{6}} 6 = x$ 라 하면 $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 6$

이때 $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = 6$ 이므로 $x = -1$

$\therefore \log_{\frac{1}{6}} 6 = -1$

(4) $\log_{\sqrt{7}} 49 = x$ 라 하면 $(\sqrt{7})^x = 49$

이때 $(\sqrt{7})^4 = \{(\sqrt{7})^2\}^2 = 7^2 = 49$ 이므로

$x = 4$ $\therefore \log_{\sqrt{7}} 49 = 4$ 답 (1) 7 (2) 5 (3) -1 (4) 4

04

(1) 진수의 조건에서 $-x + 3 > 0$

$-x > -3 \quad \therefore x < 3$

(2) 진수의 조건에서 $x^2 - 5x > 0$

$x(x-5) > 0 \quad \therefore x < 0$ 또는 $x > 5$

(3) 진수의 조건에서 $(x-4)^2 > 0$

$\therefore x \neq 4$ 인 모든 실수

(4) 밑의 조건에서 $x + 5 > 0$, $x + 5 \neq 1$

$x + 5 > 0$ 에서 $x > -5$ ㉠

$x + 5 \neq 1$ 에서 $x \neq -4$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5 < x < -4$ 또는 $x > -4$

답 (1) $x < 3$ (2) $x < 0$ 또는 $x > 5$

(3) $x \neq 4$ 인 모든 실수 (4) $-5 < x < -4$ 또는 $x > -4$

05

(1) $\log_3 N = -2$ 에서 $N = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

(2) $\log_{\frac{1}{4}} N = \frac{1}{2}$ 에서 $N = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(3) $\log_a 8 = 3$ 에서 $a^3 = 8 \quad \therefore a = 2$

(4) $\log_a \sqrt[6]{5} = \frac{1}{6}$ 에서 $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$

$\therefore a = (\sqrt[6]{5})^6 = 5$ 답 (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 2 (4) 5

06

(1) $\log_3 3 + \log_5 1 + \log_4 \frac{1}{4} = 1 + 0 + \log_4 4^{-1}$

$= 1 - \log_4 4 = 1 - 1 = 0$

(2) $\log_3 9\sqrt{3} = \log_3 (3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}) = \log_3 3^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log_3 3 = \frac{5}{2}$

(3) $\log_5 40 - 2\log_5 2\sqrt{2} = \log_5 40 - \log_5 (2\sqrt{2})^2$

$= \log_5 40 - \log_5 8$

$= \log_5 \frac{40}{8} = \log_5 5 = 1$

(4) $3\log_2 \frac{2}{3} + 4\log_2 \sqrt[4]{27} = \log_2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \log_2 (\sqrt[4]{27})^4$

$= \log_2 \frac{8}{27} + \log_2 27$

$= \log_2 \left(\frac{8}{27} \times 27\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3$

$= 3\log_2 2 = 3$

답 (1) 0 (2) $\frac{5}{2}$ (3) 1 (4) 3

다른풀이

(2) $\log_3 9\sqrt{3} = \log_3 9 + \log_3 \sqrt{3}$

$= \log_3 3^2 + \log_3 3^{\frac{1}{2}}$

$= 2\log_3 3 + \frac{1}{2}\log_3 3$

$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

07

(1) $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt{6} = \log_{6^{-1}} 6^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log_6 6 = -\frac{1}{2}$

(2) $\log_2 7 \times \log_2 4 = \log_2 7 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 7} = \log_2 4$

$= \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2$

(3) $\log_3 6 \times \log_6 11 \times \log_{11} 3$

$= \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 11}{\log_{10} 6} \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 11} = 1$

(4) $\log_{16} 128 = \log_{2^4} 2^7 = \frac{7}{4} \log_2 2 = \frac{7}{4}$

(5) $3^{\log_2 7} + 6^{\log_2 8} = 7 + 8 = 15$

(6) $2^{\log_4 12} = 12^{\log_4 2} = 12^{\frac{1}{2} \log_2 2} = 12^{\frac{1}{2} \log_2 2}$

$= 12^{\frac{1}{2}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) 1 (4) $\frac{7}{4}$ (5) 15 (6) $2\sqrt{3}$

08

(1) $\log 10000 = \log 10^4 = 4\log 10 = 4$

(2) $\log \sqrt{1000} = \log \sqrt{10^3} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log 10 = \frac{3}{2}$

(3) $\log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -\log 10 = -1$

(4) $\log^4 \sqrt{100} = \log^4 \sqrt{10^2} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 10 = \frac{1}{2}$

답 (1) 4 (2) $\frac{3}{2}$ (3) -1 (4) $\frac{1}{2}$

- 09 (1) $\log 6740 = \log (6.74 \times 10^3)$
 $= \log 6.74 + \log 10^3$
 $= \log 6.74 + 3 \log 10$
 $= 0.8287 + 3 = 3.8287$
- (2) $\log 67.4 = \log (6.74 \times 10)$
 $= \log 6.74 + \log 10$
 $= 0.8287 + 1 = 1.8287$
- (3) $\log 0.674 = \log (6.74 \times 10^{-1})$
 $= \log 6.74 + \log 10^{-1}$
 $= \log 6.74 - \log 10$
 $= 0.8287 - 1 = -0.1713$
- (4) $\log 0.0674 = \log (6.74 \times 10^{-2})$
 $= \log 6.74 + \log 10^{-2}$
 $= \log 6.74 - 2 \log 10$
 $= 0.8287 - 2 = -1.1713$
- 답 (1) 3.8287 (2) 1.8287 (3) -0.1713 (4) -1.1713

기출 Best | 1회

p.30~32

- 01 $\log_3 (\log_4 x) = 2$ 에서 $\log_4 x = 3^2 = 9$
 $\therefore x = 4^9 = (2^2)^9 = 2^{18}$ 답 ④
- 02 밑의 조건에서 $x-2 > 0$, $x-2 \neq 1$
 즉, $x > 2$, $x \neq 3$ 이므로 $2 < x < 3$ 또는 $x > 3$ ㉠
 진수의 조건에서 $-x^2 + 10x - 16 > 0$
 $x^2 - 10x + 16 < 0$, $(x-2)(x-8) < 0$
 $\therefore 2 < x < 8$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 8$
 따라서 정수 x 는 4, 5, 6, 7이므로 모든 정수 x 의 값의 합은
 $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ 답 ④

03 $\log_2 \sqrt{2} - \log_2 \frac{4}{3} - \log_2 \sqrt{18} = \log_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{\frac{4}{3} \times \sqrt{18}} \right) = \log_2 \frac{1}{4}$
 $= \log_2 2^{-2} = -2$ 답 ②

04 직선 AB의 기울기는
 $\frac{\log_5 375 - \log_5 3}{10 - 4} = \frac{\log_5 \frac{375}{3}}{6} = \frac{\log_5 125}{6}$
 $= \frac{\log_5 5^3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 답 ③

참고 두 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{단, } x_1 \neq x_2)$$

05 $\frac{1}{\log_{12} 3} - \frac{1}{\log_8 3} + \frac{1}{\log_6 3} = \log_3 12 - \log_3 8 + \log_3 6$
 $= \log_3 \left(\frac{12}{8} \times 6 \right) = \log_3 9$
 $= \log_3 3^2 = 2$ 답 ⑤

06 $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 27 - \log_2 3 = \log_2 \left(\frac{\frac{2}{3} \times 27}{3} \right) = \log_2 6$
 $\therefore 2^{\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 27 - \log_2 3} = 2^{\log_2 6} = 6$ 답 ④

07 $\log_5 1.8 = \frac{\log 1.8}{\log 5} = \frac{\log (2 \times 3^2 \times 10^{-1})}{\log (10 \div 2)}$
 $= \frac{\log 2 + 2 \log 3 - 1}{1 - \log 2} = \frac{a + 2b - 1}{1 - a}$ 답 ③

08 $2^a = 3$ 에서 $a = \log_2 3$, $2^b = 5$ 에서 $b = \log_2 5$ 이므로
 $\log_{30} 90 = \frac{\log_2 90}{\log_2 30} = \frac{\log_2 (2 \times 3^2 \times 5)}{\log_2 (2 \times 3 \times 5)}$
 $= \frac{\log_2 2 + 2 \log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5}$
 $= \frac{2a + b + 1}{a + b + 1}$ 답 ⑤

09 $45^x = 81$ 에서 $x = \log_{45} 81$ $\therefore \frac{1}{x} = \log_{81} 45$
 $5^y = 27$ 에서 $y = \log_5 27$ $\therefore \frac{1}{y} = \log_{27} 5$
 $\therefore \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 4 \log_{81} 45 - 3 \log_{27} 5$
 $= 4 \log_{3^4} 45 - 3 \log_{3^3} 5$
 $= \log_3 45 - \log_3 5$
 $= \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9$
 $= \log_3 3^2 = 2$ 답 ②

다른풀이 $45^x = 81$ 에서 $45 = 81^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{4}{x}}$ ㉠

$5^y = 27$ 에서 $5 = 27^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{3}{y}}$ ㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면

$$9 = 3^{\frac{4}{x} - \frac{3}{y}} \quad \therefore \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 2$$

10 $\log_a x = 3$ 에서 $\log_x a = \frac{1}{3}$
 $\log_b x = 4$ 에서 $\log_x b = \frac{1}{4}$
 $\log_c x = 6$ 에서 $\log_x c = \frac{1}{6}$
 이므로 $\log_x a + \log_x b + \log_x c = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$
 $\therefore \log_x abc = \frac{3}{4}$
 $\therefore \log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = \frac{4}{3}$ 답 ⑤

다른풀이 $\log_a x = 3$ 에서 $a^3 = x$ $\therefore a = x^{\frac{1}{3}}$

$\log_b x = 4$ 에서 $b^4 = x$ $\therefore b = x^{\frac{1}{4}}$

$$\log_c x = 6 \text{에서 } c^6 = x \quad \therefore c = x^{\frac{1}{6}}$$

$$\therefore \log_{abc} x = \log_{x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}} x = \log_{x^1} x = \frac{4}{3}$$

- 11 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_2 a + \log_2 b = 6, \log_2 a \times \log_2 b = 3$
 이므로

$$\begin{aligned} \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 b)^2 + (\log_2 a)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2\log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{6^2 - 2 \times 3}{3} = 10 \end{aligned}$$

답 ②

- 12 $2\log_n 8 = 2\log_n 2^3 = 6\log_n 2 = \frac{6}{\log_2 n}$
 이것이 자연수가 되려면 $\log_2 n$ 이 6의 양의 약수이어야 하므로
 $\log_2 n = 1, 2, 3, 6$
 $n = 2, 2^2, 2^3, 2^6 \quad \therefore n = 2, 4, 8, 64$
 따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은
 $2 + 4 + 8 + 64 = 78$ 답 ①
참고 n 이 자연수일 때, $\log_2 n$ 은 음이 아닌 정수이거나 무리수이다. 따라서 $\frac{6}{\log_2 n}$ 이 자연수이려면 $\log_2 n$ 은 자연수이고 6의 양의 약수이어야 한다.

- 13 $\log \sqrt[3]{0.0725} = \log (0.0725)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log (7.25 \times 10^{-2})$
 $= \frac{1}{3} (\log 7.25 + \log 10^{-2})$
 $= \frac{1}{3} \times (0.8603 - 2) = -0.3799$ 답 ③

- 14 $\log x^4$ 과 $\log x^3$ 의 차가 정수이고
 $\log x^4 - \log x^3 = 4\log x - 3\log x = \log x$
 이므로 $\log x$ 가 정수이어야 한다. 이때 $100 \leq x < 10000$ 에서
 $2 \leq \log x < 4$ 이므로
 $\log x = 2$ 또는 $\log x = 3$
 $\therefore x = 10^2$ 또는 $x = 10^3$
 따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은
 $10^2 \times 10^3 = 10^5$ 답 ④

- 15 처음 세균의 수는 $x_0 = 3 \times 10^5$ 이고 약품을 투여한 지 t 시간 후 세균의 수가 $x = 9480$ 이 된다고 하면
 $\log \frac{9480}{3 \times 10^5} = -0.5t, \log \frac{3.16}{10^2} = -\frac{1}{2}t$
 $\therefore t = -2 \log \frac{3.16}{10^2} = -2(\log 3.16 - 2) = -2(0.5 - 2) = 3$
 즉, 세균의 수가 9480이 되는 것은 약품을 투여한 지 3시간 후이다. 답 ④

- 16 현재 감염된 컴퓨터는 100대이고, 감염된 컴퓨터의 수는 1시간마다 9배로 증가하므로 7시간 후 감염된 컴퓨터의 수는
 100×9^7
 그런데 7시간 후 감염된 컴퓨터의 수가 $k \times 10^6$ 이므로
 $100 \times 9^7 = k \times 10^6 \quad \therefore k = \frac{9^7}{10^4} = \frac{(3^2)^7}{10^4} = \frac{3^{14}}{10^4}$
 이때
 $\log k = \log \frac{3^{14}}{10^4} = 14\log 3 - 4 = 14 \times 0.4771 - 4$
 $= 2.6794 = 2 + 0.6794 = \log 100 + \log 4.78$
 $= \log 478$
 이므로 $k = 478$ 답 ③

- 17 올해 전기요금을 a 원이라 하고, 전기요금을 매년 $r\%$ 씩 인상한다고 하면 15년 후 전기요금은
 $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{15} a$ (원)
 이 금액이 올해 전기요금의 2배이므로
 $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{15} a = 2a$
 $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{15} = 2, \log \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{15} = \log 2$
 $15\log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 0.3, \log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 0.02$
 이때 $\log 1.05 = 0.02$ 이므로
 $\log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 1.05$
 $1 + \frac{r}{100} = 1.05, \frac{r}{100} = 0.05 \quad \therefore r = 5$
 따라서 전기요금은 매년 5% 씩 인상해야 한다. 답 ②

기출 Best | 2회

p.33~35

- 01 $\log_2 \{\log_3 (\log_4 x)\} = 0$ 에서
 $\log_3 (\log_4 x) = 1, \log_4 x = 3$
 $\therefore x = 4^3 = 64$ 답 ③
- 02 밑의 조건에서 $|x-1| > 0, |x-1| \neq 1$
 $|x-1| > 0$ 에서 $x-1 \neq 0 \quad \therefore x \neq 1$ ㉠
 $|x-1| \neq 1$ 에서 $x-1 \neq -1$ 이고 $x-1 \neq 1$
 $\therefore x \neq 0$ 이고 $x \neq 2$ ㉡
 진수의 조건에서 $-x^2 - 5x + 14 > 0$
 $x^2 + 5x - 14 < 0, (x+7)(x-2) < 0$
 $\therefore -7 < x < 2$ ㉢
 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면
 $-7 < x < 0$ 또는 $0 < x < 1$ 또는 $1 < x < 2$
 따라서 정수 x 는 $-6, -5, -4, -3, -2, -1$ 의 6개이다. 답 ①

03 $2\log_3\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log_3 5 - \log_3 6\sqrt{5}$

$$= \log_3 (\sqrt{2})^2 + \log_3 5^{\frac{1}{2}} - \log_3 6\sqrt{5}$$

$$= \log_3 2 + \log_3 \sqrt{5} - \log_3 6\sqrt{5}$$

$$= \log_3 \left(\frac{2 \times \sqrt{5}}{6\sqrt{5}} \right) = \log_3 \frac{1}{3}$$

$$= \log_3 3^{-1} = -1$$

답 ②

04 두 점 A($\log_2 3, \log_3 2$), B($\log_2 24, \log_3 162$) 사이의 거리는

$$\sqrt{(\log_2 24 - \log_2 3)^2 + (\log_3 162 - \log_3 2)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\log_2 \frac{24}{3}\right)^2 + \left(\log_3 \frac{162}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(\log_2 8)^2 + (\log_3 81)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

답 ⑤

참고 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

05 $(\log_3 5) \left(\frac{1}{\log_{21} 5} + \frac{1}{\log_7 0.2} \right)$

$$= (\log_3 5)(\log_5 21 + \log_{0.2} 7) = (\log_3 5)(\log_5 21 + \log_{\frac{1}{5}} 7)$$

$$= (\log_3 5) \left(\log_5 21 + \frac{\log_5 7}{\log_5 \frac{1}{5}} \right)$$

$$= (\log_3 5)(\log_5 21 - \log_5 7) \quad \left[\log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1 \right]$$

$$= \log_3 5 \times \log_5 \frac{21}{7} = \log_3 5 \times \log_5 3$$

$$= \log_3 5 \times \frac{1}{\log_5 3} = 1$$

답 ③

참고 $\log_{\frac{1}{5}} 7 = \log_{5^{-1}} 7 = -\log_5 7$ 과 같이 계산할 수도 있다.

06 $\log_5 4 \times \log_2 3 = \log_5 2^2 \times \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$

$$= 2\log_5 2 \times \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$$

$$= 2\log_5 3 = \log_5 3^2 = \log_5 9$$

$$\therefore 5^{\log_5 4 \times \log_2 3} = 5^{\log_5 9} = 9$$

답 ④

07 $\log_2 7 = a$ 에서 $\log_7 2 = \frac{1}{a}$

$$\log_7 9 = b$$
에서 $\log_7 3^2 = 2\log_7 3 = b \quad \therefore \log_7 3 = \frac{b}{2}$

$$\therefore \log_{24} 7 = \frac{1}{\log_7 24} = \frac{1}{\log_7 (2^3 \times 3)} = \frac{1}{3\log_7 2 + \log_7 3}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{a} + \frac{b}{2}} = \frac{1}{\frac{ab+6}{2a}} = \frac{2a}{ab+6}$$

답 ①

08 $2^x = a$ 에서 $x = \log_2 a$, $2^y = b$ 에서 $y = \log_2 b$ 이므로

$$\log_{4ab} a^3 b^2 = \frac{\log_2 a^3 b^2}{\log_2 4ab} = \frac{3\log_2 a + 2\log_2 b}{2 + \log_2 a + \log_2 b}$$

$$= \frac{3x + 2y}{x + y + 2}$$

답 ⑤

09 $12^x = 256$ 에서 $x = \log_{12} 256 \quad \therefore \frac{1}{x} = \log_{256} 12$

$$3^y = 32$$
에서 $y = \log_3 32 \quad \therefore \frac{1}{y} = \log_{32} 3$

$$\therefore \frac{5}{y} - \frac{8}{x} = 5\log_{32} 3 - 8\log_{256} 12$$

$$= 5\log_{2^5} 3 - 8\log_{2^8} 12$$

$$= \log_2 3 - \log_2 12$$

$$= \log_2 \frac{3}{12} = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$$

답 ②

10 $\log_a c : \log_b c = 2 : 1$ 에서 $\log_a c = 2\log_b c$

$$\frac{1}{\log_c a} = \frac{2}{\log_c b}, \log_c b = 2\log_c a$$

$$\log_c b = \log_c a^2 \quad \therefore b = a^2$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \log_a a^2 + \log_{a^2} a$$

$$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

답 ⑤

11 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = 5, a\beta = 5$$

이므로

$$t = \sqrt{a^2 + \beta^2} = \sqrt{(a + \beta)^2 - 2a\beta}$$

$$= \sqrt{5^2 - 2 \times 5} = \sqrt{15}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \log_t 3a + \frac{1}{2 \log_\beta t} = \frac{1}{2} \log_t 3a + \frac{1}{2} \log_t \beta$$

$$= \frac{1}{2} (\log_t 3a + \log_t \beta)$$

$$= \frac{1}{2} \log_t 3a\beta = \log_{t^2} 3a\beta$$

$$= \log_{15} 15 = 1$$

답 ①

12 $3\log_n 16 = 3\log_n 2^4 = 12\log_n 2 = \frac{12}{\log_2 n}$

이것이 자연수가 되려면 $\log_2 n$ 은 12의 양의 약수이어야 하므로

$$\log_2 n = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$\therefore n = 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^6, 2^{12}$$

따라서 자연수 n 의 개수는 6이다.

답 ②

참고 n 이 자연수일 때, $\log_2 n$ 은 음이 아닌 정수이거나 무리수이

다. 따라서 $\frac{12}{\log_2 n}$ 가 자연수이면 $\log_2 n$ 은 자연수이고 12의 양의 약수이어야 한다.

13 $\log \sqrt[3]{2030} = \log 2030^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 2030$

$$= \frac{1}{3} \log (2.03 \times 10^3) = \frac{1}{3} (\log 2.03 + 3)$$

$$= \frac{1}{3} \times (0.3075 + 3) = 1.1025$$

$$\log 0.191 = \log (1.91 \times 10^{-1}) = \log 1.91 - 1$$

$$= 0.2810 - 1 = -0.7190$$

$$\therefore \log \sqrt[3]{2030} + \log 0.191 = 1.1025 + (-0.7190)$$

$$= 0.3835$$

답 ①

- 14 $\log A^2$ 과 $\log \sqrt[3]{A}$ 의 차가 정수이고

$$\begin{aligned}\log A^2 - \log \sqrt[3]{A} &= \log A^2 - \log A^{\frac{1}{3}} \\ &= 2\log A - \frac{1}{3}\log A \\ &= \frac{5}{3}\log A\end{aligned}$$

이므로 $\frac{5}{3}\log A$ 의 값이 정수이어야 한다. 이때

$$10^4 \leq A < 10^5 \text{에서 } 4 \leq \log A < 5, \text{ 즉 } \frac{20}{3} \leq \frac{5}{3}\log A < \frac{25}{3}$$

이므로

$$\frac{5}{3}\log A = 7 \text{ 또는 } \frac{5}{3}\log A = 8$$

$$\log A = \frac{21}{5} \text{ 또는 } \log A = \frac{24}{5}$$

$$\therefore A = 10^{\frac{21}{5}} \text{ 또는 } A = 10^{\frac{24}{5}}$$

따라서 모든 실수 A 의 값의 곱은

$$10^{\frac{21}{5}} \times 10^{\frac{24}{5}} = 10^{\frac{21}{5} + \frac{24}{5}} = 10^9$$

답 ④

- 15 음향의 주파수가 f 로 일정하고 벽의 단위 면적당 질량이 m_1 일 때, 벽면의 음향투과손실을 L_1 이라 하면

$$L_1 = 20 \log m_1 f - 48$$

벽의 단위 면적당 질량이 $8m_1$ 일 때, 벽면의 음향투과손실을

L_2 라 하면

$$L_2 = 20 \log 8m_1 f - 48$$

$$\therefore L_2 - L_1 = 20 \log 8m_1 f - 48 - (20 \log m_1 f - 48)$$

$$= 20(\log 8m_1 f - \log m_1 f)$$

$$= 20 \log \frac{8m_1 f}{m_1 f} = 20 \log 8 = 20 \log 2^3$$

$$= 60 \log 2 = 60 \times 0.3 = 18$$

따라서 벽면의 음향투과손실은 18데시벨만큼 증가하였으므로

$$a = 18$$

답 ③

- 16 올해 생산 가능 인구수는 10^6 이고, 생산 가능 인구수는 매년 1.4 %씩 감소하므로 15년 후 이 지역의 생산 가능 인구수는

$$10^6 \times \left(1 - \frac{1.4}{100}\right)^{15} = 10^6 \times 0.986^{15}$$

그런데 15년 후 이 지역의 생산 가능 인구수가 $k \times 10^4$ 이므로

$$10^6 \times 0.986^{15} = k \times 10^4$$

$$\therefore k = 10^2 \times 0.986^{15}$$

이때

$$\log k = \log (10^2 \times 0.986^{15}) = 2 + 15 \log 0.986$$

$$= 2 + 15 \log (9.86 \times 10^{-1})$$

$$= 2 + 15(\log 9.86 - 1)$$

$$= 2 + 15(0.9939 - 1) = 1.9085$$

$$= 1 + 0.9085 = \log 10 + \log 8.1$$

$$= \log (10 \times 8.1) = \log 81$$

이므로 $k = 81$

답 ②

- 17 전자 제품의 출시 가격을 a 원이라 하고, 출시 가격이 매년 r %씩 하락하였다고 하면 18개월 후의 가격은

$$\left(1 - \frac{r}{100}\right)^{18} a (\text{원})$$

이 금액이 출시 가격의 $\frac{2}{3}$ 이므로

$$\left(1 - \frac{r}{100}\right)^{18} a = \frac{2}{3} a$$

$$\left(1 - \frac{r}{100}\right)^{18} = \frac{2}{3}, \log \left(1 - \frac{r}{100}\right)^{18} = \log \frac{2}{3}$$

$$18 \log \left(1 - \frac{r}{100}\right) = \log 2 - \log 3$$

$$18 \log \left(1 - \frac{r}{100}\right) = 0.3 - 0.48 = -0.18$$

$$\therefore \log \left(1 - \frac{r}{100}\right) = -0.01 = -1 + 0.99$$

$$= -1 + \log 9.77$$

$$= \log (10^{-1} \times 9.77)$$

$$= \log 0.977$$

$$\text{즉, } 1 - \frac{r}{100} = 0.977 \text{이므로 } \frac{r}{100} = 0.023$$

$$\therefore r = 2.3$$

따라서 전자 제품의 가격은 매달 2.3 %씩 하락하였다.

답 ③

변형유형 집중공략

p.36~37

- 1-1 밑의 조건에서 $a-3 > 0$, $a-3 \neq 1$

$$a > 3, a \neq 4 \quad \therefore 3 < a < 4 \text{ 또는 } a > 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{진수의 조건에서 } ax^2 + (a-5)x + 4 > 0$$

모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + (a-5)x + 4 > 0$ 이 성립해야 하므로

(i) $a > 0$ 일 때

이차방정식 $ax^2 + (a-5)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-5)^2 - 4 \times a \times 4 < 0$$

$$a^2 - 10a + 25 - 16a < 0, a^2 - 26a + 25 < 0$$

$$(a-1)(a-25) < 0 \quad \therefore 1 < a < 25$$

(ii) $a = 0$ 일 때

$$ax^2 + (a-5)x + 4 > 0 \text{에서 } -5x + 4 > 0$$

$$-5x > -4 \quad \therefore x < \frac{4}{5}$$

즉, $x \geq \frac{4}{5}$ 이면 부등식 $ax^2 + (a-5)x + 4 > 0$ 이 성립하지 않는다.

$$(i), (ii) \text{에서 } 1 < a < 25 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$3 < a < 4 \text{ 또는 } 4 < a < 25$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 24이다.

답 24

1-2 밑의 조건에서 $|a-2| > 0$, $|a-2| \neq 1$

$$|a-2| > 0 \text{에서 } a-2 \neq 0 \quad \therefore a \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$|a-2| \neq 1 \text{에서 } a-2 \neq -1 \text{이고 } a-2 \neq 1$$

$$\therefore a \neq 1 \text{이고 } a \neq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\text{진수의 조건에서 } ax^2+ax+2>0$$

모든 실수 x 에 대하여 $ax^2+ax+2>0$ 이 성립해야 하므로

(i) $a>0$ 일 때

이차방정식 $ax^2+ax+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4 \times a \times 2 < 0$$

$$a^2-8a < 0, a(a-8) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 8$$

(ii) $a=0$ 일 때

$ax^2+ax+2>0$ 에서 $2>0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$ax^2+ax+2>0$ 이 성립한다.

(i), (ii)에서 $0 \leq a < 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$ 의 공통부분을 구하면

$$0 \leq a < 1 \text{ 또는 } 1 < a < 2 \text{ 또는 } 2 < a < 3 \text{ 또는 } 3 < a < 8$$

따라서 정수 a 는 0, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

답 ⑤

2-1 $T_C=12$, $T_0=84$ 이고, $t=4$ 일 때 $T=48$ 이므로

$$4A=\log \frac{48-12}{84-12}, 4A=\log \frac{1}{2}$$

$$\therefore A=\frac{1}{4}\log \frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\log 2$$

$$\therefore -\frac{1}{4}t\log 2=\log \frac{T-T_C}{T_0-T_C}$$

이때 48°C 인 자동차의 내부 온도가 t 분 후에 21°C 가 된다고 하면

$$T_C=12, T_0=84 \text{이고, } T=21 \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{4}t\log 2=\log \frac{21-12}{84-12}$$

$$-\frac{1}{4}t\log 2=\log \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}t\log 2=-\log 4$$

$$\therefore t=\frac{4\log 4}{\log 2}=4\log_2 4=4\log_2 2^2=4 \times 2=8$$

따라서 자동차의 내부 온도가 21°C 가 되려면 자동차의 내부 온도가 48°C 인 시점에서 8분 더 지나야 한다.

답 ④

2-2 $a=20$, $c=16$, $b=4$ 일 때

$$\log \frac{4}{20}=-1+k\log 16, -\log 5=-1+4k\log 2$$

$$4k\log 2=1-\log 5=\log \frac{10}{5}=\log 2$$

$$\text{즉, } 4k=1 \text{이므로 } k=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \log \frac{b}{a}=-1+\frac{1}{4}\log c$$

$$a=50, c=81 \text{일 때}$$

$$\log \frac{b}{50}=-1+\frac{1}{4}\log 81=-1+\frac{1}{4}\log 3^4$$

$$=-1+\log 3=\log \frac{3}{10}$$

$$\text{즉, } \frac{b}{50}=\frac{3}{10} \text{이므로 } b=15$$

따라서 50 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 81 %인 용액에 충분히 담가 놓을 때, 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 15 g이다.

답 ③

서술형 What & How

p.38-39

$$1 \quad a^x=3 \text{에서 } x=\log_a 3 \quad \therefore \frac{1}{x}=\log_3 a$$

$$b^y=3 \text{에서 } y=\log_b 3 \quad \therefore \frac{1}{y}=\log_3 b$$

$$c^z=3 \text{에서 } z=\log_c 3 \quad \therefore \frac{1}{z}=\log_3 c$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\log_3 a+\log_3 b+\log_3 c$$

$$=\log_3 \frac{abc}{c}=\log_3 \frac{27c}{c}$$

$$=\log_3 27=\log_3 3^3$$

$$=3$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

답 3

다른풀이 $a=3^{\frac{1}{x}}$, $b=3^{\frac{1}{y}}$, $c=3^{\frac{1}{z}}$ 이므로

$$\frac{ab}{c}=3^{\frac{1}{x}} \times 3^{\frac{1}{y}} \div 3^{\frac{1}{z}}=3^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$$

$$27=3^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}} \quad \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=3$$

$$2 \quad a^x=64 \text{에서 } x=\log_a 64 \text{이므로 } \frac{1}{x}=\log_{64} a$$

$$b^y=64 \text{에서 } y=\log_b 64 \text{이므로 } \frac{1}{y}=\log_{64} b$$

$$c^z=64 \text{에서 } z=\log_c 64 \text{이므로 } \frac{1}{z}=\log_{64} c$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\log_{64} a+\log_{64} b+\log_{64} c$$

$$=\log_{64} abc$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$$\text{이때 } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \text{이므로}$$

$$\log_{64} abc=2, abc=64^2=(2^6)^2=2^{12}$$

$$\therefore k=12$$

$\dots\dots \textcircled{3}$

답 12

채점기준	배점
① $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 를 각각 a, b, c 에 대한 식으로 나타내기	2
② $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 를 abc 에 대한 식으로 나타내기	2
③ k 의 값 구하기	1

다른풀이 $a=64^{\frac{1}{x}}, b=64^{\frac{1}{y}}, c=64^{\frac{1}{z}}$ 이므로

$$abc=64^{\frac{1}{x}} \times 64^{\frac{1}{y}} \times 64^{\frac{1}{z}}=64^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=64^2=(2^6)^2=2^{12}$$

$$\therefore k=12$$

- 3 10년 전 판매량을 a 라 하면 올해 판매량은

$$a(1+0.07)^{10}=1.07^{10}a \quad \dots\dots ①$$

이때

$$\log 1.07^{10}=10 \log 1.07=10 \times 0.03=0.3 \quad \dots\dots ②$$

이고, $\log 2=0.3$ 이므로

$$\log 1.07^{10}=\log 2$$

$$\therefore 1.07^{10}=2$$

따라서 이 제품의 판매량은 10년 전 판매량의 2배이므로

$$n=2 \quad \dots\dots ③$$

답 2

- 4 올해 생화학적 산소 요구량을 A 라 하면 5년 후 생화학적 산소 요구량은

$$A \times (1-0.36)^5=0.64^5 A \quad \dots\dots ①$$

이때 $0.64^5=k$ 라 하면

$$\log k=\log 0.64^5=5 \log 0.64=5 \log (2^6 \times 10^{-2})$$

$$=5(6 \log 2-2)=5 \times (6 \times 0.3-2)$$

$$=5 \times (-0.2)=-1$$

$$\therefore k=10^{-1}=\frac{1}{10} \quad \dots\dots ②$$

즉, 5년 후 생화학적 산소 요구량은 $\frac{1}{10}A$ 이므로 처음의 10%가 된다.

$$\therefore n=10 \quad \dots\dots ③$$

답 10

채점기준	배점
① 5년 후 생화학적 산소 요구량을 거듭제곱 꼴로 나타내기	2
② 0.64^5 의 값 구하기	2
③ n 의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.40~43

- 01 밑의 조건에서 $a+1>0, a+1 \neq 1$

$$a>-1, a \neq 0 \quad \therefore -1<a<0 \text{ 또는 } a>0 \quad \dots\dots ㉠$$

진수의 조건에서 $x^2-2ax+16>0$

모든 실수 x 에 대하여 $x^2-2ax+16>0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2ax+16=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-1 \times 16=a^2-16<0$$

$$(a+4)(a-4)<0 \quad \therefore -4<a<4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-1<a<0 \text{ 또는 } 0<a<4$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ①

$$02 \log 2+\log \left(1+\frac{1}{2}\right)+\log \left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log \left(1+\frac{1}{99}\right)$$

$$=\log 2+\log \frac{3}{2}+\log \frac{4}{3}+\cdots+\log \frac{100}{99}$$

$$=\log \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99}\right)$$

$$=\log 100=\log 10^2=2$$

답 ②

$$03 (\log 2)^2+(\log 5)^2+\log 4 \times \log 5$$

$$=(\log 2)^2+2 \log 2 \times \log 5+(\log 5)^2$$

$$=(\log 2+\log 5)^2=(\log 10)^2=1^2=1$$

답 ①

$$04 144=2^4 \times 3^2 \text{의 양의 약수의 개수는}$$

$$(4+1) \times (2+1)=15 \quad \therefore n=15$$

이때 $a_1 a_{15}=a_2 a_{14}=a_3 a_{13}=\cdots=a_7 a_9=144$ 이고

$$a_8=2^2 \times 3=12 \text{이므로}$$

$$a_1 a_2 a_3 \times \cdots \times a_{15}=(12^2)^7 \times 12=12^{14} \times 12=12^{15}$$

$$\therefore \log_{12} a_1+\log_{12} a_2+\log_{12} a_3+\cdots+\log_{12} a_{15}$$

$$=\log_{12} (a_1 a_2 a_3 \times \cdots \times a_{15})=\log_{12} 12^{15}=15$$

답 ④

$$05 a=\log_2 10=\log_2 2+\log_2 5=1+\log_2 5 \text{이므로}$$

$$\log_2 5=a-1 \quad \therefore \log_5 2=\frac{1}{a-1}$$

$$\text{또, } \log_3 5=b \text{에서 } \log_5 3=\frac{1}{b} \text{이므로}$$

$$\log_{15} 10=\frac{\log_5 10}{\log_5 15}=\frac{\log_5 (5 \times 2)}{\log_5 (5 \times 3)}=\frac{\log_5 5+\log_5 2}{\log_5 5+\log_5 3}$$

$$=\frac{1+\log_5 2}{1+\log_5 3}=\frac{1+\frac{1}{a-1}}{1+\frac{1}{b}}=\frac{b(a-1)+b}{b(a-1)+a-1}$$

$$=\frac{ab}{ab+a-b-1} \quad \text{분모와 분자에 } b(a-1) \text{을 각각 곱한다.}$$

답 ⑤

$$06 \log_a \beta-\log_\beta a=\frac{\log_2 \beta}{\log_2 a}-\frac{\log_2 a}{\log_2 \beta}$$

$$=\frac{(\log_2 \beta)^2-(\log_2 a)^2}{\log_2 a \times \log_2 \beta}$$

$$=\frac{(\log_2 \beta+\log_2 a)(\log_2 \beta-\log_2 a)}{\log_2 a \times \log_2 \beta}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a+\log_2 \beta=4, \log_2 a \times \log_2 \beta=2$$

이므로

$$(\log_2 \beta-\log_2 a)^2=(\log_2 a+\log_2 \beta)^2-4 \log_2 a \times \log_2 \beta$$

$$=4^2-4 \times 2=8$$

$$\therefore \log_2 \beta-\log_2 a=2\sqrt{2} \quad (\because \log_2 a<\log_2 \beta)$$

$$\therefore \log_a \beta-\log_\beta a=\frac{4 \times 2\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$$

답 ③

07 $a = \log_4(3 - \sqrt{8})$ 에서 $4^a = 3 - 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} (2^a + 2^{-a})^2 &= 4^a + 2 + 4^{-a} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 2 + \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 2 + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} = 8 \quad \text{분모와 분자에 } 3 + 2\sqrt{2} \text{를 각각 곱한다.} \\ \therefore 2^a + 2^{-a} &= 2\sqrt{2} \quad (\because 2^a > 0, 2^{-a} > 0) \end{aligned}$$

답 ①

08 $3^x = 24$ 에서 $x = \log_3 24$

$$\begin{aligned} \therefore x - 1 &= \log_3 24 - \log_3 3 = \log_3 \frac{24}{3} = \log_3 8 \\ 4^y &= 24 \text{에서 } 2^{2y} = 24, 2y = \log_2 24 \\ \therefore 2y - 3 &= \log_2 24 - \log_2 8 = \log_2 \frac{24}{8} = \log_2 3 \\ \therefore (x - 1)(2y - 3) &= \log_3 8 \times \log_2 3 \\ &= \frac{\log 8}{\log 3} \times \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\log 8}{\log 2} \\ &= \frac{\log 2^3}{\log 2} = \frac{3 \log 2}{\log 2} = 3 \end{aligned}$$

답 ③

09 $a^x = 49$ 에서 $x = \log_a 49$ $\therefore \frac{1}{x} = \log_{49} a$

$3^y = 7$ 에서 $y = \log_3 7$ $\therefore \frac{1}{y} = \log_7 3$

$2^z = 7$ 에서 $z = \log_2 7$ $\therefore \frac{1}{z} = \log_7 2$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} &= \log_{49} a - \log_7 3 + 2 \log_7 2 \\ &= \log_7 a - \log_7 3 + \log_7 2^2 \\ &= \frac{1}{2} \log_7 a - \log_7 3 + \log_7 4 \\ &= \log_7 \sqrt{a} - \log_7 3 + \log_7 4 \\ &= \log_7 \frac{4\sqrt{a}}{3} = 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{4\sqrt{a}}{3} = 1, \sqrt{a} = \frac{3}{4} \quad \therefore a = \frac{9}{16}$$

답 ①

10 조건 (가)에서 $a + b = 3^2 = 9$

조건 (나)에서 $\log_3 ab = 2$ $\therefore ab = 3^2 = 9$

$$\therefore (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 9^2 - 4 \times 9 = 45$$

$$\therefore a - b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \quad (\because a > b)$$

답 ②

11 $\log_2 a + \log_2 b = -2$ 에서

$$\begin{aligned} \log_2 a + \log_2 b &= \frac{1}{\log_a 2} + \frac{1}{\log_b 2} \\ &= \frac{\log_b 2 + \log_a 2}{\log_a 2 \times \log_b 2} \\ &= \frac{2}{\log_a 2 \times \log_b 2} = -2 \\ \therefore \log_a 2 \times \log_b 2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\log_a 2)^2 + (\log_b 2)^2 \\ &= (\log_a 2 + \log_b 2)^2 - 2 \log_a 2 \times \log_b 2 \\ &= 2^2 - 2 \times (-1) = 6 \end{aligned}$$

답 ③

12 조건 (가)에서 $\sqrt{a} = \sqrt[3]{b} = \sqrt[4]{c} = k \quad (k > 0)$ 라 하면

$$a = k^2, b = k^3, c = k^4$$

이므로 조건 (나)에서

$$\log_4 k^2 + \log_8 k^3 + \log_2 k^4 = 1$$

$$\log_2 k^2 + \log_2 k^3 + \log_2 k^4 = 1$$

$$\log_2 k + \log_2 k + 4 \log_2 k = 1, 6 \log_2 k = 1$$

$$\log_2 k = \frac{1}{6} \quad \therefore k = 2^{\frac{1}{6}}$$

이때 $abc = k^2 \times k^3 \times k^4 = k^9 = (2^{\frac{1}{6}})^9 = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$9^{\log_2 abc} = 9^{\log_2 2\sqrt{2}} = (2\sqrt{2})^{\log_2 9} = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

답 ④

13 $6 \log_{81} \frac{3n+9}{2} = 6 \log_3 \frac{3n+9}{2} = \frac{3}{2} \log_3 \frac{3n+9}{2} = k \quad (k \text{는 정수})$

라 하면

$$\log_3 \frac{3n+9}{2} = \frac{2}{3} k, 3^{\frac{2}{3}k} = \frac{3n+9}{2}$$

$$2 \times 3^{\frac{2}{3}k} = 3n+9, 2 \times 3^{\frac{2}{3}k-1} = n+3$$

$$\therefore n = 2 \times 3^{\frac{2}{3}k-1} - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

n 이 자연수이므로 $3^{\frac{2}{3}k-1}$ 은 3 이상의 자연수이어야 한다. 즉,

$$\frac{2}{3}k - 1 \text{은 } 1 \text{ 이상의 정수이어야 하므로}$$

$$\frac{2}{3}k - 1 \geq 1, \frac{2}{3}k \geq 2 \quad \therefore k \geq 3$$

또, $\frac{2}{3}k - 1$ 이 정수이려면 k 는 3의 배수이어야 하므로

$$k = 3 \text{일 때, } n = 2 \times 3^{2-1} - 3 = 3$$

$$k = 6 \text{일 때, } n = 2 \times 3^{4-1} - 3 = 54 - 3 = 51$$

$$k = 9 \text{일 때, } n = 2 \times 3^{6-1} - 3 = 486 - 3 = 483$$

$$k = 12 \text{일 때, } n = 2 \times 3^{8-1} - 3 = 4374 - 3 = 4371$$

따라서 1000 이하의 자연수 n 은 3, 51, 483이므로 구하는 자연수 n 의 값의 합은

$$3 + 51 + 483 = 537$$

답 ①

참고 $\textcircled{1}$ 에서 $k = \dots - 9, -6, -3, 0$ 이면 n 은 자연수가 되지 않는다.

14 $\log 0.6 = \log(6 \times 10^{-1}) = \log(2 \times 3 \times 10^{-1})$

$$= \log 2 + \log 3 + \log 10^{-1}$$

$$= \log 2 + \log 3 - 1$$

$$= 0.3010 + 0.4771 - 1$$

$$= -0.2219$$

답 ①

15 $5^6 = a \times 10^b$ 이라 하면 $\log 5^6 = \log(a \times 10^b)$

$$6 \log 5 = \log a + \log 10^b, 6 \log \frac{10}{2} = \log a + b$$

$$6(\log 10 - \log 2) = \log a + b, 6(1 - \log 2) = \log a + b$$

$$\begin{aligned}
6(1-0.3) &= \log a + b, 4.2 = \log a + b \\
1 \leq a < 10 \text{ 일 때 } 0 \leq \log a < 1 \text{ 이고 } b \text{ 는 자연수이므로} \\
\log a &= 0.2, b = 4 \\
\therefore f(6) &= \log a = 0.2, g(6) = b = 4 \\
\therefore \frac{g(6)}{f(6)} &= \frac{4}{0.2} = 20 \\
\text{같은 방법으로 } 5^{13} &= a \times 10^b \text{ 이라 하면} \\
\log 5^{13} &= \log(a \times 10^b) \\
13 \log 5 &= \log a + \log 10^b, 13(1 - \log 2) = \log a + b \\
13(1 - 0.3) &= \log a + b, 9.1 = \log a + b \\
\text{따라서 } \log a &= 0.1, b = 9 \text{ 이므로} \\
f(13) &= \log a = 0.1, g(13) = b = 9 \\
\therefore \frac{g(13)}{f(13)} &= \frac{9}{0.1} = 90 \\
\therefore \frac{g(6)}{f(6)} + \frac{g(13)}{f(13)} &= 20 + 90 = 110
\end{aligned}$$

답 ③

- 16 자극의 크기가 100일 때의 감각의 세기를 E_1 , 자극의 크기가 200일 때의 감각의 세기를 E_2 라 하면
 $E_1 = k \log 100 + C$, $E_2 = k \log 200 + C$
 $E_2 = 2E_1$ 이므로 $k \log 200 + C = 2(k \log 100 + C)$
 $k \log 200 + C = 2k \log 100 + 2C$
 $\therefore C = k \log 200 - 2k \log 100 = k(\log 200 - 2 \log 100)$
 $= k(\log 200 - \log 10000) = k \log \frac{200}{10000} = k \log \frac{1}{50}$
 $= -k \log 50$
 $\therefore E = k \log I - k \log 50$
자극의 크기가 a 일 때의 감각의 세기를 E_3 , 자극의 크기가 400일 때의 감각의 세기를 E_4 라 하면
 $E_3 = k \log a - k \log 50$
 $E_4 = k \log 400 - k \log 50 = k \log \frac{400}{50} = k \log 8$
 $E_3 = 2E_4$ 이므로
 $k \log a - k \log 50 = 2k \log 8$, $\log a - \log 50 = 2 \log 8$
 $\log a = 2 \log 8 + \log 50 = \log 8^2 + \log 50$
 $= \log(8^2 \times 50) = \log 3200$
 $\therefore a = 3200$

답 ⑤

- 17 $\log_a c = \frac{1}{2}$ 에서 $a^{\frac{1}{2}} = c$ $\therefore a = c^2$
 $\log_b c = \frac{1}{3}$ 에서 $b^{\frac{1}{3}} = c$ $\therefore b = c^3$
 $\therefore \log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_{c^2} c^3 + \log_{c^3} c + \log_c c^2$
 $= \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{23}{6}$

답 ⑤

- 18 $\frac{1}{2} \log N = m \log 2 + n \log 5$ 에서
 $\log N^{\frac{1}{2}} = \log 2^m + \log 5^n$, $\log N^{\frac{1}{2}} = \log(2^m \times 5^n)$

$$\begin{aligned}
N^{\frac{1}{2}} &= 2^m \times 5^n \quad \therefore N = 2^{2m} \times 5^{2n} \\
N \text{ 이 } 100 \text{ 이하의 자연수이므로} \\
n &= 0 \text{ 일 때, } N = 2^{2m} \times 5^0 = 2^{2m} \leq 100 \\
\therefore m &= 0, 1, 2, 3 \\
n &= 1 \text{ 일 때, } N = 2^{2m} \times 5^2 \leq 100 \\
2^{2m} &\leq 4 \quad \therefore m = 0, 1 \\
\text{따라서 자연수 } N \text{ 은} \\
2^0 \times 5^0 &= 1, 2^2 \times 5^0 = 4, 2^4 \times 5^0 = 16, 2^6 \times 5^0 = 64, \\
2^0 \times 5^2 &= 25, 2^2 \times 5^2 = 100 \\
\text{의 6개이므로 구하는 자연수 } N \text{ 의 값의 합은} \\
1 + 4 + 16 + 64 + 25 + 100 &= 210
\end{aligned}$$

답 ⑤

- 19 $\log_a b = \log_b a$ 에서 $\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$

$$(\log_a b)^2 = 1, \log_a b = \pm 1 \quad \therefore b = a \text{ 또는 } b = \frac{1}{a}$$

$$\text{이때 } a \neq b \text{ 이므로 } b = \frac{1}{a} \quad \dots\dots ①$$

$a > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+1)(b+4) = (a+1)\left(\frac{1}{a}+4\right) = 1+4a+\frac{1}{a}+4$$

$$\geq 2\sqrt{4a \times \frac{1}{a}} + 5 = 4+5=9 \quad \dots\dots ②$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 4a = \frac{1}{a}, \text{ 즉 } a = \frac{1}{2} \text{ 일 때 성립}\right)$$

$$\text{따라서 } (a+1)(b+4) \text{ 의 최솟값은 } 9 \text{ 이다.} \quad \dots\dots ③$$

답 9

채점기준	배점
① a, b 사이의 관계식 구하기	2
② $(a+1)(b+4)$ 의 값의 범위 구하기	2
③ $(a+1)(b+4)$ 의 최솟값 구하기	1

- 20 조건 ㉗에서 $\log x - \log 60 = \log \frac{x}{60} = k$ (k 는 정수)라 하면

$$\frac{x}{60} = 10^k$$

$$\therefore x = 60 \times 10^k = (2^2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 5)^k$$

$$= 2^{k+2} \times 3 \times 5^{k+1} \quad \dots\dots ①$$

이때 x 는 자연수이므로

$$k+2 \geq 0, k+1 \geq 0 \rightarrow k+2, k+1 \text{ 은 음이 아닌 정수이다.}$$

$$k \geq -2, k \geq -1 \quad \therefore k \geq -1 \quad \dots\dots ②$$

$k+2, k+1$ 은 음이 아닌 정수이므로 x 의 양의 약수의 개수는

$$\{(k+2)+1\} \times \{(1+1)\} \times \{(k+1)+1\} = 2(k+2)(k+3)$$

이므로 조건 ㉘에서 $2(k+2)(k+3) \leq 180$

$$(k+2)(k+3) \leq 90, k^2 + 5k + 6 \leq 90$$

$$k^2 + 5k - 84 \leq 0, (k+12)(k-7) \leq 0$$

$$\therefore -12 \leq k \leq 7 \quad \dots\dots ③$$

$$\text{②, ③의 공통부분을 구하면 } -1 \leq k \leq 7$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, \dots, 7$ 의 9개이므로 자연수 x 도 9개

$$\text{이다.} \quad \dots\dots ④$$

답 9

채점기준	배점
① $\log x - \log 60 = k$ 로 놓고 x 를 2, 3, 5의 거듭제곱의 곱의 꼴로 나타내기	2
② x 가 자연수가 되도록 하는 정수 k 의 값의 범위 구하기	2
③ 조건 ②를 만족시키는 정수 k 의 값의 범위 구하기	2
④ 자연수 x 의 개수 구하기	1

참고 $k = -1, 0, 1, \dots, 7$ 이므로

$$x = 60 \times 10^{-1}, 60 \times 10^0, 60 \times 10^1, \dots, 60 \times 10^7$$

실전 문제 | 2회

p.44~047

01 $27^a \times 81^b = 6$ 에서

$$(3^3)^a \times (3^4)^b = 6, 3^{3a+4b} = 6$$

$$\therefore 3a+4b = \log_3 6 = \log_3 (3 \times 2) = 1 + \log_3 2$$

답 ⑤

02 밑의 조건에서 $(x-3)^2 > 0, (x-3)^2 \neq 1$

$$(x-3)^2 > 0 \text{에서 } x \neq 3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$(x-3)^2 \neq 1 \text{에서 } x-3 \neq -1 \text{이고 } x-3 \neq 1$$

$$\therefore x \neq 2 \text{이고 } x \neq 4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{진수의 조건에서 } x + \frac{1}{x} - 2 > 0$$

이때 $x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + \frac{1}{x} - 2 \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{등호는 } x = \frac{1}{x}, \text{ 즉 } x = 1 \text{일 때 성립하므로 } x + \frac{1}{x} - 2 > 0 \text{이라면}$$

$$x \neq 1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉠, ㉡, ㉢에서 } x \neq 1, x \neq 2, x \neq 3, x \neq 4$$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 5이다.

답 ④

03 $f(x) = \log_2 \left(\frac{1}{x+3} + 1 \right) = \log_2 \frac{x+4}{x+3}$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(60)$$

$$= \log_2 \frac{5}{4} + \log_2 \frac{6}{5} + \log_2 \frac{7}{6} + \dots + \log_2 \frac{64}{63}$$

$$= \log_2 \left(\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{64}{63} \right)$$

$$= \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

답 ①

04 $\log_2 \{ \log_3 (\log_5 a) \} = 0$ 에서 $\log_3 (\log_5 a) = 1$

$$\log_5 a = 3 \quad \therefore a = 5^3$$

$$\log_a 5 \times \log_5 b = \frac{1}{3} \text{에서 } \log_5 5 \times \log_5 b = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \log_5 b = \frac{1}{3}, \log_5 b = 1 \quad \therefore b = 5$$

$$\therefore a + b = 5^3 + 5 = 125 + 5 = 130$$

답 ②

05 조건 ②에서 $\log c = \log \frac{3ab}{3a+b}$ 이므로

$$c = \frac{3ab}{3a+b} \quad \therefore \frac{1}{c} = \frac{3a+b}{3ab} = \frac{1}{3a} + \frac{1}{b}$$

조건 ③에서 $8^a = 15^b = p^c = k$ 라 하면

$$8 = k^{\frac{1}{a}}, 2^3 = k^{\frac{1}{a}} \quad \therefore 2 = k^{\frac{1}{3a}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$15 = k^{\frac{1}{b}} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$p = k^{\frac{1}{c}} = k^{\frac{1}{3a} + \frac{1}{b}} = k^{\frac{1}{3a}} \times k^{\frac{1}{b}}$$

$$= 2 \times 15 = 30 \quad (\because \text{㉠, ㉡})$$

답 ⑤

06 ㉠. $2^{z-x+1} \times 5^{z+1} = 2^{z+1} \times 2^{-x} \times 5^{z+1}$

$$= (2 \times 5)^{z+1} \times 2^{-x}$$

$$= 10^{z+1} \times 10^{-x}$$

$$= 10^{(z+1)-x} = 10 \quad (\text{참})$$

㉡. $y-z=1$ 에서 $y=z+1$

$$5^y = 10^z \text{에서 } 5^{z+1} = 10^z, 5^{z+1} = (2 \times 5)^z$$

$$5^{z+1} = 2^z \times 5^z, 5 = 2^z$$

$$\therefore z = \log_2 5 \quad (\text{거짓})$$

㉢. $2^x = 5^y = 10^z = k \quad (k > 0, k \neq 1)$ 라 하면

$$x = \log_2 k, y = \log_5 k, z = \log_{10} k$$

$$\text{즉, } \frac{1}{x} = \log_k 2, \frac{1}{y} = \log_k 5, \frac{1}{z} = \log_k 10 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \log_k 2 + \log_k 5 = \log_k (2 \times 5) = \log_k 10 = \frac{1}{z} \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

답 ③

참고 $2^x = 5^y = 10^z = k$ 에서 x, y, z 가 서로 다른 세 실수이므로

$$k > 0, k \neq 1$$

07 $\log_{36} (\log_3 2) + \log_{36} (\log_4 3) + \log_{36} (\log_5 4)$

$$+ \dots + \log_{36} (\log_{64} 63)$$

$$= \log_{36} (\log_3 2 \times \log_4 3 \times \log_5 4 \times \dots \times \log_{64} 63)$$

$$= \log_{36} \left(\frac{\log 2}{\log 3} \times \frac{\log 3}{\log 4} \times \frac{\log 4}{\log 5} \times \dots \times \frac{\log 63}{\log 64} \right)$$

$$= \log_{36} \left(\frac{\log 2}{\log 64} \right) = \log_{36} \left(\frac{\log 2}{6 \log 2} \right) = \log_{36} \frac{1}{6}$$

$$= \log_{36} 6^{-1} = -\frac{1}{2}$$

답 ②

08 $A = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{4}} = \log_{2^{-2}} \frac{1}{2} = \log_{2^{-2}} 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$$B = \log_4 81 \times \log_{27} 25 \times \log_5 8 = \log_{2^2} 3^4 \times \log_{3^3} 5^2 \times \log_5 2^3$$

$$= 2 \log_2 3 \times \frac{2}{3} \log_3 5 \times 3 \log_5 2$$

$$= 4 \times \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 5}{\log 3} \times \frac{\log 2}{\log 5} = 4$$

$$C = 2 \log_2 \sqrt{3} - \log_2 6 + 4 \log_2 \sqrt{2}$$

$$= \log_2 (\sqrt{3})^2 - \log_2 6 + \log_2 (\sqrt{2})^4$$

$$= \log_2 3 - \log_2 6 + \log_2 4$$

$$= \log_2 \left(\frac{3}{6} \times 4 \right) = \log_2 2 = 1$$

따라서 $\frac{1}{2} < 1 < 4$ 이므로 $A < C < B$

답 ②

09 $x = \log_2(\sqrt{2}+1)$ 에서

$$2^x = \sqrt{2}+1, 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

이므로

$$2^x + 2^{-x} = (\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2},$$

$$2^x - 2^{-x} = (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) = 2$$

$$\therefore \frac{2^x - 2^{-x}}{4^x + 4^{-x} + 2} = \frac{2^x - 2^{-x}}{(2^x + 2^{-x})^2} = \frac{2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4}$$

답 ③

10 $\log_4 a^{\frac{1}{y}} + \log_4 b^{\frac{1}{x}} = \log_2 a^{\frac{1}{y}} + \log_2 b^{\frac{1}{x}}$

$$= \frac{1}{2y} \log_2 a + \frac{1}{2x} \log_2 b$$

$$= \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

$$= \frac{5xy}{2xy} (\because x^2 + y^2 = 5xy)$$

$$= \frac{5}{2}$$

답 ⑤

11 $a^x = 3$ 에서 $x = \log_a 3 \quad \therefore \frac{1}{x} = \log_3 a \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^y = 81 \text{에서 } y = \log_{\frac{1}{10}} 81 = \log_{10^{-1}} 3^4 = -4 \log_{10} 3$$

$$\frac{y}{4} = -\log_{10} 3 \quad \therefore \frac{4}{y} = -\log_3 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$b^z = 3 \text{에서 } z = \log_b 3 \quad \therefore \frac{1}{z} = \log_3 b \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①+②을 하면

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = \log_3 a - \log_3 10 = \log_3 \frac{a}{10}$$

$$2 = \log_3 \frac{a}{10}$$

$$\frac{a}{10} = 9 \quad \therefore a = 90$$

②-③을 하면

$$\frac{4}{y} - \frac{1}{z} = -\log_3 10 - \log_3 b = -\log_3 10b$$

$$1 = -\log_3 10b, 10b = \frac{1}{3} \quad \therefore b = \frac{1}{30}$$

$$\therefore ab = 90 \times \frac{1}{30} = 3$$

답 ③

12 $5^x = 3^{\frac{1}{y}} = 2^{-\frac{z}{2}} = k \quad (k > 0, k \neq 1)$ 라 하면

$$5^x = k \text{에서 } x = \log_5 k$$

$$3^{\frac{1}{y}} = k \text{에서 } \frac{1}{y} = \log_3 k \quad \therefore y = \log_3 k$$

$$\therefore xy + 2x = \log_5 k \times \log_3 k + 2 \log_5 k$$

$$= \frac{\log k}{\log 5} \times \frac{\log 3}{\log k} + 2 \log_5 k$$

$$= \log_5 3 + \log_5 k^2$$

$$= \log_5 3k^2$$

이때 $xy + 2x = 1$ 이므로

$$\log_5 3k^2 = 1, 3k^2 = 5$$

$$\therefore k^2 = \frac{5}{3}$$

$2^{-\frac{z}{2}} = k$ 에서 $2^z = k^{-2}$ 이므로

$$2^{z+1} = 2k^{-2} = \frac{2}{k^2} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}$$

답 ④

13 자연수 $k \quad (k > 1)$ 에 대하여 $2k$ 는 자연수이고, $\log_3 k$ 는 무리수 또

는 자연수이므로 $\frac{2k}{\log_3 k}$ 가 자연수가 되려면 $\log_3 k$ 가 자연수이어야 한다. 즉, k 는 3의 거듭제곱 꼴이어야 한다.

$$k=3 \text{일 때, } \frac{2k}{\log_3 k} = \frac{2 \times 3}{1} = 6$$

$$k=3^2 \text{일 때, } \frac{2k}{\log_3 k} = \frac{2 \times 3^2}{2} = 9$$

$$k=3^3 \text{일 때, } \frac{2k}{\log_3 k} = \frac{2 \times 3^3}{3} = 18$$

$$k=3^4 \text{일 때, } \frac{2k}{\log_3 k} = \frac{2 \times 3^4}{4} = \frac{81}{2} \leftarrow \text{자연수가 아니다.}$$

따라서

$$2 \leq n < 3 \text{일 때, } f(n) = 0 \leftarrow k \text{는 없다.}$$

$$3 \leq n < 3^2 \text{일 때, } f(n) = 1 \leftarrow k \text{는 3의 1개}$$

$$3^2 \leq n < 3^3 \text{일 때, } f(n) = 2 \leftarrow k \text{는 3, 9의 2개}$$

$$3^3 \leq n < 3^4 \text{일 때, } f(n) = 3 \leftarrow k \text{는 3, 9, 27의 3개}$$

$$3^4 \leq n < 3^5 \text{일 때, } f(n) = 3 \leftarrow k \text{는 3, 9, 27의 3개}$$

이므로

$$f(2) = 0$$

$$f(3) = f(4) = f(5) = \dots = f(8) = 1$$

$$f(9) = f(10) = f(11) = \dots = f(26) = 2$$

$$f(27) = f(28) = f(29) = \dots = f(80) = 3$$

$$f(81) = f(82) = f(83) = \dots = f(242) = 3$$

$$\therefore f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(210)$$

$$= 0 + 1 \times 6 + 2 \times 18 + 3 \times 184$$

$$= 594$$

27에서 210까지
9에서 26까지
26-9+1=18(개)
3에서 8까지 6개

210-27+1=184(개)

답 ⑤

14 $\log M = 2.29 = 2 + 0.29$

$$= \log 10^2 + \log 1.95$$

$$= \log (10^2 \times 1.95)$$

$$= \log 195$$

$$\therefore M = 195$$

$$\log N = -0.71 = -1 + 0.29$$

$$= \log 10^{-1} + \log 1.95$$

$$= \log (10^{-1} \times 1.95)$$

$$= \log 0.195$$

$$\therefore N = 0.195$$

$$\therefore M + N = 195 + 0.195 = 195.195$$

답 ③

- 15 $r=2, R=15$ 일 때 전송 손실을 L_1 이라 하면

$$L_1 = 10 \log \left(1 + \frac{2 \times 15}{2} \right) = 10 \log 16$$

$r=2, R=3$ 일 때 전송 손실을 L_2 라 하면

$$L_2 = 10 \log \left(1 + \frac{2 \times 3}{2} \right) = 10 \log 4$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{10 \log 16}{10 \log 4} = \frac{\log 16}{\log 4} = \frac{\log 4^2}{\log 4} = \frac{2 \log 4}{\log 4} = 2$$

$$\therefore L_1 = 2L_2$$

따라서 저항이 15인 접속 케이블로 연결하여 작동시켰을 때의 전송 손실은 저항이 3인 접속 케이블로 교체하여 작동시켰을 때의 전송 손실의 2배이다. **답 ③**

- 16 올해 자본금을 a 원이라 하면 1년 후 세금을 내고 남은 자본금은 $a + 0.2a - 0.2a \times 0.05 = 1.19a$ (원)

따라서 10년 후 세금을 내고 남은 자본금은 $1.19^{10}a$ (원)이므로 올해 자본금의 1.19^{10} 배이다. 이때

$$\begin{aligned} \log 1.19^{10} &= 10 \log 1.19 \\ &= 10 \times 0.0755 \\ &= 0.755 = \log 5.69 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 1.19^{10} = 5.69$$

따라서 10년 후 세금을 내고 남은 자본금은 올해 자본금의 5.69배이다. **답 ②**

- 17 조건 (가)에서 $\log_3 ab = 1 \quad \therefore ab = 3 \quad \dots \dots \textcircled{1}$

$$\text{조건 (나)에서 } \log_3 \left(1 + \frac{1}{a} \right) \left(1 + \frac{1}{b} \right) = 2$$

$$\log_3 \left(\frac{a+1}{a} \times \frac{b+1}{b} \right) = 2$$

$$\frac{a+1}{a} \times \frac{b+1}{b} = 9, \frac{ab+a+b+1}{ab} = 9$$

$$1 + \frac{a+b+1}{ab} = 9, \frac{a+b+1}{ab} = 8$$

$$\frac{a+b+1}{3} = 8 (\because \textcircled{1}), a+b+1 = 24$$

$$\therefore a+b = 23$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 23^2 - 2 \times 3 = 523 \quad \text{답 ④}$$

- 18 $(\log_a b)^2 + (\log_b a^4)^2 = \left(\frac{1}{3} \log_a b \right)^2 + (4 \log_b a)^2$

$$= \frac{1}{9} (\log_a b)^2 + 16 (\log_b a)^2$$

$$= \frac{1}{9} (\log_a b)^2 + \frac{16}{(\log_a b)^2}$$

이때 $(\log_a b)^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} (\log_a b)^2 + (\log_b a^4)^2 &= \frac{1}{9} (\log_a b)^2 + \frac{16}{(\log_a b)^2} \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{1}{9} (\log_a b)^2 \times \frac{16}{(\log_a b)^2}} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{9} (\log_a b)^2 = \frac{16}{(\log_a b)^2}, \text{ 즉} \right.$$

$$\left. (\log_a b)^2 = 12 \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 $(\log_a b)^2 + (\log_b a^4)^2$ 의 최솟값은 $\frac{8}{3}$ 이다. **답 ④**

- 19 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log a + \log b = -5, \log a \times \log b = 1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \log_a a^2 b^3 + \log_b a^3 b^2$$

$$= \log_a a^2 + \log_a b^3 + \log_b a^3 + \log_b b^2$$

$$= 2 + 3 \log_a b + 3 \log_b a + 2$$

$$= 4 + 3(\log_a b + \log_b a)$$

$$= 4 + 3 \left(\frac{\log b}{\log a} + \frac{\log a}{\log b} \right)$$

$$= 4 + 3 \times \frac{(\log b)^2 + (\log a)^2}{\log a \times \log b}$$

$$= 4 + 3 \times \frac{(\log a + \log b)^2 - 2 \log a \times \log b}{\log a \times \log b}$$

$$= 4 + 3 \times \frac{(-5)^2 - 2 \times 1}{1} = 73 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

답 73

채점기준	배점
① $\log a, \log b$ 사이의 관계식 구하기	2
② $\log_a a^2 b^3 + \log_b a^3 b^2$ 의 값 구하기	3

- 20 $\frac{2a}{\log_a b} = \frac{b}{5 \log_b a} = \frac{2a+b}{6} = k$ 라 하면

$$2a = k \log_a b, b = 5k \log_b a, 2a + b = 6k \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

따라서

$$2a + b = k \log_a b + 5k \log_b a = 6k$$

이므로

$$\log_a b + 5 \log_b a = 6 \quad \therefore \log_a b + \frac{5}{\log_a b} = 6 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

$\log_a b = x$ 라 하면

$$x + \frac{5}{x} = 6, x^2 + 5 = 6x, x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-1)(x-5) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

$$\text{즉, } \log_a b = 1 \text{ 또는 } \log_a b = 5$$

그런데 $\log_a b = 1$ 이면 $a = b$ 이므로 $a < b$ 를 만족시키지 않는다.

$$\therefore \log_a b = 5 \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

$$\therefore \frac{\log b}{\log a} = \log_a b = 5 \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

답 5

채점기준	배점
① $\frac{2a}{\log_a b} = \frac{b}{5 \log_b a} = \frac{2a+b}{6} = k$ 로 놓고 등식 세우기	1
② $\log_a b + \frac{5}{\log_a b}$ 의 값 구하기	2
③ $\log_a b$ 의 값 구하기	2
④ $\frac{\log b}{\log a}$ 의 값 구하기	1

- 1 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+2a+(-\log_2 9)}{3}, \frac{-\log_2 9+\log_2 7+a}{3} \right)$$

이것이 $(b, \log_8 7)$ 과 일치하므로

$$b = \frac{2a - \log_2 9}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_8 7 = \frac{-\log_2 9 + \log_2 7 + a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧에서

$$\log_2 7 = \frac{-2\log_2 3 + \log_2 7 + a}{3}$$

$$\frac{1}{3} \log_2 7 = \frac{-2\log_2 3 + \log_2 7 + a}{3}$$

$$\log_2 7 = -2\log_2 3 + \log_2 7 + a \quad \therefore a = 2\log_2 3$$

이것을 ⑦에 대입하면

$$b = \frac{2 \times 2\log_2 3 - \log_2 9}{3} = \frac{4\log_2 3 - 2\log_2 3}{3} = \frac{2\log_2 3}{3}$$

따라서

$$a+3b = 2\log_2 3 + 2\log_2 3 = 4\log_2 3 = \log_2 3^4 = \log_2 81$$

이므로

$$2^{a+3b} = 2^{\log_2 81} = 81$$

답 ③

- 2 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+(-\log_2 10)+\log_2 12}{3}, \frac{-\log_2 25+2a+a}{3} \right), \text{ 즉}$$

$$\left(\frac{a-\log_2 10+\log_2 12}{3}, \frac{3a-2\log_2 5}{3} \right)$$

이것이 $(\log_8 12, b)$ 와 일치하므로

$$\frac{a-\log_2 10+\log_2 12}{3} = \log_8 12 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\frac{3a-2\log_2 5}{3} = b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } \frac{a-\log_2 10+\log_2 12}{3} = \log_2 12$$

$$\frac{a-\log_2 10+\log_2 12}{3} = \frac{1}{3} \log_2 12$$

$$a-\log_2 10+\log_2 12 = \log_2 12 \quad \therefore a = \log_2 10$$

이것을 ⑧에 대입하면

$$b = \frac{3\log_2 10 - 2\log_2 5}{3} = \frac{\log_2 10^3 - \log_2 5^2}{3}$$

$$= \frac{\log_2 \frac{10^3}{5^2}}{3} = \frac{\log_2 40}{3}$$

따라서 $a+3b = \log_2 10 + \log_2 40 = \log_2 400$ 이므로

$$2^{a+3b} = 2^{\log_2 400} = 400$$

답 ⑤

- 3 두 집합 A, B가 자연수 전체의 집합의 부분집합이므로 두 집합

A, B의 원소는 모두 자연수이다. 즉, $\log_2 a, \log_2 b, \log_2 c$ 가 모두

두 자연수이므로 a, b, c 는 모두 2^k (k 는 자연수) 꼴이다.

이때 $a+b=24$ 이므로

$$a=8, b=16 \text{ 또는 } a=16, b=8$$

$$\therefore A = \{8, 16, c\}, B = \{3, 4, \log_2 c\}$$

집합 B의 모든 원소의 합이 12이므로

$$3+4+\log_2 c = 12$$

$$\log_2 c = 5 \quad \therefore c = 32$$

따라서 $A = \{8, 16, 32\}$ 이므로 집합 A의 모든 원소의 합은

$$8+16+32=56$$

답 56

- 4 두 집합 A, B가 자연수 전체의 집합의 부분집합이므로 두 집합

A, B의 원소는 모두 자연수이다. 즉, $\log_3 a, \log_3 b, \log_3 c$ 가 모두

두 자연수이므로 a, b, c 는 모두 3^k (k 는 자연수) 꼴이다.

$$a = \log_3 b \text{에서 } 3^a = b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, 집합 B의 모든 원소의 합이 8이므로

$$\log_3 a + \log_3 b + \log_3 c = \log_3 abc = 8$$

$$abc = 3^8 \quad \therefore a \times 3^a \times c = 3^8 (\because \textcircled{7}) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 a 는 3^k (k 는 자연수) 꼴이므로 $a=3, 3^2, 3^3, \dots$ 이고, a, c

가 모두 자연수이므로 $a \geq 3^2$ 이면 ⑧이 성립하지 않는다.

$$\therefore a = 3$$

$$\textcircled{8} \text{에서 } 3 \times 3^3 \times c = 3^8 \quad \therefore c = 3^4 = 81$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } b = 3^3 = 27$$

따라서 $A = \{3, 27, 81\}$ 이므로 집합 A의 모든 원소의 합은

$$3+27+81=111$$

답 111

- 5 $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2} \log_2 \sqrt{n} = k$ (k 는 40 이하의 자연수)라 하면

$$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2} \log_2 \sqrt{n} = \log_4 2n^2 - \log_2 \sqrt{n}$$

$$= \log_4 2n^2 - \log_4 n^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_4 \frac{2n^2}{n^{\frac{1}{2}}} = \log_4 2n^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{이므로 } \log_4 2n^{\frac{3}{2}} = k$$

$$2n^{\frac{3}{2}} = 4^k, 2n^{\frac{3}{2}} = 2^{2k}, n^{\frac{3}{2}} = 2^{2k-1}, n^3 = 2^{2(2k-1)}$$

$$\therefore n = 2^{\frac{2(2k-1)}{3}}$$

이때 n 이 자연수이므로 $2(2k-1)$ 이 0이거나 3의 양의 배수이어야 한다.

즉, $2k-1$ 이 0이거나 3의 양의 배수이어야 하므로

(i) $2k-1=0$ 일 때, $k=\frac{1}{2}$ 이므로 k 는 자연수가 아니다.

(ii) $2k-1$ 이 3의 양의 배수일 때

$$2k-1=3m \text{ (} m \text{는 자연수)이라 하면}$$

$$k = \frac{3m+1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 k 가 자연수이므로 $3m+1$ 은 짝수이다. 즉, $3m$ 은 홀수

이므로 m 은 홀수이다.

$$k \leq 40 \text{에서 } \frac{3m+1}{2} \leq 40 \text{이므로}$$

$$3m+1 \leq 80, 3m \leq 79 \quad \therefore m \leq \frac{79}{3} = 26. \dots$$

㉠에 $m=1, 3, 5, \dots, 25$ 를 차례대로 대입하면

$k=2, 5, 8, \dots, 38$

(i), (ii)에서 자연수 k 는 2, 5, 8, ..., 38의 13개이므로 자연수 n 도 13개이다. 답 13

다른풀이 $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2} \log_2 \sqrt{n} = \log_{2^2} 2n^2 - \frac{1}{2} \log_2 n^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \log_2 2n^2 - \frac{1}{4} \log_2 n \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2 \log_2 n) - \frac{1}{4} \log_2 n \\ &= \frac{1}{2} + \log_2 n - \frac{1}{4} \log_2 n \\ &= \frac{2 + 3 \log_2 n}{4} \end{aligned}$$

이것이 40 이하의 자연수가 되려면 $2 + 3 \log_2 n$ 의 값이 160 이하의 4의 양의 배수이어야 한다.

즉, $2 + 3 \log_2 n = 4, 8, 12, 16, 20, \dots, 152, 156, 160$ 이므로

$3 \log_2 n = 2, 6, 10, 14, 18, \dots, 150, 154, 158$

$$\therefore \log_2 n = \frac{2}{3}, 2, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}, 6, \dots, 50, \frac{154}{3}, \frac{158}{3}$$

따라서 자연수 n 은 $2^2, 2^6, \dots, 2^{50}$ 의 13개이다.

6 $\log_3 3n^2 - \frac{1}{2} \log_9 n = k$ (k 는 50 이하의 자연수)라 하면

$$\begin{aligned} \log_3 3n^2 - \frac{1}{2} \log_9 n &= \log_3 3n^2 - \frac{1}{2} \log_{3^2} n \\ &= \log_3 3n^2 - \frac{1}{4} \log_3 n \\ &= \log_3 3n^2 - \log_3 n^{\frac{1}{4}} \\ &= \log_3 \frac{3n^2}{n^{\frac{1}{4}}} = \log_3 3n^{\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

이므로 $\log_3 3n^{\frac{7}{4}} = k$

$$3n^{\frac{7}{4}} = 3^k, n^{\frac{7}{4}} = 3^{k-1} \quad \therefore n = 3^{\frac{4(k-1)}{7}}$$

이때 n 이 자연수이므로 $4(k-1)$ 은 0이거나 7의 양의 배수이어야 한다. 즉, $k-1$ 이 0이거나 7의 양의 배수이어야 하므로

(i) $k-1=0$ 일 때, $k=1$

(ii) $k-1$ 이 7의 양의 배수일 때

$k-1=7m$ (m 은 자연수)이라 하면 $k=7m+1$

$m=1, 2, 3, \dots$ 을 차례대로 대입하면 $k \leq 50$ 이므로

$k=8, 15, 22, 29, 36, 43, 50$

(i), (ii)에서 자연수 k 는 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50의 8개이므로 자연수 n 도 8개이다. 답 8

3 지수함수

교과서 예제

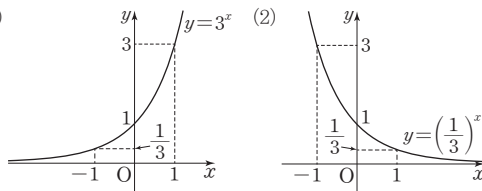
p.53

01 ㄴ. 밑 -2 가 $-2 < 0$ 이므로 지수함수가 아니다.

ㄹ. 다항함수이다.

따라서 지수함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ

02 답 (1)



03 ㄴ. 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. (거짓)

ㄹ. 그래프의 점근선은 x 축이므로 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

(참)

ㄹ. 함수 $y=2^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이

다. 즉, $x_1 < x_2$ 이면 $2^{x_1} < 2^{x_2}$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

04 (1) $27^{\frac{1}{4}} = (3^3)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$

$$(\sqrt[5]{3})^3 = (3^{\frac{1}{5}})^3 = 3^{\frac{3}{5}}$$

$\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$ 이고 밑 3이 1보다 크므로

$$3^{\frac{3}{4}} > 3^{\frac{3}{5}} \quad \therefore 27^{\frac{1}{4}} > (\sqrt[5]{3})^3$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$\frac{3}{2} > \frac{4}{3}$ 이고 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \quad \therefore \frac{1}{\sqrt{8}} < \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

$$\text{답 (1) } 27^{\frac{1}{4}} > (\sqrt[5]{3})^3 \quad (2) \frac{1}{\sqrt{8}} < \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

다른풀이 (2) $\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{-\frac{3}{2}}$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^4}} = \sqrt[3]{2^{-4}} = 2^{-\frac{4}{3}}$$

$-\frac{3}{2} < -\frac{4}{3}$ 이고 밑 2가 1보다 크므로

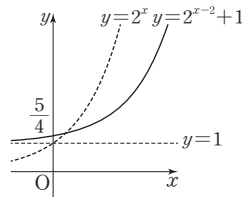
$$2^{-\frac{3}{2}} < 2^{-\frac{4}{3}} \quad \therefore \frac{1}{\sqrt{8}} < \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

05 (1) $y=2^{x-2}+1$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한

것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



∴ 치역: $\{y|y>1\}$,

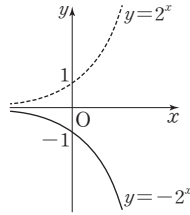
점근선의 방정식: $y=1$

(2) $y=-2^x$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를

x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그
래프는 오른쪽 그림과 같다.

∴ 치역: $\{y|y<0\}$,

점근선의 방정식: $y=0$



답 (1) 그래프: 풀이 참조, 치역: $\{y|y>1\}$,

점근선의 방정식: $y=1$

(2) 그래프: 풀이 참조, 치역: $\{y|y<0\}$,

점근선의 방정식: $y=0$

06 (1) 밑 $\frac{1}{3}$ 이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $-1 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ 은

$x=-1$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$,

$x=3$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

을 갖는다.

(2) 밑 2가 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $3 \leq x \leq 5$ 일 때, 함수 $y=2^{x-2}-1$ 은

$x=5$ 에서 최댓값 $2^{5-2}-1=2^3-1=7$,

$x=3$ 에서 최솟값 $2^{3-2}-1=2-1=1$

을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{81}$ (2) 최댓값: 7, 최솟값: 1

07 (1) $2^{3x+1}=\sqrt{2}$ 에서 $2^{3x+1}=2^{\frac{1}{2}}$

$3x+1=\frac{1}{2}, 3x=-\frac{1}{2} \quad \therefore x=-\frac{1}{6}$

(2) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-x+3}=\left(\frac{1}{125}\right)^{2x-1}$ 에서

$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^{-x+3}=\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^3\right\}^{2x-1}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-2x+6}=\left(\frac{1}{5}\right)^{6x-3}$

$-2x+6=6x-3$

$-8x=-9 \quad \therefore x=\frac{9}{8}$

(3) $4^{x^2+3x}=\left(\frac{1}{16}\right)^{2x-9}$ 에서 $4^{x^2+3x}=(4^{-2})^{2x-9}$

$4^{x^2+3x}=4^{-4x+18}$

$x^2+3x=-4x+18, x^2+7x-18=0$

$(x+9)(x-2)=0 \quad \therefore x=-9 \text{ 또는 } x=2$

답 (1) $x=-\frac{1}{6}$ (2) $x=\frac{9}{8}$ (3) $x=-9$ 또는 $x=2$

08 (1) $5^{x-1} \leq 625$ 에서 $5^{x-1} \leq 5^4$

밑 5가 1보다 크므로

$x-1 \leq 4 \quad \therefore x \leq 5$

(2) $8^{-x-3} > 2^{x+7}$ 에서 $(2^3)^{-x-3} > 2^{x+7}$

$2^{-3x-9} > 2^{x+7}$

밑 2가 1보다 크므로

$-3x-9 > x+7$

$-4x > 16 \quad \therefore x < -4$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4} \leq \frac{1}{27^{x+2}}$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4} \leq \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^{x+2}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+6}$

밑 $\frac{1}{3}$ 이 1보다 작으므로

$x^2-4 \geq 3x+6, x^2-3x-10 \geq 0$

$(x+2)(x-5) \geq 0 \quad \therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 5$

답 (1) $x \leq 5$ (2) $x < -4$ (3) $x \leq -2$ 또는 $x \geq 5$

09 현재 온열 기구 512대에서 매년 25%씩 늘릴 때, n 년 후 설치된
온열 기구가 1250대가 된다고 하면

$512 \times \left(1 + \frac{25}{100}\right)^n = 1250$

$512 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1250, \left(\frac{5}{4}\right)^n = \frac{625}{256}, \left(\frac{5}{4}\right)^n = \left(\frac{5}{4}\right)^4$

$\therefore n=4$

따라서 온열 기구가 1250대가 되는 것은 4년 후이다. 답 4년 후

기출 Best | 1회

p.54~57

01 $f(2)=m$ 이므로 $a^2=m$

$f(6)=n$ 이므로 $a^6=n$

따라서 $f(k)=mn^2=a^2 \times (a^6)^2=a^2 \times a^{12}=a^{14}=f(14)$ 이고 지
수함수 $f(x)$ 는 일대일함수이므로

$k=14$

답 ①

참고 함수 $f(x)$ 가 일대일함수일 때,

$f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$

02 ① 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은 지수함수이다.

② 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

③ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=(2^{-1})^x=2^{-x}$ 이므로 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프와

y 축에 대하여 대칭이다.

④ 치역은 $\{y|y>0\}$ 이다.

⑤ x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

03 ㄱ. $y=-4^x$ 의 그래프는 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여
대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=2^{2x}+1=4^x+1$ 이므로 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 y 축의 방
향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=2^{3x-6}=2^{3(x-2)}=(2^3)^{x-2}=8^{x-2}$ 이므로 함수 $y=8^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=2 \times 4^{x-1}-4=4^{\frac{1}{2}} \times 4^{x-1}-4=4^{x-\frac{1}{2}}-4$ 이므로 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 겹칠 수 있는 그래프의 식인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. **답 ④**

- 04 함수 $y=3^{x+a}+b$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$ 이므로 $b=-1$
또, 함수 $y=3^{x+a}-1$ 의 그래프가 점 $(3, 2)$ 를 지나므로
 $2=3^{3+a}-1$, $3^{3+a}=3$
 $3+a=1 \quad \therefore a=-2$
 $\therefore a-b=-2-(-1)=-1$ **답 ⑤**

- 05 점 A의 x 좌표는 $3^x=\frac{1}{3}$ 에서

$$x=-1 \quad \therefore A\left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

$B(b, 3^b)$ 이라 하면 점 C가 선분 AB를 1:2로 내분하고 점 C의 x 좌표가 0이므로

$$\frac{1 \times b + 2 \times (-1)}{1+2} = 0$$

$$\frac{b-2}{3} = 0 \quad \therefore b=2$$

따라서 점 B의 y 좌표는 $3^2=9$ **답 ⑤**

다른풀이 $A\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 이므로 오른쪽 그림과

같이 두 점 C, B에서 직선 $y=\frac{1}{3}$ 에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ 이고

$\overline{AC}:\overline{CB}=1:2$ 이므로

$$\overline{AD}:\overline{DE}=1:2, 1:\overline{DE}=1:2 \quad \therefore \overline{DE}=2$$

$$\text{즉, } E\left(2, \frac{1}{3}\right)$$

따라서 점 B의 x 좌표가 2이므로 점 B의 y 좌표는 $3^2=9$

참고 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 를 이은 선분 AB를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

- 06 $A(0, 3^m)$, $B(0, 1)$ 이고 $\overline{AB}=8$ 이므로

$$|3^m-1|=8$$

$$\text{즉, } 3^m-1=-8 \text{ 또는 } 3^m-1=8$$

$$\therefore 3^m=-7 \text{ 또는 } 3^m=9$$

$$\text{그런데 } 3^m>0 \text{이므로 } 3^m=9 \quad \therefore m=2$$
 답 ①

- 07 $A=(2^{0.4})^2=2^{0.8}$

$$B=\sqrt[6]{16}=\sqrt[6]{2^4}=2^{\frac{2}{3}}$$

$$C=5^{\log_5 2}=2=2^1$$

$$\frac{2}{3}<0.8<1 \text{이고 밑 } 2 \text{가 } 1 \text{보다 크므로}$$

$$2^{\frac{2}{3}}<2^{0.8}<2^1 \quad \therefore B<A<C$$
 답 ③

- 08 함수 $y=2^{x+2}+k$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이므로 $0 \leq x \leq 2$ 일 때,

$$x=0 \text{에서 최솟값 } 2^2+k=4+k,$$

$$x=2 \text{에서 최댓값 } 2^{2+2}+k=16+k$$

를 갖는다. 이때 최솟값이 5이므로

$$4+k=5 \quad \therefore k=1$$

따라서 최댓값은

$$16+k=16+1=17 \quad \therefore M=17$$

$$\therefore k+M=1+17=18$$
 답 ③

- 09 $f(x)=x^2-4x+4$ 라 하면 $f(x)=(x-2)^2$

밑 2가 1보다 크므로 함수 $y=2^{f(x)}+2$ 는 $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값, 최소일 때 최솟값을 갖는다.

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 0을 가지므로 함수 $y=2^{f(x)}+2$ 의 최솟값은

$$2^0+2=1+2=3$$
 답 ①

- 10 $y=2^{2x}-5 \times 2^{x+1}+20$

$$=(2^x)^2-10 \times 2^x+20$$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $2 \leq x \leq 3$ 에서 $2^2 \leq 2^x \leq 2^3$, 즉

$$4 \leq t \leq 8 \text{이고}$$

$$y=t^2-10t+20=(t-5)^2-5$$

$4 \leq t \leq 8$ 일 때, 이 함수는 $t=5$ 에서 최솟값 -5 , $t=8$ 에서 최댓값 $3^2-5=4$ 를 갖는다.

따라서 구하는 합은

$$4+(-5)=-1$$
 답 ③

참고 $t=5$ 에서 $2^x=5 \quad \therefore x=\log_2 5$

$t=8$ 에서 $2^x=8 \quad \therefore x=3$

즉, 주어진 함수는 $x=\log_2 5$ 에서 최솟값을 갖고 $x=3$ 에서 최댓값을 갖는다.

- 11 $4^x>0, 2^{12-2x}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4^x+2^{12-2x} \geq 2\sqrt{4^x \times 2^{12-2x}}$$

$$=2\sqrt{2^{2x} \times 2^{12-2x}}$$

$$=2\sqrt{2^{12}}=2 \times 2^6=128$$

(단, 등호는 $4^x=2^{12-2x}$, 즉 $x=3$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 128이다. **답 ③**

참고 등호가 성립할 조건은 $4^x=2^{12-2x}$ 에서

$$2^{2x}=2^{12-2x}, 2x=12-2x$$

$$4x=12 \quad \therefore x=3$$

- 12 $2^x + 2^{-x} = t$ 로 놓으면 $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $2^x = 2^{-x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)

이때 $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= 4^x + 4^{-x} - 2(2^x + 2^{-x}) + 1 \\ &= (t^2 - 2) - 2t + 1 = t^2 - 2t - 1 \\ &= (t - 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

$t \geq 2$ 일 때, 이 함수는 $t = 2$ 에서 최솟값 -1 을 갖는다. 답 ⑤

- 13 $4^{x-1} = 2^{-x^2+1}$ 에서

$$(2^2)^{x-1} = 2^{-x^2+1}, 2^{2x-2} = 2^{-x^2+1}$$

$$2x - 2 = -x^2 + 1$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0, (x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 방정식의 모든 실근의 합은

$$-3 + 1 = -2$$

답 ①

- 14 $4^x + 4^{4-x} = 130$ 의 양변에 4^x 을 곱하면

$$4^{2x} + 4^4 = 130 \times 4^x, (4^x)^2 + 256 = 130 \times 4^x$$

$$4^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 256 = 130t, t^2 - 130t + 256 = 0$$

$$(t-2)(t-128) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 128$$

즉, $4^x = 2$ 또는 $4^x = 128$ 이므로 $2^{2x} = 2^1$ 또는 $2^{2x} = 2^7$

$$2x = 1 \text{ 또는 } 2x = 7$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{7}{2}$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{7}{2}$ 또는 $\alpha = \frac{7}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$$

답 ②

- 15 $\begin{cases} 2^{x-2} - 3^{y-1} = 1 \\ 2^x - 2 \times 3^y = -2 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} \frac{1}{4} \times 2^x - \frac{1}{3} \times 3^y = 1 \\ 2^x - 2 \times 3^y = -2 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} 3 \times 2^x - 4 \times 3^y = 12 \\ 2^x - 2 \times 3^y = -2 \end{cases}$$

$2^x = X$, $3^y = Y$ ($X > 0$, $Y > 0$)로 놓으면

$$\begin{cases} 3X - 4Y = 12 \\ X - 2Y = -2 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X = 16$, $Y = 9$

즉, $2^x = 16$, $3^y = 9$ 이므로

$$x = 4, y = 2$$

따라서 $\alpha = 4$, $\beta = 2$ 이므로

$$\alpha - \beta = 4 - 2 = 2$$

답 ①

- 16 (i) $x = 1$ 일 때

$x^{2x} = x^{x^2-24}$ 에서 $1^2 = 1^{1-24}$, 즉 $1 = 1$ 이므로 $x = 1$ 은 방정식

$x^{2x} = x^{x^2-24}$ 의 해이다.

(ii) $x \neq 1$ 일 때

$$x^{2x} = x^{x^2-24} \text{에서 } 2x = x^2 - 24$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0, (x+4)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 6$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 6$

(i), (ii)에서 방정식 $x^{2x} = x^{x^2-24}$ 의 실근은

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 모든 실근의 합은

$$1 + 6 = 7$$

답 ④

- 17 $3^{2x} - 4 \times 3^{x+1} + k = 0$ 에서 $3^{2x} - 12 \times 3^x + k = 0$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 12t + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $3^{2x} - 4 \times 3^{x+1} + k = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α , β 라 하면

$\alpha + \beta = 2$ 이고 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 3^α , 3^β 이므로 이차방정식의

근과 계수의 관계에 의하여

$$k = 3^\alpha \times 3^\beta = 3^{\alpha+\beta} = 3^2 = 9$$

답 ⑤

- 18 $3^{x^2+1} \leq 27 \times 3^x$ 에서 $3^{x^2+1} \leq 3^{3+x}$

밑 3이 1보다 크므로 $x^2 + 1 \leq 3 + x$

$$x^2 - x - 2 \leq 0, (x+1)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 이므로 구하는 합은

$$-1 + 0 + 1 + 2 = 2$$

답 ⑤

- 19 $\frac{1}{16} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$ 에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$

밑 $\frac{1}{4}$ 이 1보다 작으므로

$$2 \geq x - 2 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$9^x > \sqrt[3]{81} \times 3^x \text{에서 } 3^{2x} > 3^{\frac{4}{3}+x}$$

밑 3이 1보다 크므로

$$2x > \frac{4}{3} + x \quad \therefore x > \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $\frac{4}{3} < x \leq 4$

따라서 정수 x 는 2, 3, 4의 3개이다.

답 ②

- 20 $4^x - 9 \times 2^{x+1} + 32 < 0$ 에서 $(2^x)^2 - 18 \times 2^x + 32 < 0$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 18t + 32 < 0, (t-2)(t-16) < 0$$

$$\therefore 2 < t < 16$$

즉, $2 < 2^x < 16$ 이므로 $2^1 < 2^x < 2^4 \quad \therefore 1 < x < 4$

따라서 정수 x 는 2, 3이므로 구하는 곱은 $2 \times 3 = 6$

답 ②

- 21 $4^x + 2^{x+1} + 1 + k \geq 0$ 에서

$$(2^x)^2 + 2 \times 2^x + 1 + k \geq 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + 2t + 1 + k \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 양수 t 에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 한다.

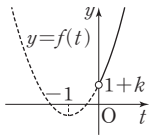
$$f(t) = t^2 + 2t + 1 + k \\ = (t+1)^2 + k$$

라 하면 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, 모든 양수 t 에 대하여 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면 $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f(0) = 1 + k \geq 0 \quad \therefore k \geq -1$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -1 이다.

답 ②



- 22 방사성 물질이 붕괴되기 시작하여 30년 후의 질량은

$$g(30) = ap^{\frac{30}{2}} = ap^{15}$$

$$\text{그런데 } g(30) = \frac{1}{2}a \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2}a = ap^{15}, p^{15} = \frac{1}{2} \quad \therefore p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{15}}$$

$$\therefore g(t) = a \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{15}} \right\}^{\frac{t}{2}} = a \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

t 년 후의 질량이 처음 질량의 $\frac{1}{16}$ 이하가 된다고 하면

$$a \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \leq \frac{1}{16}a$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4, \frac{t}{30} \geq 4 \quad \therefore t \geq 120$$

따라서 이 방사성 물질이 처음 질량의 $\frac{1}{16}$ 이하로 붕괴되는 데에는 최소 120년이 걸린다.

답 ①

기출 Best | 2회

p.58~61

- 01 $f(p) = m$ 이므로 $a^p = m$

$$f(q) = n \text{이므로 } a^q = n$$

따라서 $f(k) = mn = a^p \times a^q = a^{p+q} = f(p+q)$ 이고 지수함수

$f(x)$ 는 일대일함수이므로

$$k = p + q$$

답 ②

- 02 ③ $y = 10^{2x} = (10^2)^x = 100^x$ 이므로 그래프는 $y = 100^{-x}$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

답 ③

- 03 ① $y = 5^{2x-4} = 25^{x-2}$ 이므로 함수 $y = 25^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

- ② $y = 5^{x-2} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

- ③ $y = 25(5^x - 1) = 5^{x+2} - 25$ 이므로 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -25 만큼 평행이동한 것이다.

- ④ $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} = 5^{-(x+2)}$ 이므로 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

- ⑤ $y = \left(\frac{1}{25}\right)^{0.5x-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-6} = 5^{-(x-6)}$ 이므로 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 겹칠 수 있는 그래프의 식이 아닌 것은 ①이다.

답 ①

- 04 함수 $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a} + b$ 의 그래프는 함수 $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프의 점근선의 방정식은 $y = b$ 이므로 $b = 1$

또, 함수 $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a} + 1$ 의 그래프가 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2+a} + 1, \left(\frac{1}{2}\right)^{2+a} = 1$$

$$2+a=0 \quad \therefore a=-2$$

답 ①

- 05 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b 라 하면

$$A(a, 2^a), B\left(b, -\left(\frac{1}{2}\right)^b + k\right)$$

선분 AB의 중점의 x 좌표가 0이므로

$$\frac{a+b}{2} = 0, a+b=0 \quad \therefore b=-a$$

선분 AB의 중점의 y 좌표가 $\frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{2^a - \left(\frac{1}{2}\right)^b + k}{2} = \frac{5}{4}, \frac{2^a - \left(\frac{1}{2}\right)^{-a} + k}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{2^a - 2^a + k}{2} = \frac{5}{4}, \frac{k}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore k = \frac{5}{2}$$

답 ④

- 06 $A(0, 2^m), B(0, 1)$ 이고 $\overline{AB} = 7$ 이므로 $|2^m - 1| = 7$

즉, $2^m - 1 = -7$ 또는 $2^m - 1 = 7$ 이므로

$$2^m = -6 \text{ 또는 } 2^m = 8$$

그런데 $2^m > 0$ 이므로 $2^m = 8 \quad \therefore m = 3$

답 ①

- 07 $A = (4\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = (2^2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{4}}$

$$B = 0.25^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} = (2^{-2})^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$C = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} \text{이고 밑 } 2 \text{가 } 1 \text{보다 크므로}$$

$$2^{\frac{5}{4}} < 2^{\frac{4}{3}} < 2^{\frac{3}{2}} \quad \therefore A < B < C$$

답 ①

- 08 $0 < a < 1$ 이므로 함수 $y = a^x + 1$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다. 따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 일 때,

$$x = -2 \text{에서 최댓값 } a^{-2} + 1 = \frac{1}{a^2} + 1,$$

$$x = 1 \text{에서 최솟값 } a + 1$$

을 갖는다. 이때 최댓값이 5이므로

$$\frac{1}{a^2} + 1 = 5, a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

따라서 최솟값은

$$a + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

답 ③

- 09 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+2x+a}$ 에서

$$f(x) = -x^2 + 2x + a = -(x-1)^2 + 1 + a \text{라 하면 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$$

및 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$-2 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최댓값 $1 + a$ 를 가지

므로 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+a}$ 이다.

이때 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 최솟값이 $\frac{1}{16}$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1+a} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$1 + a = 4 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) = -(x-1)^2 + 4$$

$-2 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최솟값 -5 를 가지

므로 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$ 이다.

$$\therefore M = 32$$

$$\therefore M - a = 32 - 3 = 29$$

답 ⑤

- 10 $y = -\left(\frac{1}{9}\right)^x + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + a$

$$= -\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + a$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$y = -t^2 + 6t + a = -(t-3)^2 + 9 + a$$

$t > 0$ 일 때, 이 함수는 $t = 3$ 에서 최댓값 $9 + a$ 를 갖는다. 이때 최댓값이 5이므로

$$9 + a = 5 \quad \therefore a = -4$$

$$\text{이때 } t = 3, \text{ 즉 } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3 \text{에서 } x = -1 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore a + b = -4 + (-1) = -5$$

답 ①

- 11 $3x + 4y = 16$ 에서 $3x = 16 - 4y$

$$\therefore x = \frac{16-4y}{3}$$

$8^x > 0, 16^y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$8^x + 16^y = (2^3)^{\frac{16-4y}{3}} + (2^4)^y$$

$$= 2^{16-4y} + 2^{4y}$$

$$\geq 2\sqrt{2^{16-4y} \times 2^{4y}}$$

$$= 2\sqrt{2^{16}} = 2 \times 2^8 = 512$$

(단, 등호는 $2^{16-4y} = 2^{4y}$, 즉 $y = 2$ 일 때 성립)

따라서 $8^x + 16^y$ 의 최솟값은 512이다.

답 ④

- 12 $3^x + 3^{-x} = t$ 로 놓으면 $3^x > 0, 3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $3^x = 3^{-x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)

이때 $9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로

$$y = 9^x + 9^{-x} - 2(3^x + 3^{-x}) - 3$$

$$= (t^2 - 2) - 2t - 3 = t^2 - 2t - 5$$

$$= (t-1)^2 - 6$$

따라서 $t \geq 2$ 일 때, 이 함수는 $t = 2$ 에서 최솟값 -5 를 갖는다.

답 ③

- 13 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2x}$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^{-2x}, \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6x}$$

즉, $x^2 - x = -6x$ 이므로

$$x^2 + 5x = 0, x(x+5) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 0$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 합은

$$-5 + 0 = -5$$

답 ①

- 14 $9^x - 8 \times 3^{x+1} = 81$ 에서 $(3^x)^2 - 24 \times 3^x = 81$

$3^x = t \quad (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 24t = 81, t^2 - 24t - 81 = 0$$

$$(t+3)(t-27) = 0$$

$$\therefore t = 27 \quad (\because t > 0)$$

즉, $3^x = 27$ 이므로 $x = 3$

답 ④

- 15 $\begin{cases} 2^x + 3 \times 5^y = 16 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -21 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} 2^x + 3 \times 5^y = 16 \\ 4 \times 2^x - 5 \times 5^y = -21 \end{cases}$

$2^x = X, 5^y = Y \quad (X > 0, Y > 0)$ 로 놓으면

$$\begin{cases} X + 3Y = 16 \\ 4X - 5Y = -21 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X = 1, Y = 5$

즉, $2^x = 1, 5^y = 5$ 이므로

$$x = 0, y = 1$$

따라서 $\alpha = 0, \beta = 1$ 이므로

$$\alpha + \beta = 0 + 1 = 1$$

답 ②

- 16 (i) $x = 1$ 일 때

$$1^{-5} = 1^3, \text{ 즉 } 1 = 1 \text{이므로 등식이 성립한다.}$$

(ii) $x \neq 1$ 일 때 $-0 < x < 1$ 또는 $x > 1$

$$x^{x^2-6} = x^{4x-1} \text{에서 } x^2-6=4x-1$$

$$x^2-4x-5=0, (x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=5$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x=5$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 모든 실근의 합은

$$1+5=6$$

답 ④

17 $a^{2x}-6a^x+8=0$ 에서 $(a^x)^2-6 \times a^x+8=0$

$$a^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } t^2-6t+8=0 \quad \dots\dots ㉠$$

방정식 $a^{2x}-6a^x+8=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha+\beta=6$ 이고, 방정식 ㉠의 두 근은 a^α, a^β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a^{\alpha+\beta}=a^\alpha \times a^\beta=8, a^6=8$$

$$\therefore a=8^{\frac{1}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

답 ②

18 $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-4x-3}$ 에서

$$(3^{-3})^{2-x} < (3^{-2})^{x^2-4x-3}, 3^{-6+3x} < 3^{-2x^2+8x+6}$$

밑 3이 1보다 크므로

$$-6+3x < -2x^2+8x+6, 2x^2-5x-12 < 0$$

$$(2x+3)(x-4) < 0 \quad \therefore -\frac{3}{2} < x < 4$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 이므로 구하는 합은

$$-1+0+1+2+3=5$$

답 ②

19 $\left(\frac{4}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{4}\right)^{x-2}$ 에서 $\left(\frac{5}{4}\right)^{-x-3} < \left(\frac{5}{4}\right)^{x-2}$

밑 $\frac{5}{4}$ 가 1보다 크므로

$$-x-3 < x-2, -2x < 1 \quad \therefore x > -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$3^{x-1} < \sqrt{3^{x+3}} \text{에서 } 3^{x-1} < 3^{\frac{x+3}{2}}$$

밑 3이 1보다 크므로

$$x-1 < \frac{x+3}{2}, 2x-2 < x+3 \quad \therefore x < 5 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{의 공통부분을 구하면 } -\frac{1}{2} < x < 5$$

따라서 $a=-\frac{1}{2}, \beta=5$ 이므로

$$\beta-a=5-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{2}$$

답 ③

20 $3^{2x+1}-28 \times 3^x+9 \leq 0$ 에서

$$3 \times (3^x)^2-28 \times 3^x+9 \leq 0$$

$$3^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$3t^2-28t+9 \leq 0, (3t-1)(t-9) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 9$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3} \leq 3^x \leq 9 \text{이므로 } 3^{-1} \leq 3^x \leq 3^2 \quad \therefore -1 \leq x \leq 2$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

답 ①

21 $16^x-4^{x+1}+k^2-5 \geq 0$ 에서

$$(4^x)^2-4 \times 4^x+k^2-5 \geq 0$$

$$4^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-4t+k^2-5 \geq 0 \quad \dots\dots ㉠$$

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 양수 t 에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 한다.

$$f(t)=t^2-4t+k^2-5$$

$$=(t-2)^2+k^2-9$$

라 하면 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같다. 즉, 모든 양수 t 에 대하여

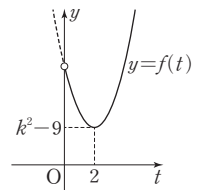
$$f(t) \geq 0 \text{이 성립하려면 } f(2) \geq 0 \text{이어야}$$

하므로

$$f(2)=k^2-9 \geq 0, (k+3)(k-3) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -3 \text{ 또는 } k \geq 3$$

답 ②



22 미생물을 관찰하기 시작했을 때, 즉 $t=0$ 일 때 미생물의 수는

$$f(0)=10 \times 2^{\frac{0}{a}}=10 \times 1=10$$

8시간 후 미생물의 수는

$$f(8)=10 \times 2^{\frac{8}{a}}$$

이것이 처음의 미생물의 수의 4배이므로

$$f(8)=4f(0)$$

$$10 \times 2^{\frac{8}{a}}=4 \times 10, 2^{\frac{8}{a}}=4=2^2$$

$$\frac{8}{a}=2 \quad \therefore a=4$$

$$\therefore f(t)=10 \times 2^{\frac{t}{4}}$$

미생물의 수가 처음의 32배가 되는 데에 x 시간이 걸린다고 하면

$$f(x)=32f(0) \text{이므로}$$

$$10 \times 2^{\frac{x}{4}}=32 \times 10, 2^{\frac{x}{4}}=32=2^5$$

$$\frac{x}{4}=5 \quad \therefore x=20$$

따라서 미생물의 수가 처음의 32배가 되는 데에 걸리는 시간은

20시간이다.

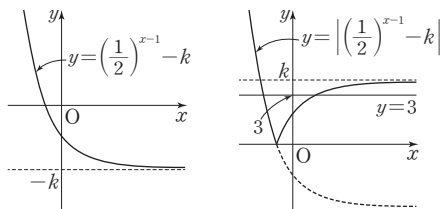
답 ④

1-1 (i) $k \leq 0$ 일 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-k > 0$ 이므로

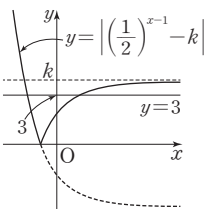
$$y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-k\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-k$$

따라서 함수 $y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} - k \right|$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $-k$ 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=3$ 과 서로 다른 두 점에서 만나지 않는다.

(ii) $k > 0$ 일 때, 함수 $y = \left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} - k$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $-k$ 만큼 평행이동한 것이므로 [그림 1]과 같고, 함수 $y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} - k \right|$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



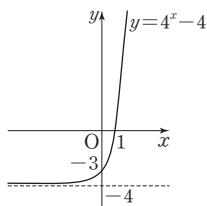
[그림 2]

따라서 함수 $y = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} - k \right|$ 의 그래프가 직선 $y=3$ 과 서로 다른 두 점에서 만나려면 $k > 3$

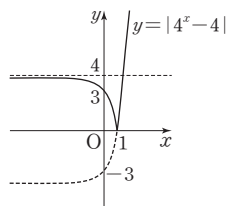
따라서 정수 k 의 최솟값은 4이다.

답 ②

1-2 함수 $y = 4^x - 4$ 의 그래프는 $y = 4^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로 [그림 1]과 같고, 함수 $y = |4^x - 4|$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

한편, 함수 $y = 2^{x+n}$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 것이다.

$f(x) = |4^x - 4|$, $g(x) = 2^{x+n}$ 이라 할 때,

$a < 0$ 이라면 $f(0) < g(0)$ 이어야 하므로

$$3 < 2^n \quad \dots\dots ㉠$$

$1 < \beta < 5$ 이라면 $g(5) < f(5)$ 이어야 하므로

$$2^{5+n} < 4^5 - 4, \quad 2^{5+n} < 1020, \quad 32 \times 2^n < 1020$$

$$\therefore 2^n < \frac{255}{8} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3 < 2^n < \frac{255}{8}$

따라서 자연수 n 은 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$2 + 3 + 4 = 9$$

답 ④

$$\text{참고 } 3 < 2^n \text{에서 } 2^{\log_2 3} < 2^n \quad \therefore \log_2 3 < n$$

$$2^n < \frac{255}{8} \text{에서 } 2^n < 2^{\log_2 \frac{255}{8}} \quad \therefore n < \log_2 \frac{255}{8}$$

$$\therefore \log_2 3 < n < \log_2 \frac{255}{8}$$

2-1 함수 $y = 3^x - 5$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 점근선은 직선 $y = -5$ 이다.

함수 $y = \left(\frac{1}{2} \right)^{x-a} - \left(\frac{1}{2} \right)^{1-a} - 2$ 의 그래프는 점 $(1, -2)$ 를 지나고, $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $-\left(\frac{1}{2} \right)^{1-a} - 2$ 만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 점근선은 직선 $y = -\left(\frac{1}{2} \right)^{1-a} - 2$ 이다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x < 1$ 일 때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점은 2개이므로 $x \geq 1$ 일 때 y 좌표가 정수인 점은 6개이어야 한다. 즉,

$$-8 \leq -\left(\frac{1}{2} \right)^{1-a} - 2 < -7, \quad -6 \leq -\left(\frac{1}{2} \right)^{1-a} < -5$$

$$5 < \left(\frac{1}{2} \right)^{1-a} \leq 6, \quad 5 < 2^{a-1} \leq 6$$

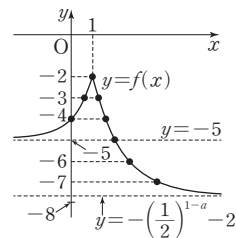
$$10 < 2^a \leq 12, \quad 2^{\log_2 10} < 2^a \leq 2^{\log_2 12}$$

$$\therefore \log_2 10 < a \leq \log_2 12$$

따라서 $m = 10$, $n = 12$ 이므로

$$m + n = 10 + 12 = 22$$

답 ①



2-2 $y = \frac{1}{2} \times 2^x - 4 = 2^{x-1} - 4$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 점근선은 직선 $y = -4$ 이다. 또,

$$x = 0 \text{일 때, } y = 2^{-1} - 4 = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}$$

$$y = 0 \text{일 때, } 0 = 2^{x-1} - 4 \text{에서}$$

$$2^{x-1} = 4, \quad x - 1 = 2 \quad \therefore x = 3$$

따라서 함수 $y = \frac{1}{2} \times 2^x - 4$ 의 그래프는 두 점 $\left(0, -\frac{7}{2} \right)$, $(3, 0)$ 을 지난다.

한편, 함수 $y = -3^x + 9$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 9만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 점근선은 직선 $y = 9$ 이다. 또,

$$x = 0 \text{일 때, } y = -1 + 9 = 8$$

$$y = 0 \text{일 때, } 0 = -3^x + 9 \text{에서}$$

$$3^x = 9 \quad \therefore x = 2$$

따라서 함수 $y = -3^x + 9$ 의 그래프는 두 점 $(0, 8)$, $(2, 0)$ 을 지난다.

즉, 두 함수 $y = \frac{1}{2} \times 2^x - 4$,

$y = -3^x + 9$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 x 좌표와 y 좌표

가 모두 정수인 점은

$x=0$ 일 때,

$y=-3, -2, -1, \dots, 8$ 의 12개

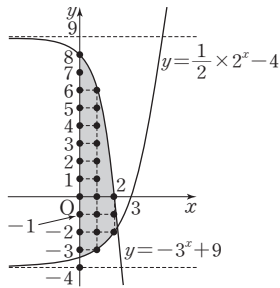
$x=1$ 일 때,

$y=-3, -2, -1, \dots, 6$ 의 10개

$x=2$ 일 때, $y=-2, -1, 0$ 의 3개

따라서 구하는 점의 개수는

$$12 + 10 + 3 = 25$$



답 25

3-1 $4^x + 2a \times 2^x - 3 \times 2^{x+2} + a = 0$ 에서

$$(2^x)^2 + 2a \times 2^x - 12 \times 2^x + a = 0$$

$$\therefore (2^x)^2 + 2(a-6) \times 2^x + a = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 + 2(a-6)t + a = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

방정식 $4^x + 2a \times 2^x - 3 \times 2^{x+2} + a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 t 에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-6)^2 - 1 \times a > 0$$

$$a^2 - 13a + 36 > 0, (a-4)(a-9) > 0$$

$$\therefore a < 4 \text{ 또는 } a > 9 \quad \text{..... ㉡}$$

(ii) (두 근의 합) > 0 이므로

$$-2(a-6) > 0, a-6 < 0 \quad \therefore a < 6 \quad \text{..... ㉢}$$

(iii) (두 근의 곱) > 0 이므로

$$a > 0 \quad \text{..... ㉣}$$

㉡, ㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $0 < a < 4$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3이므로 모든 정수 a 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 = 6$$

답 ⑤

3-2 $9^x = 3^{x+1} + k$ 에서 $(3^x)^2 = 3 \times 3^x + k$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 = 3t + k$$

$$\therefore t^2 - 3t - k = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

방정식 $9^x = 3^{x+1} + k$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 t 에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3)^2 - 4 \times (-k) = 9 + 4k > 0$$

$$4k > -9 \quad \therefore k > -\frac{9}{4} \quad \text{..... ㉡}$$

(ii) (두 근의 합) > 0 이므로 $3 > 0$ ㉢

(iii) (두 근의 곱) > 0 이므로

$$-k > 0 \quad \therefore k < 0 \quad \text{..... ㉣}$$

㉡, ㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-\frac{9}{4} < k < 0$

따라서 $\alpha = -\frac{9}{4}, \beta = 0$ 이므로

$$\beta - \alpha = 0 - \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

답 ①

4-1 $k \times 4^x - k \times 2^{x+1} - k^2 - k + 8 \geq 0$ 에서

$$k \times (2^x)^2 - 2k \times 2^x - k^2 - k + 8 \geq 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$kt^2 - 2kt - k^2 - k + 8 \geq 0 \quad \text{..... ㉠}$$

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $k \times 4^x - k \times 2^{x+1} - k^2 - k + 8 \geq 0$

이 성립하려면 모든 양수 t 에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 한다.

(i) $k > 0$ 일 때,

$$f(t) = kt^2 - 2kt - k^2 - k + 8$$

$$= k(t-1)^2 - k^2 - 2k + 8$$

이라 하면 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같다. 즉, 모든 양수 t 에 대하여

$f(t) \geq 0$ 이 성립하려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하

므로

$$f(1) = -k^2 - 2k + 8 \geq 0, k^2 + 2k - 8 \leq 0$$

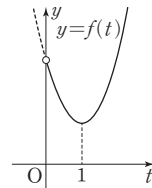
$$(k+4)(k-2) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq k \leq 2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 2$

(ii) $k = 0$ 일 때, ㉠에서 $8 \geq 0$

즉, 모든 양수 t 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $0 \leq k \leq 2$



답 ②

4-2 $5^{2x} \geq a \times 5^x - 2a - 5$ 에서 $(5^x)^2 \geq a \times 5^x - 2a - 5$

$$5^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 \geq at - 2a - 5$$

$$\therefore t^2 - at + 2a + 5 \geq 0 \quad \text{..... ㉠}$$

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $5^{2x} \geq a \times 5^x - 2a - 5$ 가 성립하려면

모든 양수 t 에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 한다.

$$f(t) = t^2 - at + 2a + 5 = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2a + 5 \text{라 하면}$$

(i) $\frac{a}{2} > 0$, 즉 $a > 0$ 일 때

함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과

같고 모든 양수 t 에 대하여 $f(t) \geq 0$ 이 성

립하려면 $f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + 2a + 5 \geq 0$$

$$a^2 - 8a - 20 \leq 0, (a+2)(a-10) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 10$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $0 < a \leq 10$

(ii) $\frac{a}{2} = 0$, 즉 $a = 0$ 일 때,

$$f(t) = t^2 + 5 > 0 \text{이므로 모든 양수 } t \text{에 대하여 } f(t) > 0 \text{이 성}$$

립한다.

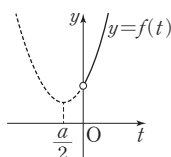
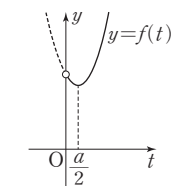
(iii) $\frac{a}{2} < 0$, 즉 $a < 0$ 일 때

함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림

과 같고 모든 양수 t 에 대하여 $f(t) \geq 0$

이 성립하려면 $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f(0) = 2a + 5 \geq 0$$



$$2a \geq -5 \quad \therefore a \geq -\frac{5}{2}$$

$$\text{그런데 } a < 0 \text{ 이므로 } -\frac{5}{2} \leq a < 0$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } -\frac{5}{2} \leq a \leq 10$$

답 ⑤

서술형 What & How

p.66~69

1 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)}$

이고, 밑 a 가 1보다 크므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값, $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다. ①

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ 은 $x=4$ 에서 최댓값 5, $x=2$ 에서 최솟값 1을 갖는다. ②

따라서 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값은 a^5 , 최솟값은 a 이다.

이때 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값이 2이므로

$$a=2 \quad \dots\dots ③$$

따라서 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값은

$$a^5 = 2^5 = 32 \quad \dots\dots ④$$

답 32

2 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)}$

이고, 밑 a 가 1보다 작으므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다. ①

$0 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x) = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 2, $x=1$ 에서 최솟값 -2를 갖는다. ②

따라서 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값은 a^{-2} , 최솟값은 a^2 이다.

이때 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값이 4이므로

$$a^{-2} = 4, a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1) \quad \dots\dots ③$$

따라서 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값은

$$a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore m = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{a}{m} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 \quad \dots\dots ④$$

답 2

채점기준	배점
① 함수 $(g \circ f)(x)$ 가 최댓값, 최솟값을 가질 조건 설명하기	1
② 함수 $f(x)$ 의 최댓값, 최솟값 각각 구하기	2
③ a 의 값 구하기	2
④ $\frac{a}{m}$ 의 값 구하기	2

3 $3^{2x+1} = 25 \times 3^x + 18$ 에서 $3^{2x+1} - 25 \times 3^x - 18 = 0$

$$3 \times (3^x)^2 - 25 \times 3^x - 18 = 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면 } 3t^2 - 25t - 18 = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$(3t+2)(t-9) = 0 \quad \therefore t = 9 \quad (\because t > 0) \quad \dots\dots ②$$

$$\text{즉, } 3^x = 9 \text{이므로 } x = 2 \quad \dots\dots ③$$

답 $x=2$

4 $4^x = 2^{x+3} - 15$ 에서 $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$

$$\therefore (2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0$$

$$2^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 8t + 15 = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$(t-3)(t-5) = 0 \quad \therefore t = 3 \text{ 또는 } t = 5 \quad \dots\dots ②$$

즉, $2^x = 3$ 또는 $2^x = 5$ 이므로

$$2^a = 3, 2^b = 5 \text{ 또는 } 2^a = 5, 2^b = 3$$

$$\therefore 2^{2a} + 2^{2b} = (2^a)^2 + (2^b)^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \quad \dots\dots ③$$

답 34

채점기준	배점
① 주어진 방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 나타내기	2
② t 의 값 구하기	2
③ $2^{2a} + 2^{2b}$ 의 값 구하기	2

5 함수 $y = 3^{x-3}$ 의 그래프는 함수 $y = 3^{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{AB} = 4$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{AB} = 4 \quad \dots\dots ①$$

두 점 A, C의 x 좌표를 a ($a > 0$)라 하면

$$A(a, 3^{a+1}), C(a, 3^{a-3})$$

$$\overline{AC} = 4 \text{이므로}$$

$$3^{a+1} - 3^{a-3} = 4, 3 \times 3^a - \frac{1}{27} \times 3^a = 4$$

$$\left(3 - \frac{1}{27}\right) \times 3^a = 4, \frac{80}{27} \times 3^a = 4$$

$$\therefore 3^a = \frac{27}{20} \quad \dots\dots ②$$

따라서 점 C의 y 좌표는

$$3^{a-3} = \frac{1}{27} \times 3^a = \frac{1}{27} \times \frac{27}{20} = \frac{1}{20} \quad \therefore m = \frac{1}{20}$$

$$\therefore 100m = 100 \times \frac{1}{20} = 5 \quad \dots\dots ③$$

답 5

6 함수 $y = 2^{x-2}$ 의 그래프는 함수 $y = 2^{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{AB} = 3$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{AB} = 3 \quad \dots\dots ①$$

두 점 A, C의 x 좌표를 a ($a > 0$)라 하면

$$A(a, 2^{a+1}), C(a, 2^{a-2})$$

$$\overline{AC} = 3 \text{이므로}$$

$$2^{a+1} - 2^{a-2} = 3, 2 \times 2^a - \frac{1}{4} \times 2^a = 3$$

$$\left(2 - \frac{1}{4}\right) \times 2^a = 3, \frac{7}{4} \times 2^a = 3$$

$$\therefore 2^a = \frac{12}{7} \quad \dots\dots ②$$

따라서 점 C의 y 좌표는

$$2^{a-2} = \frac{1}{4} \times 2^a = \frac{1}{4} \times \frac{12}{7} = \frac{3}{7} \quad \therefore m = \frac{3}{7}$$

$$\therefore 70m = 70 \times \frac{3}{7} = 30 \quad \dots\dots ③$$

답 30

채점기준	배점
① AC의 길이 구하기	2
② 2°의 값 구하기	2
③ 70m의 값 구하기	2

7 함수 $y=3^{x-k}+\frac{5}{2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수

$y=3^{x-k}+\frac{5}{2}$ 의 그래프와 그 역함수

의 그래프의 교점은 함수

$y=3^{x-k}+\frac{5}{2}$ 의 그래프와 직선 $y=x$

의 교점과 같다. 즉, 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$A(a, a), B(c, c)$ ①

$a < c$ 라 하면 $\overline{AB}=\sqrt{2}$ 에서 $\overline{AB}$ 를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 1이므로 두 점 A, B의 y 좌표의 차는 1이다. 즉,

$c-a=1 \quad \therefore c=a+1$ ②

$\therefore A(a, a), B(a+1, a+1)$

또, 두 점 A, B는 함수 $y=3^{x-k}+\frac{5}{2}$ 의 그래프 위의 점이므로

$A\left(a, 3^{a-k}+\frac{5}{2}\right), B\left(a+1, 3^{a+1-k}+\frac{5}{2}\right)$ 에서

$\left(3^{a+1-k}+\frac{5}{2}\right)-\left(3^{a-k}+\frac{5}{2}\right)=1$

$3^{a+1-k}-3^{a-k}=1, 3 \times 3^{a-k}-3^{a-k}=1$

$(3-1) \times 3^{a-k}=1 \quad \therefore 3^{a-k}=\frac{1}{2}$ ③

따라서 점 A의 y 좌표는

$3^{a-k}+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$

이므로 점 B의 y 좌표는 $3+1=4$

$\therefore A(3, 3), B(4, 4)$ ④

따라서 $a=3, b=3, c=4, d=4$ 이므로

$ab+cd=3 \times 3+4 \times 4=25$ ⑤

답 25

참고 지수함수 $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1$)은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

8 함수 $y=2^{x-k}+\frac{1}{2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수

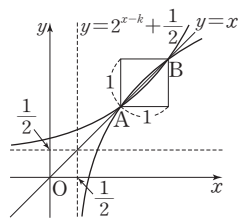
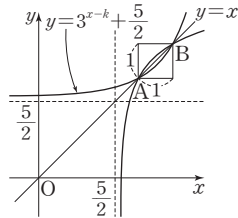
$y=2^{x-k}+\frac{1}{2}$ 의 그래프와 그 역함수

의 그래프의 교점은 함수

$y=2^{x-k}+\frac{1}{2}$ 의 그래프와 직선 $y=x$

의 교점과 같다. 즉, 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$A(a, a), B(c, c)$ ①



$a < c$ 라 하면 $\overline{AB}$ 를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 1이므로 두 점 A, B의 y 좌표의 차는 1이다. 즉,

$c-a=1 \quad \therefore c=a+1$ ②

$\therefore A(a, a), B(a+1, a+1)$

또, 두 점 A, B는 함수 $y=2^{x-k}+\frac{1}{2}$ 의 그래프 위의 점이므로

$A\left(a, 2^{a-k}+\frac{1}{2}\right), B\left(a+1, 2^{a+1-k}+\frac{1}{2}\right)$ 에서

$\left(2^{a+1-k}+\frac{1}{2}\right)-\left(2^{a-k}+\frac{1}{2}\right)=1$

$2^{a+1-k}-2^{a-k}=1, 2 \times 2^{a-k}-2^{a-k}=1$

$(2-1) \times 2^{a-k}=1 \quad \therefore 2^{a-k}=1$ ③

따라서 점 A의 y 좌표는

$2^{a-k}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

이므로 점 B의 y 좌표는 $\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

$\therefore A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), B\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ④

따라서 $a=\frac{3}{2}, b=\frac{3}{2}, c=\frac{5}{2}, d=\frac{5}{2}$ 이므로

$a+b+c+d=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=8$ ⑤

답 8

채점기준	배점
① 두 점 A, B가 직선 $y=x$ 위에 있음을 설명하고 $A(a, a), B(c, c)$ 로 나타내기	2
② c 와 a 사이의 관계식 구하기	1
③ 2^{a-k} 의 값 구하기	2
④ 두 점 A, B의 좌표 구하기	1
⑤ $a+b+c+d$ 의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.70~73

01 $f^{-1}(a)=4$ 에서 $f(4)=a$ 이므로 $a=3^4$

$f^{-1}(b)=7$ 에서 $f(7)=b$ 이므로 $b=3^7$

$f^{-1}(ab)=k$ 라 하면

$f(k)=ab=3^4 \times 3^7=3^{11}=f(11)$

함수 $f(x)$ 는 일대일함수이므로

$k=11$ ⑤

02 함수 $y=9^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+2=9^{x-a}$

$\therefore y=9^{x-a}-2$

이 그래프가 점 $(-2, 7)$ 을 지나므로

$7=9^{-2-a}-2$

$9^{-2-a}=9, -2-a=1 \quad \therefore a=-3$ ①

03 ① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프는 점 $(0, -1)$ 을 지난다.

④, ⑤ 함수 $y=2^{-x+1}-3=(\frac{1}{2})^{x-1}-3$

의 그래프는 함수 $y=(\frac{1}{2})^x$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이

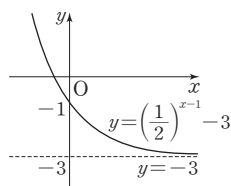
므로 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

참고 ④ 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$$y=2^x \rightarrow y=2^{-x} \rightarrow y+3=2^{-(x-1)} \rightarrow y=2^{-x+1}-3$$



04 그림에서 $a > 1$

함수 $y=a^{-x+3}+2=a^{-(x-3)}+2$ 의 그래프는 함수 $y=a^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다.

답 ④

05 함수 $y=(\frac{1}{3})^{-x-2}+k=3^{x+2}+k$ 의 그래프는 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

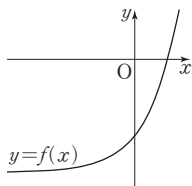
$$f(x)=(\frac{1}{3})^{-x-2}+k \text{라 할 때, } y=f(x)$$

의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $f(0) \leq 0$ 이어야 하므로

$$f(0)=9+k \leq 0 \quad \therefore k \leq -9$$

따라서 상수 k 의 최댓값은 -9이다.

답 ②



06 $y=3^{|x-3|}+2$

$$= \begin{cases} 3^{x-3}+2 & (x \geq 3) \\ 3^{-x+3}+2 & (x < 3) \end{cases}$$

이므로 $y=3^{|x-3|}+2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=3^{|x-3|}+2$ 의 그래프와

$$\text{직선 } y=1 \text{의 교점의 개수는 } 0 \quad \therefore f(1)=0$$

$$\text{직선 } y=2 \text{의 교점의 개수는 } 0 \quad \therefore f(2)=0$$

$$\text{직선 } y=3 \text{의 교점의 개수는 } 1 \quad \therefore f(3)=1$$

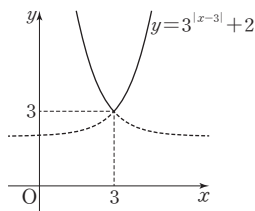
$$\text{직선 } y=4 \text{의 교점의 개수는 } 2 \quad \therefore f(4)=2$$

$$\text{직선 } y=5 \text{의 교점의 개수는 } 2 \quad \therefore f(5)=2$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$$

$$=0+0+1+2+2=5$$

답 ④



참고 $f(n) = \begin{cases} 0 & (n < 3) \\ 1 & (n = 3) \\ 2 & (n > 3) \end{cases}$

07 $f(x)=a^{x-k}, g(x)=(\frac{1}{a})^{x-k}$ 이라 하면 $f(2)=g(2)$ 이므로

$$a^{2-k}=(\frac{1}{a})^{2-k}, a^{2-k}=a^{-2+k}$$

$$2-k=-2+k$$

$$2k=4 \quad \therefore k=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=a^{x-2}, g(x)=(\frac{1}{a})^{x-2} \text{이므로}$$

$$P(1, \frac{1}{a}), Q(1, a)$$

$$\text{이때 } \overline{PQ}=\frac{15}{4} \text{이므로}$$

$$a-\frac{1}{a}=\frac{15}{4}, 4a^2-15a-4=0$$

$$(4a+1)(a-4)=0 \quad \therefore a=4 (\because a > 1)$$

$$\therefore a-k=4-2=2$$

답 ④

08 점 A의 y 좌표는

$$y=\frac{1}{3} \times 2^0=\frac{1}{3} \quad \therefore A(0, \frac{1}{3})$$

점 B의 y 좌표는

$$y=2^0-\frac{8}{3}=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}$$

$$\therefore B(0, -\frac{5}{3})$$

$$\text{점 C의 } x \text{좌표는 } \frac{1}{3} \times 2^x=2^x-\frac{8}{3} \text{에서}$$

$$\frac{2}{3} \times 2^x=\frac{8}{3}, 2^x=4$$

$$\therefore x=2$$

$$\text{따라서 } C(2, \frac{4}{3}) \text{이므로 삼각형 ABC의 넓이는}$$

$$\frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{3} \right) \right\} \times 2=2$$

답 ③

09 $y=a^{x^2-6x+7}$ 에서

$$f(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2 \text{라 하면 } y=a^{f(x)}$$

$0 < a < 1$ 이므로 함수 $y=a^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가 최댓일 때 최솟값, 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$1 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 -2를 가지므로 함수 $y=a^{f(x)}$ 의 최댓값은 a^{-2} 이다. 이때 함수 $y=a^{f(x)}$ 의 최댓값

$$\text{이 } \frac{8}{3} \text{이므로}$$

$$a^{-2}=\frac{8}{3}$$

$1 \leq x \leq 3$ 일 때, $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 2를 가지므로 함수 $y=a^{f(x)}$ 의 최솟값은

$$a^2=(a^{-2})^{-1}=(\frac{8}{3})^{-1}=\frac{3}{8}$$

답 ①

10 $y=4^x-2^{x+2}+a+3=(2^x)^2-4 \times 2^x+a+3$

$$2^x=t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$y=t^2-4t+a+3=(t-2)^2+a-1$$

$t > 0$ 일 때, 이 함수는 $t=2$ 에서 최솟값 $a-1$ 을 갖는다. 이때 최솟값이 4이므로

$$a-1=4 \quad \therefore a=5$$

이때 $t=2$, 즉 $2^x=2$ 에서 $x=1$ 이므로

$$p=1$$

$$\therefore a+p=5+1=6$$

답 ④

11 주어진 조건에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(0)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(4)} = \frac{1}{8} \quad \dots\dots ㉠$

㉠에서 $f(0)=f(4)$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축은 직선 $x=2$ 이다. 이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)=(x-2)^2+a \quad (a \text{는 상수}) \quad \dots\dots ㉡$$

또, ㉠에서 $f(0)=f(4)=3$ 이므로 ㉡에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0)=(-2)^2+a=3 \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore f(x)=(x-2)^2-1$$

함수 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$0 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 -1 을 가지므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$$

답 ④

12 $2^x > 0$, $2^{1-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{1-x} - 2^k &\geq 2\sqrt{2^x \times 2^{1-x}} - 2^k \\ &= 2\sqrt{2} - 2^k \end{aligned}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 2^x = 2^{1-x}, \text{ 즉 } x = \frac{1}{2} \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $2^x + 2^{1-x} - 2^k \geq 0$ 이 성립하려면

$$2\sqrt{2} - 2^k \geq 0, 2^k \leq 2\sqrt{2}, 2^k \leq 2^{\frac{3}{2}}$$

밑 2가 1보다 크므로

$$k \leq \frac{3}{2}$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

답 ⑤

13 점 A의 x 좌표를 a 라 하면

$$A(a, 2^a), B(a, 15 \times 2^{-a})$$

이때 $\overline{AB}=2$ 이므로 $2^a - 15 \times 2^{-a} = 2$

$$2^a = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면 } t - \frac{15}{t} = 2$$

$$t^2 - 15 = 2t, t^2 - 2t - 15 = 0$$

$$(t+3)(t-5) = 0 \quad \therefore t = 5 \quad (\because t > 0)$$

따라서 점 A의 y 좌표는 $2^a = 5$ 이다.

답 ③

14 $f(m-n) = a^{m-n} + a^{-(m-n)} = a^{m-n} + a^{-m+n}$

$$\text{조건 (가)에서 } (a^m + a^{-m})(a^n + a^{-n}) = \frac{25}{3}$$

$$\therefore a^{m+n} + a^{m-n} + a^{-m+n} + a^{-m-n} = \frac{25}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{조건 (나)에서 } (a^m - a^{-m})(a^n - a^{-n}) = 4$$

$$\therefore a^{m+n} - a^{m-n} - a^{-m+n} + a^{-m-n} = 4 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ - ㉡ \text{을 하면 } 2a^{m-n} + 2a^{-m+n} = \frac{13}{3}$$

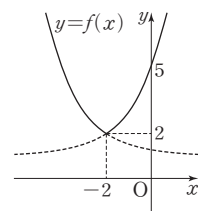
$$\therefore f(m-n) = a^{m-n} + a^{-m+n} = \frac{13}{6}$$

답 ①

15 $f(x) = 2^{|x+2|} + 1$

$$= \begin{cases} 2^{x+2} + 1 & (x \geq -2) \\ 2^{-x-2} + 1 & (x < -2) \end{cases}$$

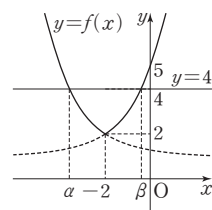
이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최솟값 2를 가지므로 $f(x) \geq 2$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=4$ 의 실근은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=4$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$

의 그래프와 직선 $y=4$ 의 교점은 2

개이고, 이 두 점의 x 좌표를 α, β 라

하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=-2$ 에 대하여 대칭

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = -2 \quad \therefore \alpha+\beta = -4$$

즉, 방정식 $f(x)=4$ 의 모든 실근의 합은 -4 이다. (거짓)

ㄷ. $g(x)=f(x)-f(t)=0$ 에서 $f(x)=f(t)$

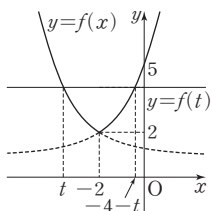
방정식 $f(x)=f(t)$ 의 실근은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y=f(t)$ 의 교점의 x 좌표와 같으

로

$$x=t \text{ 또는 } \frac{x+t}{2} = -2$$



$$\therefore x=t \text{ 또는 } x=-4-t$$

방정식 $f(x)=f(t)$ 가 오직 한 개의 실근을 가지려면

$$t = -4 - t \text{ 이어야 하므로}$$

$$2t = -4 \quad \therefore t = -2 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

다른풀이 ㄷ. 방정식 $f(x)=f(t)$ 가 오직 한 개의 실근을 가지려면

$$f(t)=2 \text{ 이어야 하므로 } t = -2 \text{ (참)}$$

16 $A_n(n, 9^n), B_n(n, 3^n)$ 이므로 $\overline{A_n B_n} = 9^n - 3^n$

따라서 $\overline{A_n B_n} \leq 3^{30} - 3^{15}$ 에서 $9^n - 3^n \leq 3^{30} - 3^{15}$

$$9^n - 3^n - 3^{30} + 3^{15} \leq 0$$

$$(3^n)^2 - 3^n - 3^{15}(3^{15} - 1) \leq 0$$

$3^n = t \quad (t \geq 3)$ 이라 하면

$$t^2 - t - 3^{15}(3^{15} - 1) \leq 0$$

$$(t - 3^{15})\{t + (3^{15} - 1)\} \leq 0$$

이때 $t + 3^{15} - 1 > 0$ 이므로

$$t - 3^{15} \leq 0 \quad \therefore t \leq 3^{15}$$

그런데 $t \geq 3$ 이므로 $3 \leq t \leq 3^{15}$

$$3^1 \leq 3^n \leq 3^{15} \quad \therefore 1 \leq n \leq 15$$

따라서 자연수 n 은 1, 2, 3, ..., 15의 15개이다.

답 ②

다른풀이 $A_n(n, 9^n)$, $B_n(n, 3^n)$ 이므로

$$\overline{A_n B_n} = 9^n - 3^n = 3^{2n} - 3^n$$

이때 $\overline{A_{15} B_{15}} = 3^{30} - 3^{15}$ 이므로 $\overline{A_n B_n} \leq 3^{30} - 3^{15}$ 에서

$$\overline{A_n B_n} \leq \overline{A_{15} B_{15}} \quad \dots\dots ①$$

선분 $A_n B_n$ (n 은 자연수)의 길이는 n 의 값이 커질수록 길어지므로 ①을 만족시키는 자연수 n 은 $n=1, 2, 3, \dots, 15$ 의 15개이다.

17 점 A의 x 좌표는 $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 에서

$$3^2 = 3^{-x}, 2 = -x \quad \therefore x = -2$$

$$\therefore A(-2, 9)$$

점 B의 x 좌표는 $9 = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ 에서

$$9 = 9^{-x}, 1 = -x \quad \therefore x = -1$$

$$\therefore B(-1, 9)$$

$$\therefore \triangle AOB = \frac{1}{2} \times \{-1 - (-2)\} \times 9 = \frac{9}{2}$$

답 ④

18 두 함수 $y=4^x+4$, $y=5 \times 2^{x-1}+3$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 $4^x+4=5 \times 2^{x-1}+3$ 에서

$$(2^x)^2 + 4 = \frac{5}{2} \times 2^x + 3$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + 4 = \frac{5}{2}t + 3, 2t^2 + 8 = 5t + 6$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0, (2t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

$$\text{즉, } 2^x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } 2^x = 2 \text{이므로}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 두 교점의 좌표는 $\left(-1, \frac{17}{4}\right)$, $(1, 8)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{\{1 - (-1)\}^2 + \left\{8 - \frac{17}{4}\right\}^2} = \frac{17}{4}$$

답 ③

19 $4^{2x} + a \times 4^{x-1} + 32 = 0$ 에서

$$(4^x)^2 + \frac{a}{4} \times 4^x + 32 = 0$$

$4^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + \frac{a}{4}t + 32 = 0 \quad \dots\dots ①$$

..... ①

방정식 $4^{2x} + a \times 4^{x-1} + 32 = 0$ 의 두 근을 $2a$, $3a$ ($a \neq 0$)라 하면 방정식 ①의 두 근은 4^{2a} , 4^{3a} 이다.

..... ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$4^{2a} + 4^{3a} = -\frac{a}{4}, 4^{2a} \times 4^{3a} = 32$$

$$4^{2a} \times 4^{3a} = 32 \text{에서 } 4^{5a} = 32 \text{이므로}$$

$$2^{10a} = 2^5, 10a = 5 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4^{2a} + 4^{3a} = 4 + 2^3 = 12$$

$$\text{즉, } -\frac{a}{4} = 12 \text{이므로 } a = -48$$

..... ③

답 -48

채점기준	배점
① 주어진 방정식에서 $4^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 이차방정식으로 나타내기	1
② 주어진 방정식의 두 근의 비가 2:3임을 이용하여 이차방정식의 두 근을 4의 거듭제곱 꼴로 나타내기	2
③ a 의 값 구하기	3

20 $2^{f(x)} \leq 4^x$ 에서 $2^{f(x)} \leq 2^{2x}$

밑 2가 1보다 크므로 $f(x) \leq 2x$

..... ①

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2x$ 의 교점의 x 좌표는

(i) $x < 3$ 일 때,

$$-3x + 6 = 2x \text{에서 } 5x = 6$$

$$\therefore x = \frac{6}{5}$$

(ii) $x \geq 3$ 일 때,

$$3x - 12 = 2x \text{에서 } x = 12 \quad \dots\dots ②$$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x) \leq 2x$ 의 해는

$$\frac{6}{5} \leq x \leq 12$$

..... ③

따라서 $M=12$, $m=\frac{6}{5}$ 이므로

$$\frac{M}{m} = \frac{12}{\frac{6}{5}} = 10$$

..... ④

답 10

채점기준	배점
① $f(x) \leq 2x$ 임을 설명하기	1
② 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2x$ 의 교점의 x 좌표 구하기	2
③ 부등식 ①의 해 구하기	2
④ $\frac{M}{m}$ 의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.74~77

01 $f(k)=1$ 에서 $a^k - a^{-k} = 1$

$$f(2k) = a^{2k} - a^{-2k} = (a^k + a^{-k})(a^k - a^{-k})$$

이때 $(a^k + a^{-k})^2 = (a^k - a^{-k})^2 + 4 = 1^2 + 4 = 5$ 에서

$$a^k + a^{-k} = \sqrt{5} \quad (\because a^k + a^{-k} > 0) \text{이므로}$$

$$f(2k) = \sqrt{5} \times 1 = \sqrt{5}$$

$$f(3k) = a^{3k} - a^{-3k} = (a^k - a^{-k})^3 + 3(a^k - a^{-k})$$

$$= 1^3 + 3 \times 1 = 4$$

$$\therefore f(2k) \times f(3k) = \sqrt{5} \times 4 = 4\sqrt{5}$$

답 ①

02 $f(x)+f(x+1)=f(x+2)$ 에서

$$a^x+a^{x+1}=a^{x+2}, a^x+a \times a^x=a^2 \times a^x$$

$$(1+a)a^x=a^2 \times a^x$$

$$\therefore 1+a=a^2 (\because a^x > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore f(3)-2f(2)=a^3-2a^2=a^2(a-2)$$

$$=(a+1)(a-2) (\because \textcircled{1})$$

$$=a^2-a-2$$

$$=(1+a)-a-2 (\because \textcircled{1})$$

$$=-1$$

답 ②

03 ③ 그래프의 점근선은 x 축(직선 $y=0$)이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

04 $\neg$. $f(0)=3^0=1$ (참)

$$\neg$$
. $f(2+x)=3^{2+x}=3^2 \times 3^x=9f(x)$ (거짓)

$$\sqsubset$$
. $f(x+y)=3^{x+y}=3^x \times 3^y=f(x)f(y)$ (참)

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다.

답 ③

05 함수 $y=5^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=5^{-x}$$

이 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행 이동한 그래프의 식은

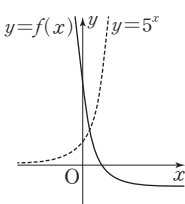
$$y-n=5^{-(x-2)} \quad \therefore y=5^{-x+2}+n$$

$f(x)=5^{-x+2}+n$ 이라 할 때, $y=f(x)$ 의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오

른쪽 그림과 같이 $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f(0)=5^2+n \geq 0 \quad \therefore n \geq -25$$

따라서 정수 n 의 최솟값은 -25 이다.



답 ①

06 함수 $y=a^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향

으로 m 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=a^{-(x-m)} \quad \therefore g(x)=a^{-(x-m)}$$

조건 (나)에서 $f(2-x)=g(2+x)$ 이므로

$$a^{2-x}=a^{-(2+x-m)}, 2-x=-(2+x-m), 2-x=-2-x+m$$

$$\therefore m=4$$

$$\therefore g(x)=a^{-x+4}$$

$f(5)=a^5$, $g(5)=a^{-1}$ 이므로 조건 (다)에서

$$a^5=64a^{-1}, a^6=64=2^6 \quad \therefore a=2 (\because a > 0)$$

$$\therefore a+m=2+4=6$$

답 ④

07 두 점 C, D의 x 좌표를 각각 c , d 라 하면

$$C(c, 4^c), D(d, 2^d)$$

$A(a, 2^a)$, $B(a, 4^a)$ 이고 점 A와 점 C, 점 B와 점 D의 y 좌표가 서로 같으므로

$$2^a=4^c, 4^a=2^d$$

$$2^a=4^c=2^{2c} \text{에서 } a=2c \quad \therefore c=\frac{a}{2}$$

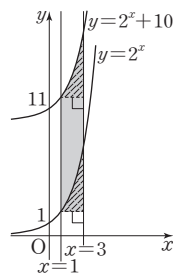
$$4^a=2^{2a}=2^d \text{에서 } 2a=d$$

$$\therefore \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}=\frac{d-a}{a-c}=\frac{2a-a}{a-\frac{a}{2}}=2$$

답 ②

08 함수 $y=2^x+10$ 의 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 10만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 같다.

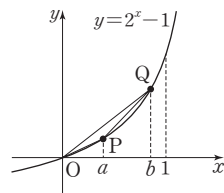
따라서 두 함수 $y=2^x$, $y=2^x+10$ 의 그래프와 두 직선 $x=1$, $x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는 가로 길이가 $3-1=2$ 이고 세로 길이가 10인 직사각형의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는 $2 \times 10=20$



답 ⑤

09 $P(a, 2^a-1)$, $Q(b, 2^b-1)$ 이므로 A는 직선 OP의 기울기, B는 직선 OQ의 기울기, C는 직선 PQ의 기울기이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $A < B < C$



답 ①

$$10 y=2^{-2x} \times 3^{x+2} + \frac{1}{8}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^x \times 9 \times 3^x + \frac{1}{8}$$

$$=9 \times \left(\frac{3}{4}\right)^x + \frac{1}{8}$$

밑 $\frac{3}{4}$ 이 1보다 작으므로 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때,

함수 $y=9 \times \left(\frac{3}{4}\right)^x + \frac{1}{8}$ 은 $x=2$ 에서 최솟값

$$9 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = \frac{83}{16}$$

을 갖는다.

답 ①

11 점 A의 x 좌표를 k ($k > 0$)라 하면 $A(k, 9^k)$, $D(k, 9^{-k})$

$$\text{이때 } \overline{AD}=\frac{8}{3} \text{이므로 } 9^k - \frac{1}{9^k} = \frac{8}{3}$$

$$9^k=t \ (t > 1) \text{로 놓으면}$$

$$t - \frac{1}{t} = \frac{8}{3}, 3t^2 - 3 = 8t$$

$$3t^2 - 8t - 3 = 0, (3t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=3 (\because t > 1)$$

$$\text{즉, } 9^k=3 \text{이므로 } 3^{2k}=3, 2k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

이때 점 B는 점 A와 y 축에 대하여 대칭이므로 $B\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

두 곡선 $y=9^x$, $y=9^{-x}$ 은 y 축에 대하여 대칭이다.

따라서 $\overline{AB} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ 이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$2(\overline{AB} + \overline{AD}) = 2 \times \left(1 + \frac{8}{3}\right) = \frac{22}{3} \quad \text{답 ②}$$

- 12 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b ($a < b$)라 하면

$$A(a, 10^a), B(b, 10^b), C(b, 10^a)$$

$\overline{AB}$ 의 중점의 x좌표가 $\log 6$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} = \log 6 \quad \therefore b = 2\log 6 - a \quad \dots\dots ㉠$$

$\overline{AB}$ 의 중점의 y좌표가 $\frac{13}{2}$ 이므로

$$\frac{10^a + 10^b}{2} = \frac{13}{2}, 10^a + 10^b = 13$$

$$10^a + 10^{2\log 6 - a} = 13, 10^a + 36 \times 10^{-a} = 13$$

$$(10^a)^2 - 13 \times 10^a + 36 = 0$$

$10^a = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 13t + 36 = 0, (t-4)(t-9) = 0$$

$\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$

즉, $10^a = 4$ 또는 $10^a = 9$ 이므로

$$a = \log 4 \text{ 또는 } a = \log 9$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a = \log 4 \text{ 일 때, } b = 2\log 6 - \log 4 = \log \frac{36}{4} = \log 9$$

$$a = \log 9 \text{ 일 때, } b = 2\log 6 - \log 9 = \log \frac{36}{9} = \log 4$$

그런데 $a < b$ 이므로 $a = \log 4, b = \log 9$

$$\therefore A(\log 4, 4), B(\log 9, 9), C(\log 9, 4)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times (\log 9 - \log 4) \times (9 - 4)$$

$$= \frac{5}{2} \log \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \log \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 5 \log \frac{3}{2} \quad \text{답 ①}$$

- 13 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로 $f(x)g(x) \leq 3g(x)$

$$f(x)g(x) - 3g(x) \leq 0, g(x)\{f(x) - 3\} \leq 0$$

$$g(x) \leq 0, f(x) - 3 \geq 0 \text{ 또는 } g(x) \geq 0, f(x) - 3 \leq 0$$

$$\therefore g(x) \leq 0, f(x) \geq 3 \text{ 또는 } g(x) \geq 0, f(x) \leq 3$$

(i) $f(x) \geq 3, g(x) \leq 0$ 일 때,

$$f(x) \geq 3 \text{ 에서 } -1 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$g(x) \leq 0 \text{ 에서 } x \geq 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1 \leq x \leq 4$

(ii) $f(x) \leq 3, g(x) \geq 0$ 일 때,

$$f(x) \leq 3 \text{ 에서 } x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 4 \quad \dots\dots ㉢$$

$$g(x) \geq 0 \text{ 에서 } x \leq 1 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $x \leq -1$

(i), (ii)에서 $x \leq -1$ 또는 $1 \leq x \leq 4$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad \text{답 ③}$$

- 14 $f(x) = |25^x - 5|, g(x) = 2^{x+k}$ 이라 할 때,

$x_1 < 0$ 이려면 $f(0) < g(0)$ 이어야 하므로

$$4 < 2^k \quad \dots\dots ㉠$$

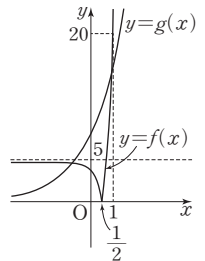
또, $\frac{1}{2} < x_2 < 2$ 이려면 $f(2) > g(2)$ 이어야 하므로

$$|25^2 - 5| > 2^{2+k}, 4 \times 2^k < 620$$

$$\therefore 2^k < 155 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4 < 2^k < 155$

따라서 자연수 k는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다. 답 ①



- 15 (i) $x = 1$ 일 때

$$1^{-2} > 1^{-7}, \text{ 즉 } 1 > 1 \text{이므로 부등식이 성립하지 않는다.}$$

(ii) $0 < x < 1$ 일 때

$$x^{-4x+2} > x^{x-8} \text{에서 } -4x + 2 < x - 8$$

$$-5x < -10 \quad \therefore x > 2$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 부등식의 해는 없다.

(iii) $x > 1$ 일 때

$$x^{-4x+2} > x^{x-8} \text{에서 } -4x + 2 > x - 8$$

$$-5x > -10 \quad \therefore x < 2$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 2$

(i), (ii), (iii)에서 $1 < x < 2$ 답 ③

참고 $x^{f(x)} > x^{g(x)}$ ($x > 0$) 꼴의 부등식은 다음과 같이 푼다.

(i) $x = 1$ 일 때, 주어진 부등식이 성립하지 않음을 확인한다.

(ii) $0 < x < 1$ 일 때, $f(x) < g(x)$ 를 푼다.

(iii) $x > 1$ 일 때, $f(x) > g(x)$ 를 푼다.

(iv) (ii), (iii)의 해의 집합의 합집합을 구한다.

- 16 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x) = 2^{x-m}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 (t, 16)을 지나므로 $f(t) = 16$

$$2^{t-m} = 16, t - m = 4 \quad \therefore m = t - 4$$

$$\therefore f(x) = 2^{x-(t-4)} = 2^{x-t+4}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는

$$f(0) = 2^{0-t+4} = 2^{4-t}$$

$$\therefore g(t) = 2^{4-t}$$

$$\text{따라서 } g(3) = 2^{4-3} = 2^1 = 2, g(4) = 2^{4-4} = 2^0 = 1,$$

$$g(5) = 2^{4-5} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$g(3) + g(4) + g(5) = 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{답 ③}$$

17 A(0, 1), B(2, a^2), C(2, 0)이고 $\square OCBA = \frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times (\overline{OA} + \overline{BC}) \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times (1 + a^2) \times 2 = \frac{5}{4}$$

$$1 + a^2 = \frac{5}{4}, a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2} (\because a > 0) \quad \text{답 ④}$$

18 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)}$

이고, $2 \leq x \leq 5$ 일 때, 함수 $f(x) = x^2 - 6x + 1 = (x-3)^2 - 8$ 은 $x=5$ 에서 최댓값 -4 , $x=3$ 에서 최솟값 -8 을 갖는다. ①

(i) $a > 1$ 일 때

함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값, 최소일 때 최솟값을 갖는다.

$2 \leq x \leq 5$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 -4 이므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값은 a^{-4}

$$\text{즉, } a^{-4} = 64 = 2^6 \text{이므로 } a = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

그런데 $a > 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다. ②

(ii) $0 < a < 1$ 일 때

함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값, 최대일 때 최솟값을 갖는다.

$2 \leq x \leq 5$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -8 이므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값은 a^{-8}

$$\text{즉, } a^{-8} = 64 = 2^6 \text{이므로 } a = 2^{-\frac{3}{4}}$$

$2 \leq x \leq 5$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 -4 이므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값은

$$a^{-4} = 2^3 = 8 \quad \text{..... ③}$$

(i), (ii)에서 $m = 8$ ④

답 8

채점기준	배점
① 함수 $f(x)$ 의 최댓값, 최솟값 구하기	1
② $a > 1$ 일 때, 문제의 조건이 성립하지 않음을 설명하기	1
③ $0 < a < 1$ 일 때, 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값 구하기	2
④ m 의 값 구하기	1

19 처음 복용한 약물의 양을 A라 하면 n시간 후 체내에 남은 약물의 양은

$$2^{-\frac{n}{4}}A$$

이것이 처음 복용한 약물의 양의 $\frac{1}{256}$ 이하이므로

$$2^{-\frac{n}{4}}A \leq \frac{1}{256}A \quad \text{..... ①}$$

$$2^{-\frac{n}{4}} \leq \frac{1}{256}, 2^{-\frac{n}{4}} \leq 2^{-8}$$

밀 2가 1보다 크므로

$$-\frac{n}{4} \leq -8 \quad \therefore n \geq 32 \quad \text{..... ②}$$

따라서 약효의 지속 시간은 32시간이므로

$$n = 32 \quad \text{..... ③}$$

답 32

채점기준

배점

① 지수부등식 세우기

2

② 지수부등식 풀기

2

③ 자연수 n의 값 구하기

1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.78~82

1 함수 $y = 4^x - 6$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - b = 4^{x-a} - 6 \quad \therefore y = 4^{x-a} - 6 + b$$

이 그래프의 점근선은 직선 $y = -6 + b$ 이므로

$$-6 + b = -2 \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore y = 4^{x-a} - 2$$

이 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = 4^{-a} - 2, 4^{-a} = 2, 2^{-2a} = 2$$

$$-2a = 1 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore ab = -\frac{1}{2} \times 4 = -2 \quad \text{답 ④}$$

2 함수 $y = 9^x + 3$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 9^{x-a} + 3 + b$$

이 그래프의 점근선은 직선 $y = 3 + b$ 이므로

$$3 + b = 8 \quad \therefore b = 5$$

$$\therefore y = 9^{x-a} + 8$$

이 그래프가 점 (3, 9)를 지나므로

$$9 = 9^{3-a} + 8, 9^{3-a} = 1$$

$$3 - a = 0 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a + b = 3 + 5 = 8 \quad \text{답 ⑤}$$

3 B(0, 2^a)이므로 $\overline{OB} = 2^a$

$$\overline{OB} = 3 \times \overline{OH} \text{에서 } \overline{OH} = \frac{1}{3} \overline{OB} = \frac{2^a}{3}$$

따라서 점 A의 y좌표는 $\frac{2^a}{3}$ 이고, 점 A는 곡선 $y = 2^{-x+a}$ 위의

점이므로 점 A의 x좌표는 $\frac{2^a}{3} = 2^{-x+a}$ 에서

$$\frac{1}{3} = 2^{-x}, 2^x = 3 \quad \therefore x = \log_2 3$$

$$\therefore A\left(\log_2 3, \frac{2^a}{3}\right)$$

또, 점 A는 곡선 $y = 2^x - 1$ 위의 점이므로

$$\frac{2^a}{3} = 2^{\log_2 3} - 1, \frac{2^a}{3} = 3 - 1, 2^a = 6$$

$$\therefore a = \log_2 6 \quad \text{답 ③}$$

답 ③

4 B(0, 3^a)이므로 $\overline{OB}=3^a$

$$\overline{OB}=2 \times \overline{OH} \text{에서 } \overline{OH}=\frac{1}{2}\overline{OB}=\frac{3^a}{2}$$

따라서 점 A의 y좌표는 $\frac{3^a}{2}$ 이고, 점 A는 곡선 $y=3^{-x+a}$ 위의

점이므로 점 A의 x좌표는 $\frac{3^a}{2}=3^{-x+a}$ 에서

$$\frac{1}{2}=3^{-x}, 3^x=2 \quad \therefore x=\log_3 2$$

$$\therefore A\left(\log_3 2, \frac{3^a}{2}\right)$$

또, 점 A는 곡선 $y=3^x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{3^a}{2}=3^{\log_3 2}-1, \frac{3^a}{2}=2-1, 3^a=2$$

$$\therefore a=\log_3 2$$

답 ②

5 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면

$$A(a, 3^a), B\left(b, \left(\frac{1}{3}\right)^b-6\right)$$

선분 AB의 중점의 좌표가 (0, 2)이므로

$$\frac{a+b}{2}=0, \frac{3^a+\left(\frac{1}{3}\right)^b-6}{2}=2$$

$$\frac{a+b}{2}=0 \text{에서 } a+b=0 \quad \therefore b=-a$$

$$\frac{3^a+\left(\frac{1}{3}\right)^b-6}{2}=2 \text{에서 } \frac{3^a+\left(\frac{1}{3}\right)^{-a}-6}{2}=2$$

$$3^a+\left(\frac{1}{3}\right)^{-a}-6=4, 3^a+\left(\frac{1}{3}\right)^{-a}=10$$

$$3^a+3^a=10, 2 \times 3^a=10$$

$$\therefore 3^a=5$$

따라서 점 A의 y좌표는 5이다.

답 ③

6 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면

$$A(a, 2^a), B\left(b, \left(\frac{1}{2}\right)^b-4\right)$$

선분 AB의 중점의 좌표가 (0, 4)이므로

$$\frac{a+b}{2}=0, \frac{2^a+\left(\frac{1}{2}\right)^b-4}{2}=4$$

$$\frac{a+b}{2}=0 \text{에서 } a+b=0 \quad \therefore b=-a$$

$$\frac{2^a+\left(\frac{1}{2}\right)^b-4}{2}=4 \text{에서 } \frac{2^a+\left(\frac{1}{2}\right)^{-a}-4}{2}=4$$

$$2^a+\left(\frac{1}{2}\right)^{-a}-4=8, 2^a+\left(\frac{1}{2}\right)^{-a}=12$$

$$2^a+2^a=12, 2 \times 2^a=12$$

$$\therefore 2^a=6$$

따라서 점 B의 y좌표는

$$\left(\frac{1}{2}\right)^b-4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-a}-4=2^a-4=6-4=2$$

답 ⑤

7 $f(x)=2^x, g(x)=-2x^2+2$ 라 하면 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 는 오른쪽 그림과 같다.

$$\neg. f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=-2 \times \frac{1}{4}+2=\frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right) \text{이므로 } \frac{1}{2}<x_2<1 \text{ (참)}$$

ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 두 점

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 기울기는 두 점 (0, 1),

$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 을 지나는 직선의 기울기보다 작으므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{2}-0}, \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$$

$$\therefore y_2-y_1<x_2-x_1 \text{ (} \because x_2-x_1>0 \text{)} \text{ (참)}$$

$$\neg. f\left(-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=(2^{\frac{1}{2}})^{-1}=(\sqrt{2})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-2 \times \frac{1}{4}+2=\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)<g\left(-\frac{1}{2}\right) \text{이므로 } -1<x_1<-\frac{1}{2}$$

또, $\neg$ 에서 $\frac{1}{2}<x_2<1$ 이므로

$$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

그런데 $y_2>y_1$ 에서

$$y_2-y_1=(-2x_2^2+2)-(-2x_1^2+2)=-2x_2^2+2x_1^2$$

$$=-2(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$$

$$\text{이고 } x_2-x_1>0 \text{이므로 } x_2+x_1<0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$$

이때 $y_1y_2=2^{x_1} \times 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$ 이므로

$$2^{-\frac{1}{2}}<2^{x_1+x_2}<2^0$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \textcircled{ㄴ}, \textcircled{ㄷ}$ 이다.

답 ⑤

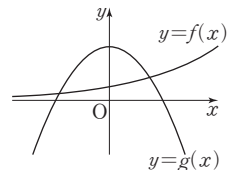
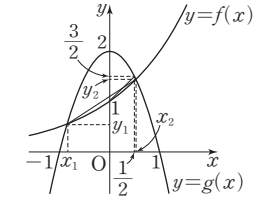
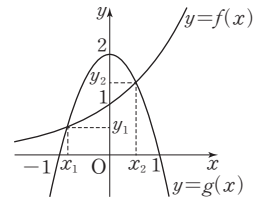
8 $f(x)=2^{x-2}, g(x)=-x^2+1$ 이라 하면 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 는 오른쪽 그림과 같다.

$\neg. x_1<0<x_2$ 이므로

$$y_1<f(0)<y_2$$

$$\text{이때 } f(0)=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$y_1<\frac{1}{4}<y_2$$



따라서 $y_1 - \frac{1}{4} < 0, y_2 - \frac{1}{4} > 0$ 이므로

$$\left(y_1 - \frac{1}{4}\right)\left(y_2 - \frac{1}{4}\right) < 0 \text{ (참)}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}-2} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right) \text{이므로 } \frac{1}{2} < x_2 < 1 \text{ (참)}$$

ㄷ. $y_2 > y_1$ 이므로

$$y_2 - y_1 = (-x_2^2 + 1) - (-x_1^2 + 1)$$

$$= -x_2^2 + x_1^2$$

$$= -(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) > 0$$

$$x_2 - x_1 > 0 \text{이므로 } x_1 + x_2 < 0 \quad \therefore x_2 < -x_1$$

$$\text{이때 } 0 < x_2 < -x_1 \text{이므로 } |x_2| < |-x_1|$$

$$\therefore |x_2| < |x_1| \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

9 $y=f(x)$ 라 하면

$$y = 4^{x-a} - 8 \times 2^{x-a}$$

$$= (2^2)^{x-a} - 8 \times 2^{x-a}$$

$$= (2^{x-a})^2 - 8 \times 2^{x-a}$$

$$2^{x-a} = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$y = t^2 - 8t = (t-4)^2 - 16$$

$t > 0$ 일 때, 이 함수는 $t=4$ 에서 최솟값 -16 을 가지므로

$$2^{5-a} = 4, b = -16 \quad \text{ㄴ 이때 } x=5 \text{이다.}$$

$$2^{5-a} = 4 \text{에서 } 5-a=2 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a+b=3+(-16)=-13$$

답 ①

10 $y=-9^{x-a}+6 \times 3^{x-a}$

$$= -(3^2)^{x-a} + 6 \times 3^{x-a}$$

$$= -(3^{x-a})^2 + 6 \times 3^{x-a}$$

$$3^{x-a} = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$y = -t^2 + 6t = -(t-3)^2 + 9$$

$t > 0$ 일 때, 이 함수는 $t=3$ 에서 최댓값 9 를 가지므로

$$3^{9-a} = 3, b = 9 \quad \text{ㄴ 이때 } x=9 \text{이다.}$$

$$3^{9-a} = 3 \text{에서 } 9-a=1 \quad \therefore a=8$$

$$\therefore a+b=8+9=17$$

답 ④

4 로그함수

교과서 예제

p.85

01 (1) $y=3^x$ 에서 $x=\log_3 y$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\log_3 x$

(2) $y=\log_7 x$ 에서 $x=7^y$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=7^x$

답 (1) $y=\log_3 x$ (2) $y=7^x$

02 ㄴ. $y=\log_2 8=3$ 이므로 상수함수이다.

ㄷ, ㄹ. $y=ax$ (a 는 상수) 꼴이므로 일차함수이다.

ㄱ. $y=\log_5 3^x = x \log_5 3$, 즉 $y=ax$ (a 는 상수) 꼴이므로 일차함수이다.

따라서 로그함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

03 ㄷ. 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지난다. (거짓)

ㄷ. 그래프의 점근선은 y 축이므로 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

04 (1) $2\log_5 \sqrt{15} = \log_5 (\sqrt{15})^2 = \log_5 15$

$$4\log_5 2 = \log_5 2^4 = \log_5 16$$

$15 < 16$ 이고 밑 5가 1보다 크므로

$$\log_5 15 < \log_5 16$$

$$\therefore 2\log_5 \sqrt{15} < 4\log_5 2$$

$$(2) \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{6}} 125 = \log_{\frac{1}{6}} 125^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{6}} (5^3)^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{6}} 5$$

$$3\log_{\frac{1}{6}} 2 = \log_{\frac{1}{6}} 2^3 = \log_{\frac{1}{6}} 8$$

$5 < 8$ 이고 밑 $\frac{1}{6}$ 이 1보다 작으므로

$$\log_{\frac{1}{6}} 5 > \log_{\frac{1}{6}} 8$$

$$\therefore \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{6}} 125 > 3\log_{\frac{1}{6}} 2$$

답 (1) $2\log_5 \sqrt{15} < 4\log_5 2$ (2) $\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{6}} 125 > 3\log_{\frac{1}{6}} 2$

05 (1) $y=\log_2(x+1)+1$ 의 그래프는

$y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역: $\{x|x > -1\}$,

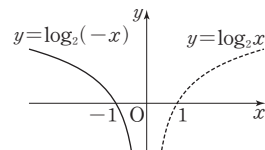
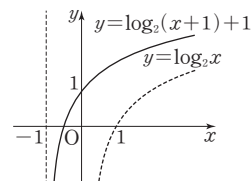
점근선의 방정식: $x=-1$

(2) $y=\log_2(-x)$ 의 그래프는

$y=\log_2 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역: $\{x|x < 0\}$,

점근선의 방정식: $x=0$



답 (1) 그래프: 풀이 참조, 정의역: $\{x|x>-1\}$,
점근선의 방정식: $x=-1$

(2) 그래프: 풀이 참조, 정의역: $\{x|x<0\}$,
점근선의 방정식: $x=0$

다른풀이 (1) 진수의 조건에서 $x+1>0$, 즉 $x>-1$ 이므로 정의역은

$$\{x|x>-1\}$$

(2) 진수의 조건에서 $-x>0$, 즉 $x<0$ 이므로 정의역은
 $\{x|x<0\}$

06 (1) $y=\log_3(2x+1)$ 에서 밑 3이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
따라서 $1\leq x\leq 4$ 일 때, 함수 $y=\log_3(2x+1)$ 은
 $x=4$ 에서 최댓값 $\log_3 9=2$,
 $x=1$ 에서 최솟값 $\log_3 3=1$
을 갖는다.

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ 에서 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
따라서 $3\leq x\leq 5$ 일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ 은
 $x=3$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 2=-1$,
 $x=5$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$
를 갖는다.

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 1 (2) 최댓값: -1, 최솟값: -2

07 (1) 진수의 조건에서 $-6x+4>0$

$$-6x>-4 \quad \therefore x<\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_4(-6x+4)=2 \text{에서 } -6x+4=16$$

$$-6x=12 \quad \therefore x=-2$$

이것은 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 $x=-2$

(2) 진수의 조건에서 $4x-3>0$, $5x-7>0$

$$4x>3, 5x>7$$

$$x>\frac{3}{4}, x>\frac{7}{5} \quad \therefore x>\frac{7}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_5(4x-3)=\log_5(5x-7) \text{에서}$$

$$4x-3=5x-7 \quad \therefore x=4$$

이것은 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 $x=4$

(3) 진수의 조건에서 $x-2>0$, $x+4>0$

$$x>2, x>-4 \quad \therefore x>2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2\log_3(x-2)=\log_3(x+4)+1 \text{에서}$$

$$\log_3(x-2)^2=\log_3(x+4)+\log_3 3$$

$$\log_3(x-2)^2=\log_3\{3(x+4)\}$$

$$\text{즉, } (x-2)^2=3(x+4) \text{이므로}$$

$$x^2-4x+4=3x+12$$

$$x^2-7x-8=0, (x+1)(x-8)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $x=8$ 답 (1) $x=-2$ (2) $x=4$ (3) $x=8$

08 (1) 진수의 조건에서 $2x-3>0$

$$2x>3 \quad \therefore x>\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_3(2x-3)<1 \text{에서 } \log_3(2x-3)<\log_3 3$$

$$\text{밑 3이 1보다 크므로 } 2x-3<3$$

$$2x<6 \quad \therefore x<3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$\frac{3}{2}<x<3$$

(2) 진수의 조건에서 $4x+1>0$, $3x+2>0$

$$4x>-1, 3x>-2$$

$$x>-\frac{1}{4}, x>-\frac{2}{3} \quad \therefore x>-\frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x+1)\geq\log_{\frac{1}{3}}(3x+2) \text{에서 밑 } \frac{1}{3} \text{이 1보다 작으므로}$$

$$4x+1\leq 3x+2 \quad \therefore x\leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$-\frac{1}{4}\leq x\leq 1$$

(3) 진수의 조건에서 $x^2-4>0$, $5x+10>0$

$$x^2-4>0 \text{에서 } (x+2)(x-2)>0$$

$$\therefore x<-2 \text{ 또는 } x>2$$

$$5x+10>0 \text{에서 } 5x>-10 \quad \therefore x>-2$$

따라서 진수의 조건에서

$$x>2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_6(x^2-4)<\log_6(5x+10) \text{에서 밑 6이 1보다 크므로}$$

$$x^2-4<5x+10$$

$$x^2-5x-14<0, (x+2)(x-7)<0$$

$$\therefore -2<x<7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$2<x<7$$

답 (1) $\frac{3}{2}<x<3$ (2) $-\frac{1}{4}\leq x\leq 1$ (3) $2<x<7$

09 $I=2$ 일 때, $S=8$ 이므로

$$8=k\log 2$$

$I=32$ 일 때, 감각의 세기 S 는

$$S=k\log 32=k\log 2^5=5k\log 2=5\times 8=40$$

답 40

기출 Best | 1회

p.86~89

01 $f(5)=-1$ 에서 $\log_a 16-3=-1$

$$\log_a 16=2, a^2=16$$

$$\therefore a=4 (\because a>0)$$

따라서 $f(x)=\log_4(2x+6)-3$ 이므로

$$f(1)=\log_4 8-3=\log_2 2^3-3=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$$

답 ③

02 ① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

② 밑 a 가 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

③ 그래프의 점근선은 y 축이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.

④ 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

⑤ $y=\log_{\frac{1}{a}}x=\log_{a^{-1}}x=-\log_a x$ 에서 $-y=\log_a x$ 이므로 $y=\log_a x$ 의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

03 ① $y=\log_2 4x=\log_2 4+\log_2 x=\log_2 x+2$ 이므로 함수

$y=\log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\log_2 \frac{1}{x}=\log_2 1-\log_2 x=-\log_2 x$ 이므로 함수

$y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

③ $y=\log_2 \frac{1-x}{2}=\log_2 (1-x)-\log_2 2$
 $=\log_2 \{-(x-1)\}-1$

이므로 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=2^{2x}=4^x$ 이므로 함수 $y=\log_4 x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

⑤ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3}=2^{x-3}$ 이므로 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 겹칠 수 있는 그래프의 식이 아닌 것은 ④이다.

답 ④

04 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=\log_{\frac{1}{2}} (-x)$

이 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\log_{\frac{1}{2}} \{-(x-1)\}+3$

점 A의 x 좌표는 $0=\log_{\frac{1}{2}} \{-(x-1)\}+3$ 에서

$$\log_{\frac{1}{2}} \{-(x-1)\}=-3, -(x-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$-x+1=8 \quad \therefore x=-7$$

점 B의 y 좌표는 $y=\log_{\frac{1}{2}} \{-(0-1)\}+3=3$

따라서 점 A의 x 좌표와 점 B의 y 좌표의 합은

$$-7+3=-4$$

답 ①

05 A($k, \log_9 k$), B($k, \log_{\frac{1}{3}} k$)이므로

$$\overline{AB}=\log_9 k-\log_{\frac{1}{3}} k=\log_3 k-\log_{3^{-1}} k$$

$$=\frac{1}{2}\log_3 k+\log_3 k=\frac{3}{2}\log_3 k$$

이때 $\overline{AB}=6$ 이므로 $\frac{3}{2}\log_3 k=6$

$$\log_3 k=4 \quad \therefore k=3^4=81$$

답 ③

06 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수는 역함수 관계이다.

$$y=\log_a (3x-2)+4 \text{에서}$$

$$y-4=\log_a (3x-2), 3x-2=a^{y-4}$$

$$3x=a^{y-4}+2 \quad \therefore x=\frac{1}{3}a^{y-4}+\frac{2}{3}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=\frac{1}{3}a^{x-4}+\frac{2}{3}$$

이것이 $y=a^{x-5}+b=\frac{1}{a} \times a^{x-4}+b$ 와 일치하므로

$$a=3, b=\frac{2}{3}$$

$$\therefore ab=3 \times \frac{2}{3}=2$$

답 ④

07 $A=1+\log_2 3=\log_2 2+\log_2 3=\log_2 6$

$$B=\log_2 4^{\frac{1}{2}\log_2 3}=\log_2 (2^2)^{\frac{1}{2}\log_2 3} \\ =\log_2 2^{\log_2 3}=\log_2 3$$

$$C=2\log_4 12=2\log_2 12=\frac{2}{2}\log_2 12=\log_2 12$$

$3<6<12$ 이고 밑 2가 1보다 크므로

$$\log_2 3<\log_2 6<\log_2 12$$

$$\therefore B<A<C$$

답 ③

08 $f(x)=x^2-4x+6$ 이라 하면 $f(x)=(x-2)^2+2$ 이고

$$y=\log_{\frac{1}{9}} f(x)$$

밑 $\frac{1}{9}$ 이 1보다 작으므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{9}} f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$3 \leq x \leq 6$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 3을 가지므로

함수 $y=\log_{\frac{1}{9}} f(x)$ 의 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{9}} 3=\log_{3^{-2}} 3=-\frac{1}{2}$$

답 ③

참고 $x^2-4x+6=(x-2)^2+2 \geq 0+2=2>0$ 이므로

함수 $y=\log_{\frac{1}{9}} (x^2-4x+6)$ 은 실수 전체의 집합에서 정의된다.

09 진수의 조건에서 $x>0, 4-x>0$

$$\therefore 0<x<4$$

$$y=\log_2 x+\log_2 (4-x)=\log_2 \{x(4-x)\}$$

$$=\log_2 (-x^2+4x)=\log_2 \{-(x-2)^2+4\}$$

$f(x)=-(x-2)^2+4$ 라 하면 밑 2가 1보다 크므로 함수

$y=\log_2 f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

$0<x<4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 4를 가지므로

함수 $y=\log_2 f(x)$ 의 최댓값은

$$\log_2 4=2$$

답 ②

10 $y=(\log_3 x)^2-2\log_3 x^2+2$

$$=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+2 \quad (\because x>0)$$

$\log_3 x=t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 243$ 에서 $0 \leq t \leq 5$ 이고

$$y=t^2-4t+2=(t-2)^2-2$$

$0 \leq t \leq 5$ 일 때, 이 함수는 $t=5$ 에서 최댓값 7, $t=2$ 에서 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 $M=7$, $m=-2$ 이므로

$$M+m=7+(-2)=5$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 11 \quad \log_3\left(x+\frac{1}{y}\right) + \log_3\left(y+\frac{4}{x}\right) &= \log_3\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{4}{x}\right) \\ &= \log_3\left(xy+\frac{4}{xy}+5\right) \end{aligned}$$

이때 $xy > 0$, $\frac{4}{xy} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$xy + \frac{4}{xy} + 5 \geq 2\sqrt{xy \times \frac{4}{xy}} + 5 = 2 \times 2 + 5 = 9$$

(단, 등호는 $xy = \frac{4}{xy}$, 즉 $xy=2$ 일 때 성립)

이때 밑 3이 1보다 크므로

$$\log_3\left(xy+\frac{4}{xy}+5\right) \geq \log_3 9 = 2$$

따라서 $\log_3\left(x+\frac{1}{y}\right) + \log_3\left(y+\frac{4}{x}\right)$ 의 최솟값은 2이다. 답 ③

$$12 \quad \text{진수의 조건에서 } (x-2)^2 > 0, x > 0$$

$$\therefore 0 < x < 2 \text{ 또는 } x > 2 \quad \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \begin{matrix} \text{ } \\ x \neq 2 \end{matrix}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)^2 = \log_{\frac{1}{3}} x \text{에서}$$

$$(x-2)^2 = x, x^2 - 4x + 4 = x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0, (x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 차는

$$4-1=3$$

답 ③

$$13 \quad \text{진수의 조건에서 } 9x > 0, 81x^2 > 0$$

$$\therefore x > 0$$

$$(\log_3 9x)^2 - \log_3 81x^2 = 0 \text{에서}$$

$$(2 + \log_3 x)^2 - (4 + 2\log_3 x) = 0 \quad (\because x > 0)$$

$$(\log_3 x)^2 + 2\log_3 x = 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } t^2 + 2t = 0$$

$$t(t+2) = 0 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 0$$

즉, $\log_3 x = -2$ 또는 $\log_3 x = 0$ 이므로

$$x = \frac{1}{9} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{1}{9} + 1 = \frac{10}{9}$$

답 ⑤

$$14 \quad \text{진수의 조건에서 } x > 0$$

$x^{\log_3 x} = 8x^2$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_3 x} = \log_2 8x^2, (\log_2 x)^2 = \log_2 8 + \log_2 x^2$$

$$(\log_2 x)^2 = 3 + 2\log_2 x \quad (\because x > 0), (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉, $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 8$$

$$\text{따라서 구하는 곱은 } \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

답 ⑤

참고 $x^{\log_a f(x)} = g(x)$ 꼴의 방정식은 양변에 밑이 a 인 로그를 취하여 푼다.

$$15 \quad \log_3 x \times \log_3 4x = 3 \text{에서}$$

$$\log_3 x \times (\log_3 4 + \log_3 x) = 3$$

$$(\log_3 x)^2 + \log_3 4 \times \log_3 x - 3 = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + (\log_3 4)t - 3 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

방정식 $\log_3 x \times \log_3 4x = 3$ 의 두 근이 α, β 이면 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = -\log_3 4$$

$$\log_3 \alpha \beta = \log_3 \frac{1}{4} \quad \therefore \alpha \beta = \frac{1}{4}$$

답 ①

$$16 \quad \text{진수의 조건에서 } x-1 > 0, 4x-7 > 0$$

$$\therefore x > \frac{7}{4} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_3(x-1) + \log_3(4x-7) \leq 3 \text{에서}$$

$$\log_3(x-1)(4x-7) \leq \log_3 27$$

이때 밑 3이 1보다 크므로

$$(x-1)(4x-7) \leq 27, 4x^2 - 11x - 20 \leq 0$$

$$(4x+5)(x-4) \leq 0 \quad \therefore -\frac{5}{4} \leq x \leq 4 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{의 공통부분을 구하면 } \frac{7}{4} < x \leq 4$$

따라서 정수 x 의 최솟값은 2이다.

답 ①

$$17 \quad \text{진수의 조건에서 } x > 0, \log_2 x > 0$$

$$\log_2 x > 0 \text{에서 } \log_2 x > \log_2 1$$

밑 2가 1보다 크므로 $x > 1$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x > 1 \quad \dots\dots ㉠$

$$\log_3(\log_2 x) \leq 0 \text{에서 } \log_3(\log_2 x) \leq \log_3 1$$

밑 3이 1보다 크므로 $\log_2 x \leq 1$

$$\log_2 x \leq \log_2 2$$

밑 2가 1보다 크므로 $x \leq 2 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$1 < x \leq 2$$

따라서 정수 x 의 값은 2이다.

답 ①

$$18 \quad \text{진수의 조건에서 } x > 0, x^4 > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + 3 > 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 > 0 \quad (\because x > 0)$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t + 3 > 0, (t-1)(t-3) > 0 \quad \therefore t < 1 \text{ 또는 } t > 3$$

즉, $\log_2 x < 1$ 또는 $\log_2 x > 3$ 이므로

$$\log_2 x < \log_2 2 \text{ 또는 } \log_2 x > \log_2 8$$

밑 2가 1보다 크므로

$$x < 2 \text{ 또는 } x > 8$$

..... ㉠

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$0 < x < 2 \text{ 또는 } x > 8$$

답 ①

19 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{2\log x} < \frac{x^5}{1000}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{2\log x} < \log \frac{x^5}{1000}, 2(\log x)^2 < 5\log x - 3$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 < 5t - 3, 2t^2 - 5t + 3 < 0$$

$$(2t-3)(t-1) < 0 \quad \therefore 1 < t < \frac{3}{2}$$

즉, $1 < \log x < \frac{3}{2}$ 이므로 $\log 10 < \log x < \log 10^{\frac{3}{2}}$

밑 10이 1보다 크므로 $10 < x < 10^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore 10 < x < 10\sqrt{10} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $10 < x < 10\sqrt{10}$

이때 $\sqrt{961} < 10\sqrt{10} = \sqrt{1000} < \sqrt{1024}$, 즉 $31 < 10\sqrt{10} < 32$ 이므로 정수 x 는 11, 12, 13, ..., 31의 21개이다.

답 ①

20 진수의 조건에서 $f(x) > 0, g(x) > 0$

$$f(x) > 0 \text{에서 } 0 < x < 8$$

$$g(x) > 0 \text{에서 } x > 2$$

$$\therefore 2 < x < 8 \quad \text{..... ㉠}$$

이때 $\log_{\frac{1}{2}} f(x) \geq \log_{\frac{1}{2}} g(x)$ 에서 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로

$$f(x) \leq g(x)$$

주어진 그래프에서 $f(x) \leq g(x)$ 인 x 의 값의 범위는

$$x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 6 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $6 \leq x < 8$

따라서 부등식 $\log_{\frac{1}{2}} f(x) \geq \log_{\frac{1}{2}} g(x)$ 를 만족시키는 정수 x 는 6, 7이므로 구하는 합은

$$6+7=13$$

답 ②

21 정수 작업 전 불순물의 양을 A , 정수 작업 전 불순물의 양 대비 정수 작업을 1번 한 후 남은 불순물의 양의 비를 r 라 하자. 정수 작업을 3번 한 후 남은 불순물의 양이 정수 작업 전 불순물의 양의 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$r^3 A = \frac{1}{4} A, r^3 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = (2^{-2})^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

정수 작업을 n 번 했을 때 남은 불순물의 양이 정수 작업 전 불순물의 양의 $\frac{1}{100}$ 이하가 된다고 하면

$$r^n A \leq \frac{1}{100} A, r^n \leq \frac{1}{100}, (2^{-\frac{2}{3}})^n \leq \frac{1}{100}, 2^{-\frac{2}{3}n} \leq \frac{1}{100}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 2^{-\frac{2}{3}n} \leq \log \frac{1}{100}$$

$$-\frac{2}{3}n \log 2 \leq -2 \quad \therefore n \geq \frac{3}{\log 2} = \frac{3}{0.3} = 10$$

따라서 최소 10번의 정수 작업을 해야 한다.

답 ②

22 두 함수 $y = a^x, y = \log_a x$ 는 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 A, B는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고, 점 A가 직선 $y = -x + 11$ 위의 점이므로 $A(t, -t + 11) \left(t < \frac{11}{2}\right)$ 이라

하면 $B(-t + 11, t)$

이때 $\overline{AB} = 7\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{\{(-t+11)-t\}^2 + \{t-(-t+11)\}^2} = 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2(-2t+11)^2} = 7\sqrt{2}, \sqrt{2}|-2t+11| = 7\sqrt{2}$$

$$|-2t+11| = 7, -2t+11 = 7 \left(\because t < \frac{11}{2}\right)$$

$$-2t = -4 \quad \therefore t = 2 \quad \therefore A(2, 9), B(9, 2)$$

점 A(2, 9)가 곡선 $y = a^x$ 위의 점이므로

$$9 = a^2 \quad \therefore a = 3 \left(\because a > 1\right)$$

답 ②

참고 $\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면 점 M은 두 직선 $y = -x + 11,$

$y = x$ 의 교점이므로 $M\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)$

따라서 점 A의 x 좌표 t 에 대하여 $t < \frac{11}{2}$ 이다.

기출 Best | 2회

p.90~93

01 $f(1) = 4$ 에서 $a \log_3 3 + b \log_4 16 = 4$

$$\therefore a + 2b = 4 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(4) = 5 \text{에서 } a \log_3 9 + b \log_4 4 = 5$$

$$\therefore 2a + b = 5 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 1$

$$\therefore a + b = 2 + 1 = 3$$

답 ③

02 ① 치역은 실수 전체의 집합이다.

$$② x=2 \text{일 때, } y = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{2^{-1}} 2 = -\log_2 2 = -1$$

이므로 그래프는 점 (2, -1)을 지난다.

$$③ y = \log_2(-x) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}(-x) = -\log_{\frac{1}{2}}(-x) \text{에서}$$

$$-y = \log_{\frac{1}{2}}(-x) \text{이므로 } y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{의 그래프는}$$

$y = \log_2(-x)$ 의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

$$④ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{에서 } x = \log_{\frac{1}{2}} y$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 는 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 역함수이다.

⑤ 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

- 03** ① $y = \log_3 9x = \log_3 9 + \log_3 x = \log_3 x + 2$ 이므로 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
- ② $y = \log_9 x = \log_{3^2} x = \frac{1}{2} \log_3 x$ 이므로 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 겹칠 수 없다.
- ③ $y = \log_3 \frac{1}{x-2} = \log_3 (x-2)^{-1} = -\log_3 (x-2)$ 이므로 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
- ④ $y = \log_3 (4-x) = \log_3 \{-(x-4)\}$ 이므로 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
- ⑤ $y = 2 \log_3 \sqrt{x-1} = \log_3 (\sqrt{x-1})^2 = \log_3 (x-1)$ 이므로 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
- 따라서 겹칠 수 있는 그래프의 식이 아닌 것은 ②이다. 답 ②

- 04** 함수 $y = \log_2 (2-x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-b = \log_2 \{2-(x-a)\}$
 $\therefore y = \log_2 (-x+a+2) + b$
 이 그래프의 점근선의 방정식은 $-x+a+2=0$ 에서 $x=a+2$
 이때 점근선이 직선 $x=5$ 이므로 $a+2=5 \quad \therefore a=3$
 $\therefore y = \log_2 (-x+5) + b$
 이 그래프가 점 $(1, 4)$ 를 지나므로 $4 = \log_2 4 + b \quad \therefore b=2$
 $\therefore ab = 3 \times 2 = 6$ 답 ③

- 05** $A(a, \log_3 a), B(a, \log_9 a), C(b, \log_3 b), D(b, \log_9 b)$
 이므로

$$\overline{CD} = \log_3 b - \log_9 b = \log_3 b - \frac{1}{2} \log_3 b = \frac{1}{2} \log_3 b$$

$$\overline{AB} = \log_3 a - \log_9 a = \log_3 a - \frac{1}{2} \log_3 a = \frac{1}{2} \log_3 a$$

$$\text{이때 } \overline{CD} = \frac{3}{2} \overline{AB} \text{이므로 } \frac{1}{2} \log_3 b = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \log_3 a$$

$$2 \log_3 b = 3 \log_3 a, \log_3 b^2 = \log_3 a^3$$

$$b^2 = a^3 \quad \therefore b = \sqrt{a^3} (\because b > 1)$$
 답 ③

- 06** $y = 2^{x-5} + 3$ 이라 하면 $y-3 = 2^{x-5}$
 $x-5 = \log_2 (y-3) \quad \therefore x = \log_2 (y-3) + 5$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \log_2 (x-3) + 5$

$$\therefore f(x) = \log_2 (x-3) + 5$$

따라서 $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로

$$a=3, b=5$$

$$\therefore b-a = 5-3 = 2$$
 답 ④

다른풀이 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-b = \log_2 (x-a) \quad \text{즉, } y = \log_2 (x-a) + b \text{이므로}$$

$$x-a = 2^{y-b} \quad \therefore x = 2^{y-b} + a$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸면 } y = 2^{x-b} + a$$

$$\therefore f^{-1}(x) = 2^{x-b} + a$$

$$\text{이것이 } f^{-1}(x) = 2^{x-5} + 3 \text{과 일치하므로}$$

$$a=3, b=5 \quad \therefore b-a = 5-3 = 2$$

- 07** $0 < a < 1$ 이므로

$$1 < b \text{에서 } \log_a 1 > \log_a b$$

$$0 > \log_a b \quad \therefore B < 0$$

$$C = \log_a \frac{a}{b} = \log_a a - \log_a b = 1 - \log_a b = 1 - B \text{이고, } B < 0 \text{에}$$

$$\text{서 } -B > 0 \text{이므로}$$

$$1 - B > 1 \quad \therefore C > 1$$

$$\therefore B < A < C$$
 답 ②

- 08** $f(x) = x^2 - 6x + 12$ 라 하면 $f(x) = (x-3)^2 + 3$ 이고

$$y = \log_a f(x) + 2$$

(i) $a > 1$ 일 때, 함수 $y = \log_a f(x) + 2$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 3을 가지므로

$y = \log_a f(x) + 2$ 는 최솟값 $\log_a 3 + 2$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } \log_a 3 + 2 = 4 \text{이므로 } \log_a 3 = 2$$

$$a^2 = 3 \quad \therefore a = \sqrt{3} (\because a > 1)$$

(ii) $0 < a < 1$ 일 때, 함수 $y = \log_a f(x) + 2$ 는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

그런데 함수 $f(x) = x^2 - 6x + 12$ 는 최댓값을 갖지 않으므로

함수 $y = \log_a f(x) + 2$ 의 최솟값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = \sqrt{3}$ 답 ②

- 09** 진수의 조건에서 $3-x > 0, x+1 > 0$

$$\therefore -1 < x < 3$$

$$y = \log_a (3-x) + \log_a (x+1) = \log_a (3-x)(x+1)$$

$$= \log_a (-x^2 + 2x + 3) = \log_a \{-(x-1)^2 + 4\}$$

$$f(x) = \log_a \{-(x-1)^2 + 4\} \text{라 하면 } y = \log_a f(x)$$

(i) $a > 1$ 일 때, 함수 $y = \log_a f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

그런데 $-1 < x < 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 최솟값을 갖지 않으므로

함수 $y = \log_a f(x)$ 의 최솟값은 존재하지 않는다.

(ii) $0 < a < 1$ 일 때, 함수 $y = \log_a f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

$-1 < x < 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 4를 가지므로 함수 $y = \log_a f(x)$ 는 최솟값 $\log_a 4$ 를 갖는다. 이때 $y = \log_a f(x)$ 의 최솟값이 -1 이므로

$$\log_a 4 = -1, a^{-1} = 4 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{4}$

답 ②

10 $y = \log_2 x \times \log_2 \frac{4}{x}$

$$= \log_2 x \times (\log_2 4 - \log_2 x)$$

$$= \log_2 x \times (2 - \log_2 x)$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{4} \leq x \leq 8$ 에서 $\log_2 \frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq \log_2 8$, 즉

$$-2 \leq t \leq 3 \text{이고}$$

$$y = t(2-t) = -t^2 + 2t = -(t-1)^2 + 1$$

$-2 \leq t \leq 3$ 일 때, 함수 $y = -(t-1)^2 + 1$ 은 $t=1$ 에서 최댓값 1, $t=-2$ 에서 최솟값 -8 을 갖는다.

따라서 $M=1$, $m=-8$ 이므로

$$Mm = 1 \times (-8) = -8$$

답 ②

11 $x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + 3y \geq 2\sqrt{x \times 3y}, 18 \geq 2\sqrt{3xy} \quad (\because x + 3y = 18)$$

$$\sqrt{3xy} \leq 9, 3xy \leq 81$$

$\therefore xy \leq 27$ (단, 등호는 $x=3y$, 즉 $x=9$, $y=3$ 일 때 성립)

$$\therefore \log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy \leq \log_3 27 = 3$$

따라서 $\log_3 x + \log_3 y$ 의 최댓값은 3이다.

답 ③

12 진수의 조건에서

$$x+3 > 0, x-1 > 0, 11x-17 > 0$$

$$\therefore x > \frac{17}{11}$$

$$\log_5(x+3) + \log_5(x-1) = \log_5(11x-17) \text{에서}$$

$$\log_5(x+3)(x-1) = \log_5(11x-17)$$

$$\text{즉, } (x+3)(x-1) = 11x-17 \text{이므로}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 11x - 17$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0, (x-2)(x-7) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=7$$

따라서 구하는 두 근의 차는

$$7-2=5$$

답 ②

13 밑의 조건에서 $x > 0$, $x \neq 1$

진수의 조건에서 $2x > 0$, $x > 0$

$$\therefore 0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1$$

$$(\log_2 2x)^2 - 4\log_2 x + 2\log_2 2 = 2 \text{에서}$$

$$(1 + \log_2 x)^2 - 4\log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} = 2$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } (1+t)^2 - 4t + \frac{2}{t} = 2$$

$$t^2 - 2t + \frac{2}{t} - 1 = 0, t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$$

$$(t+1)(t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

즉, $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

$$\text{따라서 구하는 합은 } \frac{1}{2} + 2 + 4 = \frac{13}{2}$$

답 ⑤

14 진수의 조건에서 $x > 0$

$$x^{\log_3 x} = \frac{27}{x^2} \text{의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면}$$

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 \frac{27}{x^2}, (\log_3 x)^2 = \log_3 27 + \log_3 x^2$$

$$(\log_3 x)^2 = 3 - 2\log_3 x \quad (\because x > 0)$$

$$(\log_3 x)^2 + 2\log_3 x - 3 = 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

즉, $\log_3 x = -3$ 또는 $\log_3 x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3$$

$$\text{따라서 구하는 곱은 } \frac{1}{27} \times 3 = \frac{1}{9}$$

답 ②

15 $\log_4 x - 3\log_x 4 = k$ 에서 $\log_4 x - \frac{3}{\log_4 x} = k$

$$\log_4 x = t \text{로 놓으면 } t - \frac{3}{t} = k$$

$$t^2 - 3 = kt \quad \therefore t^2 - kt - 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

방정식 $\log_4 x - 3\log_x 4 = k$ 의 두 근을 α , β 라 하면 $\alpha\beta = 16$ 이고, 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $\log_4 \alpha$, $\log_4 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$k = \log_4 \alpha + \log_4 \beta = \log_4 \alpha\beta = \log_4 16 = 2$$

답 ②

참고 밑과 진수의 조건에서 $0 < x < 1$ 또는 $x > 1$ 이므로

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

16 진수의 조건에서 $x-1 > 0$, $2x+1 > 0$

$$\therefore x > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq \log_3(2x+1) \text{에서}$$

$$1 + \log_3(x-1) \leq \log_3(2x+1)$$

$$\log_3\{3(x-1)\} \leq \log_3(2x+1)$$

$$\text{밑 3이 1보다 크므로 } 3(x-1) \leq 2x+1$$

$$3x-3 \leq 2x+1 \quad \therefore x \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $1 < x \leq 4$

따라서 정수 x 는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$2+3+4=9$$

답 ①

- 17 진수의 조건에서 $\log_3 x - 2 > 0, x > 0$

$$\log_3 x - 2 > 0 \text{에서 } \log_3 x > 2$$

$$\log_3 x > \log_3 9$$

$$\text{밑 } 3 \text{이 } 1 \text{보다 크므로 } x > 9$$

$$\text{그런데 } x > 0 \text{이므로 } x > 9 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_2 (\log_3 x - 2) < 1 \text{에서 } \log_2 (\log_3 x - 2) < \log_2 2$$

$$\text{밑 } 2 \text{가 } 1 \text{보다 크므로 } \log_3 x - 2 < 2$$

$$\log_3 x < 4, \log_3 x < \log_3 81$$

$$\text{밑 } 3 \text{이 } 1 \text{보다 크므로 } x < 81 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{의 공통부분을 구하면}$$

$$9 < x < 81$$

따라서 정수 x 는 10, 11, 12, ..., 80의 71개이다.

답 ①

- 18 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x - 6 \geq 0 \text{에서 } \log_{\frac{1}{3}} x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - t - 6 \geq 0, (t+2)(t-3) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 3$$

$$\text{즉, } \log_{\frac{1}{3}} x \leq -2 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq 3 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 9 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$$

$$\text{밑 } \frac{1}{3} \text{이 } 1 \text{보다 작으므로}$$

$$x \geq 9 \text{ 또는 } x \leq \frac{1}{27} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{의 공통부분을 구하면}$$

$$0 < x \leq \frac{1}{27} \text{ 또는 } x \geq 9$$

따라서 정수 x 의 최솟값은 9이다.

답 ④

- 19 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > 4x^3 \text{의 양변에 밑이 } \frac{1}{2} \text{인 로그를 취하면}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \log_{\frac{1}{2}} 4x^3, (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 < \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}} x^3$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 < -2 + 3\log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = t \text{로 놓으면 } t^2 < -2 + 3t$$

$$t^2 - 3t + 2 < 0, (t-1)(t-2) < 0 \quad \therefore 1 < t < 2$$

$$\text{즉, } 1 < \log_{\frac{1}{2}} x < 2 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{밑 } \frac{1}{2} \text{이 } 1 \text{보다 작으므로 } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{의 공통부분을 구하면 } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } m = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$$

답 ①

- 20 진수의 조건에서 $f(x) > 0, g(x) > 0$

$$f(x) > 0 \text{에서 } x < -2 \text{ 또는 } x > 4$$

$$g(x) > 0 \text{에서 } x > -2$$

$$\therefore x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{이때 } \log_2 f(x) + \log_{\frac{1}{2}} g(x) \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_2 f(x) + \log_2 g(x) \leq 0, \log_2 f(x) - \log_2 g(x) \leq 0$$

$$\log_2 f(x) \leq \log_2 g(x)$$

$$\text{밑 } 2 \text{가 } 1 \text{보다 크므로 } f(x) \leq g(x)$$

$$\text{주어진 그래프에서 } f(x) \leq g(x) \text{인 } x \text{의 값의 범위는}$$

$$-2 \leq x \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{의 공통부분을 구하면 } 4 < x \leq 6$$

$$\text{따라서 정수 } x \text{는 } 5, 6 \text{이므로 구하는 합은}$$

$$5 + 6 = 11$$

답 ⑤

- 21 올해로부터 n 년 후 이 동물의 개체 수가 처음으로 200 이하가 된다고 하면

$$1000 \times 0.95^n \leq 200 \quad \therefore 0.95^n \leq \frac{1}{5}$$

$$\text{양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log 0.95^n \leq \log \frac{1}{5}, n \log 0.95 \leq \log \frac{2}{10}$$

$$n(\log 9.5 - 1) \leq \log 2 - 1$$

$$n(0.978 - 1) \leq 0.301 - 1$$

$$-0.022n \leq -0.699 \quad \therefore n \geq 31.7 \dots$$

따라서 동물의 개체 수가 처음으로 200 이하가 되는 것은 올해로부터 32년 후이다.

답 ②

- 22 $y = a^{x-2} + 2$ 에서 $y - 2 = a^{x-2}$

$$\log_a (y - 2) = x - 2, x = \log_a (y - 2) + 2$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \log_a (x - 2) + 2$$

즉, 두 함수 $y = a^{x-2} + 2, y = \log_a (x - 2) + 2$ 는 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 A, B는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고, 점 A가 직선 $y = -x + 12$ 위의 점이므로 A($t, -t + 12$) ($t < 6$)라 하면

$$B(-t + 12, t)$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = 6\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\sqrt{\{(-t + 12) - t\}^2 + \{t - (-t + 12)\}^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2(-2t + 12)^2} = 6\sqrt{2}, \sqrt{2}|-2t + 12| = 6\sqrt{2}$$

$$|-2t + 12| = 6, -2t + 12 = 6 \quad (\because t < 6)$$

$$-2t = -6 \quad \therefore t = 3$$

$$\therefore A(3, 9), B(9, 3)$$

$$\text{점 A}(3, 9) \text{가 곡선 } y = a^{x-2} + 2 \text{ 위의 점이므로}$$

$$9 = a + 2 \quad \therefore a = 7$$

$$\therefore \log_{\sqrt{7}} a^2 = \log_{\sqrt{7}} 7^2 = \log_{\sqrt{7}} 7^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

답 ⑤

참고 $\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면 점 M은 두 직선 $y = -x + 12, y = x$ 의 교점이므로 M(6, 6)

따라서 점 A의 x좌표 t 에 대하여 $t < 6$ 이다.

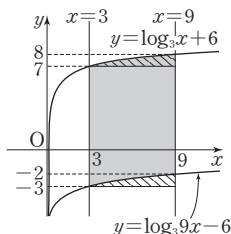
변형유형 집중공략

p.94~97

$$\begin{aligned} 1-1 \quad y &= \log_3 9x - 6 = \log_3 9 + \log_3 x - 6 \\ &= 2 + \log_3 x - 6 = \log_3 x - 4 \end{aligned}$$

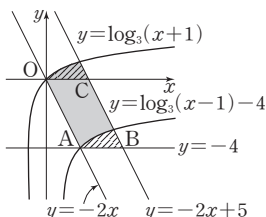
즉, 함수 $y = \log_3 9x - 6$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x + 6$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -10 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 서로 같다.

따라서 구하는 넓이는 가로 길이가 $9 - 3 = 6$, 세로 길이가 $7 - (-3) = 10$ 인 직사각형의 넓이와 같으므로 $6 \times 10 = 60$



답 ④

1-2 함수 $y = \log_3(x-1) - 4$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3(x+1)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 서로 같다.



함수 $y = \log_3(x-1) - 4$ 의 그래프와 직선 $y = -2x$ 의 교점을 A라 하면 점 A는 점 O를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로 $A(2, -4)$

점 A의 y 좌표가 -4 이므로 두 직선 $y = -2x + 5$, $y = -4$ 의 교점을 B라 하고, 직선 $y = -2x + 5$ 와 x 축의 교점을 C라 하면

$$C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

따라서 구하는 도형의 넓이는 평행사변형 OABC의 넓이와 같으므로

$$\frac{5}{2} \times 4 = 10$$

답 ③

2-1 함수 $y = \log_c x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이므로

$$c > 1$$

오른쪽 그림과 같이 $k > 1$ 일 때

$$\log_b k < \log_a k < 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{\log_k b} < \frac{1}{\log_k a} < 0$$

$$\log_k a < \log_k b < 0$$

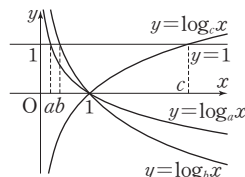
$$\log_k a < \log_k b < \log_k 1$$

$$\text{밑 } k \text{가 } 1 \text{보다 크므로 } a < b < 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a < b < c$$

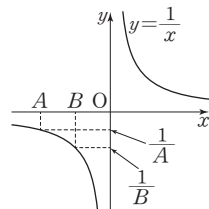
답 ①

다른풀이 세 함수 $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ 의 그래프가 직선 $y = 1$ 과 만나는 점의 x 좌표는 각각 a , b , c 이다.



$$\therefore a < b < c$$

$$\text{참고 } A < B < 0 \text{ 일 때, } \frac{1}{B} < \frac{1}{A} < 0$$



2-2 $a^{x_1} = b^{x_2} = c^{x_3} = k$ ($k > 1$)라 하면

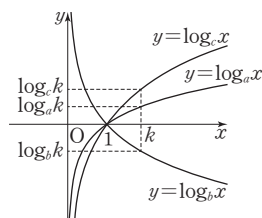
$$x_1 = \log_a k, x_2 = \log_b k, x_3 = \log_c k$$

오른쪽 그림과 같이 $k > 1$ 일 때,

$$\log_b k < \log_a k < \log_c k$$

$$\therefore x_2 < x_1 < x_3$$

답 ③



$$3-1 \quad y = 3^{\log_{10} x} x^{\log_3} - 18 \times 3^{\log x} - 10^{\log 5}$$

$$= 3^{2+\log x} 3^{\log x} - 18 \times 3^{\log x} - 5$$

$$= 3^{2+\log x + \log x} - 18 \times 3^{\log x} - 5$$

$$= 3^{2+2\log x} - 18 \times 3^{\log x} - 5$$

$$= 9 \times (3^{\log x})^2 - 18 \times 3^{\log x} - 5$$

$$3^{\log x} = t \text{ 로 놓으면 } \frac{1}{10} \leq x \leq 10 \text{ 에서}$$

$$\log \frac{1}{10} \leq \log x \leq \log 10, -1 \leq \log x \leq 1, 3^{-1} \leq 3^{\log x} \leq 3^1$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3} \leq t \leq 3 \text{ 이고}$$

$$y = 9t^2 - 18t - 5 = 9(t-1)^2 - 14$$

$$\frac{1}{3} \leq t \leq 3 \text{ 일 때, 함수 } y = 9(t-1)^2 - 14 \text{ 는 } t=3 \text{ 에서 최댓값 } 22,$$

$$t=1 \text{ 에서 최솟값 } -14 \text{ 를 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } M=22, m=-14 \text{ 이므로}$$

$$M-m=22-(-14)=36$$

답 36

$$3-2 \quad y = 2^{\log x} x^{\log 2} - 8 \times 2^{\log \frac{x}{10}}$$

$$= 2^{\log x} 2^{\log x} - 8 \times 2^{\log x - 1}$$

$$= (2^{\log x})^2 - 8 \times 2^{\log x} \times 2^{-1}$$

$$= (2^{\log x})^2 - 4 \times 2^{\log x}$$

$$2^{\log x} = t \text{ 로 놓으면 } 1 \leq x \leq 100 \text{ 에서}$$

$$\log 1 \leq \log x \leq \log 100, 0 \leq \log x \leq 2, 2^0 \leq 2^{\log x} \leq 2^2$$

$$\text{즉, } 1 \leq t \leq 4 \text{ 이고}$$

$$y = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$$

$$1 \leq t \leq 4 \text{ 일 때, 함수 } y = (t-2)^2 - 4 \text{ 는 } t=4 \text{ 에서 최댓값 } 0, t=2 \text{ 에서 최솟값 } -4 \text{ 를 갖는다. } \therefore M=0, m=-4$$

$$t=4 \text{ 일 때, } 2^{\log x} = 4 \text{ 이므로}$$

$$\log x = 2 \quad \therefore x = 100$$

$$t = 2 \text{ 일 때, } 2^{\log x} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\log x = 1 \quad \therefore x = 10$$

즉, 주어진 함수는 $x=100$ 에서 최댓값, $x=10$ 에서 최솟값을 가지므로 $a=100$, $b=10$

$$\therefore a + M - b - m = 100 + 0 - 10 - (-4) = 94 \quad \text{답 ③}$$

4-1 모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + 2x \log a + \log a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (\log a)^2 - \log a < 0, \log a \times (\log a - 1) < 0$$

$$0 < \log a < 1, \log 1 < \log a < \log 10$$

$$\therefore 1 < a < 10$$

따라서 자연수 a 는 2, 3, 4, ..., 9의 8개이다. 답 ①

4-2 $(\log_2 \frac{x}{a})(\log_2 \frac{x^3}{a}) + 3 \geq 0$ 에서

$$(\log_2 x - \log_2 a)(3 \log_2 x - \log_2 a) + 3 \geq 0$$

$$3(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 a \times \log_2 x + (\log_2 a)^2 + 3 \geq 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 t 는 모든 실수이고

$$3t^2 - 4t \log_2 a + (\log_2 a)^2 + 3 \geq 0$$

모든 실수 t 에 대하여 이 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식

$$3t^2 - 4t \log_2 a + (\log_2 a)^2 + 3 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = (-2 \log_2 a)^2 - 3\{(\log_2 a)^2 + 3\} \leq 0$$

$$(\log_2 a)^2 - 9 \leq 0, (\log_2 a + 3)(\log_2 a - 3) \leq 0$$

$$-3 \leq \log_2 a \leq 3, \log_2 \frac{1}{8} \leq \log_2 a \leq \log_2 8$$

$$\therefore \frac{1}{8} \leq a \leq 8$$

따라서 $M=8$, $m=\frac{1}{8}$ 이므로

$$Mm = 8 \times \frac{1}{8} = 1 \quad \text{답 ②}$$

시술형 What & How

p.98~101

1 진수의 조건에서 $k(x+1) > 0$

$$k > 0 \text{ 이므로 } x+1 > 0$$

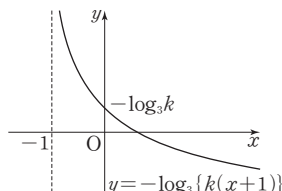
$$\therefore y = -\log_3 \{k(x+1)\} = \log_{\frac{1}{3}} \{k(x+1)\}$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \{k(x+1)\} = \log_{\frac{1}{3}} (x+1) + \log_{\frac{1}{3}} k$$

즉, 함수 $y = -\log_3 \{k(x+1)\}$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 $\log_{\frac{1}{3}} k$ 만큼 평행이동한 것이다. ①

$y = -\log_3 \{k(x+1)\}$ 의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$-\log_3 k \geq 0 \quad \text{..... ②}$$



$$\log_3 k \leq 0, \log_3 k \leq \log_3 1 \quad \therefore k \leq 1$$

$$\text{이때 } k > 0 \text{ 이므로 } 0 < k \leq 1 \quad \text{..... ③}$$

$$\text{따라서 양수 } k \text{의 최댓값은 } 1 \text{이다.} \quad \text{..... ④}$$

답 1

2 진수의 조건에서 $k(x + \frac{1}{2}) > 0$

$$k > 0 \text{ 이므로 } x + \frac{1}{2} > 0$$

$$\therefore y = \log_4 \left\{ k \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\} = \log_4 \left(x + \frac{1}{2} \right) + \log_4 k$$

즉, $y = \log_4 \left\{ k \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\}$ 의 그래프는 $y = \log_4 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\log_4 k$ 만큼 평행이동한 것이다. ①

$y = \log_4 \left\{ k \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\}$ 의 그래프가

제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$\log_4 \frac{k}{2} \leq 0 \quad \text{..... ②}$$

$$\log_4 \frac{k}{2} \leq \log_4 1, \frac{k}{2} \leq 1$$

$$\therefore k \leq 2$$

$$\text{이때 } k > 0 \text{ 이므로 } 0 < k \leq 2 \quad \text{..... ③}$$

$$\text{따라서 양수 } k \text{의 최댓값은 } 2 \text{이다.} \quad \text{..... ④}$$

답 2

채점기준	배점
① 함수 $y = \log_4 \left\{ k \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\}$ 의 그래프가 함수 $y = \log_4 x$ 의 그래프를 어떻게 평행이동한 그래프인지 설명하기	2
② $y = \log_4 \left\{ k \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\}$ 의 그래프가 제2사분면을 지나지 않을 조건 찾기	1
③ k 의 값의 범위 구하기	2
④ k 의 최댓값 구하기	1

3 진수의 조건에서 $k > 0$ ㉠

방정식 $(\log k - 1)x^2 - 3(\log k - 1)x + \log k = 0$ 이 이차방정식이므로

$$\log k - 1 \neq 0$$

$$\log k \neq 1 \quad \therefore k \neq 10 \quad \text{..... ㉡} \quad \text{..... ②}$$

이차방정식 $(\log k - 1)x^2 - 3(\log k - 1)x + \log k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = \{ -3(\log k - 1) \}^2 - 4(\log k - 1)\log k > 0$$

$$5(\log k)^2 - 14\log k + 9 > 0$$

$$\log k = t \text{로 놓으면 } 5t^2 - 14t + 9 > 0$$

$$(5t - 9)(t - 1) > 0 \quad \therefore t < \frac{9}{5} \text{ 또는 } t > 1$$

$$\text{즉, } \log k < 1 \text{ 또는 } \log k > \frac{9}{5} \text{ 이므로}$$

$$\log k < \log 10 \text{ 또는 } \log k > \log 10^{\frac{9}{5}}$$

$$\therefore k < 10 \text{ 또는 } k > 10^{\frac{9}{5}} \quad \text{..... ㉢} \quad \text{..... ③}$$

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$$0 < k < 10 \text{ 또는 } k > 10^{\frac{9}{5}} \quad \dots\dots ㉣$$

따라서 $m=10, n=\frac{9}{5}$ 이므로

$$mn=10 \times \frac{9}{5}=18 \quad \dots\dots ㉤$$

답 18

4 진수의 조건에서 $a > 0$ ㉠ ㉡

방정식 $(3+\log_2 a)x^2+2(1+\log_2 a)x+1=0$ 이 이차방정식이므로

$$3+\log_2 a \neq 0, \log_2 a \neq -3 \quad \therefore a \neq \frac{1}{8} \quad \dots\dots ㉢ \quad \dots\dots ㉥$$

이차방정식 $(3+\log_2 a)x^2+2(1+\log_2 a)x+1=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(1+\log_2 a)^2-(3+\log_2 a) \times 1 > 0$$

$$(\log_2 a)^2+\log_2 a-2 > 0$$

$$\log_2 a=t \text{로 놓으면 } t^2+t-2 > 0$$

$$(t+2)(t-1) > 0 \quad \therefore t < -2 \text{ 또는 } t > 1$$

즉, $\log_2 a < -2$ 또는 $\log_2 a > 1$ 이므로

$$\log_2 a < \log_2 2^{-2} \text{ 또는 } \log_2 a > \log_2 2$$

$$\therefore a < \frac{1}{4} \text{ 또는 } a > 2 \quad \dots\dots ㉦ \quad \dots\dots ㉧$$

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$$0 < a < \frac{1}{8} \text{ 또는 } \frac{1}{8} < a < \frac{1}{4} \text{ 또는 } a > 2 \quad \dots\dots ㉨$$

따라서 $m=\frac{1}{4}, n=2$ 이므로

$$\frac{n}{m}=\frac{2}{\frac{1}{4}}=8 \quad \dots\dots ㉩$$

답 8

채점기준	배점
㉠ 진수의 조건에서 a 의 값의 범위 구하기	1
㉡ 이차방정식일 조건에서 a 의 값의 조건 구하기	1
㉢ 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 a 의 값의 범위 구하기	2
㉣ ㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 a 의 값의 범위 구하기	2
㉤ $\frac{n}{m}$ 의 값 구하기	1

5 이 기업의 올해 부채와 자기 자본의 비율이 8:1이므로 올해 부채를 $8k$, 자기 자본을 $k(k > 0)$ 라 하면

n 년 후 부채는

$$8k\left(1-\frac{10}{100}\right)^n=8k \times \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

n 년 후 자기 자본은

$$k\left(1+\frac{20}{100}\right)^n=k \times \left(\frac{6}{5}\right)^n \quad \dots\dots ㉪$$

n 년 후 자기 자본이 부채보다 커진다고 하면

$$k \times \left(\frac{6}{5}\right)^n > 8k \times \left(\frac{9}{10}\right)^n, \left(\frac{6}{5}\right)^n > 8 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

$$\left(\frac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{10}}\right)^n > 8, \left(\frac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{10}}\right)^n > 8 \quad \therefore \left(\frac{4}{3}\right)^n > 8$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log\left(\frac{4}{3}\right)^n > \log 8, n \log \frac{4}{3} > 3 \log 2$$

$$n(2 \log 2 - \log 3) > 3 \log 2$$

$$n(2 \times 0.301 - 0.478) > 3 \times 0.301$$

$$0.124n > 0.903$$

$$\therefore n > \frac{0.903}{0.124} = 7.2\dots \quad \dots\dots ㉫$$

따라서 이 기업의 자기 자본이 부채보다 처음으로 커지는 것은 올해로부터 8년 후이다.

$$\therefore N=8 \quad \dots\dots ㉬$$

답 8

6 이산화탄소의 농도가 10분마다 10%씩 증가하므로 n 분 후의 이산화탄소의 농도는

$$500 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^{\frac{n}{10}} = 500 \times 1.1^{\frac{n}{10}} \quad \dots\dots ㉭$$

n 분 후 이산화탄소의 농도가 2000 ppm보다 커진다고 하면

$$500 \times 1.1^{\frac{n}{10}} > 2000 \quad \therefore 1.1^{\frac{n}{10}} > 4$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\frac{n}{10} \log 1.1 > \log 4, \frac{n}{10} \log 1.1 > 2 \log 2$$

$$n \log 1.1 > 20 \log 2, 0.0414n > 20 \times 0.301$$

$$\therefore n > \frac{6.02}{0.0414} = 145.4\dots \quad \dots\dots ㉮$$

따라서 이산화탄소의 농도가 처음으로 2000 ppm보다 커지는 것은 146분 후이므로

$$N=146 \quad \dots\dots ㉯$$

답 146

채점기준	배점
㉭ n 분 후 이산화탄소의 농도 구하기	2
㉮ 부등식을 세우고 풀기	3
㉯ 자연수 N 의 값 구하기	1

7 $A(k, \log_3 k), B(k, \log_a k), C(k, 0)$ 이므로

$$\overline{AC} = \log_3 k, \overline{BC} = -\log_a k \quad \dots\dots ㉺$$

이때 $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 2$ 에서 $\overline{BC} = 2\overline{AC}$ 이므로

$$-\log_a k = 2 \log_3 k$$

$$\log_a k = \log_{\frac{1}{3}} k, a^{-1} = 3^{\frac{1}{2}} (\because k \neq 1)$$

$$\therefore a = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots ㉻$$

$$a^n < \frac{1}{100} \text{에서 } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n < \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{(\sqrt{3})^n} < \frac{1}{100} \quad \therefore (\sqrt{3})^n > 100$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log(\sqrt{3})^n > \log 100$$

$$n \log \sqrt{3} > 2, \frac{1}{2} n \log 3 > 2$$

$$\therefore n > \frac{4}{\log 3} = \frac{4}{0.4771} = 8.3 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 9이다.

..... ③

답 9

- 8 $A(\alpha, \log_2 \alpha)$, $B(\alpha, \log_{\frac{1}{4}} \alpha)$, $C(\alpha, 0)$,
 $D(\beta, \log_2 \beta)$, $E(\beta, \log_{\frac{1}{4}} \beta)$, $F(\beta, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{BA} &= \log_{\frac{1}{4}} \alpha - \log_2 \alpha = \log_{2^{-2}} \alpha - \log_2 \alpha \\ &= -\frac{1}{2} \log_2 \alpha - \log_2 \alpha = -\frac{3}{2} \log_2 \alpha = \log_2 \alpha^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{DE} &= \log_2 \beta - \log_{\frac{1}{4}} \beta = \log_2 \beta - \log_{2^{-2}} \beta \\ &= \log_2 \beta - \left(-\frac{1}{2} \log_2 \beta\right) = \frac{3}{2} \log_2 \beta = \log_2 \beta^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

..... ①

이때 $\overline{BA} : \overline{DE} = 2 : 1$ 에서 $\overline{BA} = 2\overline{DE}$ 이므로

$$\log_2 \alpha^{-\frac{3}{2}} = 2 \log_2 \beta^{\frac{3}{2}}, \log_2 \alpha^{-\frac{3}{2}} = \log_2 (\beta^{\frac{3}{2}})^2$$

$$\log_2 \alpha^{-\frac{3}{2}} = \log_2 \beta^3, \alpha^{-\frac{3}{2}} = \beta^3$$

$$\therefore \alpha = (\beta^3)^{-\frac{2}{3}} = \beta^{-2} = \frac{1}{\beta^2} \quad \dots\dots ⑦$$

..... ②

한편, $\overline{OC} : \overline{CF} = 1 : 7$ 에서 $7\overline{OC} = \overline{CF}$ 이므로

$$7\alpha = \beta - \alpha \quad \therefore 8\alpha = \beta \quad \dots\dots ⑧$$

..... ③

⑦을 ⑧에 대입하면

$$\frac{8}{\beta^2} = \beta, \beta^3 = 8 \quad \therefore \beta = 2$$

$$\text{⑦에서 } \alpha = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$10\alpha\beta = 10 \times \frac{1}{4} \times 2 = 5$$

..... ④

답 5

채점기준	배점
① $\overline{BA}$, $\overline{DE}$ 의 길이 구하기	2
② $\overline{BA} : \overline{DE} = 2 : 1$ 임을 이용하여 α, β 사이의 관계식 구하기	2
③ $\overline{OC} : \overline{CF} = 1 : 7$ 임을 이용하여 α, β 사이의 관계식 구하기	2
④ α, β 의 값과 $10\alpha\beta$ 의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.102~105

- 01 ① $-x+2 > 0$ 에서 $x < 2$

즉, 정의역은 $\{x | x < 2\}$ 이다.

- ② 치역은 실수 전체의 집합이다.

- ③ $x=1$ 일 때,

$$y = \log_5(-1+2) - 1 = \log_5 1 - 1 = 0 - 1 = -1$$

이므로 그래프는 점 $(1, -1)$ 을 지난다.

- ④ $-x+2=0$ 에서 $x=2$

즉, 그래프의 점근선은 직선 $x=2$ 이다.

- ⑤ $y = \log_5(-x+2) - 1 = \log_5\{-(x-2)\} - 1$

이므로 $y = \log_5(-x+2) - 1$ 의

그래프는 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 y

축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의

방향으로 2만큼, y 축의 방향으로

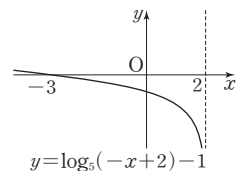
-1 만큼 평행이동한 것이다.

즉, 함수 $y = \log_5(-x+2) - 1$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값

은 감소하는 함수이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④



- 02 직선 $y=ax+b$ 의 기울기가 음수이고 y 절편이 1보다 크므로
 $a < 0, b > 1$

함수 $y = \log_b ax$ 의 그래프는

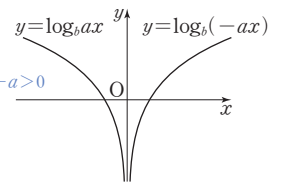
$y = \log_b(-ax)$ 의 그래프를 y 축

에 대하여 대칭이동한 것이므로

$y = \log_b ax$ 의 그래프의 개형으로

알맞은 것은 ⑤이다.

답 ⑤



참고 $a < 0$ 이므로 $-ax > 0$ 에서 $x > 0$

따라서 함수 $y = \log_b(-ax)$ 의 정의역은 $\{x | x > 0\}$

또, 밑 b 가 1보다 크므로 함수 $y = \log_b(-ax)$ 는 x 의 값이 증가

하면 y 의 값도 증가하는 함수이다.

- 03 ㄱ. $y = \log_2(x+1)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축
 의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y = \log_2 x^3 = 3 \log_2 x$ 이므로 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행
 이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

ㄷ. $y = \log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = \log_2 x + 2$ 이므로 함수
 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
 이다.

ㄹ. $y = 2^{2x} + 1 = 4^x + 1$ 이므로 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행
 이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

ㅁ. $y = \log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$ 이므로 함수 $y = \log_2 x$ 의
 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㅂ. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = (2^{-1})^{x-1} = 2^{-(x-1)}$ 이므로 함수 $y = \log_2 x$ 의
 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y 축에 대하여
 대칭이동하고 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 겹칠 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ의 4개이다.

답 ③

- 04 $(p, q) \in A$ 이므로 $q = \log_a p$

$$\therefore \log_a ap = \log_a a + \log_a p = 1 + \log_a p = 1 + q$$

$$\therefore (ap, 1+q) \in A$$

$$\therefore \log_a p^8 = 8 \log_a p = 8q$$

$$\therefore (p^8, 8q) \in A$$

$$\therefore \log_a \frac{p}{10} = \log_a p - \log_a 10 = q - \log_a 10 \neq q - 1$$

$$\therefore \left(\frac{p}{10}, q-1\right) \notin A$$

$$\therefore \log_a \frac{1}{p} = \log_a p^{-1} = -\log_a p = -q \neq \frac{1}{q}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \notin A$$

따라서 집합 A의 원소인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

참고 $(p, q) \in A$ 이므로 점 (p, q) 는 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프 위의 점이다.

05 주어진 그래프에서 점근선은 직선 $x = -3$ 이고, 함수

$y = \log_3(x+a) + b$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x = -a$ 이므로

$$-a = -3 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore y = \log_3(x+3) + b$$

이 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \log_3 3 + b, 2 = 1 + b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a + b = 3 + 1 = 4$$

답 ②

06 함수 $y = \log_2(x-a)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x = a$ 이므로

두 점 A, B의 x좌표는 a이고

$$A\left(a, \log_2 \frac{a}{4}\right), B(a, -\log_2 a)$$

$$\therefore \overline{AB} = \log_2 \frac{a}{4} - (-\log_2 a) = \log_2 a - \log_2 4 + \log_2 a$$

$$= 2\log_2 a - 2$$

이때 $\overline{AB} = 4$ 이므로 $2\log_2 a - 2 = 4$

$$2\log_2 a = 6, \log_2 a = 3$$

$$\therefore a = 2^3 = 8$$

답 ③

07 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 4이므로 두 점 A, D의 y좌표는 4이다. 이때 점 D는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로 점 D의 x좌표는 $4 = \log_2 x$ 에서

$$x = 2^4 = 16$$

$$\therefore D(16, 4), C(16, 0)$$

이때 $\overline{BC} = 4$ 이므로 점 B의 x좌표는

$$16 - 4 = 12$$

점 E의 x좌표도 12이고, 점 E는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로 $E(12, \log_2 12)$

따라서 정사각형 EFGH의 한 변의 길이는

$$\overline{EB} = \log_2 12 = \log_2 (2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3$$

답 ④

08 $y = a^{x-p}$ 에서 $\log_a y = x - p \quad \therefore x = \log_a y + p$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y = \log_a x + p$$

즉, 함수 $y = a^{x-p}$ 는 함수

$y = \log_a x + p$ 와 역함수 관계이

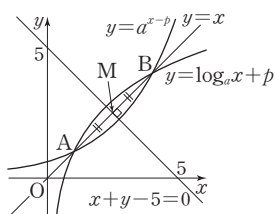
므로 두 함수의 그래프는 오른쪽

그림과 같이 직선 $y = x$ 에 대하

여 대칭이고, 두 점 A, B는 직선

$y = x$ 위의 점이다.

따라서 $A(m, m), B(n, n)$ ($m < n$)이라 하면 $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ 에서



$$\overline{AB}^2 = 18 \text{이므로}$$

$$(n-m)^2 + (n-m)^2 = 18, 2(n-m)^2 = 18$$

$$(n-m)^2 = 9 \quad \therefore n-m = 3 (\because n-m > 0) \quad \dots\dots ㉑$$

한편, 직선 $x+y-5=0$ 이 선분 AB의 수직이등분선이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M은 직선 $x+y-5=0$ 위의

점이다. 이때 $M\left(\frac{m+n}{2}, \frac{m+n}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{m+n}{2} + \frac{m+n}{2} - 5 = 0$$

$$\therefore m+n-5=0$$

$\dots\dots ㉒$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면 $m=1, n=4$

$$\therefore A(1, 1), B(4, 4)$$

두 점 A, B가 함수 $y = a^{x-p}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$1 = a^{1-p}, 1-p=0 \quad \therefore p=1$$

$$4 = a^{4-p} = a^{4-1} \quad \therefore a^3 = 4$$

$$\therefore a^3 p = 4 \times 1 = 4$$

답 ②

09 $a > 2$ 이므로 $a \leq x < a^2$ 에서

$$\log_a a \leq \log_a x < \log_a a^2 \quad \therefore 1 \leq \log_a x < 2$$

$\log_a x = t$ 로 놓으면 $1 \leq t < 2$ 이고

$$A = (\log_a x)^2 = t^2$$

$$B = \log_a x^2 = 2\log_a x = 2t$$

$$C = \log_a (\log_a x) = \log_a t$$

이므로

$$A - B = t^2 - 2t = t(t-2) < 0 (\because 1 \leq t < 2)$$

$$\therefore A < B$$

$\dots\dots ㉑$

$$\text{이때 } 1 \leq t^2 < 4 \text{이므로 } 1 \leq A < 4 \quad \dots\dots ㉒$$

또, $1 \leq t < 2$ 에서 $\log_a 1 \leq \log_a t < \log_a 2$, 즉

$$0 \leq \log_a t < \log_a 2 \text{이고}$$

$a > 2$ 에서 $\log_a a > \log_a 2$, 즉 $\log_a 2 < 1$ 이므로

$$0 \leq \log_a t < \log_a 2 < 1$$

$$\therefore 0 \leq C < \log_a 2 < 1$$

$\dots\dots ㉓$

㉑, ㉒, ㉓에서 $C < A < B$

답 ④

10 $y = \log_3(3^x + 8) - \log_{\frac{1}{3}}(3^{-x} + 8)$

$$= \log_3(3^x + 8) - \log_{3^{-1}}(3^{-x} + 8)$$

$$= \log_3(3^x + 8) + \log_3(3^{-x} + 8)$$

$$= \log_3(3^x + 8)(3^{-x} + 8)$$

$$= \log_3\{1 + 8(3^x + 3^{-x}) + 64\}$$

$$= \log_3\{8(3^x + 3^{-x}) + 65\}$$

$f(x) = 8(3^x + 3^{-x}) + 65$ 라 하면 $y = \log_3 f(x)$ 이고

밑 3이 1보다 크므로 함수 $y = \log_3 f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

$3^x > 0, 3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(x) = 8(3^x + 3^{-x}) + 65$$

$$\geq 8 \times 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} + 65$$

$$= 8 \times 2 + 65 = 81$$

(단, 등호는 $3^x = 3^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 81이므로 함수 $y=\log_3 f(x)$ 의 최솟값은

$$\log_3 81=4 \quad \text{답 ③}$$

참고 두 함수 $y=3^x$, $y=3^{-x}$ 의 그래프의 교점은 점 $(0, 1)$ 뿐이므로 $3^x=3^{-x}$ 을 만족시키는 x 의 값은 $x=0$ 뿐이다.

11 $\log_2 \{\log_3 (\log_4 x)\}=0$ 에서

$$\log_3 (\log_4 x)=2^0=1$$

$$\log_4 x=3^1=3 \quad \therefore x=4^3=64 \quad \text{답 ④}$$

12 두 점 P, Q의 x 좌표의 차가 2이므로 점 Q의 x 좌표를 a ($a>0$)라 하면 점 P의 x 좌표는 $a+2$

점 Q는 두 함수 $y=\log_2(-x+k)$, $y=-\log_2 x$ 의 그래프의 교점이므로

$$\log_2(-a+k)=-\log_2 a$$

$$\log_2(-a+k)=\log_2 a^{-1}, \log_2(-a+k)=\log_2 \frac{1}{a}$$

$$\therefore -a+k=\frac{1}{a} \quad \dots\dots ㉑$$

또, 점 P는 두 함수 $y=\log_2(-x+k)$, $y=\log_2 x$ 의 그래프의 교점이므로

$$\log_2 \{-(a+2)+k\}=\log_2(a+2)$$

$$-(a+2)+k=a+2 \quad \therefore k=2a+4 \quad \dots\dots ㉒$$

$$\text{㉑을 ㉒에 대입하면 } -a+(2a+4)=\frac{1}{a}$$

$$a+4=\frac{1}{a}, a^2+4a=1$$

$$a^2+4a-1=0 \quad \therefore a=-2+\sqrt{5} \quad (\because a>0)$$

따라서 ㉒에서

$$k=2 \times (-2+\sqrt{5})+4=2\sqrt{5} \quad \text{답 ③}$$

13 진수의 조건에서 $5x+6>0$

$$5x>-6 \quad \therefore x>-\frac{6}{5} \quad \dots\dots ㉑$$

$$\text{밑의 조건에서 } x>0, x \neq 1 \quad \dots\dots ㉒$$

$$\log_3(5x+6) \geq \frac{2}{\log_3 3} \text{에서}$$

$$\log_3(5x+6) \geq 2\log_3 x, \log_3(5x+6) \geq \log_3 x^2$$

$$\text{밑 3이 1보다 크므로 } 5x+6 \geq x^2$$

$$x^2-5x-6 \leq 0, (x+1)(x-6) \leq 0$$

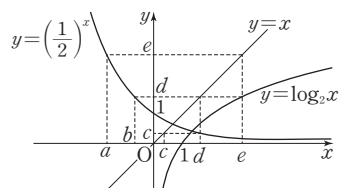
$$\therefore -1 \leq x \leq 6 \quad \dots\dots ㉓$$

㉑, ㉒, ㉓의 공통부분을 구하면

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x \leq 6$$

따라서 정수 x 는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다. 답 ①

14



ㄱ. 점 (d, c) 는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d=c \quad (\text{참})$$

ㄴ. 점 (a, e) 는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$e=\left(\frac{1}{2}\right)^a \quad \therefore a=\log_{\frac{1}{2}} e=-\log_2 e$$

점 (e, d) 는 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$d=\log_2 e$$

$$\therefore a+d=-\log_2 e+\log_2 e=0 \quad (\text{참})$$

ㄷ. ㄴ에서 $a+d=0$ 이므로 $a=-d$

$$\neg \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^d=2^{-d}=c \text{이므로 } -d=\log_2 c$$

$$\therefore a=\log_2 c$$

이때 그림에서 $a < b$ 이므로

$$\log_2 c < b \quad (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

15 $A(a, \log_2 a)$ ($a>1$)라 하면 $\overline{AB}=2$ 이므로

$$B(a+2, 2^{a-2}), C(a+2, \log_2(a+2))$$

$$\overline{CD}=1 \text{이므로}$$

$$D(a+3, 2^{a-1})$$

이때 두 점 A, B의 y 좌표가 같으므로

$$\log_2 a=2^{a-2} \quad \dots\dots ㉑$$

또, 두 점 C, D의 y 좌표가 같으므로

$$\log_2(a+2)=2^{a-1} \quad \dots\dots ㉒$$

㉑의 양변에 2를 곱하면

$$2\log_2 a=2^{a-1}$$

이므로 ㉒에서

$$\log_2(a+2)=2\log_2 a, \log_2(a+2)=\log_2 a^2$$

$$a+2=a^2, a^2-a-2=0$$

$$(a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>1)$$

따라서 $A(2, 1)$, $D(5, 2)$ 이므로

$$\overline{AD}=\sqrt{(5-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$$

답 ①

16 진수의 조건에서 $f(x)>0$ 이므로

$$x<2 \text{ 또는 } x>4 \quad \dots\dots ㉑$$

$$\log_{\frac{1}{5}} f(x) \geq -1 \text{에서 } \log_{\frac{1}{5}} f(x) \geq \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$$

밑 $\frac{1}{5}$ 이 1보다 작으므로

$$f(x) \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \quad \therefore f(x) \leq 5$$

주어진 그래프에서 $f(x) \leq 5$ 인 x 의 값의 범위는

$$0 \leq x \leq 6 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒의 공통부분을 구하면

$$0 \leq x < 2 \text{ 또는 } 4 < x \leq 6$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 5, 6이므로 구하는 합은

$$0+1+5+6=12$$

답 ②

- 17 농산물의 원산지 생산 가격을 A 원이라 하고, 유통 과정을 한 번 거칠 때 농산물의 가격이 r 배로 오른다고 하면 유통 과정을 7번 거친 농산물의 소비자 가격이 2,244원이므로

$$Ar^7 = 2,244A, r^7 = 2,244 \quad \therefore r = 2,244^{\frac{1}{7}}$$

유통 과정을 n 번 거쳤을 때 농산물의 소비자 가격이 원산지 생산 가격의 2배보다 크지 않다고 하면

$$A(2,244^{\frac{1}{7}})^n \leq 2A$$

$$\therefore 2,244^{\frac{n}{7}} \leq 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 2,244^{\frac{n}{7}} \leq \log 2$$

$$\frac{n}{7} \log 2,244 \leq \log 2$$

$$\therefore n \leq \frac{7 \log 2}{\log 2,244} = \frac{7 \times 0,30}{0,35} = 6$$

따라서 유통 과정을 최대 6번까지만 거쳐야 한다. 답 ⑤

- 18 $P(k, \log_2 k), Q(k, \log_3 k)$ 이므로

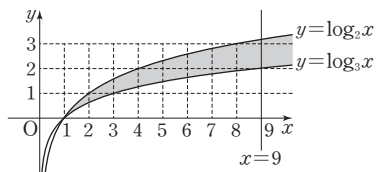
$$\overline{PQ} = \log_2 k - \log_3 k \quad \dots\dots ①$$

$$\text{이때 } \overline{PQ} = \log_2 \frac{9}{4} \text{ 이므로}$$

$$\log_2 k - \log_3 k = \log_2 \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\log_k 2} - \frac{1}{\log_k 3} = \frac{\log_k \frac{9}{4}}{\log_k 2}$$

$$\frac{\log_k 3 - \log_k 2}{\log_k 2 \times \log_k 3} = \frac{\log_k \left(\frac{3}{2}\right)^2}{\log_k 2} \cdot \frac{\log_k \frac{3}{2}}{\log_k 2 \times \log_k 3} = \frac{2 \log_k \frac{3}{2}}{\log_k 2}$$

$$\frac{1}{\log_k 3} = 2, \log_3 k = 2 \quad \therefore k = 9 \quad \dots\dots ②$$



따라서 두 함수 $y = \log_2 x, y = \log_3 x$ 의 그래프와 직선 $x=9$ 로 둘러싸인 영역 또는 그 경계에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은

$x=1$ 일 때, $y=0$ 이므로 1개

$x=2$ 일 때, $y=1$ 이므로 1개

$x=3$ 일 때, $y=1$ 이므로 1개

$x=4$ 일 때, $y=2$ 이므로 1개

$x=5, 6, 7$ 일 때, $y=2$ 이므로 3개

$x=8, 9$ 일 때, $y=2, 3$ 이므로 4개 ③

따라서 구하는 점의 개수는

$$1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 4 = 11 \quad \dots\dots ④$$

답 11

채점기준	배점
① $\overline{PQ}$ 의 길이를 k 에 대한 식으로 나타내기	1
② k 의 값 구하기	2
③ x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수 세기	3
④ 모든 점의 개수 구하기	1

- 19 두 점 $A(2, 3), B(4, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{1-3}{4-2}(x-2) \quad \therefore y = -x + 5$$

점 P 가 이 직선 위의 점이므로

$$P(t, -t+5) \quad (2 < t < 4) \quad \dots\dots ①$$

라 하자.

점 H 의 y 좌표가 $-t+5$ 이므로 점 H 의 x 좌표는

$$-t+5 = \log_2 x - 1 \text{에서}$$

$$-t+6 = \log_2 x \quad \therefore x = 2^{-t+6}$$

$$\therefore \overline{PH} = 2^{-t+6} - t \quad \dots\dots ②$$

또, 점 K 의 x 좌표가 t 이므로 $K(t, 2^t - 1)$

$$\therefore \overline{PK} = 2^t - 1 - (-t+5) = 2^t + t - 6 \quad \dots\dots ③$$

$2^{-t+6} > 0, 2^t > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PH} + \overline{PK} = (2^{-t+6} - t) + (2^t + t - 6)$$

$$= 2^{-t+6} + 2^t - 6$$

$$\geq 2\sqrt{2^{-t+6} \times 2^t} - 6$$

$$= 2\sqrt{2^6} - 6$$

$$= 2 \times 2^3 - 6 = 10$$

(단, 등호는 $2^{-t+6} = 2^t$, 즉 $t=3$ 일 때 성립)

따라서 $\overline{PH} + \overline{PK}$ 의 최솟값은 10이다. ④

답 10

채점기준	배점
① 직선 AB의 방정식을 구하고 점 P의 좌표를 t 를 이용하여 나타내기	2
② $\overline{PH}$ 의 길이를 t 에 대한 식으로 나타내기	2
③ $\overline{PK}$ 의 길이를 t 에 대한 식으로 나타내기	1
④ $\overline{PH} + \overline{PK}$ 의 최솟값 구하기	2

실전 문제 | 2회

p.106~109

- 01 $(f^{-1} \circ f^{-1})(2) = f^{-1}(f^{-1}(2)) \quad \dots\dots ㉠$

$$f^{-1}(2) = k \quad (k \geq 0) \text{라 하면 } f(k) = 2$$

$$\log_3\left(\frac{1}{2}k^2 + 1\right) = 2, \frac{1}{2}k^2 + 1 = 3^2$$

$$\frac{1}{2}k^2 = 8, k^2 = 16 \quad \therefore k = 4 \quad (\because k \geq 0)$$

즉, $f^{-1}(2) = 4$ 이므로 ㉠에서

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(2) = f^{-1}(f^{-1}(2)) = f^{-1}(4) \quad \dots\dots ㉡$$

$$f^{-1}(4) = l \quad (l \geq 0) \text{이라 하면 } f(l) = 4$$

$$\log_3\left(\frac{1}{2}l^2 + 1\right) = 4, \frac{1}{2}l^2 + 1 = 3^4$$

$$\frac{1}{2}l^2 = 80, l^2 = 160 \quad \therefore l = 4\sqrt{10} \quad (\because l \geq 0)$$

즉, $f^{-1}(4) = 4\sqrt{10}$ 이므로 ㉡에서

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(2) = f^{-1}(4) = 4\sqrt{10}$$

답 ③

참고 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad (x \geq 0)$ 이라 하면

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 \geq 1 \quad \therefore g(x) \geq 1$$

이때 $z=g(x)$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 집합 $\{x|x \geq 0\}$ 에서 집합 $\{z|z \geq 1\}$ 로의 일대일 대응이다.

$h(z)=\log_3 z$ ($z \geq 1$)라 하면

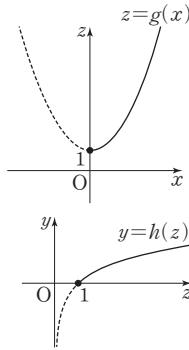
$$\log_3 z \geq \log_3 1 \quad \therefore h(z) \geq 0$$

이때 $y=h(z)$ 라 하면 함수 $h(z)$ 는 집합 $\{z|z \geq 1\}$ 에서 집합 $\{y|y \geq 0\}$ 으로의 일대일 대응이다.

따라서 함수

$$f(x)=\log_3\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)=\log_3 g(x)=h(g(x))$$

는 집합 $\{x|x \geq 0\}$ 에서 집합 $\{y|y \geq 0\}$ 으로의 일대일 대응이므로 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재한다.



02 함수 $y=\log_2 x$ 의 정의역은 $\{x|x > 0\}$

ㄱ. 진수의 조건에서 $\frac{1}{x} > 0$, 즉 $x > 0$ 이므로 함수 $y=-\log_2 \frac{1}{x}$

의 정의역은 $\{x|x > 0\}$ 이고, $x > 0$ 인 x 에 대하여

$$y=-\log_2 \frac{1}{x}=-\log_2 x^{-1}=\log_2 x$$

정의역이 서로 같고 정의역의 각 원소에 대한 함수값이 모두

같으므로 함수 $y=-\log_2 \frac{1}{x}$ 은 함수 $y=\log_2 x$ 와 같은 함수

이다.

ㄴ. 진수의 조건에서 $-x > 0$, 즉 $x < 0$ 이므로 함수

$$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$$
의 정의역은 $\{x|x < 0\}$

정의역이 서로 같지 않으므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 는 함수 $y=\log_2 x$ 와 같은 함수가 아니다.

ㄷ. 진수의 조건에서 $x > 0$ 이므로 함수 $y=-3\log_{\frac{1}{8}} x$ 의 정의역은 $\{x|x > 0\}$ 이고, $x > 0$ 인 x 에 대하여

$$y=-3\log_{\frac{1}{8}} x=-3\log_{2^{-3}} x=\frac{-3}{-3}\log_2 x=\log_2 x$$

정의역이 서로 같고 정의역의 각 원소에 대한 함수값이 모두 같으므로 함수 $y=-3\log_{\frac{1}{8}} x$ 는 함수 $y=\log_2 x$ 와 같은 함수이다.

ㄹ. 진수의 조건에서 $x^2 > 0$, 즉 $x \neq 0$ 이므로 함수 $y=\log_4 x^2$ 의 정의역은 $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$

정의역이 서로 같지 않으므로 함수 $y=\log_4 x^2$ 은 함수 $y=\log_2 x$ 와 같은 함수가 아니다.

따라서 함수 $y=\log_2 x$ 와 같은 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

03 ㄱ. 진수의 조건에서 $|x|-4 > 0$

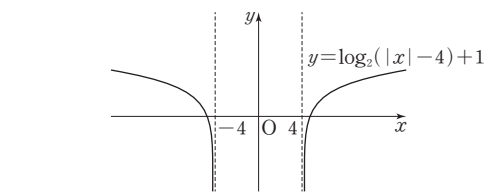
$$|x| > 4 \quad \therefore x < -4 \text{ 또는 } x > 4$$

따라서 정의역은 $\{x|x < -4 \text{ 또는 } x > 4\}$ (거짓)

$$\text{ㄴ. } y=\log_2(|x|-4)+1$$

$$=\begin{cases} \log_2(x-4)+1 & (x > 4) \\ \log_2(-x-4)+1 & (x < -4) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=\log_2(|x|-4)+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\log_2(|x|-4)+1$ 의 치역은 실수 전체의 집합이다. (참)

ㄷ. $y=\log_2(|x|-4)+1$ 의 그래프는 직선 $x=-4$,

$$x=-3, x=-2, \dots, x=4 \text{와 만나지 않으므로 함수}$$

$y=\log_2(|x|-4)+1$ 의 그래프가 직선 $x=a$ 와 만나지 않

도록 하는 정수 a 는 $-4, -3, -2, \dots, 4$ 의 9개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

04 A(1, 0)이고, 두 점 B, C의 x 좌표가 2^k 이므로

$$\text{점 B의 } y\text{좌표는 } \log_2 2^k = k \quad \therefore B(2^k, k)$$

$$\text{점 C의 } y\text{좌표는 } \log_{\frac{1}{2}} 2^k = \log_{2^{-1}} 2^k = -k \quad \therefore C(2^k, -k)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times (2^k - 1) \times \{k - (-k)\}$$

$$=k(2^k - 1)$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 $3k$ 이므로

$$k(2^k - 1) = 3k, \quad 2^k - 1 = 3 \quad (\because k > 0)$$

$$2^k = 4 \quad \therefore k = 2$$

답 ③

05 오른쪽 그림에서 $\log_3 b = a$,

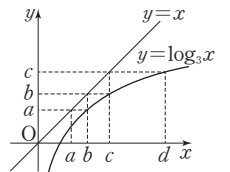
$$\log_3 d = c \text{이므로}$$

$$3^a = b, \quad 3^c = d$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{a-c} = (3^{-1})^{a-c} = 3^{c-a}$$

$$= \frac{3^c}{3^a} = \frac{d}{b}$$

답 ②



06 점 P는 $\overline{AB}$ 를 1:5로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{1 \times 18 + 5 \times 0}{1+5}, \frac{1 \times 0 + 5 \times 18}{1+5}\right) \quad \therefore P(3, 15)$$

점 P가 함수 $y=a^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$15 = a^3 \quad \therefore a^6 = (a^3)^2 = 15^2 = 225$$

또, 점 Q는 $\overline{AB}$ 를 4:2, 즉 2:1로 내분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{2 \times 18 + 1 \times 0}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 18}{2+1}\right) \quad \therefore Q(12, 6)$$

점 Q가 함수 $y=\log_b x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$6 = \log_b 12 \quad \therefore b^6 = 12$$

$$\therefore a^6 + b^6 = 225 + 12 = 237$$

답 ③

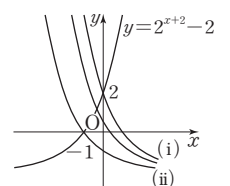
07 함수 $y=2^{x+2}-2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1, 0), (0, 2)$ 를 지난다.

이때 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)$ 의 그래프가

함수 $y=2^{x+2}-2$ 의 그래프와 제2사분

면에서 만나려면 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)$ 의 그래프가



(i) 점 (0, 2)를 지날 때

$$2 = \log_{\frac{1}{3}} a \quad \therefore a = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

(ii) 점 (-1, 0)을 지날 때

$$0 = \log_{\frac{1}{3}}(-1+a), \quad -1+a=1 \quad \therefore a=2$$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{9} < a < 2$ 이므로 $m = \frac{1}{9}, n = 2$

$$\therefore m+n = \frac{1}{9} + 2 = \frac{19}{9}$$

답 ②

08 A(1, 0), Q(a, 0), R(0, b)이므로

$$\triangle AQP = \frac{1}{2}(a-1)b$$

$$\square OAPR = \frac{1}{2}(a+1)b$$

이때 $\square OAPR : \triangle AQP = 9 : 7$ 에서 $7\square OAPR = 9\triangle AQP$ 이므로

$$7 \times \frac{1}{2}(a+1)b = 9 \times \frac{1}{2}(a-1)b$$

$$7(a+1) = 9(a-1) \quad (\because b > 0), \quad 7a+7 = 9a-9$$

$$-2a = -16 \quad \therefore a = 8$$

점 P(8, b)는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b = \log_2 8 = 3$$

$$\therefore a+b = 8+3 = 11$$

답 ②

09 A(0, 1)이므로 $\overline{AC} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\therefore \overline{BD} = \overline{AC} = \sqrt{2}$$

또, 점 B의 x좌표는 $0 = \log_2(x-3)$ 에서

$$x-3=1 \quad \therefore x=4$$

$$\therefore B(4, 0)$$

한편, 함수 $y = \log_2(x-3)$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이므로 두 점 A, C는 각각

$$A(0, 1) \rightarrow A'(1, 0) \rightarrow A''(4, 0) \quad \text{점 B}$$

$$C(1, 2) \rightarrow C'(2, 1) \rightarrow C''(5, 1) \quad \text{곡선 } y = \log_2(x-3) \text{ 위의 점}$$

과 같이 이동한다. 이때 점 B가 점 A'과 일치하고, 곡선

$y = \log_2(x-3)$ 위의 점 D에 대하여

$\overline{BD} = \overline{AC} = \overline{A''C''}$ 이므로 점 D는 점 C''과 일치한다.

$$\therefore D(5, 1)$$

직선 BD의 방정식은

$$y-0 = \frac{1-0}{5-4}(x-4) \quad \therefore x-y-4=0$$

따라서 점 C(1, 2)와 직선 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-2-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \triangle CBD = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}$$

답 ⑤

참고 점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

10 $a > 1$ 이므로 $a < b$ 에서

$$\log_a a < \log_a b \quad \therefore \log_a b > 1 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ 이므로

$$\frac{1}{\log_b a} > 1 \quad \therefore 0 < \log_b a < 1 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서

$$Q-R = \log_b \frac{a}{b} - \log_b \frac{b}{a} = \log_b \frac{a}{b} + \log_b \frac{a}{b}$$

$$= 2\log_b \frac{a}{b} = 2(\log_b a - 1) < 0 \quad (\because ㉡)$$

이므로 $Q < R$

$$P-R = \log_a b - \log_b \frac{b}{a} = \log_a b - (1 - \log_b a)$$

$$= \log_a b + \log_b a - 1 > 0 \quad (\because ㉠, ㉡)$$

이므로 $P > R$

$$\therefore Q < R < P$$

답 ③

$$\text{참고 } P-Q = \log_a b - \log_b \frac{a}{b} = \log_a b - (\log_b a - 1)$$

$$= \log_a b - \log_b a + 1 = \log_a b + \log_a b + 1$$

$$= 2\log_a b + 1 > 0 \quad (\because ㉠)$$

$$11 \quad y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} - 25 = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^x - 25$$

이고, 밑 $\frac{1}{5}$ 이 1보다 작으므로 함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} - 25$ 는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $-4 \leq x \leq -2$ 일 때, 함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} - 25$ 는 $x = -4$ 에서 최댓값

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-4+1} - 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - 25 = 5^3 - 25 = 100$$

을 갖는다. $\therefore M = 100$

한편, 밑 5가 1보다 크므로 함수 $y = \log_5(x+10) + 3$ 은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이다.

따라서 $15 \leq x \leq 20$ 일 때, 함수 $y = \log_5(x+10) + 3$ 은 $x = 15$ 에서 최솟값

$$\log_5(15+10) + 3 = \log_5 25 + 3 = 2 + 3 = 5$$

를 갖는다. $\therefore m = 5$

$$\therefore M+m = 100+5 = 105$$

답 ①

12 진수의 조건에서 $x-1 > 0, -x+k+1 > 0$

$$\therefore 1 < x < k+1 \quad (\because k \text{는 자연수})$$

$$\log_3(x-1) + \log_3(-x+k+1) = 2 \text{에서}$$

$$\log_3(x-1)(-x+k+1) = \log_3 9$$

$$(x-1)(-x+k+1) = 9, \quad -x^2 + (k+2)x - k - 1 = 9$$

$$\therefore x^2 - (k+2)x + k + 10 = 0$$

주어진 방정식이 실근을 갖지 않으려면 이 이차방정식이

$1 < x < k+1$ 에서 실근을 갖지 않아야 한다.

이때 $f(x) = x^2 - (k+2)x + k + 10$ 이라 하면 $y = f(x)$ 의 그래

프의 축은 직선 $x = \frac{k+2}{2}$ 이고 $f(1) = f(k+1) = 9 > 0$ 이므로

오른쪽 그림과 같이 $f\left(\frac{k+2}{2}\right) > 0$ 이어야

한다. 즉,

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)^2 - (k+2) \times \frac{k+2}{2} + k+10 > 0$$

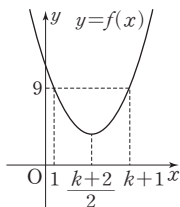
$$-\frac{(k+2)^2}{4} + k+10 > 0$$

$$(k+2)^2 - 4(k+10) < 0$$

$$k^2 - 36 < 0, (k+6)(k-6) < 0$$

$$\therefore -6 < k < 6$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, ..., 5의 5개이다.



답 ①

13 함수 $y=\log_2 x^2$ 의 진수의 조건에서

$$x^2 > 0 \quad \therefore x \neq 0$$

$$\therefore y = \log_2 x^2 = \log_2 |x|^2$$

$$= 2\log_2 |x| = \begin{cases} 2\log_2 x & (x > 0) \\ 2\log_2 (-x) & (x < 0) \end{cases}$$

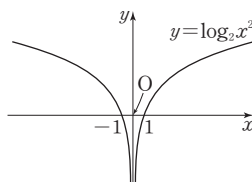
따라서 함수 $y=\log_2 x^2$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.

한편, $y=2^{-x+8}-12=2^{-(x-8)}-12=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-8}-12$ 에서

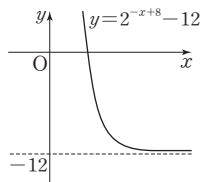
$y=2^{-x+8}-12$ 의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

로 8만큼, y 축의 방향으로 -12만큼 평행이동한 것이므로

[그림 2]와 같다.

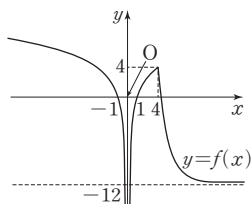


[그림 1]



[그림 2]

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수와 같으므로 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 의 값의 범위는

$$t \leq -12 \text{ 또는 } t = 4$$

답 ②

참고 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근은

$$t \leq -12 \text{ 일 때 2개}$$

$$-12 < t < 4 \text{ 일 때 3개}$$

$$t = 4 \text{ 일 때 2개}$$

$$t > 4 \text{ 일 때 1개}$$

14 진수의 조건에서 $x-2 > 0, \frac{1}{4}x+k > 0$

$$\therefore x > 2 (\because k \text{는 자연수}) \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_8(x-2) \leq \log_8\left(\frac{1}{4}x+k\right) \text{에서 밑 8이 1보다 크므로}$$

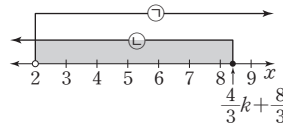
$$x-2 \leq \frac{1}{4}x+k, \frac{3}{4}x \leq k+2$$

$$\therefore x \leq \frac{4}{3}k + \frac{8}{3} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정

수 x 가 6개이므로 오른쪽 그림

에서



$$8 \leq \frac{4}{3}k + \frac{8}{3} < 9, 24 \leq 4k+8 < 27, 16 \leq 4k < 19$$

$$\therefore 4 \leq k < \frac{19}{4}$$

따라서 자연수 k 의 값은 4이다.

답 ③

15 진수의 조건에서 $f(x)g(x) > 0, g(x) > 0$

$f(x)g(x) > 0$ 에서

$f(x) > 0, g(x) > 0$ 또는 $f(x) < 0, g(x) < 0$

그런데 $g(x) > 0$ 이므로 $f(x) > 0, g(x) > 0$

$f(x) > 0$ 에서 $x < -1$ 또는 $x > 1$

$g(x) > 0$ 에서 $x < 1$

$$\therefore x < -1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_4 f(x)g(x) + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}g(x) < 1 \text{에서}$$

$$\log_2 f(x)g(x) + \frac{1}{2}\log_2 g(x) < 1$$

$$\frac{1}{2}\log_2 f(x)g(x) - \frac{1}{2}\log_2 g(x) < 1$$

$$\log_2 f(x)g(x) - \log_2 g(x) < 2$$

$$\log_2 \frac{f(x)g(x)}{g(x)} < 2, \log_2 f(x) < \log_2 4$$

$$\therefore f(x) < 4$$

이때 주어진 그래프에서 $f(-1)=f(1)=0$ 이므로

$f(x)=a(x+1)(x-1)$ ($a \neq 0$)이라 하면 $f(-2)=3$ 에서

$$a \times (-1) \times (-3) = 3 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

따라서 $f(x) < 4$ 에서 $x^2 - 1 < 4$

$$x^2 < 5 \quad \therefore -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-\sqrt{5} < x < -1$$

답 ②

16 (i) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x^2} > 3^{14x}$ 에서

$$(3^{-2})^{-x^2} > 3^{14x}, 3^{2x^2} > 3^{14x}$$

밑 3이 1보다 크므로

$$2x^2 > 14x, 2x^2 - 14x > 0$$

$$x^2 - 7x > 0, x(x-7) > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 7 \quad \dots\dots ㉠$$

(ii) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1) < \log_{\frac{1}{3}}(-x+25)$ 의 진수의 조건에서

$$x^2+x+1 > 0, -x+25 > 0$$

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\text{이므로 항상 성립한다.}$$

$$-x+25>0\text{에서 }x<25$$

$$\therefore x<25 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)<\log_{\frac{1}{3}}(-x+25)\text{에서 밑 } \frac{1}{3}\text{이 1보다 작}$$

으므로

$$x^2+x+1>-x+25$$

$$x^2+2x-24>0, (x+6)(x-4)>0$$

$$\therefore x<-6\text{ 또는 }x>4 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$x<-6\text{ 또는 }4<x<25 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

따라서 연립부등식의 해는 ①, ②의 공통부분이므로

$$x<-6\text{ 또는 }7<x<25 \quad \text{답 ⑤}$$

- 17 북극성의 밝기를 I_N , 천체 A의 밝기를 I_A 라 하면 북극성의 겉보기 등급이 2이므로

$$2=C-\frac{5}{2}\log I_N \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

북극성의 밝기가 천체 A의 밝기의 1.6×10^{10} 배이므로

$$I_N=1.6 \times 10^{10} \times I_A$$

$$\therefore I_A=1.6^{-1} \times 10^{-10} \times I_N$$

따라서 천체 A의 겉보기 등급을 m_A 라 하면

$$m_A=C-\frac{5}{2}\log I_A$$

$$=C-\frac{5}{2}\log(1.6^{-1} \times 10^{-10} \times I_N)$$

$$=C-\frac{5}{2}(\log 1.6^{-1} + \log 10^{-10} + \log I_N)$$

$$=C-\frac{5}{2}(-\log 1.6 - 10 + \log I_N)$$

$$=C-\frac{5}{2}\log I_N + \frac{5}{2}\log 1.6 + 25$$

$$=2 + \frac{5}{2}\log 1.6 + 25 (\because \textcircled{1})$$

이때

$$\log 1.6 = \log(2^4 \times 10^{-1})$$

$$= \log 2^4 + \log 10^{-1}$$

$$= 4\log 2 - 1 = 4 \times 0.3 - 1$$

$$= 0.2$$

이므로

$$m_A = 2 + \frac{5}{2}\log 1.6 + 25$$

$$= 2 + \frac{5}{2} \times 0.2 + 25$$

$$= 27.5 \quad \text{답 ④}$$

- 18 점 A는 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 의 그래프의 교점이다. 두 함수는 서로의 역함수이고, $0 < a < 1$ 일 때 두 함수의 그래프는 한 점에서 만나므로 점 A는 직선 $y=x$ 위에 있다.

$$\therefore A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

점 A가 함수 $y=a^x$ 의 그래프 위에 있으므로

$$\frac{1}{2}=a^{\frac{1}{2}} \quad \therefore a=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 B는 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ 의 그래프와 x 축의 교점이므로 $B(1, 0)$

$$y=|\log_{\frac{1}{4}} x|=\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} x & (x \leq 1) \\ -\log_{\frac{1}{4}} x & (x > 1) \end{cases}$$

이므로 점 C는 함수 $y=-\log_{\frac{1}{4}} x$ 의 그래프 위의 점이고,

점 C의 y 좌표가 1이므로 점 C의 x 좌표는 $1=-\log_{\frac{1}{4}} x$ 에서

$$\log_{\frac{1}{4}} x = -1 \quad \therefore x=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$$

즉, $C(4, 1)$ 이므로

$$\overline{BC}=\sqrt{(4-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또, 직선 BC의 방정식은

$$y-0=\frac{1-0}{4-1}(x-1) \quad \therefore x-3y-1=0$$

점 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 과 직선 BC 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{1}{2}-3 \times \frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{10}}{5}=1 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 1

채점기준	배점
① a 의 값 구하기	2
② BC의 길이 구하기	2
③ 점 A와 직선 BC 사이의 거리 구하기	2
④ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	1

참고1 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$ ($0 < a < 1$)의 그래프가 점 (m, n) 에서 만난다고 하면

$$n=a^m, n=\log_a m$$

$$n=a^m\text{에서 }m=\log_a n$$

$$n=\log_a m\text{에서 }m=a^n$$

즉, 점 (n, m) 도 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$ ($0 < a < 1$)의 그래프의 교점이다.

그런데 두 함수 $y=a^x$,

$y=\log_a x$ ($0 < a < 1$)의 그래프의 교점은

오른쪽 그림과 같이 항상 한 개뿐이므로

점 (m, n) 과 점 (n, m) 은 같은 점이다.

$$\therefore m=n$$

따라서 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$

($0 < a < 1$)의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이다.

참고2 $0 < a < 1$ 일 때,

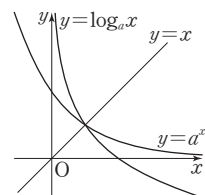
$$\log_a x \geq 0\text{에서 } \log_a x \geq \log_a 1 \quad \therefore x \leq 1$$

$$\log_a x < 0\text{에서 } \log_a x < \log_a 1 \quad \therefore x > 1$$

$$\therefore y=|\log_a x|$$

$$=\begin{cases} \log_a x & (\log_a x \geq 0) \\ -\log_a x & (\log_a x < 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \log_a x & (x \leq 1) \\ -\log_a x & (x > 1) \end{cases}$$



19 $(\log_2 x)^2 + a \log_2 x + 1 \geq 0$ 에서 $(\log_2 x)^2 + a \log_2 x + 1 \geq 0$

$$\therefore (\log_2 x)^2 + \frac{a}{3} \log_2 x + 1 \geq 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 t 는 모든 실수이고

$$t^2 + \frac{a}{3}t + 1 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모든 양수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t 에 대하여 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립해야 한다. 따라서 이차방정식

$$t^2 + \frac{a}{3}t + 1 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$D = \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 \leq 0$$

$$\frac{a^2}{9} - 4 \leq 0, a^2 - 36 \leq 0, (a+6)(a-6) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq a \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{따라서 정수 } a \text{는 } -6, -5, -4, \dots, 6 \text{의 13개이다.} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 13

채점기준	배점
① $\log_2 x = t$ 로 치환하여 주어진 부등식을 t 에 대한 이차부등식으로 나타내기	2
② a 의 값의 범위 구하기	2
③ 정수 a 의 개수 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.110~114

1 x 축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하고, 점 A의 y 좌표가 1이므로 점 B의 y 좌표는 -1 이다.

이때 점 B는 곡선 $y = -\log_4(x+1)$ 위의 점이므로 점 B의 x 좌표는 $-1 = -\log_4(x+1)$ 에서

$$1 = \log_4(x+1), x+1=4 \quad \therefore x=3$$

$$\therefore B(3, -1)$$

$$\therefore \overline{OB} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

2 점 A는 곡선 $y = \log_3 x$ 위의 점이고, 점 A의 y 좌표가 2이므로 점 A의 x 좌표는 $2 = \log_3 x$ 에서 $x=9$

$$\therefore A(9, 2)$$

한편, x 축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하고, 점 A의 y 좌표가 2이므로 점 B의 y 좌표는 -2 이다.

이때 점 B는 곡선 $y = -\log_3(x+1)$ 위의 점이므로 점 B의 x 좌표는 $-2 = -\log_3(x+1)$ 에서

$$2 = \log_3(x+1), x+1=9 \quad \therefore x=8$$

$$\therefore B(8, -2)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(8-9)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

참고 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 에 대하여

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2^{x-a}+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 그래프가 함수 $y=\log_2(4x-b)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $\textcircled{1}$ 은 함수 $y=\log_2(4x-b)$ 의 역함수이다.

$$y=\log_2(4x-b) \text{에서 } 4x-b=2^y$$

$$4x=2^y+b \quad \therefore x=2^{y-2}+\frac{b}{4}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=2^{x-2}+\frac{b}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$a=2, 3=\frac{b}{4} \quad \therefore a=2, b=12$$

$$\therefore a+b=2+12=14$$

답 14

4 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3^{x-a}+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 그래프가 함수 $y=\log_3(9x-b)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $\textcircled{1}$ 은 함수 $y=\log_3(9x-b)$ 의 역함수이다.

$$y=\log_3(9x-b) \text{에서 } 9x-b=3^y$$

$$9x=3^y+b \quad \therefore x=3^{y-2}+\frac{b}{9}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=3^{x-2}+\frac{b}{9} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$a=2, 2=\frac{b}{9} \quad \therefore a=2, b=18$$

$$\therefore ab=2 \times 18=36$$

답 36

5 $A(a, \log_2 2a), B(b, \log_2 4b) (a < b)$ 라 하면 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{\log_2 4b - \log_2 2a}{b-a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \log_2 4b - \log_2 2a = \frac{1}{2}(b-a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + (\log_2 4b - \log_2 2a)^2}$$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + \left\{\frac{1}{2}(b-a)\right\}^2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}(b-a) = 2\sqrt{5} \quad (\because a < b)$$

$$\therefore b-a=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\log_2 4b - \log_2 2a = 2$$

$$\log_2 \frac{4b}{2a} = 2, \log_2 \frac{2b}{a} = 2, \frac{2b}{a} = 4, 2b = 4a$$

$$\therefore b=2a \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉔, ㉕을 연립하여 풀면 $a=4, b=8$

따라서 $A(4, 3), B(8, 5), C(4, 0)$ 이므로

$$\triangle ACB = \frac{1}{2} \times 3 \times (8-4) = 6 \quad \text{답 ⑤}$$

6 $A(a, \log_3 3a), B(b, \log_3 27b) (a>b)$ 라 하면

직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{6}$ 이므로

$$\frac{\log_3 3a - \log_3 27b}{a-b} = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore \log_3 3a - \log_3 27b = -\frac{1}{6}(a-b) \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

$\overline{AB} = \sqrt{37}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(a-b)^2 + (\log_3 3a - \log_3 27b)^2} \\ &= \sqrt{(a-b)^2 + \left\{-\frac{1}{6}(a-b)\right\}^2} \quad (\because \textcircled{㉖}) \\ &= \frac{\sqrt{37}}{6}(a-b) = \sqrt{37} \quad (\because a>b) \end{aligned}$$

$$\therefore a-b=6 \quad \dots\dots \textcircled{㉗}$$

㉔을 ㉗에 대입하면

$$\log_3 3a - \log_3 27b = -1$$

$$\log_3 \frac{3a}{27b} = -1, \log_3 \frac{a}{9b} = -1, \frac{a}{9b} = \frac{1}{3}$$

$$3a=9b \quad \therefore a=3b \quad \dots\dots \textcircled{㉘}$$

㉔, ㉘을 연립하여 풀면 $a=9, b=3$

따라서 $A(9, 3), B(3, 4), C(9, 0)$ 이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 3 \times (9-3) = 9 \quad \text{답 ④}$$

7 $y = -\log_3 x + 4$ 에서 $\log_3 x = -y + 4$

$$\therefore x = 3^{-y+4}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 3^{-x+4}$

즉, 두 함수 $y = -\log_3 x + 4, y = 3^{-x+4}$ 은 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 점 A와 점 D, 점 B와 점 C는 직선 $y=x$ 에 대하여 각각 대칭이므로

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

이때 $\overline{AD} - \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} = 4\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이고 두 점 A, B가 기울기가

-1인 직선 위의 점이므로 점 A의 x 좌표

를 a 라 하면 점 B의 x 좌표는 $a+2$ 이다.

두 점 A, B가 직선 $y = -x + k$ 와 곡선

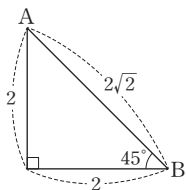
$y = -\log_3 x + 4$ 의 교점이므로

$$-a + k = -\log_3 a + 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉙}$$

$$-(a+2) + k = -\log_3 (a+2) + 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉚}$$

㉙을 ㉚에 대입하면

$$-\log_3 a + 4 - 2 = -\log_3 (a+2) + 4$$



$$\log_3 (a+2) - \log_3 a = 2, \log_3 \frac{a+2}{a} = 2, \frac{a+2}{a} = 9$$

$$a+2=9a, -8a=-2 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

이것을 ㉙에 대입하면

$$-\frac{1}{4} + k = -\log_3 \frac{1}{4} + 4$$

$$\therefore k = -\log_3 \frac{1}{4} + \frac{17}{4} = \log_3 4 + \frac{17}{4} = \frac{17}{4} + 2\log_3 2 \quad \text{답 ②}$$

8 $y = -\log_2 x + 6$ 에서 $\log_2 x = -y + 6$

$$\therefore x = 2^{-y+6}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 2^{-x+6}$

즉, 두 함수 $y = -\log_2 x + 6, y = 2^{-x+6}$ 은 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 점 A와 점 D, 점 B와 점 C는 직선 $y=x$ 에 대하여 각각 대칭이므로

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

이때 $\overline{AD} - \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$\overline{AB} = \sqrt{2}$ 이고 두 점 A, B가 기울기가

-1인 직선 위의 점이므로 점 A의 x 좌표

를 a 라 하면 점 B의 x 좌표는 $a+1$ 이다.

두 점 A, B가 직선 $y = -x + k$ 와 곡선

$y = -\log_2 x + 6$ 의 교점이므로

$$-a + k = -\log_2 a + 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉛}$$

$$-(a+1) + k = -\log_2 (a+1) + 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉜}$$

㉛을 ㉜에 대입하면

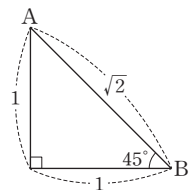
$$-\log_2 a + 6 - 1 = -\log_2 (a+1) + 6$$

$$\log_2 (a+1) - \log_2 a = 1, \log_2 \frac{a+1}{a} = 1$$

$$\frac{a+1}{a} = 2, 2a = a+1 \quad \therefore a=1$$

이것을 ㉛에 대입하면

$$-1 + k = -\log_2 1 + 6 \quad \therefore k=7 \quad \text{답 ④}$$



9 두 곡선 $y = a^x + 2, y = \log_a x + 2$ 를 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 두 곡선의 방정식은 각각

$$y = a^x, y = \log_a x$$

이 두 곡선이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 두 점을 각각 A', B'이라 하면 두 점 A', B'도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

또, 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 C라 하면 점 C의 y 좌표가 $\frac{19}{2}$ 이므로

$$C\left(k, \frac{19}{2}\right) \quad (k \text{는 상수})$$

이고, 점 C는 선분 AB의 중점이다. 따라서 점 C를 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점 $C'\left(k, \frac{15}{2}\right)$ 도 선분 A'B'의 중점이므로 직선 $y=x$ 위에 있다.

$$\therefore k = \frac{15}{2}$$

$$\therefore C\left(\frac{15}{2}, \frac{19}{2}\right)$$

선분 AB를 지름으로 하는 원의 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$ 이므로 반지름의

$$\text{길이는 } \overline{AC} = \frac{11}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{2}$$

두 점 A, C는 기울기가 -1인 직선 위의 점이므로 점 A는 점 C를 x 축의 방향으로 $-\frac{11}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{11}{2}$ 만큼 평행이동한 점이다. 즉,

$$A\left(\frac{15}{2} + \left(-\frac{11}{2}\right), \frac{19}{2} + \frac{11}{2}\right)$$

$$\therefore A(2, 15)$$

점 A(2, 15)는 곡선 $y = a^x + 2$ 위의 점이므로

$$15 = a^2 + 2 \quad \therefore a^2 = 13$$

답 13

- 10 두 곡선 $y = a^x + 1$, $y = \log_a x + 1$ 을 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 두 곡선의 방정식은 각각

$$y = a^x, y = \log_a x$$

이 두 곡선이 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 두 점을 각각 A', B'이라 하면 두 점 A', B'도 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

또, 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 C라 하면 점 C의 y 좌표가 $\frac{9}{2}$ 이므로

$$C\left(k, \frac{9}{2}\right) \quad (k \text{는 상수})$$

이고, 점 C는 선분 AB의 중점이다. 따라서 점 C를 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점 $C'\left(k, \frac{7}{2}\right)$ 도 선분 A'B'의 중점이므로 직선 $y = x$ 위에 있다.

$$\therefore k = \frac{7}{2}$$

$$\therefore C\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

선분 AB를 지름으로 하는 원의 넓이가 $\frac{25}{2}\pi$ 이므로 반지름의 길

$$\text{이는 } \overline{AC} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

두 점 A, C는 기울기가 -1인 직선 위의 점이므로 점 A는 점 C를 x 축의 방향으로 $-\frac{5}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{5}{2}$ 만큼 평행이동한 점이다. 즉,

$$A\left(\frac{7}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right), \frac{9}{2} + \frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore A(1, 7)$$

점 A(1, 7)은 곡선 $y = a^x + 1$ 위의 점이므로

$$7 = a + 1 \quad \therefore a = 6$$

답 6

II 삼각함수

1 삼각함수

교과서 예제

p.117

- 01 (1) $410^\circ = 360^\circ \times 1 + 50^\circ$ 이므로 일반각은

$$360^\circ \times n + 50^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

- (2) $-330^\circ = 360^\circ \times (-1) + 30^\circ$ 이므로 일반각은

$$360^\circ \times n + 30^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

- (3) $1200^\circ = 360^\circ \times 3 + 120^\circ$ 이므로 일반각은

$$360^\circ \times n + 120^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

- (4) $-880^\circ = 360^\circ \times (-3) + 200^\circ$ 이므로 일반각은

$$360^\circ \times n + 200^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

답 (1) $360^\circ \times n + 50^\circ$ (단, n 은 정수)

(2) $360^\circ \times n + 30^\circ$ (단, n 은 정수)

(3) $360^\circ \times n + 120^\circ$ (단, n 은 정수)

(4) $360^\circ \times n + 200^\circ$ (단, n 은 정수)

- 02 (1) $600^\circ = 360^\circ \times 1 + 240^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.

(2) $840^\circ = 360^\circ \times 2 + 120^\circ$ 이므로 제2사분면의 각이다.

(3) $-430^\circ = 360^\circ \times (-2) + 290^\circ$ 이므로 제4사분면의 각이다.

(4) $-700^\circ = 360^\circ \times (-2) + 20^\circ$ 이므로 제1사분면의 각이다.

답 (1) 제3사분면 (2) 제2사분면

(3) 제4사분면 (4) 제1사분면

- 03 (1) $570^\circ = 570 \times 1^\circ = 570 \times \frac{\pi}{180} = \frac{19}{6}\pi$

$$(2) \frac{7}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi \times 1 = \frac{7}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 315^\circ$$

$$(3) -405^\circ = -405 \times 1^\circ = -405 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{9}{4}\pi$$

$$(4) -\frac{16}{3}\pi = -\frac{16}{3}\pi \times 1 = -\frac{16}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -960^\circ$$

답 (1) $\frac{19}{6}\pi$ (2) 315° (3) $-\frac{9}{4}\pi$ (4) -960°

- 04 (1) $\frac{9}{4}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{4}$ 이므로 일반각은

$$2n\pi + \frac{\pi}{4} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$(2) -\frac{21}{5}\pi = 2\pi \times (-3) + \frac{9}{5}\pi \text{이므로 일반각은}$$

$$2n\pi + \frac{9}{5}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

답 (1) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ (단, n 은 정수)

(2) $2n\pi + \frac{9}{5}\pi$ (단, n 은 정수)

- 05 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$l = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi, S = \frac{1}{2} \times 4 \times \pi = 2\pi$$

따라서 호의 길이는 π , 넓이는 2π 이다.

답 호의 길이: π , 넓이: 2π

다른풀이 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

- 06 $OP = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ 이므로

$$(1) \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

답 (1) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (2) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (3) $\frac{1}{3}$

- 07 (1) $\frac{11}{3}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{5}{3}\pi$ 는 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

- (2) $-\frac{5}{6}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{7}{6}\pi$ 는 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

- (3) $750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$ 는 제1사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$$

답 (1) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

(2) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

(3) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

- 08 (1) $\sin \theta > 0$ 에서 각 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

$\tan \theta > 0$ 에서 각 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 각 θ 는 제1사분면의 각이다.

- (2) $\cos \theta < 0$ 에서 각 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

$\tan \theta < 0$ 에서 각 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 θ 는 제2사분면의 각이다.

- (3) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

따라서 각 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 (1) 제1사분면 (2) 제2사분면

(3) 제2사분면 또는 제4사분면

- 09 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

제2사분면의 각 θ 에 대하여 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

답 $\cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$

- 10 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{4}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{16}$$

$$1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{16} \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$-2\sin \theta \cos \theta = -\frac{15}{16} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{15}{32} \quad \text{답 } \frac{15}{32}$$

- 11 (1) $(\sin \theta - \cos \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta)^2$

$$= (\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$+ (\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2$$

$$(2) \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} = \frac{(1 + \sin \theta) + (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{2}{\cos^2 \theta}$

기출 Best | 1회

p.118 ~ 120

- 01 $420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$

$$\text{ㄱ. } -1380^\circ = 360^\circ \times (-4) + 60^\circ$$

$$\text{ㄴ. } -1050^\circ = 360^\circ \times (-3) + 30^\circ$$

$$\text{ㄷ. } -660^\circ = 360^\circ \times (-2) + 60^\circ$$

$$\text{ㄹ. } 780^\circ = 360^\circ \times 2 + 60^\circ$$

$$\text{ㅁ. } 1500^\circ = 360^\circ \times 4 + 60^\circ$$

따라서 각을 나타내는 동경이 420° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ의 4개이다. 답 ④

- 02 각 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$2n\pi + \frac{3}{2}\pi < \theta < 2n\pi + 2\pi \quad (\text{단, } n \text{는 정수})$$

$$\therefore n\pi + \frac{3}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < n\pi + \pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때, ①에서

$$2k\pi + \frac{3}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \pi$$

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때, ①에서

$$(2k + 1)\pi + \frac{3}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < (2k + 1)\pi + \pi$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{7}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + 2\pi$$

따라서 각 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 각

$\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1, 3사분면이다. 답 ③

03 ① $60^\circ = 60 \times 1^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

② $100^\circ = 100 \times 1^\circ = 100 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{9}\pi$

③ $135^\circ = 135 \times 1^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$

④ $\frac{5}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi \times 1 = \frac{5}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 225^\circ$

⑤ $\frac{25}{3}\pi = \frac{25}{3}\pi \times 1 = \frac{25}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 1500^\circ$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

04 각 θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 일치하므로
 $6\theta - \theta = 2n\pi$ (n 은 정수)

$5\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{5}\pi$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\frac{\pi}{2} < \frac{2n}{5}\pi < \pi \quad \therefore \frac{5}{4} < n < \frac{5}{2}$

n 은 정수이므로 $n=2$

$\therefore \theta = \frac{4}{5}\pi$

답 ③

05 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여
 대칭이므로

$2\theta + 3\theta = (2n+1)\pi$ (n 은 정수)

$5\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{5}\pi$

이때 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로 $\frac{3}{2}\pi < \frac{2n+1}{5}\pi < 2\pi$

$\frac{15}{2} < 2n+1 < 10, \frac{13}{2} < 2n < 9$

$\therefore \frac{13}{4} < n < \frac{9}{2}$

n 은 정수이므로 $n=4$

$\therefore \theta = \frac{8+1}{5}\pi = \frac{9}{5}\pi$

답 ⑤

06 각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에
 대하여 대칭이므로

$\theta + 3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)

$4\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{8}$

이때 $0 < \theta < \pi$ 이므로 $0 < \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{8} < \pi$

$-\frac{\pi}{8} < \frac{n}{2}\pi < \frac{7}{8}\pi \quad \therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{7}{4}$

n 은 정수이므로 $n=0, 1$

$n=0$ 일 때, $\theta = \frac{\pi}{8}$

$n=1$ 일 때, $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{5}{8}\pi$

따라서 구하는 합은

$\frac{\pi}{8} + \frac{5}{8}\pi = \frac{3}{4}\pi$

답 ⑤

07 반지름의 길이를 r 라 하면

$2\pi = r \times \frac{2}{3}\pi \quad \therefore r=3$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 3 \times 2\pi = 3\pi$

답 ②

08 $\overline{OA}=r_1, \overline{OC}=r_2$, 중심각의 크기를 θ 라 하면

호 AB의 길이가 $\frac{9}{4}\pi$ 이므로

$r_1\theta = \frac{9}{4}\pi \quad \dots\dots ㉠$

호 CD의 길이가 $\frac{7}{4}\pi$ 이므로

$r_2\theta = \frac{7}{4}\pi \quad \dots\dots ㉡$

㉠ $\div$ ㉡을 하면 $\frac{r_1}{r_2} = \frac{9}{7}$

$\therefore 7r_1 = 9r_2 \quad \dots\dots ㉢$

색칠한 부분의 넓이가 $\frac{8}{3}\pi$ 이므로

$\frac{1}{2} \times r_1 \times \frac{9}{4}\pi - \frac{1}{2} \times r_2 \times \frac{7}{4}\pi = \frac{8}{3}\pi$

$\therefore 27r_1 - 21r_2 = 64 \quad \dots\dots ㉣$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $r_1=6, r_2=\frac{14}{3}$

$\therefore \overline{AC} = r_1 - r_2 = 6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}$

답 ②

09 부채꼴의 넓이가 25이므로 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면

$25 = \frac{1}{2}rl \quad \therefore l = \frac{50}{r}$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r + l = 2r + \frac{50}{r}$

$2r > 0, \frac{50}{r} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2r + \frac{50}{r} \geq 2\sqrt{2r \times \frac{50}{r}} = 2 \times 10 = 20$

(단, 등호는 $2r = \frac{50}{r}$, 즉 $r=5$ 일 때 성립)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 20이다.

답 ⑤

참고 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$\frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r^2\theta = 25$ 에서 $\theta = \frac{50}{r^2}$

$0 < \theta < 2\pi$ 이므로

$0 < \frac{50}{r^2} < 2\pi, \frac{r^2}{50} > \frac{1}{2\pi}, r^2 > \frac{25}{\pi}$

$\therefore r > \frac{5}{\sqrt{\pi}}$

10 P(3, k)에서 $\tan\theta = \frac{k}{3}$

그런데 $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{k}{3} = -\frac{1}{3} \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore P(3, -1)$$

따라서 $OP = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore k + 10 \sin \theta \cos \theta = -1 + 10 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \times \frac{3}{\sqrt{10}} = -4$$

답 ②

11 $\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$

즉, 각 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

$\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서

$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 또는 $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

즉, 각 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

따라서 각 θ 는 제2사분면의 각이다.

답 ②

$$\begin{aligned} 12 \quad & \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta (1 + \sin \theta) + \cos^2 \theta (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2 \cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \end{aligned}$$

답 ②

$$13 \quad \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

제4사분면의 각 θ 에 대하여 $\sin \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore \sin \theta + \tan \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4} + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = -\frac{7\sqrt{7}}{12}$$

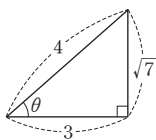
답 ④

다른풀이 $\cos \theta = \frac{3}{4}$ 인 각 θ 를 한 내각으로 갖

는 직각삼각형은 오른쪽 그림과 같고 θ 는 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore \sin \theta + \tan \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4} + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = -\frac{7\sqrt{7}}{12}$$



$$14 \quad \frac{3 \sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + 2 \cos \theta} = 2 \text{에서}$$

$$3 \sin \theta - \cos \theta = 2(\sin \theta + 2 \cos \theta)$$

$$3 \sin \theta - \cos \theta = 2 \sin \theta + 4 \cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta = 5 \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로 이 식에 ①을 대입하면

$$(5 \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1, 26 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{26} \quad \therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{26}}{26} \quad \left(\because \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \right)$$

따라서 ①에서

$$\sin \theta = 5 \times \left(-\frac{\sqrt{26}}{26}\right) = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta - \cos \theta &= -\frac{5\sqrt{26}}{26} - \left(-\frac{\sqrt{26}}{26}\right) \\ &= -\frac{2\sqrt{26}}{13} \end{aligned}$$

답 ①

15 $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}, 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= -\frac{1}{3} \times \left\{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)\right\} = -\frac{13}{27} \end{aligned}$$

답 ①

16 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{5}, 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

답 ①

기출 Best | 2회

p.121 ~ 123

$$01 \quad \textcircled{1} \quad -960^\circ = 360^\circ \times (-3) + 120^\circ$$

$$\textcircled{2} \quad -600^\circ = 360^\circ \times (-2) + 120^\circ$$

$$\textcircled{3} \quad -210^\circ = 360^\circ \times (-1) + 150^\circ$$

$$\textcircled{4} \quad 120^\circ = 360^\circ \times 0 + 120^\circ$$

$$\textcircled{5} \quad 480^\circ = 360^\circ \times 1 + 120^\circ$$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

답 ③

02 각 θ 가 제2사분면의 각이므로

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2n\pi + \pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{3}$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$\frac{2(3k+1)}{3}\pi + \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{2(3k+1)}{3}\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{5\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \pi$$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$\frac{2(3k+2)}{3}\pi + \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{2(3k+2)}{3}\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \frac{\theta}{3} < 2k\pi + \frac{5\pi}{3}$$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제3사분면이다. 답 ③

03 $\neg$. $15^\circ = 15 \times 1^\circ = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ (참)

$$\perp. \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi \times 1 = \frac{3}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 135^\circ \text{이므로}$$

$$120^\circ + \frac{3}{4}\pi = 120^\circ + 135^\circ = 255^\circ \text{ (거짓)}$$

$$\sqsubset. -290^\circ = 360^\circ \times (-1) + 70^\circ,$$

$$\frac{7}{18}\pi = \frac{7}{18}\pi \times 1 = \frac{7}{18}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 70^\circ$$

이므로 두 각을 나타내는 동경은 일치한다. (참)

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다. 답 ④

04 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 8θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$8\theta - 2\theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{6}\pi$$

$$\text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } \pi < \frac{2n+1}{6}\pi < \frac{3}{2}\pi$$

$$6 < 2n+1 < 9, 5 < 2n < 8 \quad \therefore \frac{5}{2} < n < 4$$

n 은 정수이므로 $n=3$

$$\therefore \theta = \frac{6+1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$
답 ②

05 각 θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$6\theta + \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$7\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{7}\pi$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < \pi \text{이므로 } 0 < \frac{2n}{7}\pi < \pi \quad \therefore 0 < n < \frac{7}{2}$$

n 은 정수이므로 $n=1, 2, 3$

$$n=1 \text{일 때, } \theta = \frac{2}{7}\pi$$

$$n=2 \text{일 때, } \theta = \frac{4}{7}\pi$$

$$n=3 \text{일 때, } \theta = \frac{6}{7}\pi$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{2}{7}\pi + \frac{4}{7}\pi + \frac{6}{7}\pi = \frac{12}{7}\pi$$
답 ⑤

06 각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 4\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{2n}{5}\pi + \frac{\pi}{10}$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < 2\pi \text{이므로 } 0 < \frac{2n}{5}\pi + \frac{\pi}{10} < 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{10} < \frac{2n}{5}\pi < \frac{19}{10}\pi \quad \therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{19}{4}$$

n 은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3, 4$

따라서 θ 는 $n=4$ 일 때 최대이고, θ 의 최댓값은

$$\frac{8}{5}\pi + \frac{\pi}{10} = \frac{17}{10}\pi$$
답 ⑤

07 부채꼴의 넓이가 10π 이므로

$$10\pi = \frac{1}{2} \times a^2 \times \frac{5}{4}\pi$$

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$$4 \times \frac{5}{4}\pi = 5\pi \quad \therefore b = 5$$

$$\therefore ab = 4 \times 5 = 20$$
답 ⑤

08 $\overline{OA} = r_1$, $\overline{OC} = r_2$, 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\text{호 AB의 길이가 } 4\pi \text{이므로 } r_1\theta = 4\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{호 CD의 길이가 } \frac{8}{3}\pi \text{이므로}$$

$$r_2\theta = \frac{8}{3}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2} \quad \therefore 2r_1 = 3r_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

색칠한 부분의 넓이가 20π 이므로

$$\frac{1}{2} \times r_1 \times 4\pi - \frac{1}{2} \times r_2 \times \frac{8}{3}\pi = 20\pi$$

$$\therefore 3r_1 - 2r_2 = 30 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉔, ㉔을 연립하여 풀면 $r_1 = 18, r_2 = 12$

따라서 색칠한 부분의 둘레의 길이는

$$(18 - 12) \times 2 + \frac{8}{3}\pi + 4\pi = 12 + \frac{20}{3}\pi$$

$$\text{이므로 } a = 12, b = \frac{20}{3}$$

$$\therefore ab = 12 \times \frac{20}{3} = 80$$

답 ③

- 09 부채꼴의 둘레의 길이가 12이므로 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면

$$l = 12 - 2r \left(\text{단, } \frac{6}{\pi+1} < r < 6 \right)$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(12 - 2r) = -r^2 + 6r$$

$$= -(r-3)^2 + 9 \left(\frac{6}{\pi+1} < r < 6 \right)$$

이므로 부채꼴의 넓이의 최댓값은 $r=3$ 일 때 9이다.

따라서 $R=3, M=9$ 이므로

$$R+M=3+9=12$$

답 ①

참고 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 12이므로

$$2r + r\theta = 12$$

$$r(2 + \theta) = 12, 2 + \theta = \frac{12}{r}$$

$$\therefore \theta = \frac{12}{r} - 2$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < 2\pi \text{이므로 } 0 < \frac{12}{r} - 2 < 2\pi$$

$$\therefore \frac{6}{\pi+1} < r < 6$$

- 10 점 P는 원 $x^2 + y^2 = 25$ 와 직선 $y = -\frac{4}{3}x$ 의 교점이므로

$$y = -\frac{4}{3}x \text{를 } x^2 + y^2 = 25 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 25, x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25$$

$$\frac{25}{9}x^2 = 25, x^2 = 9 \quad \therefore x = -3 \quad (\because x < 0)$$

$$x = -3 \text{을 } y = -\frac{4}{3}x \text{에 대입하면 } y = 4$$

$$\therefore P(-3, 4)$$

$$\text{따라서 } \overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\tan \theta} = \frac{\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right)}{-\frac{4}{3}} = -\frac{21}{20}$$

답 ①

다른풀이 직선 OP의 기울기가 $-\frac{4}{3}$ 이므로

$$\tan \theta = -\frac{4}{3}$$

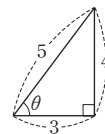
$\tan \theta = \frac{4}{3}$ 인 각 θ 를 한 내각으로 갖는 직각삼각형

은 오른쪽 그림과 같고 제2사분면의 각 θ 에 대하여

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\tan \theta} = -\frac{21}{20}$$



- 11 $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} > 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \sin \theta > 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \sin \theta < 0$$

즉, 각 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

$$\frac{\cos \theta}{\tan \theta} < 0 \text{에서}$$

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

즉, 각 θ 는 제4사분면 또는 제2사분면의 각이다.

따라서 각 θ 는 제3사분면의 각이다.

답 ③

$$\begin{aligned} 12 & \left(\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} \right)^2 + \left(\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 - \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right)^2 \\ &= \left(\sin^2 \theta + 2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) + \left(\cos^2 \theta + 2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \\ & \quad - \left(\tan^2 \theta + 2 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \\ &= \left(\sin^2 \theta + 2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) + \left(\cos^2 \theta + 2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \\ & \quad - \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 2 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + 2 \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 2 \\ &= 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 2 \\ &= 1 + 1 + 1 + 2 = 5 \end{aligned}$$

답 ⑤

- 13 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

제3사분면의 각 θ 에 대하여 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \cos \theta - \tan \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{11\sqrt{2}}{12}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 14 & \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\cos \theta(1 + \sin \theta) + \cos \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2\cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } \frac{2}{\cos \theta} &= -8 \text{ 이므로 } \cos \theta = -\frac{1}{4} \\ \therefore \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 에서 } \sin \theta > 0 \text{ 이므로 } \sin \theta &= \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \therefore \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{15} \end{aligned}$$

답 ①

15 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= \frac{1}{4}, \quad 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \\ 2 \sin \theta \cos \theta &= -\frac{3}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \\ \therefore \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \left[1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right]}{-\frac{3}{8}} = -\frac{11}{6} \end{aligned}$$

답 ①

16 이차방정식 $2x^2 - 3x + a = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) &= \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) &= \frac{a}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠} \text{ 에서 } 2 \sin \theta &= \frac{3}{2} \quad \therefore \sin \theta = \frac{3}{4} \\ \textcircled{㉡} \text{ 에서 } & \\ a &= 2(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) \\ &= 2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= 2\{\sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta)\} \\ &= 2(2\sin^2 \theta - 1) = 2 \times \left\{2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1\right\} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ③

변형유형 집중공략

p.124 ~ 125

1-1 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} 6\theta - 2\theta &= 2n\pi + \pi \quad (n \text{ 은 정수}) \\ 4\theta &= 2n\pi + \pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{이때 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } 0 < \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4} &< \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{4} < \frac{n}{2}\pi < \frac{\pi}{4} \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2} \\ n \text{ 은 정수이므로 } n &= 0 \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

답 ⑤

1-2 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} \theta + 5\theta &= 2n\pi \quad (n \text{ 은 정수}) \\ 6\theta &= 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이때 } -\pi < \theta < \pi \text{ 이므로 } -\pi < \frac{n}{3}\pi < \pi \\ \therefore -3 < n < 3 \end{aligned}$$

n 은 정수이므로 $n = -2, -1, 0, 1, 2$

따라서 $\theta = -\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$ 이므로 θ 의 최댓값과 최솟값의 차는

$$\frac{2}{3}\pi - \left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{4}{3}\pi$$

답 ②

2-1 부채꼴 모양의 운동장의 둘레의 길이가 100 m 이므로 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m 라 하면

$$2r + l = 100 \quad \therefore l = 100 - 2r \quad \left(\text{단, } \frac{50}{\pi+1} < r < 50\right)$$

부채꼴 모양의 운동장의 넓이를 S m² 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(100 - 2r) = -r^2 + 50r \\ &= -(r - 25)^2 + 625 \quad \left(\frac{50}{\pi+1} < r < 50\right) \end{aligned}$$

이므로 S 의 최댓값은 $r = 25$ 일 때 625이다.

$$\therefore M = 625$$

$$\text{이때 } S = \frac{1}{2}r^2\theta \text{ 에서}$$

$$625 = \frac{1}{2} \times 25^2 \times \theta \quad \therefore \theta = 2$$

$$\therefore M + \theta = 625 + 2 = 627$$

답 ④

참고 $2r + l = 2r + r\theta = 100$ 에서

$$r(2 + \theta) = 100 \quad \therefore \theta = \frac{100}{r} - 2$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{ 이므로}$$

$$0 < \frac{100}{r} - 2 < 2\pi \quad \therefore \frac{50}{\pi+1} < r < 50$$

2-2 부채꼴의 넓이가 9 이므로 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 둘레의 길이를 l 이라 하면

$$\frac{1}{2}rl = 9 \quad \therefore l = \frac{18}{r}$$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2r + l = 2r + \frac{18}{r}$$

$$2r > 0, \frac{18}{r} > 0 \text{ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여}$$

$$2r + \frac{18}{r} \geq 2\sqrt{2r \times \frac{18}{r}} = 2 \times 6 = 12$$

(단, 등호는 $2r = \frac{18}{r}$, 즉 $r=3$ 일 때 성립)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 12이다. **답 ②**

참고 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 $\frac{1}{2}r^2\theta = 9$ 에서

$$\theta = \frac{18}{r^2}$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{이므로 } 0 < \frac{18}{r^2} < 2\pi$$

$$r^2 > \frac{9}{\pi} \quad \therefore r > \frac{3}{\sqrt{\pi}} (\because r > 0)$$

서술형 What & How

p.126~127

1 $\overline{OC} = \overline{OD} = r$ m, $\angle AOB = \theta$ 라 하면

호 CD의 길이가 10 m이므로

$$10 = r\theta \quad \dots\dots ㉠$$

호 AB의 길이가 25 m이므로

$$25 = (r+18)\theta = r\theta + 18\theta \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots ①$$

$$㉡ - ㉠ \text{을 하면 } 15 = 18\theta \quad \therefore \theta = \frac{5}{6}$$

$$\theta = \frac{5}{6} \text{를 } ㉠ \text{에 대입하면 } \frac{5}{6}r = 10 \quad \therefore r = 12 \quad \dots\dots ②$$

$\therefore$ (도형 ABCD의 넓이)

= (부채꼴 AOB의 넓이) - (부채꼴 COD의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times (12+18) \times 25 - \frac{1}{2} \times 12 \times 10$$

$$= 375 - 60 = 315(\text{m}^2)$$

$$\therefore S = 315 \quad \dots\dots ③$$

답 315

2 $\overline{OC} = \overline{OD} = r$ m, $\angle AOB = \theta$ 라 하면

호 CD의 길이가 3 m이므로

$$3 = r\theta \quad \dots\dots ㉠$$

호 AB의 길이가 24 m이므로

$$24 = (r+14)\theta = r\theta + 14\theta \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots ①$$

$$㉡ - ㉠ \text{을 하면 } 21 = 14\theta \quad \therefore \theta = \frac{3}{2}$$

$$\theta = \frac{3}{2} \text{를 } ㉠ \text{에 대입하면 } \frac{3}{2}r = 3 \quad \therefore r = 2 \quad \dots\dots ②$$

$\therefore$ (유효 각도 영역의 넓이)

= (부채꼴 AOB의 넓이) - (부채꼴 COD의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times (2+14) \times 24 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3$$

$$= 192 - 3 = 189(\text{m}^2)$$

$$\therefore S = 189 \quad \dots\dots ③$$

답 189

채점기준	배점
① $\overline{OC} = \overline{OD} = r$ m, $\angle AOB = \theta$ 라 하고 r, θ 에 대한 식 세우기	2
② r, θ 의 값 구하기	2
③ S의 값 구하기	2

3 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{9}{25}, \quad 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{16}{25}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{25} \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 4\sin \theta \cos \theta \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{8}{25}\right) = \frac{41}{25} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

제2사분면의 각 θ 에 대하여 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

$$\therefore q = 41 \quad \dots\dots ③$$

답 41

참고 $\sin \theta \cos \theta = \frac{a}{5}$

$$\therefore a = 5\sin \theta \cos \theta = 5 \times \left(-\frac{8}{25}\right) = -\frac{8}{5}$$

4 이차방정식 $4x^2 + 3x - 9 = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta}$ 이므로 이

차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{3}{4} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{9}{4} \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{에서 } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{3}{4}$$

㉡을 위의 식에 대입하면

$$(\sin \theta + \cos \theta) \times \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \dots\dots ㉢ \quad \dots\dots ①$$

$$\text{또, } ㉡ \text{에서 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9} \quad \dots\dots ㉣ \quad \dots\dots ②$$

한편, 이차방정식 $9x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{a}{9}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{b}{9}$$

$$-\frac{a}{9} = \frac{1}{3}, \quad \frac{b}{9} = -\frac{4}{9} (\because ㉢, ㉣)$$

$$\therefore a = -3, b = -4 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore a + b = -3 + (-4) = -7 \quad \dots\dots ④$$

답 -7

채점기준	배점
① $\sin\theta + \cos\theta$ 의 값 구하기	2
② $\sin\theta \cos\theta$ 의 값 구하기	1
③ a, b 의 값 구하기	2
④ $a+b$ 의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.128~130

- 01 ① $380^\circ = 360^\circ \times 1 + 20^\circ$
 ② $790^\circ = 360^\circ \times 2 + 70^\circ$
 ③ $1300^\circ = 360^\circ \times 3 + 220^\circ$
 ④ $-70^\circ = 360^\circ \times (-1) + 290^\circ$
 ⑤ $-585^\circ = 360^\circ \times (-2) + 135^\circ$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

- 02 $\frac{a}{2}\pi = \frac{a}{2}\pi \times 1 = \frac{a}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 90a^\circ$ 이므로
 $90a = 15b \quad \therefore 6a = b \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$
 $\frac{b}{12}\pi = \frac{b}{12}\pi \times 1 = \frac{b}{12}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 15b^\circ$ 이므로
 $30a + 60 = 15b \quad \therefore 2a + 4 = b \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$
 ①, ②를 연립하여 풀면 $a=1, b=6$
 $\therefore a+b=1+6=7$

답 ③

- 03 각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일치하므로
 $7\theta - \theta = 2n\pi$ (n 은 정수)
 $6\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{3}\pi$
 이때 $0 < \theta < 5\pi$ 이므로
 $0 < \frac{n}{3}\pi < 5\pi \quad \therefore 0 < n < 15$
 n 은 정수이므로 $n=1, 2, 3, \dots, 14$
 따라서 각 θ 는 $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \dots, \frac{14}{3}\pi$ 의 14개이다.

답 ④

- 04 동경 OP_1 이 나타내는 각의 크기는 $360^\circ - 90^\circ$
 동경 OP_2 가 나타내는 각의 크기는 $360^\circ \times 2 + 180^\circ$
 동경 OP_3 이 나타내는 각의 크기는 $360^\circ \times 3 - 270^\circ$
 동경 OP_4 가 나타내는 각의 크기는 $360^\circ \times 4 + 360^\circ$
 동경 OP_5 가 나타내는 각의 크기는
 $360^\circ \times 5 - 450^\circ = 360^\circ \times 4 - 90^\circ$
 $\vdots$
 즉, 동경 OP_1 과 동경 OP_5 의 위치가 같으므로 동경 OP_n 과 동경 OP_{n+4} 의 위치가 같다. 따라서 동경 $OP_2, OP_3, OP_4, \dots, OP_{100}$ 중에서 동경 OP_1 과 같은 위치에 있는 동경은 $OP_5, OP_9, OP_{13}, \dots, OP_{97}$ 의 24개이다.

답 ④

- 05 $50^\circ = 50 \times 1^\circ = 50 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{18}\pi$ 이므로
 $l = 6 \times \frac{5}{18}\pi = \frac{5}{3}\pi$
 $S = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{5}{3}\pi = 5\pi$
 $\therefore S + 3l = 5\pi + 3 \times \frac{5}{3}\pi = 10\pi$

답 ①

- 06 $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{AC} = \overline{BD} = r$ 라 하면
 $S_1 = \frac{1}{2}r^2\theta$
 $S_2 = \frac{1}{2} \times (2r)^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \frac{1}{2}r^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
 $= \frac{3}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
 $S_1 : S_2 = 2 : 3$ 에서 $2S_2 = 3S_1$
 $2 \times \frac{3}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 3 \times \frac{1}{2}r^2\theta$
 $2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta, \pi - 2\theta = \theta$
 $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

답 ③

- 07 점 $P(a, 12)$ 가 제2사분면의 점이므로 $a < 0$
 $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + 12^2} = \sqrt{a^2 + 144}$ 이므로
 $\sin\theta = \frac{12}{\sqrt{a^2 + 144}}$
 이때 $\sin\theta = \frac{12}{13}$ 이므로 $\frac{12}{\sqrt{a^2 + 144}} = \frac{12}{13}$
 $\sqrt{a^2 + 144} = 13$
 양변을 제곱하면 $a^2 + 144 = 169$
 $a^2 = 25 \quad \therefore a = -5$ ($\because a < 0$)
 따라서 $P(-5, 12), \overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ 이므로
 $\cos\theta = -\frac{5}{13}, \tan\theta = -\frac{12}{5}$
 $\therefore 13\cos\theta - 5\tan\theta = 13 \times \left(-\frac{5}{13}\right) - 5 \times \left(-\frac{12}{5}\right) = 7$

답 ⑤

- 08 $\sin\theta \cos\theta > 0$ 에서 각 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이고,
 $\cos\theta \tan\theta < 0$ 에서 각 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.
 따라서 각 θ 는 제3사분면의 각이므로
 $\sin\theta < 0, \cos\theta < 0, \tan\theta > 0$
 $\therefore |\sin\theta + \cos\theta| = -(\sin\theta + \cos\theta),$
 $\sqrt{\sin^2\theta} = |\sin\theta| = -\sin\theta,$
 $|\cos\theta - \tan\theta| = -(\cos\theta - \tan\theta)$
 $\therefore |\sin\theta + \cos\theta| - \sqrt{\sin^2\theta} - |\cos\theta - \tan\theta|$
 $= -(\sin\theta + \cos\theta) - (-\sin\theta) - \{-(\cos\theta - \tan\theta)\}$
 $= -\sin\theta - \cos\theta + \sin\theta + \cos\theta - \tan\theta$
 $= -\tan\theta$

답 ④

09 $\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$ 이므로

$2(1 - \cos^2 \theta) = \cos^2 \theta, 3\cos^2 \theta = 2 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

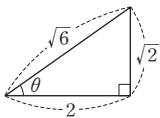
답 ①

다른풀이 $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 각 θ 를 한 내각으로

찾는 직각삼각형은 오른쪽 그림과 같고

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$\cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$



10 $\frac{1}{1 - \cos \theta} + \frac{1}{1 + \cos \theta} = \frac{(1 + \cos \theta) + (1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}$
 $= \frac{2}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta}$

$\frac{2\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3$ 에서 $2\sin \theta + \cos \theta = 3\sin \theta - 3\cos \theta$

$4\cos \theta = \sin \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{4}\sin \theta$

이것을 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$\sin^2 \theta + \left(\frac{1}{4}\sin \theta \right)^2 = 1, \frac{17}{16}\sin^2 \theta = 1$

$\therefore \sin^2 \theta = \frac{16}{17}$

$\therefore \frac{1}{1 - \cos \theta} + \frac{1}{1 + \cos \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} = \frac{2}{\frac{16}{17}} = \frac{17}{8}$

답 ④

11 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{2}, 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$

$2\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{\cos \theta} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)$

$= \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right)$

$= \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$

$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)}{(\sin \theta \cos \theta)^2}$

$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right\}}{\left(-\frac{1}{4} \right)^2} = 10\sqrt{2}$

답 ②

12 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$

$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}, 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$

$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$

$\therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$
 $= 1 - 2\sin \theta \cos \theta$
 $= 1 - 2 \times \left(-\frac{4}{9} \right) = \frac{17}{9}$

이때 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 이므로

$\sin \theta - \cos \theta < 0$

$\therefore \sin \theta - \cos \theta = -\sqrt{\frac{17}{9}} = -\frac{\sqrt{17}}{3}$

답 ①

13 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 에서 $\sin \theta = \cos \theta \tan \theta$ 이므로

$\sqrt{\cos^2 \theta + 4\sin \theta + 4\tan^2 \theta} = -2\tan \theta + \frac{1}{4}$ 에서

$\sqrt{\cos^2 \theta + 4\cos \theta \tan \theta + 4\tan^2 \theta} = -2\tan \theta + \frac{1}{4}$

$\sqrt{(\cos \theta + 2\tan \theta)^2} = -2\tan \theta + \frac{1}{4}$

$|\cos \theta + 2\tan \theta| = -2\tan \theta + \frac{1}{4} \quad \dots\dots ㉠$

제2사분면의 각 θ 에 대하여 $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이므로

$\cos \theta + 2\tan \theta < 0$

㉠에서 $-(\cos \theta + 2\tan \theta) = -2\tan \theta + \frac{1}{4}$

$-\cos \theta = \frac{1}{4} \quad \therefore \cos \theta = -\frac{1}{4}$

제2사분면의 각 θ 에 대하여 $\sin \theta > 0$ 이므로

$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$

$\therefore \sin \theta + \cos \theta + \tan \theta = \frac{\sqrt{15}}{4} + \left(-\frac{1}{4} \right) + (-\sqrt{15})$
 $= -\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{15}}{4}$

따라서 $p = -\frac{1}{4}, q = -\frac{3}{4}$ 이므로

$p + q = -\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{4} \right) = -1$

답 ①

14 이차방정식 $2x^2 + \sqrt{2}x + a = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots ㉡$

$\sin \theta \cos \theta = \frac{a}{2} \quad \dots\dots ㉢$

㉡의 양변을 제곱하면

$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$

$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}, 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 ㉠에서 } \frac{a}{2} = -\frac{1}{4} \quad \therefore a = -\frac{1}{2} \quad \text{답 ③}$$

- 15** 각 3θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$3\theta + 5\theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$8\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{4}\pi \quad \dots\dots ①$$

$$\text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } \frac{\pi}{2} < \frac{n}{4}\pi < \pi$$

$$\therefore 2 < n < 4$$

$$n \text{은 정수이므로 } n=3$$

$$\therefore \theta = \frac{3}{4}\pi \quad \dots\dots ②$$

따라서 부채꼴의 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$l = 8 \times \frac{3}{4}\pi = 6\pi$$

$$S = \frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{3}{4}\pi = 24\pi \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore \frac{l+S}{\pi} = \frac{6\pi+24\pi}{\pi} = 30 \quad \dots\dots ④$$

답 30

채점기준	배점
① θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기	1
② θ 의 값 구하기	2
③ l, S 의 값 구하기	2
④ $\frac{l+S}{\pi}$ 의 값 구하기	1

- 16** 조건 ㉠에서 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$)는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이므로

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 또는 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \quad \dots\dots ① \quad \dots\dots ①$$

조건 ㉡에서 각 θ 를 나타내는 동경 OP와 각 13θ 를 나타내는 동경 OP'이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 13\theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$14\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{14}\pi \quad \dots\dots ②$$

따라서 ㉢에서

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2n+1}{14}\pi < \pi \text{ 또는 } \pi < \frac{2n+1}{14}\pi < \frac{3}{2}\pi$$

$$7 < 2n+1 < 14 \text{ 또는 } 14 < 2n+1 < 21$$

$$6 < 2n < 13 \text{ 또는 } 13 < 2n < 20$$

$$\therefore 3 < n < \frac{13}{2} \text{ 또는 } \frac{13}{2} < n < 10$$

$$n \text{은 정수이므로 } n=4, 5, 6, 7, 8, 9$$

따라서

$$\theta = \frac{9}{14}\pi, \frac{11}{14}\pi, \frac{13}{14}\pi, \frac{15}{14}\pi, \frac{17}{14}\pi, \frac{19}{14}\pi \quad \dots\dots ③$$

이므로 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{9}{14}\pi + \frac{11}{14}\pi + \frac{13}{14}\pi + \frac{15}{14}\pi + \frac{17}{14}\pi + \frac{19}{14}\pi = 6\pi$$

$$\therefore M=6 \quad \dots\dots ④$$

답 6

채점기준	배점
① 조건 ㉠을 만족시키는 θ 의 값의 범위 구하기	1
② 조건 ㉡을 만족시키는 θ 의 값 구하기	3
③ 조건 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 θ 의 값 구하기	2
④ M 의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.131 ~ 133

- 01** $\theta = 360^\circ \times n + 150^\circ$ (n 은 정수)이므로

$$-810^\circ < \theta < 1290^\circ \text{에서}$$

$$-810^\circ < 360^\circ \times n + 150^\circ < 1290^\circ$$

$$-960^\circ < 360^\circ \times n < 1140^\circ \quad \therefore -\frac{8}{3} < n < \frac{19}{6}$$

따라서 정수 n 은 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 6개이므로 각 θ 는 6개이다. 답 ②

- 02** 각 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$2n\pi + \pi < \theta < 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore n\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < n\pi + \frac{3}{4}\pi$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{3}{4}\pi$$

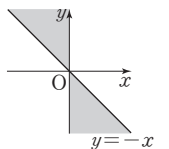
(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < (2k+1)\pi + \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{3}{2}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{7}{4}\pi$$

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할

수 있는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다. (단, 경계선은 제외한다.) 답 ③



- 03** 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$$5\theta - \theta = 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 2n\pi + \pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } \frac{\pi}{2} < \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4} < \pi$$

$$\frac{\pi}{4} < \frac{n}{2}\pi < \frac{3}{4}\pi \quad \therefore \frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

$$n \text{은 정수이므로 } n=1$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \quad \text{답 ④}$$

- 04 원뿔의 모선의 길이가 r 이므로 원뿔의 옆면
인 부채꼴의 반지름의 길이가 r 이고, 호의
길이가 12π , 넓이가 60π 이므로

$$60\pi = \frac{1}{2} \times r \times 12\pi \quad \therefore r = 10$$

또, 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이가 12π 이므로 밑면의 반지름
의 길이를 a 라 하면

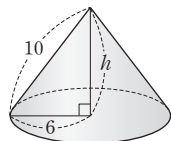
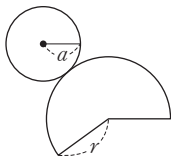
$$2a\pi = 12\pi \quad \therefore a = 6$$

따라서 원뿔의 높이를 h 라 하면

$$h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi$$

$$\therefore Vr = 96\pi \times 10 = 960\pi$$



답 ②

- 05 두 부채꼴 COB, DOE의 넓이가 같으므로

$$S_1 + S_2 = \triangle ABO$$

이때 $S_1 = S_2$ 이어야 하므로

$$S_2 + S_2 = \triangle ABO \quad \therefore 2S_2 = \triangle ABO \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 부채꼴 COB의 넓이는

$$S_2 = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

또, 직각삼각형 ABO에서 $\overline{AB} = \overline{OB} \tan \theta = r \tan \theta$ 이므로
 $\angle ABO = 90^\circ$

$$\triangle ABO = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times r \tan \theta \times r = \frac{1}{2} r^2 \tan \theta$$

따라서 ⑦에서

$$2 \times \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} r^2 \tan \theta$$

$$\therefore \tan \theta = 2\theta$$

답 ②

- 06 부채꼴의 둘레의 길이가 36이므로 호의 길이를 l 이라 하면

$$2r + l = 36 \quad \therefore l = 36 - 2r \left(\frac{18}{\pi + 1} < r < 18 \right)$$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} r l = \frac{1}{2} r (36 - 2r) = -r^2 + 18r$$

$$= -(r - 9)^2 + 81 \left(\frac{18}{\pi + 1} < r < 18 \right)$$

따라서 부채꼴의 넓이의 최댓값은 $r = 9$ 일 때 81이므로

$$81 = \frac{1}{2} \times 9^2 \times \theta \quad \therefore \theta = 2$$

$$\therefore r + \theta = 9 + 2 = 11$$

답 ②

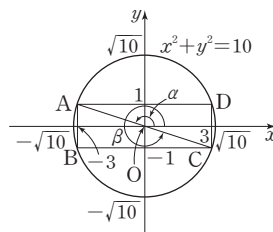
참고 $2r + l = 2r + r\theta = 36$ 에서

$$r(2 + \theta) = 36 \quad \therefore \theta = \frac{36}{r} - 2$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{이므로 } 0 < \frac{36}{r} - 2 < 2\pi$$

$$\therefore \frac{18}{\pi + 1} < r < 18$$

07



$$\overline{AD} = 6, \overline{AB} = 2 \text{이므로 } A(-3, 1)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{이므로}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$C(3, -1) \text{이고 } \overline{OC} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \text{이므로}$$

$$\sin \beta = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \left(-\frac{3}{\sqrt{10}} \right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

답 ③

- 08 $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서 각 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이
고,

$\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서 각 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이
다.

따라서 각 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

즉, $\sin \theta - 2\cos \theta > 0$ 이므로

$$|\sin \theta| - \sqrt{4\cos^2 \theta} + \sqrt{(\sin \theta - 2\cos \theta)^2}$$

$$= |\sin \theta| - |2\cos \theta| + |\sin \theta - 2\cos \theta|$$

$$= \sin \theta - (-2\cos \theta) + \sin \theta - 2\cos \theta$$

$$= 2\sin \theta$$

답 ④

$$09 \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2\sin \theta \cos \theta} + \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} + \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1}$$

$$= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} + \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1}$$

$$= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = 0$$

답 ①

$$10 \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = 5 \text{에서 } 1 + \tan \theta = 5(1 - \tan \theta)$$

$$1 + \tan \theta = 5 - 5\tan \theta, 6\tan \theta = 4$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \text{이므로}$$

$$9(1 - \cos^2 \theta) = 4\cos^2 \theta, 13\cos^2 \theta = 9$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{9}{13}$$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

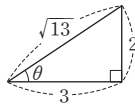
답 ①

다른풀이 $\tan \theta = \frac{2}{3}$ 인 각 θ 를 한 내각으로 갖는

직각삼각형은 오른쪽 그림과 같고 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$



- 11 이차방정식 $12x^2 - 15x + a = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{a}{12} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{25}{16}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{25}{16}, \quad 2\sin \theta \cos \theta = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{32}$$

따라서 ②에서

$$\frac{a}{12} = \frac{9}{32} \quad \therefore a = \frac{27}{8}$$

한편, 이차방정식 $x^2 + bx + 1 = 0$ 의 두 근이 $\tan \theta, \frac{1}{\tan \theta}$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-b = \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{9}{32}} = \frac{32}{9}$$

$$\therefore b = -\frac{32}{9}$$

$$\therefore ab = \frac{27}{8} \times \left(-\frac{32}{9}\right) = -12$$

답 ①

- 12 반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}r^2\theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

반지름의 길이를 20% 늘이면 반지름의 길이는 $1.2r$ 가 되므로 이때 중심각의 크기를 θ' 이라 하면 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (1.2r)^2 \times \theta' \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①=②이므로

$$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times (1.2r)^2 \times \theta'$$

$$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 1.2^2 \times r^2 \times \theta'$$

$$\theta = 1.2^2 \times \theta' \quad \therefore \theta' = \frac{\theta}{1.44} = \frac{25}{36}\theta$$

따라서 중심각의 크기는 처음 중심각의 크기의 $\frac{25}{36}$ 배가 된다.

답 ⑤

- 13 오른쪽 그림에서 $\overline{OC} = \overline{OD} = x$ cm,

$\angle AOB = \theta$ 라 하면

$$\overline{OA} = \overline{OB} = (x + 50) \text{ cm}$$

호 CD의 길이가 8π cm이므로

$$8\pi = x\theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

호 AB의 길이가 48π cm이므로

$$48\pi = (x + 50)\theta$$

$$\therefore 48\pi = x\theta + 50\theta \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②-①을 하면

$$40\pi = 50\theta \quad \therefore \theta = \frac{4}{5}\pi$$

$$\theta = \frac{4}{5}\pi \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$8\pi = \frac{4}{5}\pi x \quad \therefore x = 10$$

$$\therefore \overline{OC} = \overline{OD} = 10 \text{ cm}, \quad \overline{OA} = \overline{OB} = 60 \text{ cm}$$

따라서 고무판이 회전하면서 닳은 부분의 넓이는

(부채꼴 AOB의 넓이) - (부채꼴 COD의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 60 \times 48\pi - \frac{1}{2} \times 10 \times 8\pi = 1400\pi (\text{cm}^2)$$

답 ③

다른풀이 (부채꼴 AOB의 넓이) - (부채꼴 COD의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 60^2 \times \frac{4}{5}\pi - \frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{4}{5}\pi = 1400\pi (\text{cm}^2)$$

- 14 $\overline{PA}$ 의 중점을 M, 점 M에서 $\overline{OB}$ 에 내

린 수선의 발을 H라 하고, 반원의 반지

름의 길이를 r 라 하면

$$\overline{OM} = \overline{OA} - \overline{MA} = 6 - r$$

또, 직각삼각형 HOM에서

$$\overline{OM} = \frac{\overline{HM}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2r, \quad \overline{OH} = \frac{\overline{HM}}{\tan \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}r$$

따라서 $\overline{OM} = 6 - r = 2r$ 이므로

$$3r = 6 \quad \therefore r = 2$$

$$\therefore \overline{OM} = 4, \quad \overline{OH} = 2\sqrt{3}$$

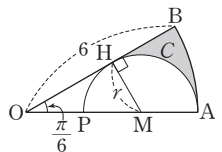
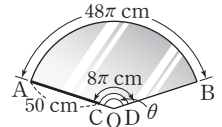
이때 부채꼴 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$$

직각삼각형 HOM의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{HM} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$$

또, 삼각형 HOM에서



..... ①

$$\angle HMA = \angle HOM + \angle OHM = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi$$

이므로 부채꼴 AMH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \quad \dots\dots ②$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

(부채꼴 AOB의 넓이) - $\triangle HOM$ - (부채꼴 AMH의 넓이)

$$= 3\pi - 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$$

$$= \frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}$$

$$\text{즉, } m = \frac{5}{3}, n = -2 \text{이므로}$$

$$30mn = 30 \times \frac{5}{3} \times (-2) = -100 \quad \dots\dots ③$$

답 -100

채점기준	배점
① 반원의 반지름의 길이 구하기	2
② 부채꼴 AOB, 직각삼각형 HOM, 부채꼴 AMH의 넓이 구하기	3
③ 30mn의 값 구하기	1

15 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -(a+1) \quad \dots\dots ㉠$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}a \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots ①$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = a^2 + 2a + 1$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = a^2 + 2a + 1$$

$$\therefore 2\sin \theta \cos \theta = a^2 + 2a$$

㉡을 이 식에 대입하면

$$2 \times \frac{3}{4}a = a^2 + 2a$$

$$\frac{3}{2}a = a^2 + 2a, a^2 + \frac{1}{2}a = 0, a\left(a + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} (\because a < 0) \quad \dots\dots ②$$

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2}, \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= -\frac{1}{2} \times \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{8} \right) \right\}$$

$$= -\frac{11}{16}$$

$$\therefore 16(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) = 16 \times \left(-\frac{11}{16} \right) = -11 \quad \dots\dots ④$$

답 -11

채점기준	배점
① 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 관계식 세우기	1
② a의 값 구하기	2
③ $\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기	1
④ $16(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)$ 의 값 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.134~136

- 1 $\overline{OA} = r (r > 0)$, $\angle COA = \theta (0 < \theta < \pi)$ 라 하면 호 AC의 길이가 π 이므로

$$\pi = r\theta \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{r}$$

부채꼴 OBC의 중심각의 크기는 $\pi - \theta$ 이고, 넓이가 15π 이므로

$$15\pi = \frac{1}{2}r^2(\pi - \theta), 15\pi = \frac{1}{2}r^2\left(\pi - \frac{\pi}{r}\right)$$

$$15 = \frac{1}{2}r^2\left(1 - \frac{1}{r}\right), 30 = r^2 - r$$

$$r^2 - r - 30 = 0, (r+5)(r-6) = 0$$

$$\therefore r = 6 (\because r > 0)$$

$$\therefore \overline{OA} = 6$$

답 6

- 2 $\overline{OA} = \overline{OB} = r (r > 0)$ 라 하면 부채꼴 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{r^2}{12}\pi$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 OB

에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AOH에서

$$\overline{AH} = \overline{OA} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}r$$

이므로

$$\triangle AOC = \frac{1}{2} \times \overline{OC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2}r = \frac{r}{12}\pi$$

이때 선분 AC가 부채꼴 AOB의 넓이를 이등분하므로

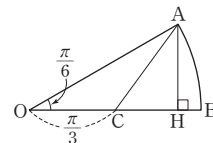
(부채꼴 AOB의 넓이) = $2\triangle AOC$

$$\frac{r^2}{12}\pi = 2 \times \frac{r}{12}\pi, r^2 = 2r$$

$$r(r-2) = 0 \quad \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

따라서 부채꼴 AOB의 반지름의 길이는 2이다.

답 ①



- 3 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ 이므로 점 P를 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인

원 위의 점으로 생각하면 점 P의 y좌표는 1이다. 이때

$x^2 + y^2 = 3^2$ 에 $y=1$ 을 대입하면 점 P의 x좌표는

$$x^2 + 1 = 9, x^2 = 8 \quad \therefore x = 2\sqrt{2} (\because x > 0) \quad \text{— 점 P는 제1사분면 위의 점이다.}$$

$$\therefore P(2\sqrt{2}, 1)$$

점 Q는 점 P를 직선 $y=x$ 에 대하

여 대칭이동한 점이므로

$$Q(1, 2\sqrt{2})$$

점 R는 점 Q를 원점에 대하여 대

칭이동한 점이므로

$$R(-1, -2\sqrt{2})$$

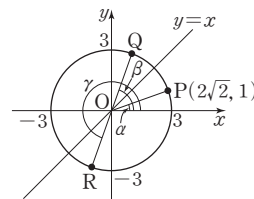
이때 세 점 P, Q, R는 모두 원 $x^2 + y^2 = 3^2$ 위의 점이므로

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \gamma = \frac{-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore 9(\sin^2 \beta + \tan^2 \gamma) = 9 \times \left\{ \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 + (2\sqrt{2})^2 \right\}$$

$$= 9 \times \left(\frac{8}{9} + 8 \right) = 80$$

답 80



- 4 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ 이므로 점 P를 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점으로 생각하면 점 P의 x 좌표는 3이다. 이때 $x^2 + y^2 = 5^2$ 에 $x=3$ 을 대입하면 점 P의 y 좌표는 $9 + y^2 = 25, y^2 = 16 \quad \therefore y = -4 (\because y < 0)$ - 점 P는 제4사분면 위의 점이다.
 $\therefore P(3, -4)$

점 Q는 점 P를 원점에 대하여 대칭이
 동한 점이므로

$$Q(-3, 4)$$

점 R는 점 Q를 y 축에 대하여 대칭이
 동한 점이므로

$$R(3, 4)$$

이때 세 점 P, Q, R는 모두 원 $x^2 + y^2 = 5^2$ 위의 점이므로

$$\sin\alpha = -\frac{4}{5}, \cos\beta = -\frac{3}{5}, \tan\gamma = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin\alpha + \cos\beta + \tan\gamma &= -\frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{3} \\ &= -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

답 ⑤

- 5 $P(a, \sqrt{a})$ ($a > 0$)라 하면

$$OP = \sqrt{a^2 + (\sqrt{a})^2} = \sqrt{a^2 + a}$$

이므로

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + a}}, \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a}}$$

이것을 $\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = -1$ 에 대입하면

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + a}}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + a}}\right)^2 = -1$$

$$\frac{a^2}{a^2 + a} - \frac{2a}{a^2 + a} = -1, a^2 - 2a = -a^2 - a$$

$$2a^2 - a = 0, a(2a - 1) = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2} (\because a > 0)$$

$$\therefore OP = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

- 6 $P(a, a^2)$ ($a > 0$)이라 하면

$$OP = \sqrt{a^2 + (a^2)^2} = \sqrt{a^2 + a^4} = a\sqrt{1 + a^2}$$

이므로

$$\sin\theta = \frac{a^2}{a\sqrt{1 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{a}{a\sqrt{1 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

이것을 $2\sin^2\theta - 3\cos^2\theta = 1$ 에 대입하면

$$2\left(\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}\right)^2 = 1$$

$$\frac{2a^2}{1 + a^2} - \frac{3}{1 + a^2} = 1, 2a^2 - 3 = 1 + a^2$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

$$\therefore OP = 2\sqrt{1 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

답 ⑤

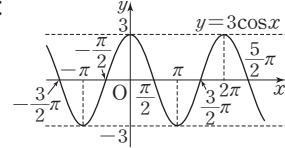
2 삼각함수의 그래프

교과서 예제

p.139

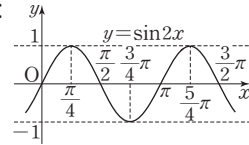
- 01 (1) 치역: $\{y | -3 \leq y \leq 3\}$, 주기: 2π

함수의 그래프:



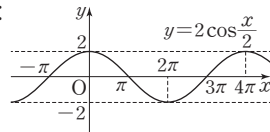
- (2) 치역: $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$, 주기: $\frac{2\pi}{2} = \pi$

함수의 그래프:



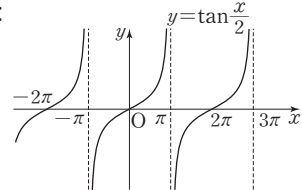
- (3) 치역: $\{y | -2 \leq y \leq 2\}$, 주기: $\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$

함수의 그래프:



- (4) 치역: 실수 전체의 집합, 주기: $\frac{\pi}{1} = \pi$

함수의 그래프:



- 답 (1) 치역: $\{y | -3 \leq y \leq 3\}$, 주기: 2π , 그래프: 풀이 참조
 (2) 치역: $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$, 주기: π , 그래프: 풀이 참조
 (3) 치역: $\{y | -2 \leq y \leq 2\}$, 주기: 4π , 그래프: 풀이 참조
 (4) 치역: 실수 전체의 집합, 주기: 2π , 그래프: 풀이 참조

- 02 (1) 주기: $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$, 최댓값: 2, 최솟값: -2

- (2) 주기: $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: $-\frac{1}{4}$

- (3) 주기: $\frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$, 최댓값: $3 + 1 = 4$,

최솟값: $-3 + 1 = -2$

- (4) 주기: $\frac{\pi}{2} = 2$, 최댓값: 없다., 최솟값: 없다.

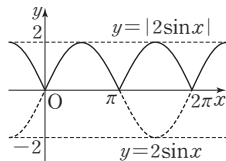
- 답 (1) 주기: $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값: 2, 최솟값: -2

- (2) 주기: π , 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: $-\frac{1}{4}$

- (3) 주기: 2π , 최댓값: 4, 최솟값: -2

- (4) 주기: 2, 최댓값: 없다., 최솟값: 없다.

- 03 (1) 함수 $y=2\sin x$ 의 주기는 2π 이고,
함수 $y=|2\sin x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수



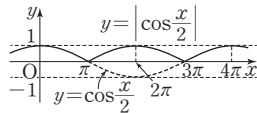
$$y=|2\sin x| \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{2}=\pi \text{이다.}$$

다.

또, 최댓값은 2, 최솟값은 0이다.

- (2) 함수 $y=\cos \frac{x}{2}$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi \text{이고, 함수}$$



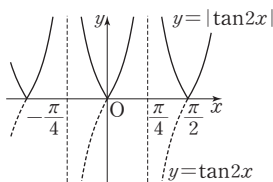
$y=|\cos \frac{x}{2}|$ 의 그래프는 위의 그림과 같으므로 함수

$y=|\cos \frac{x}{2}|$ 의 주기는 $\frac{4\pi}{2}=2\pi$ 이다.

또, 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.

- (3) 함수 $y=\tan 2x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$

이고, 함수 $y=|\tan 2x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=|\tan 2x|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.



또, 최댓값은 없고, 최솟값은 0이다.

답 (1) 주기: π , 최댓값: 2, 최솟값: 0

(2) 주기: 2π , 최댓값: 1, 최솟값: 0

(3) 주기: $\frac{\pi}{2}$, 최댓값: 없다., 최솟값: 0

04 (1) $\cos \frac{13}{6}\pi = \cos(2\pi + \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\sin \frac{5}{6}\pi = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

(4) $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $\tan \frac{11}{6}\pi = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \tan(-\frac{\pi}{6})$
 $= -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(6) $\tan \frac{4}{3}\pi = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (6) $\sqrt{3}$

다른풀이 (4) $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

05 (1) $\sin 733^\circ = \sin(360^\circ \times 2 + 13^\circ) = \sin 13^\circ = 0.2250$

(2) $\cos 104^\circ = \cos(90^\circ + 14^\circ) = -\sin 14^\circ = -0.2419$

(3) $\tan 165^\circ = \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ = -0.2679$

답 (1) 0.2250 (2) -0.2419 (3) -0.2679

- 06 (1) 오른쪽 그림과 같이

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y=\sin x$ 의 그래프와 직선

$y=\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표가

$\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ 이므로 구하는 해는

$$x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{5}{6}\pi$$

- (2) 오른쪽 그림과 같이

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y=\cos x$ 의 그래프와 직선

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표가

$\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$ 이므로 구하는 해는

$$x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{11}{6}\pi$$

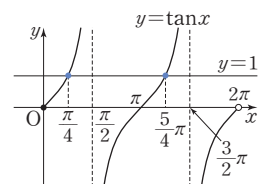
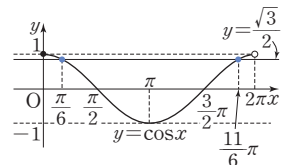
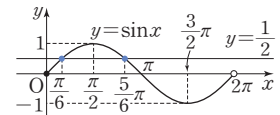
- (3) 오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$

에서 함수 $y=\tan x$ 의 그래프와

직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표가

$\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ 이므로 구하는 해는

$$x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{5}{4}\pi$$



답 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

- 07 (1) $0 \leq x < 2\pi$ 일 때 부등식

$\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 함수

$y=\sin x$ 의 그래프가 직선

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 x 의 값의

범위이므로 위의 그림에서

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$$

- (2) $0 \leq x < 2\pi$ 일 때 부등식

$\cos x < \frac{1}{2}$ 의 해는 함수

$y=\cos x$ 의 그래프가 직선

$y=\frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는

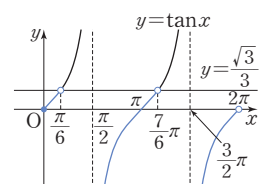
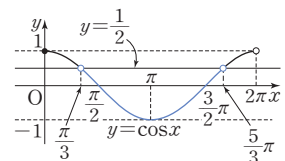
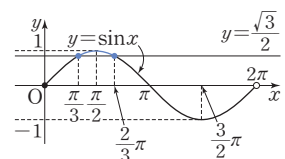
x 의 값의 범위이므로 위의 그림에서

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$$

- (3) $0 \leq x < 2\pi$ 일 때 부등식

$\tan x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 해는 함수

$y=\tan x$ 의 그래프가 직선



$y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 앞의 그림에서

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

$$\text{답 (1) } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \quad (2) \frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$$

$$(3) 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

기출 Best | 1회

p.140 ~ 143

01 $y = 2\sin(3x-6) + 2 = 2\sin\{3(x-2)\} + 2$

이므로 함수 $y = 2\sin(3x-6) + 2$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sin 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=2$, $n=2$ 이므로

$$m+n=2+2=4$$

답 ③

02 ① 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

② 그래프의 점근선의 방정식은 $2x + \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)에서 $x = \frac{n}{2}\pi$ (n 은 정수)이다.

③ 정의역은 $\{x \mid x \neq \frac{n}{2}\pi \text{ (n 은 정수)인 모든 실수}\}$ 이다.

④ $x = -\frac{\pi}{4}$ 일 때, $y = 3\tan 0 - 1 = -1$ 이므로 그래프는 점 $(-\frac{\pi}{4}, -1)$ 을 지난다.

⑤ $y = 3\tan(2x + \frac{\pi}{2}) - 1 = 3\tan\{2(x + \frac{\pi}{4})\} - 1$ 의 그래프는

함수 $y = 3\tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축

의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

03 최댓값은 $|\frac{1}{2}| + 2 = \frac{5}{2}$ $\therefore M = \frac{5}{2}$

최솟값은 $-|\frac{1}{2}| + 2 = \frac{3}{2}$ $\therefore m = \frac{3}{2}$

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ $\therefore p = 6$

$\therefore M+m+p = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 6 = 10$

답 ④

04 $a > 0$ 이므로 조건 (나)에서

$$a+d=7, -a+d=1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=4$

조건 (다)에서 함수 $f(x)$ 의 주기가 2이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 2 \quad \therefore b = \pi$$

$$\therefore f(x) = 3\sin(\pi x + c) + 4$$

조건 (가)에서

$$f(\frac{1}{6}) = 3\sin(\frac{\pi}{6} + c) + 4 = 7, 3\sin(\frac{\pi}{6} + c) = 3, \sin(\frac{\pi}{6} + c) = 1$$

$$0 < c < 2\pi \text{에서 } \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + c < \frac{13}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{6} + c = \frac{\pi}{2} \quad \therefore c = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{ac}{b} + d = \frac{3 \times \frac{\pi}{3}}{\pi} + 4 = 5$$

답 ⑤

05 그래프에서 함수 $y = a\sin(bx+c)$ 의 최댓값이 3, 최솟값이 -3 이므로

$$|a| = 3 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

$$\text{주기가 } \frac{5}{6}\pi - (-\frac{\pi}{6}) = \pi \text{이므로}$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi, |b| = 2 \quad \therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

함수 $y = 3\sin(2x+c)$ 의 그래프가 점 $(\frac{\pi}{12}, 3)$ 을 지나므로

$$3 = 3\sin(2 \times \frac{\pi}{12} + c), \sin(\frac{\pi}{6} + c) = 1$$

$$0 \leq c < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6} + c < \frac{7}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{6} + c = \frac{\pi}{2} \quad \therefore c = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore abc = 3 \times 2 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

답 ②

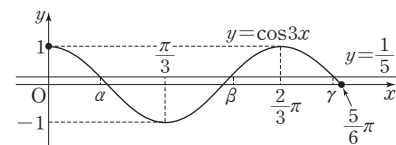
다른풀이 함수 $y = 3\sin(2x+c)$ 의 그래프가 점 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 을 지나

$$\text{므로 } 0 = 3\sin(\frac{2}{3}\pi + c), \sin(\frac{2}{3}\pi + c) = 0$$

$$0 \leq c < \pi \text{에서 } \frac{2}{3}\pi \leq \frac{2}{3}\pi + c < \frac{5}{3}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{2}{3}\pi + c = \pi \quad \therefore c = \frac{\pi}{3}$$

06



함수 $y = \cos 3x$ 의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로 그래프는 위의 그림과 같다.

따라서 두 점 $(\beta, \frac{1}{5}), (\gamma, \frac{1}{5})$ 이 직선 $x = \frac{2}{3}\pi$ 에 대하여 대칭이

므로

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore \beta + \gamma = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \cos\{3(\beta + \gamma - \alpha)\} = \cos\{3(\frac{4}{3}\pi - \alpha)\}$$

$$= \cos(4\pi - 3\alpha)$$

$$= \cos(-3\alpha)$$

$$= \cos 3\alpha = \frac{1}{5}$$

답 ①

- 07 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 모두 같으므로 함수

$$y=2\cos\frac{\pi}{4}x \quad (-4\leq x\leq 4) \text{의 그래프}$$

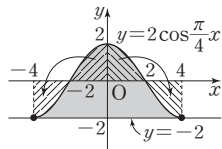
와 직선 $y=-2$ 로 둘러싸인 도형의 넓

이는 가로 길이가 8, 세로 길이가 2인 직사각형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$8 \times 2 = 16$$

답 ⑤



- 08 함수 $y=\sin x$ 의 주기는 2π 이고, 함수 $y=|\sin x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기는 π 이다.

따라서 함수 $y=|\sin x|-3$ 의 주기도 π 이다.

$$\therefore \text{주기는 } \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\therefore \text{주기는 } \frac{2\pi}{2} = \pi$$

ㄷ. 주기는 π

ㄹ. 함수 $y=\tan 2x$ 의 주기는

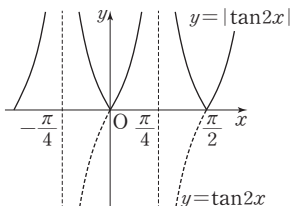
$$\frac{\pi}{2} \text{이고, 함수}$$

$y=|\tan 2x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

따라서 함수 $y=|\sin x|-3$ 과 주기가 같은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③



$$09 \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos(-\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\sin(\pi+\theta)$$

$$-\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi+\theta)}$$

$$=\cos\theta \times \cos\theta + (-\sin\theta) \times (-\sin\theta) - \frac{\sin\theta}{-\cos\theta}$$

$$=\cos^2\theta + \sin^2\theta + \tan\theta = 1 + \tan\theta$$

답 ①

$$10 \sin\frac{5}{6}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$= -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\therefore \sin\frac{5}{6}\pi + \cos\left(\frac{5}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

답 ④

$$\begin{aligned} \text{다른풀이 } \cos\left(\frac{5}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) &= \cos\frac{19}{6}\pi = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$11 \cos 89^\circ = \cos(90^\circ - 1^\circ) = \sin 1^\circ$$

$$\cos 88^\circ = \cos(90^\circ - 2^\circ) = \sin 2^\circ$$

$$\cos 87^\circ = \cos(90^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ$$

$\vdots$

$$\cos 46^\circ = \cos(90^\circ - 44^\circ) = \sin 44^\circ$$

$$\therefore \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cdots + \cos^2 89^\circ$$

$$= (\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \cos^2 88^\circ)$$

$$+ \cdots + (\cos^2 44^\circ + \cos^2 46^\circ) + \cos^2 45^\circ$$

$$= (\cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ)$$

$$+ \cdots + (\cos^2 44^\circ + \sin^2 44^\circ) + \cos^2 45^\circ$$

$$= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2}$$

답 ②

$$12 \cos(\pi+x) = -\cos x,$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

이므로

$$y = 3\cos(\pi+x) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$= -3\cos x - \cos x + 1 = -4\cos x + 1$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서 $-4 \leq -4\cos x \leq 4$, 즉

$-3 \leq -4\cos x + 1 \leq 5$ 이므로 이 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 -3이다.

따라서 $M=5$, $m=-3$ 이므로

$$M-m=5-(-3)=8$$

답 ⑤

$$13 y = -\sin^2 x + 2\cos x - 3$$

$$= -(1 - \cos^2 x) + 2\cos x - 3$$

$$= \cos^2 x + 2\cos x - 4$$

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서

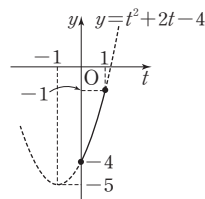
$0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 + 2t - 4 = (t+1)^2 - 5$$

$0 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는 $t=0$ 에서 최솟값 -4를 갖는다.

따라서 구하는 함수의 최솟값은 -4이다.

답 ②



참고 이차식 꼴로 주어진 삼각함수를 포함한 함수의 최대, 최소는 다음과 같이 구한다.

(i) 두 종류 이상의 삼각함수를 한 종류의 삼각함수로 통일한다.

(ii) 삼각함수를 t 로 치환하고 t 의 값의 범위를 구한다.

(iii) 그래프를 이용하여 (ii)의 범위에서 최대, 최소를 구한다.

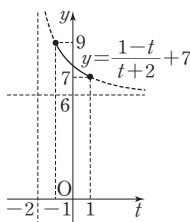
- 14 $y = \frac{1-\sin x}{\sin x + 2} + 7$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{1-t}{t+2} + 7 = \frac{3}{t+2} + 6$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는 $t = -1$ 에서 최댓값 9, $t = 1$ 에서 최솟값 7을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$9 + 7 = 16$$



답 ④

- 15 $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ 에서 $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$, 즉

$$-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}\pi \text{이고 } \sin t = \frac{1}{2}$$

$-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$

의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의

t 좌표는 오른쪽 그림과 같이

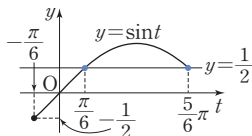
$$t = \frac{\pi}{6}, t = \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi$$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$$



답 ②

- 16 $2\cos^2 x - \sin x - 2 = 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 2 = 0$$

$$-2\sin^2 x - \sin x = 0, \sin x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = -\frac{1}{2}$$

(i) $\sin x = 0$ 일 때,

$$0 \leq x < 2\pi \text{이므로}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \pi$$

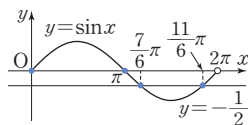
(ii) $\sin x = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$0 \leq x < 2\pi \text{이므로}$$

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

(i), (ii)에서 $\alpha = \frac{11}{6}\pi, \beta = \frac{7}{6}\pi, \gamma = \pi, \delta = 0$ 이므로

$$\alpha - \beta + \gamma - \delta = \frac{11}{6}\pi - \frac{7}{6}\pi + \pi - 0 = \frac{5}{3}\pi$$



답 ②

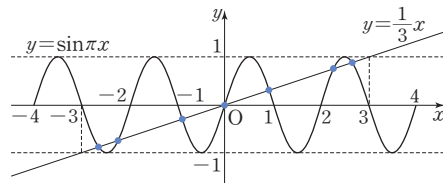
- 17 방정식 $\sin \pi x = \frac{1}{3}x$ 의 실근은 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{1}{3}x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

함수 $y = \sin \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, 최댓값은 1, 최솟값은 -1 이

고, 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 는 두 점 $(3, 1), (-3, -1)$ 을 지나므로 함수

$y = \sin \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 의 교점의 개수

가 7이므로 방정식 $\sin \pi x = \frac{1}{3}x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7이

다.

답 ③

- 18 $4\cos^2 x + 2\sin x + k = 0$ 에서

$$4(1 - \sin^2 x) + 2\sin x + k = 0, 4 - 4\sin^2 x + 2\sin x + k = 0$$

$$\therefore 4\sin^2 x - 2\sin x - 4 = k$$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y = 4\sin^2 x - 2\sin x - 4$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = 4t^2 - 2t - 4 = 4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

오른쪽 그림과 같이 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수

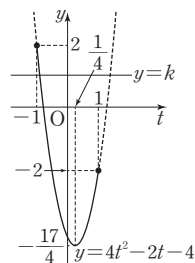
$y = 4t^2 - 2t - 4$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의

교점이 존재하도록 하는 k 의 값의 범위는

$$-\frac{17}{4} \leq k \leq 2$$

따라서 정수 k 는 $-4, -3, -2, \dots, 2$ 의

7개이다.



답 ⑤

- 19 $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \leq 0$ 에서 $x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에

$$\text{서 } -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi \text{이고}$$

$$2\cos t + \sqrt{3} \leq 0 \quad \therefore \cos t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots ①$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi \text{에서 부등식}$$

①을 만족시키는 t 의 값의

범위는 오른쪽 그림에서

$$\frac{5}{6}\pi \leq t \leq \frac{7}{6}\pi \text{이므로}$$

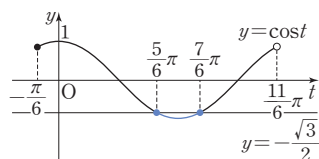
$$\frac{5}{6}\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi \quad \therefore \pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$$

따라서 $\alpha = \pi, \beta = \frac{4}{3}\pi$ 이므로

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\pi + \frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

답 ④



20 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ 이므로 $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-5\sin x+1\leq 0$ 에서

$$2\cos^2 x-5\sin x+1\leq 0, 2(1-\sin^2 x)-5\sin x+1\leq 0$$

$$2-2\sin^2 x-5\sin x+1\leq 0, 2\sin^2 x+5\sin x-3\geq 0$$

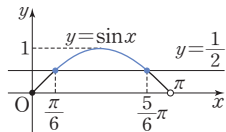
$$(\sin x+3)(2\sin x-1)\geq 0$$

이때 $\sin x+3>0$ 이므로

$$2\sin x-1\geq 0 \quad \therefore \sin x\geq \frac{1}{2}$$

$0\leq x<\pi$ 에서 부등식 $\sin x\geq \frac{1}{2}$ 의 해

는 오른쪽 그림에서 $\frac{\pi}{6}\leq x\leq \frac{5}{6}\pi$ 이므로



$$\text{로 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{5}{6}\pi}{\frac{\pi}{6}} = 5$$

답 ⑤

참고 $-1\leq \sin x\leq 1$ 이므로 $2\leq \sin x+3\leq 4$

21 이차방정식 $4x^2+4\sqrt{2}(\sin\theta)x+\cos\theta+1=0$ 이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(2\sqrt{2}\sin\theta)^2-4(\cos\theta+1)\geq 0$$

$$8\sin^2\theta-4\cos\theta-4\geq 0, 8(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta-4\geq 0$$

$$8\cos^2\theta+4\cos\theta-4\leq 0, 2\cos^2\theta+\cos\theta-1\leq 0$$

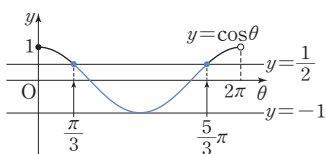
$$(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)\leq 0 \quad \therefore -1\leq \cos\theta\leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots ⑦$$

$0\leq \theta<2\pi$ 에서 부등식 ⑦

을 만족시키는 θ 의 값의 범

위는 오른쪽 그림에서

$$\frac{\pi}{3}\leq \theta\leq \frac{5}{3}\pi \text{이므로}$$



$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore \tan(\beta-\alpha) = \tan\frac{4}{3}\pi = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

답 ⑤

기출 Best | 2회

p.144~147

01 함수 $y=-\cos\frac{\pi}{4}x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=-\cos\frac{\pi}{4}x \quad \therefore y=\cos\frac{\pi}{4}x$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로

$\frac{1}{3}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-\frac{1}{3}=\cos\left[\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] \quad \therefore y=\cos\left[\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{3}$$

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{7}{2}, a\right)$ 를 지나므로

$$a=\cos\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{3}=\cos\pi+\frac{1}{3}$$

$$=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

답 ②

02 ② $x=0$ 일 때, $3\cos\frac{\pi}{2}-1=-1$ 이므로 그래프는 점 $(0, -1)$

을 지난다.

③ 최댓값은 $3-1=2$ 이다.

④ 최솟값은 $-3-1=-4$ 이다.

⑤ $y=3\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-1=3\cos\left\{3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\}-1$ 의 그래프는

함수 $y=3\cos 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축의

방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

답 ②

03 주기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{4}, |a|=8$

$$\therefore a=8 (\because a>0)$$

$$\text{최댓값이 } 5 \text{이므로 } 3+b=5 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore y=3\sin 8x+2$$

$$\text{이 함수의 최솟값은 } -3+2=-1 \quad \therefore m=-1$$

$$\therefore a+b+m=8+2+(-1)=9$$

답 ③

04 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x-b=m\pi+\frac{\pi}{2} \text{에서 } x=m\pi+\frac{\pi}{2}+b \text{ (단, } m \text{은 정수)}$$

조건 (가)에서

$$m\pi+\frac{\pi}{2}+b=n\pi+\frac{3}{4}\pi \quad \therefore b=(n-m)\pi+\frac{\pi}{4}$$

정수

$$\text{그런데 } 0<b<\pi \text{이므로 } b=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore f(x)=a\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+c$$

$$\text{조건 (나)에서 } f\left(\frac{\pi}{4}\right)=c=3$$

$$f(-\pi)=a\tan\left(-\pi-\frac{\pi}{4}\right)+c=-a\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+3$$

$$=-a\tan\frac{\pi}{4}+3=-a+3=5$$

$$\therefore a=-2$$

$$\therefore \frac{2ab}{\pi}+c=\frac{2\times(-2)\times\frac{\pi}{4}}{\pi}+3=2$$

답 ①

05 그래프에서 함수 $y=a\cos\{\pi(x-b)\}+c$ 의 최댓값이 3, 최솟값이 -1 이므로

$$|a|+c=3, -|a|+c=-1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $|a|=2, c=1$

$$\therefore a=-2, c=1 (\because a<0)$$

함수 $y = -2\cos\{\pi(x-b)\} + 1$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ 을 지나므로

$$3 = -2\cos\left\{\pi\left(\frac{2}{3}-b\right)\right\} + 1, 2\cos\left\{\pi\left(\frac{2}{3}-b\right)\right\} = -2$$

$$\cos\left\{\pi\left(\frac{2}{3}-b\right)\right\} = -1$$

$$1 < b < 2 \text{에서 } -2 < -b < -1,$$

$$-\frac{4}{3} < \frac{2}{3} - b < -\frac{1}{3}, \text{ 즉 } -\frac{4}{3}\pi < \pi\left(\frac{2}{3}-b\right) < -\frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\pi\left(\frac{2}{3}-b\right) = -\pi, \frac{2}{3}-b = -1 \quad \therefore b = \frac{5}{3}$$

$$\therefore abc = (-2) \times \frac{5}{3} \times 1 = -\frac{10}{3}$$

답 ②

06 오른쪽 그림에서 두 점 (a, k) ,

(c, k) 가 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여

대칭이므로

$$\frac{a+c}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore a+c = \pi$$

오른쪽 그림에서 두 점 (b, k) ,

(d, k) 가 직선 $x = \pi$ 에 대하여

대칭이므로

$$\frac{b+d}{2} = \pi$$

$$\therefore b+d = 2\pi$$

$$\therefore a+b+c+d = (a+c) + (b+d) = \pi + 2\pi = 3\pi$$

답 ①

07 함수 $y = \cos \frac{\pi}{8}x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 두 점 B,

C는 y 축에 대하여 대칭이다.

이때 $\overline{BC} = 4$ 이므로 $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$

점 D의 x 좌표가 2이므로 y 좌표는

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{8} \times 2\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore D\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore \overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$$\overline{BC} \times \overline{CD} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

답 ②

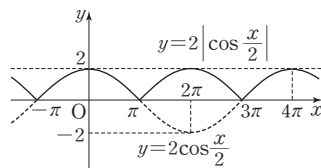
08 함수 $y = 2\cos \frac{x}{2}$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \text{이고, 함수}$$

$$y = \left| 2\cos \frac{x}{2} \right| = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right|$$

의 그래프는 위의 그림과 같으므로 주기는 2π 이다.

따라서 함수 $y = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| + 1$ 의 주기도 2π 이다.



$$\therefore a = 2\pi$$

앞의 그림에서 $0 \leq 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq 2$ 이므로

$$1 \leq 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| + 1 \leq 3$$

즉, 함수 $y = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| + 1$ 의 치역은 $\{y \mid 1 \leq y \leq 3\}$ 이므로

$$b = 1, c = 3$$

$$\therefore abc = 2\pi \times 1 \times 3 = 6\pi$$

답 ⑤

참고 $-1 \leq \cos \frac{x}{2} \leq 1$ 이므로

$$0 \leq \left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq 1, 0 \leq 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq 2$$

$$\therefore 1 \leq 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| + 1 \leq 3$$

$$09 \quad \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\tan(\pi-\theta)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{-\tan\theta} + \frac{\cos\theta \times \cos\theta}{\cos\theta}$$

$$= -\frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \cos\theta$$

$$= -\cos\theta + \cos\theta = 0$$

답 ②

$$10 \quad \sin \frac{7}{3}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{9}{4}\pi = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin \frac{7}{3}\pi + \tan \frac{9}{4}\pi}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)} \\ &= -7 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ②

$$11 \quad \sin \frac{9}{20}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20}\right) = \cos \frac{\pi}{20}$$

$$\sin \frac{7}{20}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{20}\pi\right) = \cos \frac{3}{20}\pi$$

$$\therefore \sin^2 \frac{\pi}{20} + \sin^2 \frac{3}{20}\pi + \sin^2 \frac{5}{20}\pi + \sin^2 \frac{7}{20}\pi + \sin^2 \frac{9}{20}\pi$$

$$= \left(\sin^2 \frac{\pi}{20} + \sin^2 \frac{9}{20}\pi\right) + \left(\sin^2 \frac{3}{20}\pi + \sin^2 \frac{7}{20}\pi\right)$$

$$+ \sin^2 \frac{5}{20}\pi$$

$$= \left(\sin^2 \frac{\pi}{20} + \cos^2 \frac{\pi}{20}\right) + \left(\sin^2 \frac{3}{20}\pi + \cos^2 \frac{3}{20}\pi\right) + \sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

답 ⑤

12 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$0 \leq \cos x + 1 \leq 2, 0 \leq |\cos x + 1| \leq 2$$

$$0 \leq a|\cos x + 1| \leq 2a \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore b \leq a|\cos x + 1| + b \leq 2a + b$$

따라서 함수 $y = a|\cos x + 1| + b$ 의 최댓값은 $2a + b$, 최솟값은 b 이므로

$$2a + b = 7, b = -3$$

$$\therefore a = 5, b = -3$$

$$\therefore a + b = 5 + (-3) = 2$$

답 ①

13 $y = \cos^2 x - \sin x + 3$

$$= (1 - \sin^2 x) - \sin x + 3$$

$$= -\sin^2 x - \sin x + 4$$

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 - t + 4 = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$$t = -\frac{1}{2} \text{에서 최댓값 } \frac{17}{4},$$

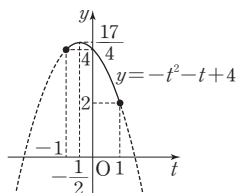
$$t = 1 \text{에서 최솟값 } 2$$

를 갖는다.

$$\text{따라서 } M = \frac{17}{4}, m = 2 \text{이므로}$$

$$Mm = \frac{17}{4} \times 2 = \frac{17}{2}$$

답 ③



14 $y = \frac{\cos x - a}{\cos x + 3}$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{t - a}{t + 3} = \frac{-3 - a}{t + 3} + 1$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$$t = 1 \text{에서 최댓값 } \frac{1-a}{4},$$

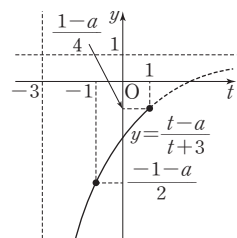
$$t = -1 \text{에서 최솟값 } \frac{-1-a}{2}$$

를 갖는다. 이때 최댓값이 -1 이므로

$$\frac{1-a}{4} = -1, 1-a = -4 \quad \therefore a = 5$$

$$\text{따라서 최솟값은 } \frac{-1-5}{2} = -3$$

답 ⑤

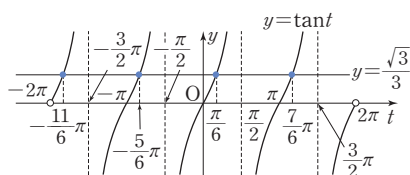


15 $3\tan 2x - \sqrt{3} = 0$ 에서 $\tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$2x = t$ 로 놓으면 $-\pi < x < \pi$ 에서 $-2\pi < 2x < 2\pi$, 즉

$-2\pi < t < 2\pi$ 이고

$$\tan t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$-2\pi < t < 2\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 교

점의 t 좌표는 앞의 그림에서

$$-\frac{11}{6}\pi, -\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi$$

이므로

$$2x = -\frac{11}{6}\pi \text{ 또는 } 2x = -\frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } 2x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 2x = \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore x = -\frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } x = -\frac{5}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x = \frac{7}{12}\pi$$

따라서 가장 큰 근과 가장 작은 근의 차는

$$\frac{7}{12}\pi - \left(-\frac{11}{12}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi$$

답 ③

16 $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ 에서

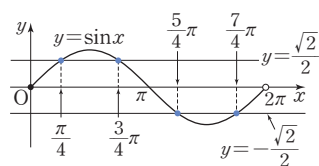
$$(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 0, -2\sin^2 x = -1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \therefore \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3}{4}\pi$$



(ii) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$$x = \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = 4\pi$$

답 ④

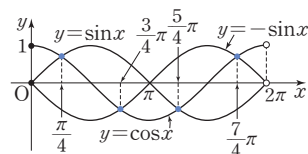
다름풀이 $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ 에서

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 0$$

(i) $\cos x = \sin x$ 일 때,

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$



(ii) $\cos x = -\sin x$ 일 때,

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$$x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$

(i), (ii)에서 구하는 합은

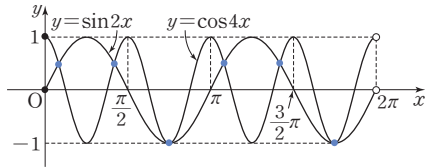
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = 4\pi$$

17 방정식 $\sin 2x = \cos 4x$ 의 실근은 두 함수 $y = \sin 2x$, $y = \cos 4x$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

함수 $y = \sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 최댓값은 1, 최솟값은 -1 이

고, 함수 $y = \cos 4x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 최댓값은 1, 최솟값은

-1 이므로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 두 함수 $y = \sin 2x$, $y = \cos 4x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 두 함수 $y = \sin 2x$, $y = \cos 4x$ 의 그래프의 교점의 개수가 6이므로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 $\sin 2x = \cos 4x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이다. **답 ③**

- 18** $-2\sin^2 x + 2\cos x - a = 0$ 에서
 $-2(1 - \cos^2 x) + 2\cos x - a = 0$
 $\therefore 2\cos^2 x + 2\cos x - 2 = a$
 이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y = 2\cos^2 x + 2\cos x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 존재해야 한다.
 이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

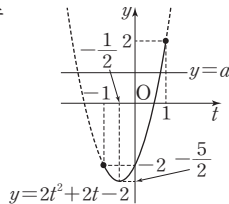
$$y = 2t^2 + 2t - 2 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = 2t^2 + 2t - 2$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 존재하도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-\frac{5}{2} \leq a \leq 2$$

따라서 $M = 2$, $m = -\frac{5}{2}$ 이므로

$$M + m = 2 + \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

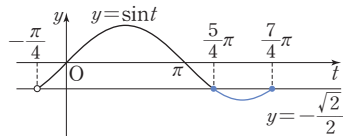


답 ①

- 19** $2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq -\sqrt{2}$ 에서 $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $x - \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $0 < x \leq 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{4} < t \leq \frac{7}{4}\pi$ 이고

$$\sin t \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots ①$$

$-\frac{\pi}{4} < t \leq \frac{7}{4}\pi$ 에서 부등식 ①을 만족시키는 t 의 값의 범위는 오른쪽 그림



에서 $\frac{5}{4}\pi \leq t \leq \frac{7}{4}\pi$ 이므로

$$\frac{5}{4}\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi \quad \therefore \frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, $\beta = 2\pi$ 이므로

$$\beta - \alpha = 2\pi - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

답 ②

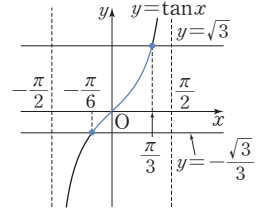
- 20** $\sqrt{3}\tan^2 x - 2\tan x \leq \sqrt{3}$ 에서
 $\sqrt{3}\tan^2 x - 2\tan x - \sqrt{3} \leq 0$
 $(\sqrt{3}\tan x + 1)(\tan x - \sqrt{3}) \leq 0$
 $\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan x \leq \sqrt{3} \quad \dots\dots ①$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 부등식 ①을 만족시키는 x 의 값의 범위는 오른쪽

그림에서 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\alpha = -\frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$



답 ①

- 21** 이차방정식 $6x^2 + 4(\cos \theta)x + \sin \theta = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\cos \theta)^2 - 6\sin \theta < 0$$

$$4(1 - \sin^2 \theta) - 6\sin \theta < 0, 4 - 4\sin^2 \theta - 6\sin \theta < 0$$

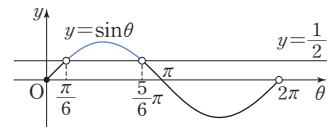
$$2\sin^2 \theta + 3\sin \theta - 2 > 0, (\sin \theta + 2)(2\sin \theta - 1) > 0$$

이때 $\sin \theta + 2 > 0$ 이므로

$$2\sin \theta - 1 > 0, 2\sin \theta > 1 \quad \therefore \sin \theta > \frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 부등식 ①을

만족시키는 θ 의 값의 범위는 오른쪽 그림에서



$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

답 ④

변형유형 집중공략

p.148~149

1-1 $12\theta = 2\pi$ 이므로

$$\sin 11\theta = \sin(12\theta - \theta) = \sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta,$$

$$\sin 10\theta = \sin(12\theta - 2\theta) = \sin(2\pi - 2\theta) = \sin(-2\theta)$$

$$= -\sin 2\theta,$$

$$\sin 9\theta = \sin(12\theta - 3\theta) = \sin(2\pi - 3\theta) = \sin(-3\theta)$$

$$= -\sin 3\theta,$$

$$\sin 8\theta = \sin(12\theta - 4\theta) = \sin(2\pi - 4\theta) = \sin(-4\theta)$$

$$= -\sin 4\theta,$$

$$\sin 7\theta = \sin(12\theta - 5\theta) = \sin(2\pi - 5\theta) = \sin(-5\theta)$$

$$= -\sin 5\theta$$

$$\therefore \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \dots + \sin 12\theta$$

$$= \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta + \sin \pi$$

$$+ (-\sin 5\theta) + (-\sin 4\theta) + (-\sin 3\theta)$$

$$+ (-\sin 2\theta) + (-\sin \theta) + \sin 2\pi$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\therefore a = 0$$

또, $6\theta = \pi$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \cos 11\theta &= \cos(6\theta + 5\theta) = \cos(\pi + 5\theta) = -\cos 5\theta \\
 \cos 10\theta &= \cos(6\theta + 4\theta) = \cos(\pi + 4\theta) = -\cos 4\theta, \\
 \cos 9\theta &= \cos(6\theta + 3\theta) = \cos(\pi + 3\theta) = -\cos 3\theta, \\
 \cos 8\theta &= \cos(6\theta + 2\theta) = \cos(\pi + 2\theta) = -\cos 2\theta, \\
 \cos 7\theta &= \cos(6\theta + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \\
 \therefore \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos 12\theta \\
 &= \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta + \cos \pi \\
 &\quad + (-\cos \theta) + (-\cos 2\theta) + (-\cos 3\theta) \\
 &\quad + (-\cos 4\theta) + (-\cos 5\theta) + \cos 2\pi \\
 &= -1 + 1 = 0 \\
 \therefore b &= 0 \\
 \therefore a + b &= 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

답 0

1-2 $\angle P_1OP = \angle P_2OP_1 = \angle P_3OP_2 = \cdots = \angle QOP_8 = \frac{90^\circ}{9} = 10^\circ$

$$\begin{aligned}
 \overline{OP_1} &= \overline{OP_2} = \overline{OP_3} = \cdots = \overline{OP_8} = 1 \text{ 이므로} \\
 \overline{OQ_1} &= \overline{OP_1} \cos 10^\circ = \cos 10^\circ, \\
 \overline{OQ_2} &= \overline{OP_2} \cos 20^\circ = \cos 20^\circ, \\
 \overline{OQ_3} &= \overline{OP_3} \cos 30^\circ = \cos 30^\circ, \\
 &\vdots \\
 \overline{OQ_8} &= \overline{OP_8} \cos 80^\circ = \cos 80^\circ \\
 \text{이때} \\
 \overline{OQ_8} &= \cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ, \\
 \overline{OQ_7} &= \cos 70^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ, \\
 \overline{OQ_6} &= \cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ, \\
 \overline{OQ_5} &= \cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ \\
 \text{이므로} \\
 \overline{OQ_1}^2 + \overline{OQ_2}^2 + \overline{OQ_3}^2 + \cdots + \overline{OQ_8}^2 \\
 &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cdots + \cos^2 80^\circ \\
 &= (\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ) \\
 &\quad + (\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ) + (\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ) \\
 &= (\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) \\
 &\quad + (\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ) + (\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ) \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4
 \end{aligned}$$

답 4

2-1 $\cos 2x - \sin 4x = 0$ 에서 $\cos 2x = \sin 4x$

$0 \leq x < \pi$ 에서 방정식 $\cos 2x = \sin 4x$ 의 실근은 두 함수 $y = \cos 2x$, $y = \sin 4x$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

함수 $y = \cos 2x$ 의 그래프의 주기는

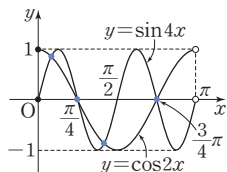
$$\frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 최댓값은 } 1, \text{ 최솟값은 } -1$$

이고 함수 $y = \sin 4x$ 의 그래프의 주

$$\text{기는 } \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ 최댓값은 } 1, \text{ 최솟값은}$$

-1 이므로 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 두 함수 $y = \cos 2x$, $y = \sin 4x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 두 함수 $y = \cos 2x$, $y = \sin 4x$ 의 그래프의 교점의 개수가 4이므로 방정식 $\cos 2x = \sin 4x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



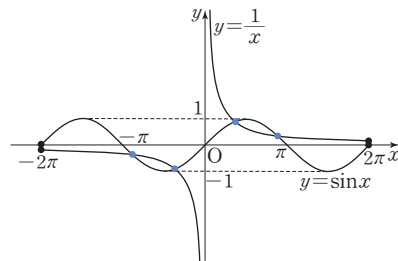
답 ④

2-2 $x \sin x = 1$ 에서

$x = 0$ 일 때, $0 = 1$ 이므로 $x = 0$ 은 근이 아니다.

$$x \neq 0 \text{ 일 때, } x \sin x = 1 \text{ 에서 } \sin x = \frac{1}{x}$$

이 방정식의 실근은 두 함수 $y = \sin x$, $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같고, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서 두 함수 $y = \sin x$, $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 두 함수 $y = \sin x$, $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프의 교점의 개수가 4이므로 방정식 $x \sin x = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

답 ①

서술형 What & How

p.150~153

1 그래프에서 함수 $y = a \sin bx + c$ 의 최댓값이 2, 최솟값이 -4 이므로

$$|a| + c = 2, -|a| + c = -4$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } |a| = 3, c = -1$$

$$\therefore a = 3, c = -1 (\because a > 0)$$

..... ①

$$\text{또, 주기가 } \frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \pi \text{ 이므로}$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi, |b| = 2 \quad \therefore b = 2 (\because b > 0)$$

..... ②

$$\therefore abc = 3 \times 2 \times (-1) = -6$$

..... ③

답 -6

2 그래프에서 함수 $y = a \sin \{b(x-c)\} + d$ 의 최댓값이 1, 최솟값이 -3 이므로

$$|a| + d = 1, -|a| + d = -3$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } |a| = 2, d = -1$$

$$\therefore a = 2, d = -1 (\because a > 0)$$

..... ①

$$\text{또, 주기가 } \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2, |b| = \pi \quad \therefore b = \pi (\because b > 0)$$

..... ②

함수 $y = 2 \sin \{\pi(x-c)\} - 1$ 의 그래프가 점 $(\frac{1}{2}, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = 2 \sin \left\{ \pi \left(\frac{1}{2} - c \right) \right\} - 1, 2 \sin \left\{ \pi \left(\frac{1}{2} - c \right) \right\} = -2$$

$$\sin\left\{\pi\left(\frac{1}{2}-c\right)\right\}=-1$$

$$0 < c < 2 \text{에서 } -2 < -c < 0$$

$$-\frac{3}{2} < \frac{1}{2}-c < \frac{1}{2}, \text{ 즉 } -\frac{3}{2}\pi < \pi\left(\frac{1}{2}-c\right) < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\pi\left(\frac{1}{2}-c\right)=-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}-c=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore c=1$$

$$\therefore \frac{abcd}{\pi}=\frac{2 \times \pi \times 1 \times (-1)}{\pi}=-2$$

..... ③

..... ④

답 -2

채점기준	배점
① a, d의 값 구하기	2
② b의 값 구하기	1
③ c의 값 구하기	2
④ $\frac{abcd}{\pi}$ 의 값 구하기	1

3 $\sin^2 x + \cos x + a = 0$ 에서 $(1 - \cos^2 x) + \cos x + a = 0$

$$\therefore \cos^2 x - \cos x - 1 = a$$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y = \cos^2 x - \cos x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 존재해야 한다. ①

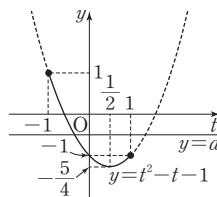
이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 - t - 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

오른쪽 그림과 같이 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = t^2 - t - 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 존재하도록 하는 a 의 값의 범위는

$$-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$$

..... ②



따라서 $m = -\frac{5}{4}$, $n = 1$ 이므로

$$100mn = 100 \times \left(-\frac{5}{4}\right) \times 1 = -125$$

..... ③

답 -125

4 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$ 이므로

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi + x) + k = 0 \text{에서}$$

$$\cos^2 x + 2\sin x + k = 0, (1 - \sin^2 x) + 2\sin x + k = 0$$

$$\therefore \sin^2 x - 2\sin x - 1 = k$$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y = \sin^2 x - 2\sin x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다. ①

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서 $-1 \leq t \leq 0$ 이고

$$y = t^2 - 2t - 1 = (t - 1)^2 - 2$$

오른쪽 그림과 같이 $-1 \leq t \leq 0$ 에서 함수

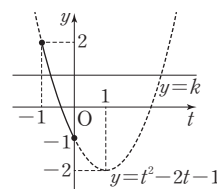
$y = t^2 - 2t - 1$ 의 그래프와 직선

$y = k$ 의 교점이 존재하도록 하는 k 의

값의 범위는

$$-1 \leq k \leq 2$$

..... ②



따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

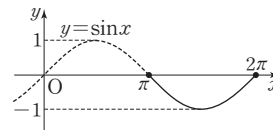
..... ③

답 4

채점기준	배점
① 방정식이 실근을 가질 조건 설명하기	2
② k의 값의 범위 구하기	3
③ 정수 k의 개수 구하기	1

참고 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서

$$-1 \leq \sin x \leq 0$$



5 $y = -a \cos^2 x + a \sin x + b$

$$= -a(1 - \sin^2 x) + a \sin x + b$$

$$= a \sin^2 x + a \sin x - a + b$$

..... ①

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = at^2 + at - a + b$$

$$= a\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}a + b$$

..... ②

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$t = 1$ 에서 최댓값 $a + b$,

$$t = -\frac{1}{2} \text{에서 최솟값 } -\frac{5}{4}a + b$$

를 갖는다. 이때 최댓값이 5, 최솟값이 -4

이므로

$$a + b = 5, -\frac{5}{4}a + b = -4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

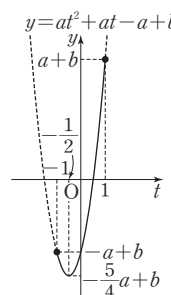
$$a = 4, b = 1$$

$$\therefore ab = 4 \times 1 = 4$$

..... ③

..... ④

답 4



6 $x - \frac{3}{4}\pi = \theta$ 로 놓으면 $x = \theta + \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$y = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$= \cos^2 \theta - \cos\left(\theta + \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$= \cos^2 \theta - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + k$$

$$= \cos^2 \theta + \sin \theta + k$$

$$= (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta + k$$

$$= -\sin^2 \theta + \sin \theta + k + 1$$

..... ①

이때 $\sin \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 + t + k + 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{5}{4}$$

..... ②

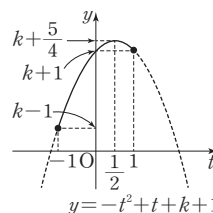
$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$$t = \frac{1}{2} \text{에서 최댓값 } k + \frac{5}{4},$$

$$t = -1 \text{에서 최솟값 } k - 1$$

을 갖는다. 이때 최댓값이 3이므로

$$k + \frac{5}{4} = 3 \quad \therefore k = \frac{7}{4}$$



따라서 최솟값은

$$k-1=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4} \quad \therefore m=\frac{3}{4} \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore k-m=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}=1 \quad \dots\dots ④$$

답 1

채점기준	배점
① 주어진 함수를 $\sin \theta$ 에 대한 함수로 나타내기	2
② $\sin \theta = t$ 로 놓고 ①의 함수를 t 에 대한 이차함수로 나타내기	1
③ k, m 의 값 구하기	2
④ $k-m$ 의 값 구하기	1

7 유속이 $4\sqrt{3}\text{m/s}$ 이상일 때에만 발전이 가능하므로

$$f(x) \geq 4\sqrt{3} \text{에서 } 8\sin \frac{\pi}{24}x \geq 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{24}x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots ①$$

$\frac{\pi}{24}x=t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 24$ 에서 $0 \leq \frac{\pi}{24}x < \pi$, 즉 $0 \leq t < \pi$ 이고

$$\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq t < \pi$ 에서 $\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 만족시

키는 t 의 값의 범위는 오른쪽 그림

$$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$$

이므로

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{24}x \leq \frac{2}{3}\pi \quad \therefore 8 \leq x \leq 16 \quad \dots\dots ③$$

따라서 조류 발전이 가능한 시간은 총 $16-8=8$ (시간)이므로

$$N=8 \quad \dots\dots ④$$

답 8

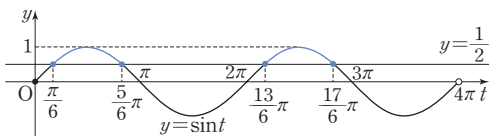
8 해수면의 높이가 8m 이상일 때에만 여객선을 탈 수 있으므로

$$h(x) \geq 8 \text{에서 } 5+6\sin \frac{\pi}{6}x \geq 8$$

$$6\sin \frac{\pi}{6}x \geq 3 \quad \therefore \sin \frac{\pi}{6}x \geq \frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$$

$\frac{\pi}{6}x=t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 24$ 에서 $0 \leq \frac{\pi}{6}x < 4\pi$, 즉

$$0 \leq t < 4\pi \text{이고, } \sin t \geq \frac{1}{2}$$



$0 \leq t < 4\pi$ 에서 부등식 $\sin t \geq \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 t 의 값의 범위는

위의 그림에서

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{13}{6}\pi \leq t \leq \frac{17}{6}\pi \quad \dots\dots ②$$

이므로

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}x \leq \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{13}{6}\pi \leq \frac{\pi}{6}x \leq \frac{17}{6}\pi$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 5 \text{ 또는 } 13 \leq x \leq 17 \quad \dots\dots ③$$

따라서 여객선을 탈 수 있는 시간은 1시에서 5시까지 4시간, 13시에서 17시까지 4시간이므로 하루에 최대 $4+4=8$ (시간)이다.

$$\therefore M=8 \quad \dots\dots ④$$

답 8

채점기준	배점
① 삼각부등식 세우기	1
② $\frac{\pi}{6}x=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기	3
③ x 의 값의 범위 구하기	1
④ M 의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.154~157

01 함수 $y=2\tan 2x-5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행

이동한 그래프의 식은

$$y=2\tan\left\{2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}-5=2\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-5$$

이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=2\tan\left(-2x-\frac{\pi}{2}\right)-5$$

이것이 $y=2\tan\left(ax-\frac{\pi}{2}\right)+b$ 와 일치하므로

$$a=-2, b=-5$$

$$\therefore a+b=-2+(-5)=-7$$

답 ②

02 ㄱ. 함수 $y=3\sin 2x-1$ 의 그래프는 함수 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 그래프가 아니다.

$$\therefore y=\sin(2x+\pi)-3=\sin\left\{2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}-3$$

이므로 함수 $y=\sin(2x+\pi)-3$ 의 그래프는 함수

$y=\sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 함수 $y=-\sin 2x+\pi$ 의 그래프는 함수 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 π 만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore y=\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

이므로 함수 $y=\cos 2x$ 의 그래프는 함수 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 그래프의 식인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

03 함수 $y=|\tan 2x|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$

ㄱ. 함수 $y=\cos 4x+1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

ㄴ. 함수 $y=2|\sin 2x|-1$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$

ㄷ. 함수 $y=3\tan 4x+1$ 의 주기는 $\frac{\pi}{4}$

따라서 함수 $y=|\tan 2x|$ 와 주기가 같은 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고 함수 $y=|\sin x|$, $y=|\cos x|$, $y=|\tan x|$ 의 주기는 모두 π 이므로 $y=|\sin ax|$, $y=|\cos ax|$, $y=|\tan ax|$ 의 주기는 모두 $\frac{\pi}{|a|}$ 이다. (단, a 는 0이 아닌 상수)

04 $f(x)=2\tan(3\pi-x)=2\tan(-x)=-2\tan x$

ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 주기는 π 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)=f(x+\pi)=f(x+2\pi) \quad (\text{참})$$

ㄴ. $f(-x)=-2\tan(-x)=2\tan x=-f(x)$ (참)

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=n\pi+\frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수}) \text{이다. (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

05 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 2이므로

$$|a|+c=2 \quad \therefore a+c=2 \quad (\because a>0) \quad \dots\dots ㉠$$

주기가 4π 이므로

$$\frac{2\pi}{|b|}=4\pi, |b|=\frac{1}{2} \quad \therefore b=\frac{1}{2} \quad (\because b>0)$$

$$\therefore f(x)=a\cos\frac{x}{2}+c$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2} \text{이므로 } a\cos\frac{\pi}{3}+c=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}a+c=\frac{1}{2} \quad \therefore a+2c=1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, c=-1$

$$\therefore abc=3\times\frac{1}{2}\times(-1)=-\frac{3}{2}$$

답 ①

06 오른쪽 그림에서 함수

$y=a\cos bx$ 의 주기는 6이므로

$$\frac{2\pi}{|b|}=6, |b|=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore b=\frac{\pi}{3} \quad (\because b>0)$$

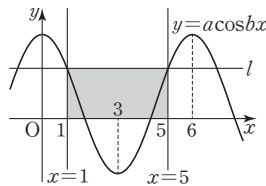
한편, 직사각형의 넓이가 8이고 가로 길이가 $5-1=4$ 이므로 세로의 길이는 2이다.

따라서 함수 $y=a\cos\frac{\pi}{3}x$ 의 그래프는 점 (1, 2)와 점 (5, 2)를 지나므로

$$2=a\cos\frac{\pi}{3}, 2=\frac{1}{2}a \quad \therefore a=4$$

$$\therefore ab=4\times\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$$

답 ②



07 $0<\theta<2\pi$ 이고, 조건 ㉠에서 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$$

조건 ㉡에서 $5\theta-2\theta=2n\pi$ (n 은 정수)

$$3\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2}{3}n\pi$$

$$\text{이때 } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi \text{이므로 } \frac{\pi}{2}<\frac{2}{3}n\pi<\pi$$

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}n<1 \quad \therefore \frac{3}{4}<n<\frac{3}{2}$$

n 은 정수이므로 $n=1$

$$\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore \sin(\pi-\theta)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta+\sin\theta$$

$$=2\sin\theta=2\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

답 ⑤

08 $a=\tan\theta$ 이고

$$\frac{\sin(2\pi-\theta)}{\cos(\pi+\theta)}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}-\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\tan\theta+\tan\theta$$

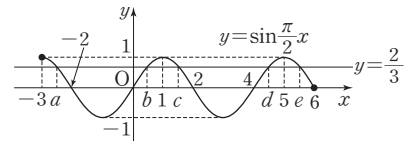
$$=2\tan\theta$$

$$\text{이므로 } 2\tan\theta=4 \quad \therefore \tan\theta=2$$

$$\therefore a=2$$

답 ②

09



함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ 이므로 위의 그림에서

$$\frac{b+c}{2}=1, \frac{d+e}{2}=5$$

$$\therefore b+c=2, d+e=10$$

$$\therefore \sin\left\{\frac{\pi}{2}(a+b+c+d+e)\right\}=\sin\left\{\frac{\pi}{2}(a+2+10)\right\}$$

$$=\sin\left\{\frac{\pi}{2}(a+12)\right\}$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}a+6\pi\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}a=\frac{2}{3}$$

답 ④

10 $\sin^2 89^\circ=\sin^2(90^\circ-1^\circ)=\cos^2 1^\circ$,

$$\sin^2 88^\circ=\sin^2(90^\circ-2^\circ)=\cos^2 2^\circ,$$

$$\sin^2 87^\circ=\sin^2(90^\circ-3^\circ)=\cos^2 3^\circ,$$

⋮

$$\sin^2 46^\circ = \sin^2 (90^\circ - 44^\circ) = \cos^2 44^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ \\ &= (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) \\ &\quad + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) \\ &\quad + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{44\text{개}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} 2^{\sin^2 1^\circ} \times 2^{\sin^2 2^\circ} \times 2^{\sin^2 3^\circ} \times \cdots \times 2^{\sin^2 89^\circ} \\ &= 2^{\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ} \\ &= 2^{\frac{89}{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{89}{2}$$

답 ⑤

$$11 \quad y = a \sin x + \cos\left(\frac{5}{2}\pi - x\right) + b = a \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + b$$

$$= a \sin x + \sin x + b = (a+1) \sin x + b$$

이 함수의 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로

$$a+1+b=6, -(a+1)+b=-2$$

$$\therefore a+b=5, -a+b=-1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=2$

$$\therefore ab=3 \times 2=6$$

답 ③

$$12 \quad y = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3\cos^2 x + 4\sin(\pi + x)$$

$$= \sin^2 x + 3(1 - \sin^2 x) - 4\sin x$$

$$= -2\sin^2 x - 4\sin x + 3$$

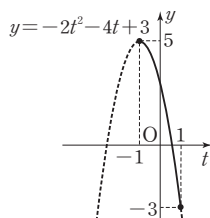
이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -2t^2 - 4t + 3 = -2(t+1)^2 + 5$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는 $t=-1$ 에서 최댓값 5, $t=1$ 에서 최솟값 -3을 갖는다.

따라서 $M=5, m=-3$ 이므로

$$M-m=5-(-3)=8$$



답 ④

$$13 \quad \cos(\pi \sin x) = 0 \text{에서 } \pi \sin x = t \text{로 놓으면 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \text{ 즉 } -\pi \leq \pi \sin x \leq \pi \text{이므로 } -\pi \leq t \leq \pi \text{이고}$$

$$\cos t = 0$$

$-\pi \leq t \leq \pi$ 에서 $\cos t = 0$ 을 만족시키는 t 의 값은

$$t = -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } t = \frac{\pi}{2}$$

이므로

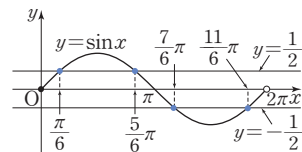
$$\pi \sin x = -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \pi \sin x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$(i) \sin x = -\frac{1}{2} \text{ 일 때,}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$



$$(ii) \sin x = \frac{1}{2} \text{ 일 때,}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

(i), (ii)에서 모든 실근의 합은

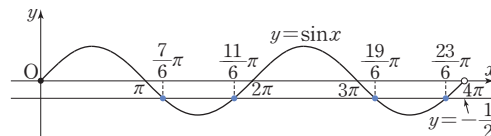
$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi = 4\pi$$

답 ④

$$14 \quad 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0 \text{에서}$$

$$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

$$\therefore \sin x = -\frac{1}{2} \quad (\because -1 \leq \sin x \leq 1)$$



$0 \leq x < 4\pi$ 에서 $\sin x = -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 x 의 값은 위의 그림

에서

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{19}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{23}{6}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

$$15 \quad x - \frac{\pi}{3} = \theta \text{로 놓으면 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi, \text{ 즉}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{5}{3}\pi \text{이고, } x = \frac{\pi}{3} + \theta \text{이므로}$$

$$2\cos^2\left(\frac{5}{6}\pi - x\right) + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 > 0 \text{에서}$$

$$2\cos^2\left[\frac{5}{6}\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\right] + 3\sin\theta - 2 > 0$$

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 3\sin\theta - 2 > 0$$

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 > 0, (\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) > 0$$

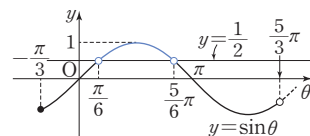
이때 $\sin\theta + 2 > 0$ 이므로

$$2\sin\theta - 1 > 0, 2\sin\theta > 1 \quad \therefore \sin\theta > \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{5}{3}\pi \text{일 때, 부등식}$$

$$\sin\theta > \frac{1}{2} \text{을 만족시키는 } \theta \text{의}$$

값의 범위는 오른쪽 그림에서



$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi$$

답 ①

- 16 $2x + \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서 $\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi$ 이고

$$4\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 < 0 \text{에서}$$

$$4\cos^2 t < 3, \cos^2 t < \frac{3}{4}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos t < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi$ 일 때 부등식

①을 만족시키는 t 의 값의 범위는 오른쪽 그림에서

$$\frac{\pi}{6} < t < \frac{5}{6}\pi \text{ 또는}$$

$$\frac{7}{6}\pi < t < \frac{11}{6}\pi$$

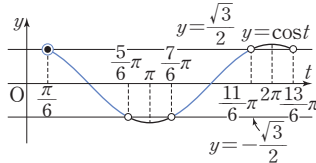
$$\text{이므로 } \frac{\pi}{6} < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

답 ①



- 17 이차방정식 $x^2 - 4(\sin\theta)x + 6\cos\theta = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2\sin\theta)^2 - 6\cos\theta > 0$$

$$4\sin^2\theta - 6\cos\theta > 0, 2\sin^2\theta - 3\cos\theta > 0$$

$$2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta > 0, -2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2 > 0$$

$$2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 < 0$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) < 0$$

이때 $\cos\theta + 2 > 0$ 이므로

$$2\cos\theta - 1 < 0$$

$$2\cos\theta < 1 \quad \therefore \cos\theta < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 이차방정식의 두 실근의 합과 곱이 모두 양수이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합}) = 4\sin\theta > 0 \quad \therefore \sin\theta > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = 6\cos\theta > 0 \quad \therefore \cos\theta > 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } 0 < \cos\theta < \frac{1}{2}, \sin\theta > 0$$

이때 $0 \leq \theta < \pi$ 이므로

$$0 < \cos\theta < \frac{1}{2} \text{에서}$$

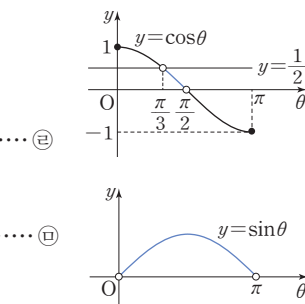
$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\theta > 0 \text{에서}$$

$$0 < \theta < \pi$$

②, ③의 공통부분을 구하면

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$



답 ③

- 18 $\sin^2\theta + 4\cos\theta - a + 3 \leq 0$ 에서

$$(1 - \cos^2\theta) + 4\cos\theta - a + 3 \leq 0$$

$$\therefore \cos^2\theta - 4\cos\theta + a - 4 \geq 0$$

이때 $\cos\theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$t^2 - 4t + a - 4 \geq 0$$

$f(t) = t^2 - 4t + a - 4 = (t - 2)^2 + a - 8$ 이라 하면 $-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 함수 $f(t)$ 는 $t = 1$ 에서 최솟값 $a - 7$ 을 갖는다.

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면

$$a - 7 \geq 0 \quad \therefore a \geq 7$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 7이다.

답 ④

- 19 $y = \sin(3\pi x + 7\pi) = \sin(3\pi x + \pi) = -\sin 3\pi x$

$$\text{이때 } \cos\left(\frac{\pi}{2} + A\right) = -\sin A \text{이므로}$$

$$\cos\left(\frac{n}{2}\pi + 3\pi x\right) = -\sin 3\pi x \text{가 성립하려면}$$

$$\frac{n}{2}\pi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \text{는 정수})$$

$$\frac{n}{2} = 2k + \frac{1}{2} \quad \therefore n = 4k + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

n 은 10 이하의 자연수이므로 $1 \leq 4k + 1 \leq 10$

$$0 \leq 4k \leq 9 \quad \therefore 0 \leq k \leq \frac{9}{4}$$

k 는 정수이므로 $k = 0, 1, 2$

이것을 ①에 대입하면 $n = 1, 5, 9$

따라서 10 이하의 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$1 + 5 + 9 = 15$$

답 ④

- 20 $18\theta = 2\pi, 9\theta = \pi$ 이므로

$$\cos 10\theta = \cos(9\theta + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta,$$

$$\cos 11\theta = \cos(9\theta + 2\theta) = \cos(\pi + 2\theta) = -\cos 2\theta,$$

$$\cos 12\theta = \cos(9\theta + 3\theta) = \cos(\pi + 3\theta) = -\cos 3\theta$$

$\vdots$

$$\cos 17\theta = \cos(9\theta + 8\theta) = \cos(\pi + 8\theta) = -\cos 8\theta$$

$$\therefore \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos 8\theta + \cos \pi$$

$$= \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos 8\theta + \cos \pi$$

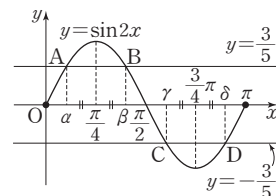
$$+ (-\cos\theta) + (-\cos 2\theta) + (-\cos 3\theta)$$

$$+ \dots + (-\cos 8\theta) + \cos 2\pi$$

$$= -1 + 1 = 0$$

답 ④

- 21



함수 $y = \sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이고 위의 그림에서 두 점

$(\alpha, 0), (\beta, 0)$ 은 직선 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4} \quad \therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \quad \cdots \cdots ①$$

두 점 $(\beta, 0), (\gamma, 0)$ 은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore \beta+\gamma=\pi \quad \cdots \cdots ②$$

두 점 $(\gamma, 0), (\delta, 0)$ 은 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi \quad \therefore \gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi \quad \cdots \cdots ③$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha+2\beta+2\gamma+\delta &= (\alpha+\beta) + (\beta+\gamma) + (\gamma+\delta) \\ &= \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi \end{aligned}$$

$$\therefore k=3 \quad \cdots \cdots ④$$

답 3

채점기준	배점
① $\alpha+\beta$ 의 값 구하기	1
② $\beta+\gamma$ 의 값 구하기	1
③ $\gamma+\delta$ 의 값 구하기	1
④ k 의 값 구하기	2

22 $v=20\sqrt{6}, D=120\sqrt{3}, \theta=a^\circ$ 이므로

$$120\sqrt{3}=\frac{(20\sqrt{6})^2 \sin 2a}{10}, 120\sqrt{3}=\frac{2400 \sin 2a}{10}$$

$$\therefore \sin 2a=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \cdots ①$$

$2a=t$ 로 놓으면 $0 < a < \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 < 2a < \frac{\pi}{2}$, 즉 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 이고

$$\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \cdots ②$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 일 때, ②를 만족시키는 t 의 값은 $t=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$2a=\frac{\pi}{3} \quad \therefore a=\frac{\pi}{6} \quad \cdots \cdots ③$$

$$\therefore \frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{6}}=6 \quad \cdots \cdots ④$$

답 6

채점기준	배점
① a 에 대한 삼각방정식 세우기	2
② a 의 값 구하기	2
③ $\frac{\pi}{a}$ 의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.158~161

01 ① 최댓값은 $|3|+2=5$ 이다.

② 최솟값은 $-|3|+2=-1$ 이다.

③ 주기는 $\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x) \text{이다.}$$

④ $f\left(\frac{3}{8}\pi\right)=3\sin\frac{\pi}{2}+2=5$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

점 $\left(\frac{3}{8}\pi, 5\right)$ 를 지난다.

$$⑤ f(x)=3\sin(4x-\pi)+2=3\sin\left[4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]+2$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=3\sin 4x$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동

한 것과 같다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

02 함수 $y=2\sin ax+b$ 의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{2}, |a|=4 \quad \therefore a=4 (\because a>0)$$

최댓값이 5이므로

$$2+b=5 \quad \therefore b=3$$

따라서 함수 $y=2\sin 4x+3$ 의 최솟값은

$$-2+3=1 \quad \therefore m=1$$

$$\therefore a+b+m=4+3+1=8$$

답 ③

03 함수 $y=a\sin bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=a\sin\{b(x-p)\}+q$$

이 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 0이므로

$$|a|+q=4, -|a|+q=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $|a|=2, q=2$

$$\therefore a=2, q=2 (\because a>0)$$

함수 $y=2\sin\{b(x-p)\}+2$ 의 주기가 4π 이므로

$$\frac{2\pi}{|b|}=4\pi, |b|=\frac{1}{2} \quad \therefore b=\frac{1}{2} (\because b>0)$$

$$\therefore y=2\sin\left\{\frac{1}{2}(x-p)\right\}+2$$

이 함수의 그래프가 점 $(2\pi, 4)$ 를 지나므로

$$4=2\sin\left\{\frac{1}{2}(2\pi-p)\right\}+2, 2\sin\left(\pi-\frac{p}{2}\right)=2$$

$$\sin\left(\pi-\frac{p}{2}\right)=1 \quad \therefore \sin\frac{p}{2}=1$$

$0 < p < 4\pi$ 에서 $0 < \frac{p}{2} < 2\pi$ 이므로

$$\frac{p}{2}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore p=\pi$$

$$\therefore pq=\pi \times 2=2\pi$$

답 ③

04 그래프에서 함수 $y=a\cos bx+c$ 의 최댓값이 4, 최솟값이 -2 이므로

$$|a|+c=4, -|a|+c=-2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $|a|=3, c=1$

$$\therefore a=3, c=1 (\because a>0)$$

또, 함수 $y=3\cos bx+1$ 의 주기가 π 이므로

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi, |b|=2 \quad \therefore b=2 (\because b>0)$$

따라서 함수 $y = -c \sin 2bx + a = -\sin 4x + 3$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore p = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{최댓값은 } |-1| + 3 = 4 \quad \therefore M = 4$$

$$\text{최솟값은 } -|-1| + 3 = 2 \quad \therefore m = 2$$

$$\therefore Mmp = 4 \times 2 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi$$

답 ②

- 05 함수 $f(x) = 2\sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 두 점 $(\alpha, \frac{4}{3}), (\beta, \frac{4}{3})$ 는 오

른쪽 그림과 같이 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \quad \therefore \alpha + \beta = 2$$

$$\therefore f(\alpha + \beta + \gamma - 2) + f(\alpha + \beta + 1)$$

$$= f(2 + \gamma - 2) + f(2 + 1)$$

$$= f(\gamma) + f(3)$$

$$= \frac{4}{3} + (-2) = -\frac{2}{3}$$

답 ①

- 06 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 모두 같으므로 함수

$y = 2\tan \frac{\pi}{2}x$ ($-1 < x < 3$)의 그래프

와 두 직선 $y=k, y=-k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

이때 $\overline{AB} = 2k, \overline{AD} = 2$ 이고, 직사각형 ABCD의 넓이가 8이므로

$$2k \times 2 = 8 \quad \therefore k = 2$$

답 ②

- 07 $\overline{BC} = \frac{4}{3}$ 이므로 점 B의 x좌표를 α 라

하면 점 C의 x좌표는 $\alpha + \frac{4}{3}$ 이다.

두 점 B, C는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha + (\alpha + \frac{4}{3})}{2} = 2, 2\alpha + \frac{4}{3} = 4 \quad \therefore \alpha = \frac{4}{3}$$

이때 점 A의 y좌표는

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{4}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 직사각형 ABCD의 넓이는

$$\overline{BC} \times \overline{AB} = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ⑤

- 08 그래프에서 함수 $y = a \cos bx + c$ 의 최댓값이 3, 최솟값이 -1 이

$$\text{므로 } |a| + c = 3, -|a| + c = -1$$

$$\text{위의 두 식을 연립하여 풀면 } |a| = 2, c = 1$$

$$\therefore a = 2, c = 1 (\because a > 0)$$

함수 $y = 2\cos bx + 1$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{b}$ 이므로

$$\overline{AB} = \frac{2\pi}{b}$$

함수 $y = 2\cos bx + 1$ 의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$$0 = 2\cos bx + 1 \text{에서}$$

$$2\cos bx = -1, \cos bx = -\frac{1}{2}$$

이때 $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{b}$ 에서 $0 \leq bx \leq 2\pi$ 이므로

$$bx = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } bx = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore x = \frac{2}{3b}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3b}\pi$$

$$\therefore \overline{CD} = \frac{4}{3b}\pi - \frac{2}{3b}\pi = \frac{2}{3b}\pi$$

따라서 사다리꼴 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{CD} + \overline{AB}) \times 3 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3b}\pi + \frac{2\pi}{b} \right) \times 3 = \frac{4}{b}\pi$$

$$\text{이므로 } \frac{4}{b}\pi = 6\pi \quad \therefore b = \frac{2}{3}$$

$$\therefore b(a+c) = \frac{2}{3} \times (2+1) = 2$$

답 ④

- 09 조건 (가)에서

$$f\left(\frac{7}{3}\pi\right) = f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin \frac{2}{3}\pi + \cos \frac{\pi}{3} (\because \text{조건 (가)})$$

$$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

답 ③

- 10 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos(\pi + \theta) + \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta + \left(-\frac{1}{\tan \theta}\right)$$

$$= -\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= -\frac{8}{15}$$

답 ①

11 $10\theta = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin 9\theta = \sin(10\theta - \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta,$$

$$\sin 8\theta = \sin(10\theta - 2\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \cos 2\theta,$$

$$\sin 7\theta = \sin(10\theta - 3\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \cos 3\theta,$$

$$\sin 6\theta = \sin(10\theta - 4\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right) = \cos 4\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \cdots + \sin^2 9\theta \\ &= (\sin^2 \theta + \sin^2 9\theta) + (\sin^2 2\theta + \sin^2 8\theta) \\ &\quad + (\sin^2 3\theta + \sin^2 7\theta) + (\sin^2 4\theta + \sin^2 6\theta) + \sin^2 5\theta \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) \\ &\quad + (\sin^2 3\theta + \cos^2 3\theta) + (\sin^2 4\theta + \cos^2 4\theta) + \sin^2 \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

답 ⑤

12 $\frac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta$

이때 $\overline{BQ} = x$ 라 하면 직각삼각형 PBQ에서

$$\overline{PQ} = \overline{BQ} \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}x$$

$$\therefore \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{PQ} = \sqrt{3}x$$

$$\therefore \overline{BR} = \overline{BQ} + \overline{QR} = x + \sqrt{3}x = (1 + \sqrt{3})x$$

직각삼각형 BRS에서

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\overline{RS}}{\overline{BR}} = \frac{\sqrt{3}x}{(1 + \sqrt{3})x} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 ③

13 $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$ 에서

$$2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} \quad \therefore \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = t \text{로 놓으면 } 0 \leq x < 2\pi$$

$$\text{에서 } \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13\pi}{6}, \text{ 즉}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13\pi}{6} \text{이므로 오른쪽 그}$$

림에서

$$t = \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } t = \frac{7\pi}{6}$$

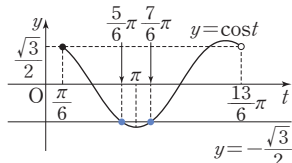
$$\text{즉, } x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{이므로}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \pi \text{이므로}$$

$$\beta - \alpha = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

답 ③



14 $3\cos x = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) + k$ 에서

$$3\cos x = -\cos x + k$$

$$\therefore 4\cos x = k$$

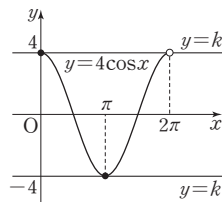
이 방정식이 오직 한 개의 실근을 가지려면 함수 $y = 4\cos x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 한 점에서 만나야 한다.

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = 4\cos x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$k = -4 \text{ 또는 } k = 4$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-4 \times 4 = -16$$



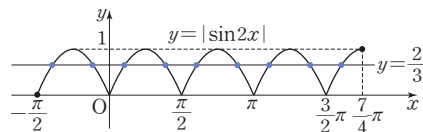
답 ⑤

15 방정식 $|\sin 2x| = \frac{2}{3}$ 의 실근은 함수 $y = |\sin 2x|$ 의 그래프와

직선 $y = \frac{2}{3}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

함수 $y = |\sin 2x|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ 에서 함수

$y = |\sin 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{3}$ 는 다음 그림과 같다.



따라서 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ 일 때, 함수 $y = |\sin 2x|$ 의 그래프와 직

선 $y = \frac{2}{3}$ 의 교점의 개수가 9이므로 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ 에서 방정식

$|\sin 2x| = \frac{2}{3}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 9이다.

답 ③

16 $\sin^2 x - (1 + \sqrt{3})\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ 에서

$$(\sin x - \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\therefore \sin x = \sqrt{3}\cos x \text{ 또는 } \sin x = \cos x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $\cos x = 0$ 이면 $\sin x = \pm 1$ 이므로 ①을 만족시키지 않는다.

즉, $\cos x \neq 0$ 이므로 ①에서

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3} \text{ 또는 } \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\therefore \tan x = \sqrt{3} \text{ 또는 } \tan x = 1$$

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때,

(i) $\tan x = \sqrt{3}$ 에서

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4\pi}{3}$$

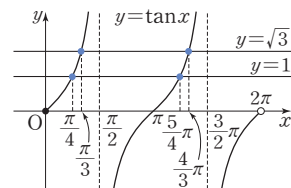
(ii) $\tan x = 1$ 에서

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{4}$$

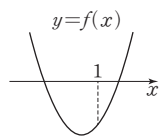
(i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{19\pi}{6}$$

답 ②



- 17 $f(x) = 2x^2 - \sqrt{2}(\cos 2\theta)x - 1$ 이라 하면 이
차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 실근 사이에 1이 있
어야 하므로 $f(1) < 0$ 이어야 한다. 즉,
 $2 - \sqrt{2}\cos 2\theta - 1 < 0$, $-\sqrt{2}\cos 2\theta < -1$
 $\therefore \cos 2\theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$



이때 $2\theta = t$ 로 놓으면 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $-\pi \leq t < \pi$ 이고

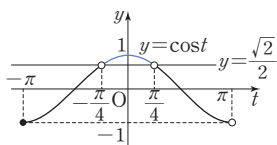
$$\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$-\pi \leq t < \pi$ 에서 $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를

만족시키는 t 의 값의 범위는 오른

쪽 그림에서 $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$-\frac{\pi}{4} < 2\theta < \frac{\pi}{4} \quad \therefore -\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{8}$$



답 ④

- 18 $\neg$. $\pi < x < \frac{5}{4}\pi$ 에서 $\sin x < 0$, $\tan x > 0$ 이므로

$\tan x > \sin x$ (거짓)

$\neg$. 두 함수 $y = \sin x$,

$y = 2\cos x$ 의 그래프는 오
른쪽 그림과 같으므로

$\pi < x < \frac{5}{4}\pi$ 일 때,

$\sin x > 2\cos x$

$$3^{\sin x} > 3^{2\cos x} \quad \therefore 3^{\sin x} > 9^{\cos x} \text{ (참)}$$

$\neg$. 두 함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$

의 그래프는 오른쪽 그림과
같으므로

$\pi < x < \frac{5}{4}\pi$ 일 때,

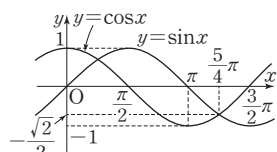
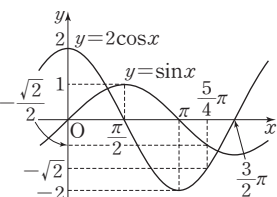
$\cos x < \sin x < 0$

$$\therefore 0 < |\sin x| < |\cos x|$$

이때 밑 $\frac{1}{3}$ 이 1보다 작은 양수이므로

$$\log_{\frac{1}{3}} |\sin x| > \log_{\frac{1}{3}} |\cos x| \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$ 이다.



답 ①

- 19 부등식 $x^2 + 2(\sin \theta)x + \frac{1}{4} \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하

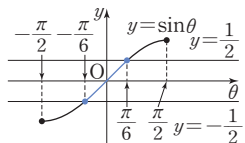
므로 이차방정식 $x^2 + 2(\sin \theta)x + \frac{1}{4} = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \sin^2 \theta - \frac{1}{4} \leq 0, \left(\sin \theta + \frac{1}{2}\right)\left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{1}{2}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 일 때, 부등식

$-\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{1}{2}$ 의 해는



앞의 그림에서

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

답 ①

- 20 조건 (다)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$ 이므로

$$a \sin \frac{2}{3}\pi = 2\sqrt{3}, a \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$a \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\sqrt{3} \quad \therefore a = 4$$

..... ①

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 4 \tan x & (0 \leq x < \frac{\pi}{4}) \\ 4 \sin 2x & (\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래

프가 오른쪽 그림과 같고 조건 (가)에서

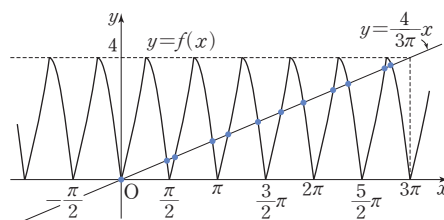
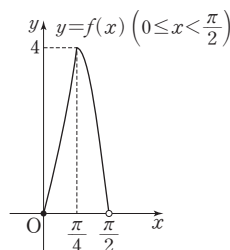
$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x) \text{이므로 함수 } f(x)$$

의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

이때 직선 $y = \frac{4}{3\pi}x$ 는 두 점 $(0, 0)$,

$(3\pi, 4)$ 를 지나므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{3\pi}x$

는 다음 그림과 같다.



..... ②

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{3\pi}x$ 의 교점의 개수

는 12이다.

..... ③

답 12

채점기준	배점
① a 의 값 구하기	2
② 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{3\pi}x$ 그리기	3
③ 교점의 개수 구하기	1

참고 주기가 $\frac{\pi}{2n}$ (n 은 자연수)인 함수는 모두 조건 (가)를 만족
시키므로 조건 (가)만으로는 함수 $f(x)$ 의 주기를 알 수 없다.

- 21 $3\sin 2\pi x - t = 0$ 에서 $3\sin 2\pi x = t$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = 3\sin 2\pi x$ 의 그래
프와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수와 같다.

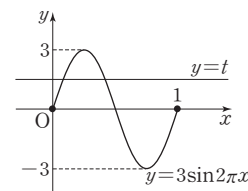
..... ①

함수 $y = 3\sin 2\pi x$ 의 주기는

$\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ 이고, 최댓값은 3, 최솟값은

-3 이므로 $0 \leq x \leq 1$ 에서 함수

$y = 3\sin 2\pi x$ 의 그래프는 오른쪽 그
림과 같다.



..... ②

$t < -3$ 또는 $t > 3$ 일 때, 교점의 개수는 0이므로 $f(t) = 0$

$t = -3$ 또는 $t = 3$ 일 때, 교점의 개수는 1이므로 $f(t) = 1$

$-3 < t < 0$ 또는 $0 < t < 3$ 일 때, 교점의 개수는 2이므로

$f(t) = 2$

$t = 0$ 일 때, 교점의 개수는 3이므로 $f(t) = 3$ ③

따라서 $X = \{0, 1, 2, 3\}$ 이므로 집합 X 의 모든 원소의 합은

$0 + 1 + 2 + 3 = 6$ ④

답 6

채점기준	배점
① 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 $y = 3\sin 2\pi x$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수와 같음을 설명하기	1
② 함수 $y = 3\sin 2\pi x$ 의 그래프 그리기	2
③ t 의 값의 범위에 따라 $f(t)$ 의 값 구하기	2
④ 집합 X 의 모든 원소의 합 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

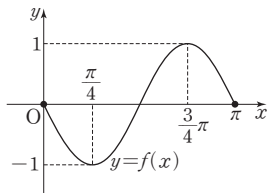
p.162~166

- 1 함수 $f(x) = -\sin 2x$ 의 주기는

$\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이고, $y = f(x)$ 의 그래프

는 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{4}\pi$ 에서 최댓값 1,

$x = \frac{\pi}{4}$ 에서 최솟값 -1을 가지므로

$$a = \frac{3}{4}\pi, b = \frac{\pi}{4}$$

따라서 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$, 즉 $(\frac{3}{4}\pi, 1), (\frac{\pi}{4}, -1)$ 을 지나는 직선의 기울기는

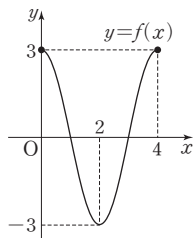
$$\frac{-1-1}{\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\pi} = \frac{4}{\pi} \quad \text{답 ④}$$

참고 집합 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 를 기호로 $[a, b]$ 와 같이 나타내고, 닫힌구간이라 한다.

- 2 함수 $f(x) = 3\cos \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

이고, 최댓값은 3, 최솟값은 -3이므로

$0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $0 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는

$x = 0$ 또는 $x = 4$ 에서 최댓값 3, $x = 2$ 에서 최솟값 -3을 가지므로

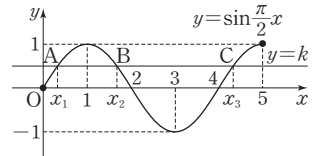
$$a = 4, b = 2 (\because a > 0)$$

따라서 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$, 즉 $(4, 3), (2, -3)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(4-2)^2 + \{3-(-3)\}^2} = 2\sqrt{10} \quad \text{답 ⑤}$$

- 3 함수 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \text{이므로 } 0 \leq x \leq 5 \text{에서}$$



함수 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 이라 하면 두 점 A, B가 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, x_1 + x_2 = 2 \quad \therefore x_2 = 2 - x_1$$

또, 함수 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 4이므로

$$x_3 = x_1 + 4$$

이때 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{25}{4}$ 이므로

$$x_1 + (2 - x_1) + (x_1 + 4) = \frac{25}{4}$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{4}$$

따라서 $x_2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ 이므로

$$\overline{AB} = x_2 - x_1 = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{답 ③}$$

다른풀이 두 점 B, C가 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 3 \quad \therefore x_2 + x_3 = 6$$

이때 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{25}{4}$ 이므로

$$x_1 + 6 = \frac{25}{4} \quad \therefore x_1 = \frac{1}{4}$$

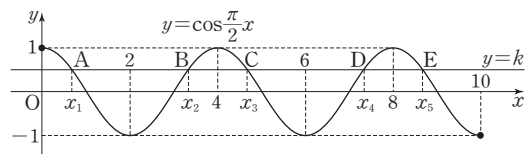
두 점 A, B가 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\frac{1}{4} + x_2}{2} = 1 \quad \therefore x_2 = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \overline{AB} = x_2 - x_1 = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

- 4 함수 $y = \cos \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로 그래프는 다음 그림과

같다.



다섯 개의 점 A, B, C, D, E의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 라 하면 두 점 A, B가 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 2, x_1 + x_2 = 4 \quad \therefore x_2 = 4 - x_1$$

또, 함수 $y = \cos \frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 4이므로

$$x_3 = x_1 + 4$$

$$x_4 = x_2 + 4 = (4 - x_1) + 4 = 8 - x_1$$

$$x_5 = x_1 + 4 + 4 = x_1 + 8$$

이때 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{74}{3}$ 이므로

$$x_1 + (4 - x_1) + (x_1 + 4) + (8 - x_1) + (x_1 + 8) = \frac{74}{3}$$

$$\therefore x_1 = \frac{2}{3}$$

따라서 $x_2 = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ 이므로

$$\overline{CD} = \overline{AB} = x_2 - x_1 = \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

다른풀이 $x_3 = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3}$, $x_4 = 8 - \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$ 이므로

$$\overline{CD} = x_4 - x_3 = \frac{22}{3} - \frac{14}{3} = \frac{8}{3}$$

5 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 5 = \frac{15}{2} \quad \therefore \overline{AB} = 3$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{AB} + 6 = 3 + 6 = 9$$

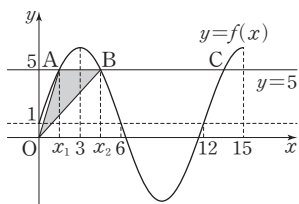
이때 함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{\pi/b} = 2b$ ($\because b > 0$)이므로

$$\overline{AC} = 2b$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 3 + 9 = 12 \text{이므로}$$

$$2b = 12 \quad \therefore b = 6$$

$$\therefore f(x) = a \sin \frac{\pi}{6}x + 1 \quad (0 \leq x \leq 15)$$



함수 $f(x)$ 의 주기는 12이므로 위의 그림과 같이 두 점 A, B는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고, $\overline{AB}=3$ 이므로 두 점 A, B의 좌표를 각각 x_1, x_2 라 하면

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3, \quad x_2 - x_1 = 3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{9}{2}$

따라서 $A(\frac{3}{2}, 5)$ 이고, 점 A는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점
이므로

$$f(\frac{3}{2}) = a \sin(\frac{\pi}{6} \times \frac{3}{2}) + 1 = 5, \quad a \sin \frac{\pi}{4} = 4$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a = 4 \quad \therefore a = 4\sqrt{2}$$

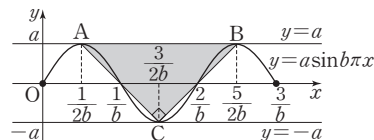
$$\therefore a^2 + b^2 = (4\sqrt{2})^2 + 6^2 = 68$$

답 ③

6 함수 $y = a \sin b\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$ 이므로 함수

$y = a \sin b\pi x$ ($0 \leq x \leq \frac{3}{b}$)는 다음 그림과 같이 $x = \frac{1}{2b}$,

$x = \frac{5}{2b}$ 에서 최댓값 a , $x = \frac{3}{2b}$ 에서 최솟값 $-a$ 를 갖는다.



$$\therefore A(\frac{1}{2b}, a), B(\frac{5}{2b}, a), C(\frac{3}{2b}, -a)$$

이때 $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ 이므로

$$\frac{-a-a}{\frac{3}{2b}-\frac{1}{2b}} \times \frac{a-(-a)}{\frac{5}{2b}-\frac{3}{2b}} = -1, \quad -2ab \times 2ab = -1$$

$$a^2 = \frac{1}{4b^2} \quad \therefore a = \frac{1}{2b} \quad (\because a > 0, b > 0) \quad \dots\dots ㉠$$

삼각형 ACB의 넓이가 $\frac{25}{4}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2b} - \frac{1}{2b}\right) \times \{a - (-a)\} = \frac{25}{4}$$

$$\frac{2a}{b} = \frac{25}{4} \quad \therefore a = \frac{25}{8}b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{5}{4}, b = \frac{2}{5} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{33}{20}$$

답 ②

다른풀이 점 C에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = 2a$$

$$\overline{AH} = \overline{BH} = \overline{CH} = 2a \text{이므로}$$

$$\triangle ACB = \frac{1}{2} \times 4a \times 2a = \frac{25}{4}$$

$$a^2 = \frac{25}{16} \quad \therefore a = \frac{5}{4} \quad (\because a > 0)$$

함수 $y = a \sin b\pi x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b} \text{이고 } \overline{AB} = 4a = 5 \text{이므로}$$

$$\frac{2}{b} = 5 \quad \therefore b = \frac{2}{5}$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{33}{20}$$

7 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$ 에서 $-\sin\theta = \frac{1}{3}$

$$\therefore \sin\theta = -\frac{1}{3}$$

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\cos\theta > 0$ 이므로

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ②

8 $\sin(\pi + \theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서

$$-\sin\theta - \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, -2\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

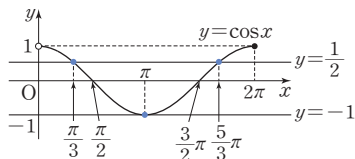
$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \cos\theta < 0 \text{이므로}$$

$$\cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = -\frac{\sqrt{33}}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{33}}{6}}{-\frac{\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{11} \quad \text{답 ⑤}$$

9 $\sin^2 x = \cos^2 x + \cos x$ 에서 $1 - \cos^2 x = \cos^2 x + \cos x$
 $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, (\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$



$0 < x \leq 2\pi$ 일 때, 함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 위의 그림과 같으므로

(i) $\cos x = -1$ 에서 $x = \pi$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 $0 < x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin^2 x = \cos^2 x + \cos x$ 의 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi \quad \dots\dots ㉠$$

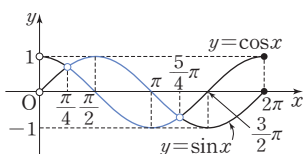
한편, $0 < x \leq 2\pi$ 에서 두 함수

$y = \sin x, y = \cos x$ 의 그래프

또는 오른쪽 그림과 같으므로

부등식 $\sin x > \cos x$ 의 해는

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi \quad \dots\dots ㉡$$



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값은 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \pi$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi \quad \text{답 ①}$$

10 $6\sin^2 x + \cos x - 5 = 0$ 에서 $6(1 - \cos^2 x) + \cos x - 5 = 0$

$$6 - 6\cos^2 x + \cos x - 5 = 0, 6\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$(3\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$$

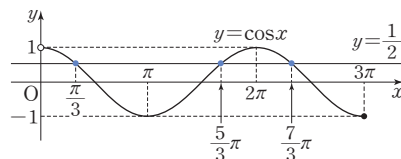
$$\therefore \cos x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉢$$

한편, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) < \cos x$ 에서 $-\cos x < \cos x$

$$-2\cos x < 0 \quad \therefore \cos x > 0 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣을 동시에 만족시키려면

$$\cos x = \frac{1}{2}$$



$0 < x \leq 3\pi$ 일 때, 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 위의

그림과 같으므로

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{3}\pi$$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi + \frac{7}{3}\pi = \frac{13}{3}\pi \quad \text{답 ②}$$

- 01 제곱근 64는 $\sqrt{64}=8$ 이므로 $a=8$
 $\sqrt{256}=16$ 의 네제곱근 중 음의 실수인 것은
 $-\sqrt[4]{16}=-\sqrt[4]{2^4}=-2$ 이므로 $b=-2$
 $\therefore ab=8 \times (-2)=-16$

답 ③

- 02 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta &= \frac{1}{9} \\ 2\sin\theta\cos\theta + 1 &= \frac{1}{9}, \quad 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{8}{9} \\ \therefore \sin\theta\cos\theta &= -\frac{4}{9} \\ \therefore (3\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta - 3\cos\theta) \\ &= 3\sin^2\theta - 10\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta \\ &= 3(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 10\sin\theta\cos\theta \\ &= 3 - 10 \times \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{67}{9}\end{aligned}$$

답 ⑤

- 03 $A = \frac{\log_3 50}{\log_3 6} = \log_6 50$
 $B = 6^{\log_6 2} = 2 = \log_6 6^2 = \log_6 36$
 $C = \frac{1}{\log_2 6} + 1 = \log_6 2 + 1$
 $= \log_6 2 + \log_6 6 = \log_6 12$
 $12 < 36 < 50$ 이고 함수 $y = \log_6 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이므로
 $\log_6 12 < \log_6 36 < \log_6 50$
 $\therefore C < B < A$

답 ⑤

- 04 함수 $y = a \sin bx + c$ 의 최댓값이 2이므로
 $|a| + c = 2 \quad \dots\dots ㉠$
 최솟값이 -4이므로
 $-|a| + c = -4 \quad \dots\dots ㉡$
 $㉠ - ㉡$ 을 하면
 $2|a| = 6, |a| = 3 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$
 이를 ㉠에 대입하면
 $3 + c = 2 \quad \therefore c = -1$
 또, 함수 $y = a \sin bx + c$ 의 주기가 $\frac{4}{3}\pi$ 이므로
 $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{4}{3}\pi, |b| = \frac{3}{2} \quad \therefore b = \frac{3}{2} (\because b > 0)$
 $\therefore abc = 3 \times \frac{3}{2} \times (-1) = -\frac{9}{2}$

답 ①

- 05 이차방정식 $x^2 - 6x + 2 = 0$ 의 두 근이 $\log a, \log b$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $\log a + \log b = 6$

두 근의 곱은 $(\log a)(\log b) = 2$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log a}{\log b} = \frac{(\log a)^2 + (\log b)^2}{(\log a)(\log b)} \\ &= \frac{(\log a + \log b)^2 - 2(\log a)(\log b)}{(\log a)(\log b)} \\ &= \frac{6^2 - 2 \times 2}{2} = 16\end{aligned}$$

답 ②

- 06 각 θ 를 나타내는 동경과 각 8θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$8\theta - \theta = 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$7\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{(2n+1)\pi}{7}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{(2n+1)\pi}{7} < \pi$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2n+1}{7} < 1, \quad 7 < 2(2n+1) < 14$$

$$7 < 4n+2 < 14, \quad 5 < 4n < 12$$

$$\therefore \frac{5}{4} < n < 3$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

$$\therefore \theta = \frac{2 \times 2 + 1}{7} \pi = \frac{5}{7} \pi$$

답 ③

- 07 $20^x = 8$ 에서 $(20^x)^{\frac{1}{x}} = 8^{\frac{1}{x}}$

$$\therefore 20 = 8^{\frac{1}{x}} = (2^3)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{3}{x}} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^y = 32 \text{에서 } \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^y\right\}^{\frac{1}{y}} = 32^{\frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{1}{5} = 32^{\frac{1}{y}} = (2^5)^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{5}{y}} \quad \dots\dots ㉡$$

$$a^z = 4 \text{에서 } (a^z)^{\frac{1}{z}} = 4^{\frac{1}{z}}$$

$$\therefore a = 4^{\frac{1}{z}} = (2^2)^{\frac{1}{z}} = 2^{\frac{2}{z}} \quad \dots\dots ㉢$$

㉠ $\times$ ㉡ $\div$ ㉢을 하면

$$\frac{20 \times \frac{1}{5}}{a} = 2^{\frac{3}{x}} \times 2^{\frac{5}{y}} \div 2^{\frac{2}{z}}, \quad \frac{4}{a} = 2^{\frac{3}{x} + \frac{5}{y} - \frac{2}{z}}$$

$$\frac{4}{a} = 2^{-3} \left(\because \frac{3}{x} + \frac{5}{y} - \frac{2}{z} = -3 \right)$$

$$\therefore a = \frac{4}{2^{-3}} = 4 \times 2^3 = 32$$

답 ④

- 08 $\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos^2 5^\circ + \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \dots + \cos^2 85^\circ \\ &= (\cos^2 5^\circ + \cos^2 85^\circ) + (\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ) \\ &\quad + (\cos^2 25^\circ + \cos^2 65^\circ) + (\cos^2 35^\circ + \cos^2 55^\circ) \\ &\quad + \cos^2 45^\circ \\ &= (\sin^2 85^\circ + \cos^2 85^\circ) + (\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 65^\circ + \cos^2 65^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) \\ &\quad + \cos^2 45^\circ\end{aligned}$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

답 ⑤

09 $R_1 = k\left(\frac{750}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}, R_2 = k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$ 이므로

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{k\left(\frac{750}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}{k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{750}{p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

이때 $\frac{R_1}{R_2} = 5$ 이므로

$$\left(\frac{750}{p}\right)^{\frac{1}{3}} = 5, \left\{\left(\frac{750}{p}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 = 5^3, \frac{750}{p} = 125$$

$\therefore p = 6$

답 ③

10 $y = 2^{x+2} - 3$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$y = 2^2 - 3 = 1 \quad \therefore A(0, 1)$$

즉, 점 C의 x 좌표는 $1 = \log_2(x+1) - 2$ 에서

$$\log_2(x+1) = 3, x+1 = 2^3 \quad \therefore x = 7$$

$\therefore C(7, 1)$

또, $y = \log_2(x+1) - 2$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$y = \log_2 1 - 2 = -2$$

$\therefore B(0, -2)$

따라서 점 D의 x 좌표는 $-2 = 2^{x+2} - 3$ 에서

$$2^{x+2} = 1, x+2 = 0 \quad \therefore x = -2$$

$\therefore D(-2, -2)$

따라서 사각형 ADBC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{AC} + \overline{DB}) \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times (7+2) \times 3 = \frac{27}{2}$$

답 ④

11 $\neg. y = \log_3 \frac{9}{x} = \log_3 9 - \log_3 x = 2 - \log_3 x$ 이므로

$y = \log_3 \frac{9}{x}$ 의 그래프는 $y = 2 - \log_3 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

ㄴ. 함수 $y = \log_3 x^2$ 은 $x^2 > 0$ 일 때, 즉 $x=0$ 을 제외한 모든 실수의 집합에서 정의되고,

$$y = \log_3 x^2 = \log_3 |x|^2 = 2 \log_3 |x|$$

이므로 $y = \log_3 x^2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $y = \log_3 x^2$ 의 그래프는

$y = 2 \log_3 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 없다.

ㄷ. $y = 2 \log_3 3x = 2(\log_3 3 + \log_3 x)$

$$= 2(1 + \log_3 x) = 2 \log_3 x + 2$$

이므로 $y = 2 \log_3 3x$ 의 그래프는 $y = 2 \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

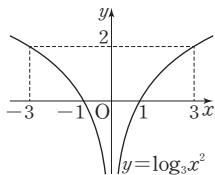
ㄹ. $y = 3^{\frac{x}{2}}$ 에서 $\frac{x}{2} = \log_3 y, x = 2 \log_3 y$

x 와 y 의 위치를 바꾸면 $y = 2 \log_3 x$

즉, 함수 $y = 3^{\frac{x}{2}}$ 의 그래프는 함수 $y = 2 \log_3 x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㅁ. $y = \log_{\sqrt{3}}(x-1) + 2 = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + 2 = 2 \log_3(x-1) + 2$

이므로 $y = \log_{\sqrt{3}}(x-1) + 2$ 의 그래프는 $y = 2 \log_3 x$ 의 그래



프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = 2 \log_3 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹칠 수 있는 함수의 그래프의 식은 ㄷ, ㄹ, ㅁ의 3개이다. **답 ③**

12 $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} = (3^{-2})^{-x} = 3^{2x}$ 이므로 $3^{f(x)} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{-x}$ 에서

$$3^{f(x)} \geq 3^{2x}$$

함수 $y = 3^x$ 은 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이므로

$$f(x) \geq 2x$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 2x$

의 교점의 x 좌표를 구하면

$x < 2$ 일 때,

$$3x - 1 = 2x \text{에서 } x = 1$$

$x \geq 2$ 일 때,

$$-3x + 11 = 2x, 5x = 11$$

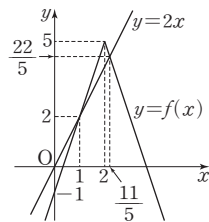
$$\therefore x = \frac{11}{5}$$

따라서 부등식 $f(x) \geq 2x$ 의 해는 $1 \leq x \leq \frac{11}{5}$ 이므로

$$M = \frac{11}{5}, m = 1$$

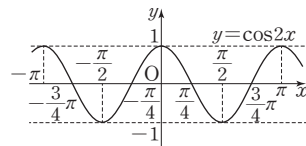
$$\therefore M + m = \frac{11}{5} + 1 = \frac{16}{5}$$

답 ①

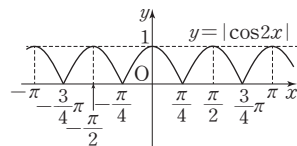


13 함수 $y = \cos 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이고, 그래프는 [그림 1]과 같

으므로 함수 $y = |\cos 2x|$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$y = \frac{1}{2\pi}x + \frac{3}{8}$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1}{2\pi}x + \frac{3}{8}, \frac{1}{2\pi}x = -\frac{3}{8}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{4}\pi$$

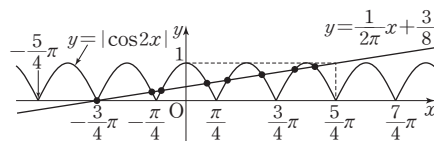
즉, 직선 $y = \frac{1}{2\pi}x + \frac{3}{8}$ 은 점 $\left(-\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ 을 지난다.

또, $y = \frac{1}{2\pi}x + \frac{3}{8}$ 에 $y=1$ 을 대입하면

$$1 = \frac{1}{2\pi}x + \frac{3}{8}, \frac{1}{2\pi}x = \frac{5}{8}$$

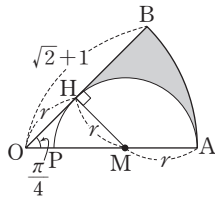
$$\therefore x = \frac{5}{4}\pi$$

즉, 직선 $y = \frac{1}{2\pi}x + \frac{3}{8}$ 은 점 $\left(\frac{5}{4}\pi, 1\right)$ 을 지난다.



따라서 함수 $y = |\cos 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2\pi}x + \frac{3}{8}$ 은 앞의 그림과 같으므로 구하는 교점의 개수는 8이다. 답 ②

- 14 오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 M, 점 M에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 반원의 반지름의 길이를 r 라 하면



$$\overline{MA} = r \text{이므로}$$

$$\overline{OM} = \overline{OA} - \overline{MA}$$

$$= \sqrt{2} + 1 - r \quad \cdots \cdots ㉑$$

또, 직각삼각형 HOM에서 $\angle HOM = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\triangle HOM$ 은

$\overline{OH} = \overline{HM} = r$ 인 직각이등변삼각형이다.

$$\text{즉, } \overline{OM} = \sqrt{2}r \quad \cdots \cdots ㉒$$

$$㉑, ㉒ \text{에서 } \sqrt{2} + 1 - r = \sqrt{2}r \text{이므로}$$

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2}r + r, \sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)r$$

$$\therefore r = 1$$

$$\text{이때 부채꼴 AOB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times (\sqrt{2} + 1)^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8} \pi$$

$$\text{직각삼각형 HOM의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\angle HMA = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \pi \text{이므로 부채꼴 AMH의 넓이는}$$

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{3}{4} \pi = \frac{3}{8} \pi$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

(부채꼴 AOB의 넓이) - (직각삼각형 HOM의 넓이)

- (부채꼴 AMH의 넓이)

$$= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8} \pi - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \pi = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi - \frac{1}{2}$$

답 ③

- 15 원산지 가격을 A 원이라 하고, 유통 과정을 한 번 거칠 때마다 소비자 가격이 $r\%$ 씩 인상된다고 하면 유통 과정을 세 번 거쳤을 때의 소비자 가격이 원산지 가격의 2배가 되므로

$$A \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3 = 2A, \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3 = 2$$

$$3 \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \log 2, \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \frac{1}{3} \log 2$$

$$\log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \frac{1}{3} \times 0.3 = 0.1$$

$$\text{이때 } \log 1.26 = 0.1 \text{이므로 } \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \log 1.26$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1.26 \quad \therefore r = 26$$

즉, 유통 과정을 두 번 거쳤을 때의 소비자 가격은 $A \times 1.26^2$, 세 번 거쳤을 때의 소비자 가격은 $A \times 1.26^3$ 이므로

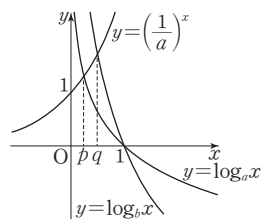
$$n = \frac{A \times 1.26^2}{A \times 1.26^3} \times 100 = \frac{100}{1.26} = 79.3 \cdots$$

따라서 이를 소수점 아래 첫 번째 자리에서 반올림하여 나타내면

$n = 79$ 이다.

답 ⑤

- 16 $0 < a < b < 1$ 일 때, 세 함수 $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \left(\frac{1}{a} \right)^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 함수

$y = \log_a x$ 의 그래프는 점

$(p, \log_a p)$ 를 지나고,

$\log_a p > 1$ 이므로

$\log_a p > \log_a a$

이때 $0 < a < 1$ 이므로

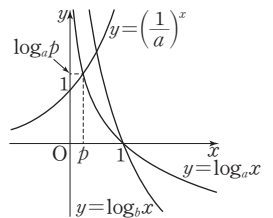
$p < a$ (참)

ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 $0 < p < q$

이고, $0 < \log_a q < \log_b p$ 이므로

로

$p \log_a q < q \log_b p$ (참)



ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 함수

$y = \left(\frac{1}{a} \right)^x$ 의 그래프는 두 점

$\left(p, \left(\frac{1}{a} \right)^p \right), \left(q, \left(\frac{1}{a} \right)^q \right)$ 을 지

난다.

이때 $0 < p < q$ 이고,

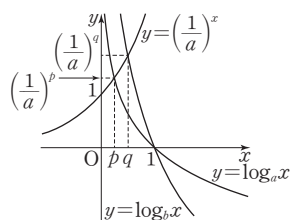
$0 < \left(\frac{1}{a} \right)^p < \left(\frac{1}{a} \right)^q$ 에서

$0 < a^q < a^p$ 이므로

$p a^q < q a^p$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤



- 17 $3^{x-2y} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$ 에서 $x - 2y = -1$

$$\therefore x = 2y - 1 \quad \cdots \cdots ㉑$$

..... ①

㉑을 $3^x + 3^y = 36$ 에 대입하면

$$3^{2y-1} + 3^y = 36, \frac{1}{3}(3^y)^2 + 3^y = 36$$

이때 $3^y = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$\frac{1}{3}t^2 + t = 36, t^2 + 3t = 108, t^2 + 3t - 108 = 0$$

$$(t + 12)(t - 9) = 0 \quad \therefore t = 9 \quad (\because t > 0)$$

즉, $3^y = 9$ 이므로 $y = 2$

이를 ㉑에 대입하면

$$x = 2 \times 2 - 1 = 3$$

..... ②

따라서 $\alpha = 3, \beta = 2$ 이므로

$$\alpha + \beta = 3 + 2 = 5$$

..... ③

답 5

채점기준	배점
① x 를 y 에 대한 식으로 나타내기	1
② ①을 $3^x + 3^y = 36$ 에 대입한 후 치환하여 방정식 풀기	3
③ $a + \beta$ 의 값 구하기	1

18 $\sin(\pi+x) = -\sin x$, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right) = -\cos x$ 이므로

$$\sin^2(\pi+x) - 2k\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right) + k + 4 \geq 0 \text{에서}$$

$$(-\sin x)^2 - 2k \times (-\cos x) + k + 4 \geq 0$$

$$\sin^2 x + 2k\cos x + k + 4 \geq 0$$

$$(1 - \cos^2 x) + 2k\cos x + k + 4 \geq 0$$

$$-\cos^2 x + 2k\cos x + k + 5 \geq 0$$

$$\cos^2 x - 2k\cos x - k - 5 \leq 0$$

$$\cos x = t \text{로 놓으면 } -1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$t^2 - 2kt - k - 5 \leq 0 \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots ①$$

즉, 모든 실수 x 에 대하여 부등식 ㉠이 항상 성립하려면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{에서 } t^2 - 2kt - k - 5 \leq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{이때 } f(t) = t^2 - 2kt - k - 5 \text{라 하면}$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{에서 } f(t) \leq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\text{오른쪽 그림과 같이 } f(-1) \leq 0, f(1) \leq 0$$

$$\text{이어야 한다.} \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots ②$$

$$f(-1) = 1 + 2k - k - 5 \leq 0$$

$$k - 4 \leq 0 \quad \therefore k \leq 4 \quad \dots\dots ㉢$$

$$f(1) = 1 - 2k - k - 5 \leq 0, -3k - 4 \leq 0$$

$$3k \geq -4 \quad \therefore k \geq -\frac{4}{3} \quad \dots\dots ㉣$$

$$\text{㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 } -\frac{4}{3} \leq k \leq 4 \quad \dots\dots ③$$

$$\text{따라서 정수 } k \text{는 } -1, 0, 1, 2, 3, 4 \text{의 6개이다.} \quad \dots\dots ④$$

답 6

채점기준	배점
① 주어진 부등식을 정리한 후 $\cos x = t$ 로 치환하여 나타내기	2
② 부등식이 항상 성립할 조건 제시하기	2
③ 실수 k 의 값의 범위 구하기	1
④ 모든 정수 k 의 개수 구하기	1

19 함수 $y = \log_2(x+2) - 3$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

$$y = \log_2(x+2) - 3 \text{에 } y=0 \text{을 대입하면}$$

$$0 = \log_2(x+2) - 3 \text{에서}$$

$$\log_2(x+2) = 3, x+2 = 2^3 \quad \therefore x = 6$$

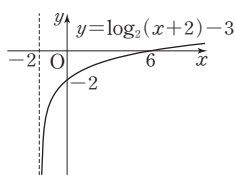
$$\text{또, } y = \log_2(x+2) - 3 \text{에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$y = \log_2 2 - 3 = -2$$

$$\text{따라서 함수 } y = \log_2(x+2) - 3 \text{의}$$

$$\text{그래프는 오른쪽 그림과 같다.} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{한편, 함수 } y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{n}{3}\right) \text{의 그래}$$

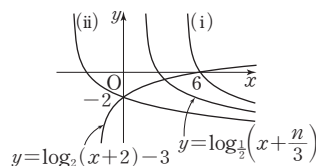


프는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{n}{3}$ 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{이때 함수 } y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{n}{3}\right) \text{의 그래프가 함수 } y = \log_2(x+2) - 3$$

의 그래프와 제 4사분면에서 만나려면 다음 그림과 같이 곡선 (i)

과 곡선 (ii) 사이에 있어야 한다. $\dots\dots ②$



(i) 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{n}{3}\right)$ 의 그래프가 점 (6, 0)을 지날 때

$$0 = \log_{\frac{1}{2}}\left(6 + \frac{n}{3}\right), 6 + \frac{n}{3} = 1$$

$$\frac{n}{3} = -5 \quad \therefore n = -15$$

(ii) 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{n}{3}\right)$ 의 그래프가 점 (0, -2)를 지날 때

$$-2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n}{3}, \frac{n}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \quad \therefore n = 12$$

(i), (ii)에서 $-15 < n < 12$ $\dots\dots ③$

따라서 정수 n 은 $-14, -13, -12, \dots, 10, 11$ 이므로 모든 정수 n 의 값의 합은

$$-14 + (-13) + (-12) + (-11) + (-10) + \dots + 9 + 10 + 11$$

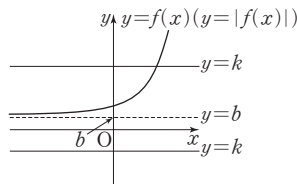
$$= -14 + (-13) + (-12)$$

$$= -39 \quad \dots\dots ④$$

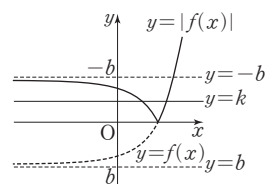
답 -39

채점기준	배점
① 함수 $y = \log_2(x+2) - 3$ 의 그래프 그리기	2
② 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{n}{3}\right)$ 의 그래프가 함수 $y = \log_2(x+2) - 3$ 의 그래프와 제 4사분면에서 만날 조건 제시하기	2
③ n 의 값의 범위 구하기	1
④ 정수 n 의 값의 합 구하기	1

20



[그림 1]



[그림 2]

$f(x) = 3^{x+a} + b$ 에서 $b \geq 0$ 이면 $f(x) > 0$ 이므로 $|f(x)| = f(x)$ 이다. 즉, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같이 항상 x 축보다 위에 있으므로 방정식 $|f(x)| = k$ 의 실근의 개수는 0 또는 1이다.

따라서 $b < 0$ 이고, $y = f(x)$, $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다. $\dots\dots ①$

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선이 직선 $y = b$ 이므로

$y = |f(x)|$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y = -b$ 이다.

따라서 방정식 $|f(x)|=k$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는
실수 k 의 값의 범위는 $0 < k < -b$ 이므로 $-b=4$

$$\therefore b=-4 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore f(x)=3^{x+a}-4$$

$$f^{-1}(5)=f(-a)+6 \text{에서}$$

$$f(-a)+6=(1-4)+6=3 \text{이므로}$$

$$f^{-1}(5)=3, f(3)=5$$

$$3^{3+a}-4=5, 3^{3+a}=9, 3+a=2 \quad \therefore a=-1 \quad \dots\dots ③$$

$$\text{따라서 } f(x)=3^{x-1}-4 \text{이므로}$$

$$f(4)=27-4=23 \quad \dots\dots ④$$

답 23

채점기준	배점
① b 의 부호 구하고, $y=f(x)$ 의 그래프의 개형 그리기	3
② b 의 값 구하기	2
③ a 의 값 구하기	2
④ $f(4)$ 의 값 구하기	1

실전 모의고사 2회

p.172~175

$$01 \quad 64^{-1} \times (\sqrt[3]{32} \div \sqrt[6]{4})^3 = (2^6)^{-1} \times (\sqrt[3]{2^5} \div \sqrt[6]{2^2})^3$$

$$= 2^{-6} \times (2^{\frac{5}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}})^3$$

$$= 2^{-6} \times (2^{\frac{15}{3}} \div 2^1)$$

$$= 2^{-6} \times 2^{\frac{15}{2}-1}$$

$$= 2^{-6} \times 2^{\frac{13}{2}}$$

$$= 2^{-6+\frac{13}{2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad \text{답 ⑤}$$

$$02 \quad \log_{10} 24 = \frac{\log_5 24}{\log_5 10} = \frac{\log_5 (2^3 \times 3)}{\log_5 (2 \times 5)}$$

$$= \frac{3\log_5 2 + \log_5 3}{\log_5 2 + 1} = \frac{3a+b}{a+1} \quad \text{답 ②}$$

$$03 \quad \text{진수의 조건에서 } x(x-6) > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x(x-6) = -4 \text{에서 } x(x-6) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$x^2 - 6x = 16, x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x+2)(x-8) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 8$$

$$\text{㉠에서 구하는 방정식의 해는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 8 \text{이다.} \quad \text{답 ⑤}$$

$$04 \quad \text{ㄱ. } -\frac{22}{3}\pi = 2\pi \times (-4) + \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{ㄴ. } -\frac{\pi}{3} = 2\pi \times (-1) + \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{ㄷ. } -\frac{13}{3}\pi = 2\pi \times (-3) + \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{ㄹ. } \frac{8}{3}\pi = 2\pi + \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{ㄹ. } \frac{16}{3}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{4}{3}\pi$$

따라서 $\frac{5}{3}\pi$ 를 나타내는 동정과 일치하는 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이다.

답 ②

$$05 \quad x - x^{-1} = (x^{\frac{1}{3}})^3 - (x^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$= (x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}})^3 + 3 \times x^{\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{1}{3}} \times (x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}})$$

$$= 6^3 + 3 \times 1 \times 6 = 234 \quad \text{답 ①}$$

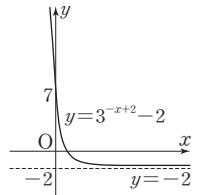
$$06 \quad y = 3^{-x+2} - 2 = 3^{-(x-2)} - 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 2$$

즉, 함수 $y = 3^{-x+2} - 2$ 의 그래프는

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2

만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동
한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

④ x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.



답 ④

$$07 \quad \text{함수 } y = a \sin(bx - c) \text{의 최댓값이 } 3, \text{ 최솟값이 } -3 \text{이므로}$$

$$a = 3 \quad (\because a > 0)$$

$$\text{또, 함수 } y = a \sin(bx - c) \text{의 주기가 } \frac{4}{9}\pi - \left(-\frac{2}{9}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi \text{이므로}$$

$$\text{로 } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore b = 3 \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore y = 3 \sin(3x - c)$$

이 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{9}, 0\right)$ 을 지나므로

$$0 = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - c\right), \sin\left(\frac{\pi}{3} - c\right) = 0$$

$$\text{이때 } 0 \leq c < \frac{\pi}{2} \text{에서 } -\frac{\pi}{2} < -c \leq 0, -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} - c \leq \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{3} - c = 0 \quad \therefore c = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore abc = 3 \times 3 \times \frac{\pi}{3} = 3\pi \quad \text{답 ④}$$

$$08 \quad \overline{OC} = \overline{OD} = r \text{ m라 하면 } \overline{OA} = \overline{OB} = r + 18 \text{ (m)}$$

부채꼴 AOB의 중심각의 크기를 θ 라 하면

호 CD의 길이가 6π m이므로

$$r\theta = 6\pi \quad \dots\dots ㉠$$

또, 호 AB의 길이가 18π m이므로

$$(r+18)\theta = 18\pi \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } r = 9, \theta = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 $\overline{OA} = \overline{OB} = 9 + 18 = 27$ (m)이므로

(도형 ABDC의 넓이)

$$= (\text{부채꼴 AOB의 넓이}) - (\text{부채꼴 COD의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times 27 \times 18\pi - \frac{1}{2} \times 9 \times 6\pi$$

$$= 243\pi - 27\pi = 216\pi \text{ (m}^2\text{)} \quad \text{답 ①}$$

09 $x^2 + y^2 = 3$ 에 $y = -1$ 을 대입하면

$$x^2 + 1 = 3, x^2 = 2 \quad \therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

점 A는 제3사분면의 점이므로 $A(-\sqrt{2}, -1)$

이때 $\overline{OA} = \sqrt{3}$ 이므로

$$\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

또, $x^2 + y^2 = 9$ 에 $y = -1$ 을 대입하면

$$x^2 + 1 = 9, x^2 = 8 \quad \therefore x = -2\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 2\sqrt{2}$$

점 B는 제3사분면의 점이므로 $B(-2\sqrt{2}, -1)$

$$\therefore \tan \beta = \frac{-1}{-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \frac{\cos \alpha}{\tan \beta} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

답 ②

10 $d = 50$ 이고, 두 열차 A, B가 지점 P를 통과할 때의 속력을 각각

v_A km/h, v_B km/h라 하면 $v_B = 0.8v_A$ 이므로

$$L_A = 80 + 28 \log \frac{v_A}{100} - 14 \log \frac{50}{25} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned} L_B &= 80 + 28 \log \frac{v_B}{100} - 14 \log \frac{50}{25} \\ &= 80 + 28 \log \frac{0.8v_A}{100} - 14 \log \frac{50}{25} \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

따라서 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} L_A - L_B &= 28 \log \frac{v_A}{100} - 28 \log \frac{0.8v_A}{100} \\ &= 28 \left(\log \frac{v_A}{100} - \log \frac{0.8v_A}{100} \right) \\ &= 28 \log \frac{100}{0.8v_A} = 28 \log \frac{1}{0.8} \\ &= 28 \log \frac{10}{8} = 28(\log 10 - \log 8) \\ &= 28(1 - 3 \log 2) \\ &= 28 - 84 \log 2 \end{aligned}$$

답 ①

11 $y = (\log_2 x)(\log_{\frac{1}{2}} x) + \log_2 x^4 + 4$

$$= -(\log_2 x)^2 + 4 \log_2 x + 4 \quad (\because x > 0)$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $2 \leq x \leq a$ 에서 $x > 0$ 이므로 $\log_2 x^4 = 4 \log_2 x$

$\log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 a$, 즉 $1 \leq t \leq \log_2 a$ 이고

$$y = -t^2 + 4t + 4$$

$$= -(t-2)^2 + 8 \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $2 \leq \log_2 a$, 즉 $\log_2 4 \leq \log_2 a$, $a \geq 4$ 일 때

함수 ㉠은 $t=2$ 에서 최댓값 8을 갖고, 최댓

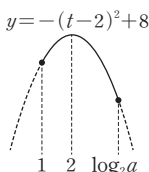
값과 최솟값의 합이 12이므로 최솟값은

$$12 - 8 = 4$$

$t=1$ 일 때, $y = -1 + 4 + 4 = 7$ 이므로 이

함수는 $t=1$ 에서 최솟값을 갖지 않는다.

즉, 함수 ㉠은 $t = \log_2 a$ 일 때 최솟값 4를 가지므로



$$y = -(\log_2 a - 2)^2 + 8 = 4, (\log_2 a - 2)^2 = 4$$

$$\log_2 a - 2 = -2 \text{ 또는 } \log_2 a - 2 = 2$$

$$\log_2 a = 0 \text{ 또는 } \log_2 a = 4, a = 1 \text{ 또는 } a = 16$$

$$\therefore a = 16 \quad (\because a \geq 4)$$

(ii) $\log_2 a < 2$, 즉 $\log_2 a < \log_2 4$, $a < 4$ 일 때

함수 ㉠은 $t = \log_2 a$ 에서 최댓값을 갖고,

$t=1$ 에서 최솟값을 갖는다.

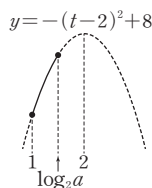
$t=1$ 일 때, $y = -1 + 4 + 4 = 7$ 이므로 최

솟값은 7이고, 최댓값과 최솟값의 합이 12

이므로 최댓값은 5이다. 최댓값이 최솟값

보다 작으므로 이는 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = 16$



답 ④

12 $2x - \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서

$$0 \leq 2x < 2\pi, -\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi$$

오른쪽 그림과 같이

$$-\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi \text{에서}$$

$$\cos t < -\frac{1}{2} \text{을 만족시키는}$$

t 의 값의 범위는 $\frac{2}{3}\pi < t < \frac{4}{3}\pi$ 이므로

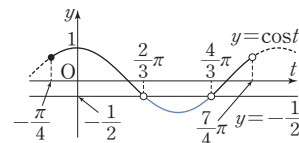
$$\frac{2}{3}\pi < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{12}\pi < 2x < \frac{19}{12}\pi$$

$$\therefore \frac{11}{24}\pi < x < \frac{19}{24}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{11}{24}\pi$, $\beta = \frac{19}{24}\pi$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{19}{24}\pi - \frac{11}{24}\pi = \frac{\pi}{3}$$

답 ③



13 $g(x) = 3 \sin x - |2 \sin x|$ 로 놓으면

$$g(x) = \begin{cases} 3 \sin x - 2 \sin x & (\sin x \geq 0) \\ 3 \sin x - (-2 \sin x) & (\sin x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sin x & (\sin x \geq 0) \\ 5 \sin x & (\sin x < 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같고, $g(x)$ 의 최댓값

은 1, 최솟값은 -5 이다.

즉, 함수 $f(x) = g(x) + k$ 의 최댓값

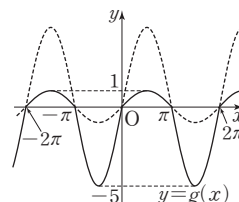
은 $1+k$, 최솟값은 $-5+k$ 이다.

그런데 $f(x)$ 의 최솟값이 -4 이므로

$$-5+k = -4 \quad \therefore k = 1$$

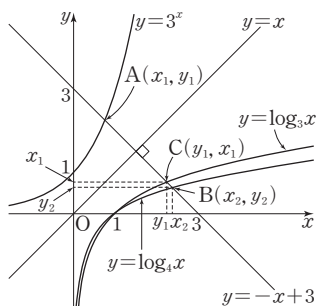
따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$1+k = 1+1 = 2$$



답 ④

14 ㄱ.



함수 $y=3^x$ 의 역함수는 $y=\log_3 x$ 이고 그 그래프는 위의 그림과 같다.

이때 직선 $y=-x+3$ 은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프와 직선 $y=-x+3$ 의 교점을 C라 하면 $C(y_1, x_1)$ 이다.

즉, 위의 그림에서 $y_2 < x_1$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $y_2 < x_1$ 이므로 $y_2 + x_2 < x_1 + x_2$ ㉠

이때 점 $B(x_2, y_2)$ 는 직선 $y=-x+3$ 위의 점이므로

$$y_2 = -x_2 + 3 \quad \therefore x_2 + y_2 = 3$$

즉 ㉠에서 $x_1 + x_2 > 3$ (참)

ㄷ. $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0}$ 은 점 $B(x_2, y_2)$ 와 원점을 지나는 직선의 기울

기이고 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1 - 0}{y_1 - 0}$ 은 점 $C(y_1, x_1)$ 과 원점을 지나는 직선의 기울기이므로

$$\frac{y_2}{x_2} < \frac{x_1}{y_1} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

다른풀이 ㄷ. ㄱ의 그림에서 $0 < y_1 < x_2$, $0 < y_2 < x_1$ 이고,

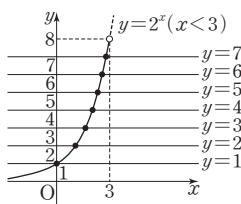
$$0 < y_1 < x_2 \text{에서 } 0 < \frac{1}{x_2} < \frac{1}{y_1} \text{이므로}$$

$$0 < \frac{y_2}{x_2} < \frac{x_1}{y_1} \text{ (거짓)}$$

15 $x < 3$ 에서 $0 < 2^x < 8$ 이므로 함수

$y=2^x$ ($x < 3$)의 그래프 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점은

$y=1, y=2, y=3, \dots, y=7$ 일 때 각각 1개씩 총 7개이다.



한편, 함수 $y = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3+a} + 8$ ($x \geq 3$)은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이고, 그래프는 항상 점 $(3, 8)$ 을 지난다. 또, 그래프의 점근선은 직선 $y = -\left(\frac{1}{6}\right)^{3+a} + 8$ 이고, 치역

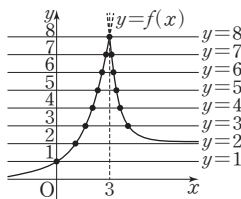
은 $\left\{y \mid y > -\left(\frac{1}{6}\right)^{3+a} + 8\right\}$ 이다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점이 13개이려면 함수

$$y = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3+a} + 8 \text{ ($x \geq 3$)}$$

의 그래프 위의 점 중에서 y 좌표가

정수인 점은 $y=8, y=7, y=6, y=5, y=4, y=3$ 일 때 각각 1



개씩 총 6개이어야 한다.

따라서 $2 \leq -\left(\frac{1}{6}\right)^{3+a} + 8 < 3$ 이어야 하므로

$$-6 \leq -\left(\frac{1}{6}\right)^{3+a} < -5, \quad 5 < \left(\frac{1}{6}\right)^{3+a} \leq 6$$

$$\log_{\frac{1}{6}} 6 \leq 3+a < \log_{\frac{1}{6}} 5, \quad -1 \leq 3+a < -\log_6 5$$

$$\therefore -4 \leq a < -3 - \log_6 5$$

답 ①

16 $A(a, \log_3 3a)$, $B(b, \log_3 27b)$ 라 하면 직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{18}$ 이므로

$$\frac{\log_3 27b - \log_3 3a}{b-a} = -\frac{1}{18}$$

$$\therefore \log_3 27b - \log_3 3a = -\frac{1}{18}(b-a) \quad \dots\dots ㉠$$

또, $\overline{AB} = 5\sqrt{13}$ 이므로

$$\sqrt{(b-a)^2 + (\log_3 27b - \log_3 3a)^2} = 5\sqrt{13} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\sqrt{(b-a)^2 + \left\{-\frac{1}{18}(b-a)\right\}^2} = 5\sqrt{13}$$

$$\sqrt{\frac{325}{324}(b-a)^2} = 5\sqrt{13}$$

$$\frac{5\sqrt{13}}{18}(a-b) = 5\sqrt{13} \quad (\because a > b)$$

$$\frac{1}{18}(a-b) = 1 \quad \therefore a-b=18 \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$\log_3 27b - \log_3 3a = 1, \quad \log_3 \frac{27b}{3a} = 1$$

$$\log_3 \frac{9b}{a} = 1, \quad \frac{9b}{a} = 3, \quad 3a=9b \quad \therefore a=3b \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=27, b=9$

따라서 $A(27, 4), B(9, 5), C(9, 0)$ 이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 5 \times (27-9) = 45$$

답 ①

17 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \quad \dots\dots ①$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{또, } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta,$$

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} \text{이므로}$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos(\pi - \theta) - \tan\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)$$

$$= -\cos \theta - \cos \theta - \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= -2\cos \theta - \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= -2 \times \frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{20} \quad \dots\dots ③$$

따라서 $k = -\frac{9}{20}$ 이므로

$$40k = 40 \times \left(-\frac{9}{20}\right) = -18 \quad \dots\dots ④$$

답 -18

채점기준	배점
① $\cos\theta$ 의 값 구하기	1
② $\tan\theta$ 의 값 구하기	1
③ $-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi-\theta)-\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$ 의 값 구하기	2
④ $40k$ 의 값 구하기	1

18 밑의 조건에서 $(x-2)^2 > 0$, $(x-2)^2 \neq 1$

$(x-2)^2 > 0$ 에서 $x \neq 2$

$(x-2)^2 \neq 1$ 에서 $x-2 \neq 1$ 이고 $x-2 \neq -1$

$\therefore x \neq 3$ 이고 $x \neq 1$

즉, 밑의 조건에서 $x \neq 1$ 이고 $x \neq 2$ 이고 $x \neq 3$ $\dots\dots ㉠$

$\dots\dots ①$

또, 진수의 조건에서 $-x^2+2x+15 > 0$ 이므로

$$x^2-2x-15 < 0, (x+3)(x-5) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 5 \quad \dots\dots ㉡$$

$\dots\dots ②$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-3 < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 2 \text{ 또는 } 2 < x < 3 \text{ 또는 } 3 < x < 5$$

$\dots\dots ③$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 4$ 이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$$-2 + (-1) + 0 + 4 = 1 \quad \dots\dots ④$$

답 1

채점기준	배점
① 밑의 조건에서 실수 x 의 값의 조건 구하기	2
② 진수의 조건에서 실수 x 의 값의 범위 구하기	2
③ ①, ②의 공통부분 구하기	1
④ 모든 정수 x 의 값의 합 구하기	1

19 진수의 조건에서 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{16}x) > 0$, $\log_{16}x > 0$, $x > 0$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_{16}x) > 0 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_{16}x) > \log_{\frac{1}{2}}1$$

$$\log_{16}x < 1, \log_{16}x < \log_{16}16$$

$$\therefore x < 16 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_{16}x > 0 \text{에서 } \log_{16}x > \log_{16}1 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{또, } x > 0 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 } 1 < x < 16 \quad \dots\dots ㉣$$

$\dots\dots ①$

$$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_{\frac{1}{2}}(\log_{16}x)\} > 0 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_{\frac{1}{2}}(\log_{16}x)\} > \log_{\frac{1}{3}}1, \log_{\frac{1}{2}}(\log_{16}x) < 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_{16}x) < \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}, \log_{16}x > \frac{1}{2}$$

$$\log_{16}x > \log_{16}4 \quad \therefore x > 4 \quad \dots\dots ㉤$$

$\dots\dots ②$

$$\text{㉣, ㉤의 공통부분을 구하면 } 4 < x < 16 \quad \dots\dots ③$$

$\dots\dots ③$

따라서 정수 x 는 5, 6, 7, ..., 14, 15의 11개이다. $\dots\dots ④$

답 11

채점기준	배점
① 진수의 조건에서 x 의 값의 범위 구하기	3
② 부등식을 풀어 x 의 값의 범위 구하기	2
③ ①, ②의 공통부분 구하기	1
④ 모든 정수 x 의 개수 구하기	1

20 조건 (가)에서 $(\sqrt[n]{32})^4 = (\sqrt[n]{2^5})^4 = (2^{\frac{5}{n}})^4 = 2^{\frac{20}{n}}$ 의 값이 자연수이므로 자연수 n 은 20의 약수이다.

즉, n 이 될 수 있는 2 이상 10 미만의 자연수는 2, 4, 5이다.

$\dots\dots ①$

조건 (나)에서

(i) $n=2$ 일 때,

$$n^2-8n-6=4-16-6=-18 \text{의 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.} \quad \dots\dots ②$$

(ii) $n=4$ 일 때,

$$n^2-8n-6=16-32-6=-22 \text{의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.} \quad \dots\dots ③$$

(iii) $n=5$ 일 때,

$$n^2-8n-6=25-40-6=-21 \text{의 다섯제곱근 중 실수인 것은 } \sqrt[5]{-21} \text{이고, } \sqrt[5]{-21} = -\sqrt[5]{21} < 0 \text{이므로 } n^2-8n-6 \text{의 다섯제곱근 중 음의 실수인 것이 존재한다.} \quad \dots\dots ④$$

(i), (ii), (iii)에서 $n=5$ $\dots\dots ⑤$

답 5

채점기준	배점
① 조건 (가)에서 자연수 n 이 될 수 있는 수 구하기	2
② 조건 (나)에서 $n=2$ 일 때, 조건을 만족시키지 않음 설명하기	1
③ 조건 (나)에서 $n=4$ 일 때, 조건을 만족시키지 않음 설명하기	1
④ 조건 (나)에서 $n=5$ 일 때, 조건을 만족시킴 설명하기	2
⑤ 자연수 n 의 값 구하기	1

실전 모의고사 3회

p.176~179

$$01 \quad 2\log_3\sqrt{6} + \log_3 5 - \log_{\frac{1}{3}}\frac{9}{10} = \log_3(\sqrt{6})^2 + \log_3 5 - \log_{3^{-1}}\frac{9}{10}$$

$$= \log_3 6 + \log_3 5 + \log_3 \frac{9}{10}$$

$$= \log_3\left(6 \times 5 \times \frac{9}{10}\right)$$

$$= \log_3 27 = 3 \quad \text{답 ④}$$

02 함수 $y = 2^{-x+a} + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$ 이므로 $b=-1$

또, 함수 $y = 2^{-x+a} - 1$ 의 그래프가 점 $(-3, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 2^{3+a} - 1, 2^{3+a} = 1, 3+a=0 \quad \therefore a=-3$$

$$\therefore a+b = -3 + (-1) = -4 \quad \text{답 ①}$$

답 ①

03 1라디안 $=\frac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ 라디안이므로

$$\textcircled{1} 210^\circ=210 \times 1^\circ=210 \times \frac{\pi}{180}=\frac{7}{6}\pi$$

$$\textcircled{2} 300^\circ=300 \times 1^\circ=300 \times \frac{\pi}{180}=\frac{5}{3}\pi$$

$$\textcircled{3} -200^\circ=-200 \times 1^\circ=-200 \times \frac{\pi}{180}=-\frac{10}{9}\pi$$

$$\textcircled{4} -\frac{7}{4}\pi=-\frac{7}{4}\pi \times 1=-\frac{7}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi}=-315^\circ$$

$$\textcircled{5} -\frac{5}{2}\pi=-\frac{5}{2}\pi \times 1=-\frac{5}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi}=-450^\circ$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

$$04 A=\sqrt[3]{6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{6^2 \times 3}=\sqrt[3]{108}=\sqrt[6]{108}$$

$$B=\sqrt[3]{8\sqrt{2}}=\sqrt[3]{8^2 \times 2}=\sqrt[3]{128}=\sqrt[6]{128}$$

$$C=\sqrt{3^3 \sqrt{2}}=\sqrt{3^3 \times 2}=\sqrt[3]{54}=\sqrt[6]{54}$$

$$54 < 108 < 128 \text{이므로 } \sqrt[6]{54} < \sqrt[6]{108} < \sqrt[6]{128}$$

$$\therefore C < A < B$$

답 ④

05 ① $(-2)^4=16 \neq -16$ 이므로 -2 는 -16 의 네제곱근이 아니다.

② $\sqrt[3]{27}=3$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{3}$ 이다.

③ -32 의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[5]{-32}=-2$ 이다.

④ -81 의 여섯제곱근 중 실수인 것은 없다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

06 $a > 1$ 이므로 함수 $f(x)=a^{x-1}+2$ 는 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가하는 함수이다.

이때 정의역이 $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값, $x=-1$ 에서 최솟값을 갖는다.

$f(x)$ 의 최댓값이 18이므로 $f(3)=18$ 에서

$$a^2+2=18, a^2=16 \quad \therefore a=4 \quad (\because a > 1)$$

$$\therefore f(x)=4^{x-1}+2 \quad (-1 \leq x \leq 3)$$

즉, $-1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(-1)=4^{-2}+2=\frac{33}{16} \quad \therefore m=\frac{33}{16}$$

$$\therefore am=4 \times \frac{33}{16}=\frac{33}{4}$$

답 ③

07 $A(1, 0)$, $B(k, \log_3 k)$, $C(k, \log_{\frac{1}{3}} k)$ 이므로 $\triangle ACB$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+k+k}{3}, \frac{0+\log_3 k+\log_{\frac{1}{3}} k}{3} \right) \quad \therefore \left(\frac{2k+1}{3}, 0 \right)$$

$$\text{즉, } \frac{2k+1}{3}=5 \text{이므로 } 2k+1=15, 2k=14 \quad \therefore k=7$$

따라서 $A(1, 0)$, $B(7, \log_3 7)$, $C(7, \log_{\frac{1}{3}} 7)$ 이므로

$$\triangle ACB = \frac{1}{2} \times (\log_3 7 - \log_{\frac{1}{3}} 7) \times (7-1)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \log_3 7 \times 6 = 6 \log_3 7$$

답 ①

08 함수 $y=2\sin ax$ 의 그래프와 직선 $y=\sqrt{2}$ 의 교점의 x 좌표는

$$2\sin ax = \sqrt{2} \text{에서 } \sin ax = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2a} \text{에서 } -\frac{3}{2}\pi \leq ax \leq \frac{\pi}{2} \text{이므로 } (\because a > 0)$$

$$ax = -\frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } ax = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore x = -\frac{5}{4a}\pi \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{4a}$$

$$\text{즉, } A\left(-\frac{5}{4a}\pi, \sqrt{2}\right), B\left(\frac{\pi}{4a}, \sqrt{2}\right) \text{이고 } \overline{AB}=9 \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{4a} - \left(-\frac{5}{4a}\pi\right) = \frac{3\pi}{2a} = 9$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{6}$$

답 ②

09 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\frac{3}{2}\pi + 2n\pi < \theta < 2\pi + 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} + \frac{2n}{3}\pi < \frac{\theta}{3} < \frac{2}{3}\pi + \frac{2n}{3}\pi$$

정수 k 에 대하여

$n=3k$ 일 때, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{\theta}{3} < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ 이므로 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각이다.

$n=3k+1$ 일 때, $\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < \frac{\theta}{3} < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ 이므로 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

$n=3k+2$ 일 때, $\frac{11}{6}\pi + 2k\pi < \frac{\theta}{3} < 2\pi + 2k\pi$ 이므로 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.

답 ①

10 진수의 조건에서 $(x+2)^2 > 0$, $-x+6 > 0$ 이므로

$$x \neq -2, x < 6$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } -2 < x < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 \geq -1 + \log_{\frac{1}{4}}(-x+6) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 \geq \log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_{\frac{1}{4}}(-x+6)$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 \geq \log_{\frac{1}{4}}\{4(-x+6)\}$$

및 $\frac{1}{4}$ 이 1보다 작으므로

$$(x+2)^2 \leq 4(-x+6), x^2+4x+4 \leq -4x+24$$

$$x^2+8x-20 \leq 0, (x+10)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -10 \leq x \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$-10 \leq x < -2 \text{ 또는 } -2 < x \leq 2$$

따라서 정수 x 는 $-10, -9, -8, \dots, -4, -3, -1, 0, 1, 2$ 의 12개이다.

답 ③

- 11 함수 $y=\tan(ax+b)+1$ 의 주기는 $\frac{11}{12}\pi - \frac{5}{12}\pi = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{2}, |a|=2 \quad \therefore a=-2 (\because a<0)$$

또, $y=\tan(-2x+b)+1$ 의 그래프가 점 $(\frac{\pi}{6}, 1)$ 을 지나므로

$$1=\tan\left(-\frac{\pi}{3}+b\right)+1, \tan\left(-\frac{\pi}{3}+b\right)=0$$

이때 $0 \leq b < \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{3}+b < \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$-\frac{\pi}{3}+b=0 \quad \therefore b=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore ab=-2 \times \frac{\pi}{3} = -\frac{2}{3}\pi \quad \text{답 ①}$$

- 12 두 함수 $y=\sqrt{-6x}$,

$y=-\frac{1}{6}x^2 (x \geq 0)$ 은 서로의

역함수이므로 두 점 P, Q는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

즉, P(m, n)이라 하면

Q(n, m)이다.

따라서

$$\sin \alpha = \frac{n}{\sqrt{6}}, \cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{6}}, \tan \alpha = \frac{n}{m}$$

$$\sin \beta = \frac{m}{\sqrt{6}}, \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{6}}, \tan \beta = \frac{m}{n}$$

이므로

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \tan \alpha \tan \beta$$

$$= \frac{n}{\sqrt{6}} \times \frac{n}{\sqrt{6}} + \frac{m}{\sqrt{6}} \times \frac{m}{\sqrt{6}} + \frac{n}{m} \times \frac{m}{n}$$

$$= \frac{n^2}{6} + \frac{m^2}{6} + 1$$

$$= \frac{m^2+n^2}{6} + 1$$

$$= 2 (\because m^2+n^2=6) \quad \text{답 ⑤}$$

- 13 $y=\frac{-3\sin x+1}{\sin x-2}$ 에서 $\sin x=t$ 로 놓으면

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \sin x \leq 1$, 즉 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y=\frac{-3t+1}{t-2}=\frac{-3(t-2)-5}{t-2}$$

$$=-\frac{5}{t-2}-3$$

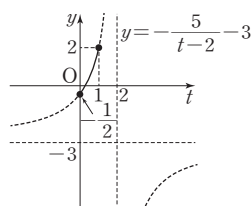
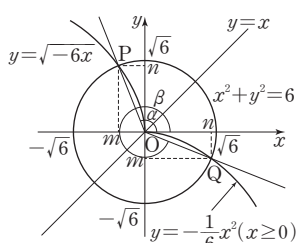
따라서 $0 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$t=1$ 에서 최댓값 2, $t=0$ 에서 최솟

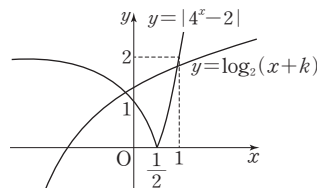
값 $-\frac{1}{2}$ 을 가지므로

$$M=2, m=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore Mm=2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \text{답 ④}$$



14



함수 $y=|4^x-2|$ 의 그래프는 위의 그림과 같이 두 점 (0, 1), (1, 2)를 지난다.

따라서 $f(x)=\log_2(x+k) \left(k>\frac{1}{2}\right)$ 라 할 때, 위의 그림과 같이

$x_1<0$ 이려면 $f(0)>1$ 이어야 하고, $\frac{1}{2}<x_2<1$ 이려면 $f(1)<2$

이어야 한다.

$$f(0)>1 \text{에서 } \log_2 k > 1$$

$$\log_2 k > \log_2 2$$

$$\therefore k > 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(1)<2 \text{에서 } \log_2(1+k) < 2$$

$$\log_2(1+k) < \log_2 4$$

$$1+k < 4 \quad \therefore k < 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

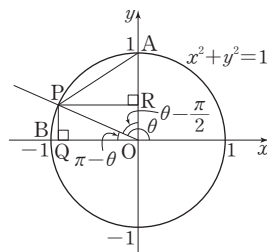
$$2 < k < 3$$

답 ⑤

- 15 P(cosθ, sinθ)이고, 점 P가 제2사분면의 점이므로

$$-1 < \cos \theta < 0, 0 < \sin \theta < 1$$

ㄱ.



점 P에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하고,

A(0, 1)이라 하면

$$\overline{PR} = \overline{QO} = -\cos \theta$$

부채꼴 AOP에서 $\angle AOP = \theta - \frac{\pi}{2}$ 이므로 호 AP의 길이는

$$1 \times \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \theta - \frac{\pi}{2}$$

이때 $\overline{PR} < \overline{AP} < (\text{호 AP의 길이})$ 이므로

$$-\cos \theta < \theta - \frac{\pi}{2} \quad \therefore \cos \theta > \frac{\pi}{2} - \theta \quad (\text{참})$$

ㄴ, $\overline{PQ} = \sin \theta$ 이고, B(-1, 0)이라 하면 부채꼴 POB에서

$\angle POB = \pi - \theta$ 이므로 호 PB의 길이는

$$1 \times (\pi - \theta) = \pi - \theta$$

이때 $\overline{PQ} < (\text{호 PB의 길이})$ 이므로 $\sin \theta < \pi - \theta$

$$\neg \text{에서 } \cos \theta > \frac{\pi}{2} - \theta, \text{ 즉 } -\cos \theta < \theta - \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\sin \theta + (-\cos \theta) < (\pi - \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta < \frac{\pi}{2} \quad (\text{참})$$

ㄷ. $\triangle OPQ$ 의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times \overline{QO} \times \overline{PQ} &= \frac{1}{2} \times (-\cos \theta) \times \sin \theta \\ &= -\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

또, $\angle POB = \pi - \theta$ 이므로 부채꼴 POB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times (\pi - \theta) = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$$

($\triangle OPQ$ 의 넓이) < (부채꼴 POB의 넓이)이므로

$$-\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta < \frac{1}{2}(\pi - \theta)$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta > -(\pi - \theta) = \theta - \pi \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16 ㄱ. $2^a = 7^b$ 에서 $(2^a)^{\frac{1}{a}} = (7^b)^{\frac{1}{b}}$, $2 = 7^{\frac{b}{a}}$

$$\therefore \frac{b}{a} = \log_7 2$$

즉, $\frac{b}{a}$ 는 무리수이다. (거짓)

ㄴ. [반례] 양수 a, b 에 대하여 $2^a > 1$, $7^b > 1$ 이므로

$$2^a = 7^b = \sqrt{14} \text{ 이면 } a = \log_2 \sqrt{14}, b = \log_7 \sqrt{14} \text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{\log_2 \sqrt{14}} + \frac{1}{\log_7 \sqrt{14}} \\ &= \log_{\sqrt{14}} 2 + \log_{\sqrt{14}} 7 \\ &= \log_{\sqrt{14}} 14 = 2\end{aligned}$$

즉, $2^a = 7^b = \sqrt{14}$ 이면 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 은 유리수이다. (거짓)

ㄷ. $(4a-1)(4b-1)=1$ 에서

$$16ab - 4a - 4b + 1 = 1, 16ab - 4a - 4b = 0$$

$$4ab - a - b = 0, 4ab = a + b, \frac{a+b}{ab} = 4$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 4 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $2^a = 7^b = k$ ($k > 1$)라 하면

$$a = \log_2 k, b = \log_7 k \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{\log_2 k} + \frac{1}{\log_7 k} \\ &= \log_k 2 + \log_k 7 \\ &= \log_k 14 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } \log_k 14 = 4$$

$$\therefore k^4 = 14$$

$$\therefore 2^a \times 7^b = k \times k = k^2 = (k^4)^{\frac{1}{2}} = 14^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14} \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

[참고] ㄱ에서 $\log_7 2$ 가 유리수라고 가정하면

$$\log_7 1 < \log_7 2 < \log_7 7, \text{ 즉, } 0 < \log_7 2 < 1 \text{ 이므로}$$

$$\log_7 2 = \frac{n}{m} \text{ 이고 서로소인 두 자연수 } m, n (m > n) \text{ 이 존재한다.}$$

$$\text{이때 } 7^{\frac{n}{m}} = 2 \text{ 이므로 } (7^{\frac{n}{m}})^m = 2^m \quad \therefore 7^n = 2^m$$

그런데 7^n 은 홀수이고 2^m 은 짝수이므로 모순이다.

따라서 $\log_7 2$ 는 무리수이다.

17 (i) $x=1$ 일 때,

$$x^{2x^2-1} = x^{6x+19} \text{에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$1^{2-1} = 1^{6+19} = 1 \text{ 이므로 } x=1 \text{은 주어진 방정식의 근이다.}$$

..... ①

(ii) $0 < x < 1$ 또는 $x > 1$ 일 때,

$$x^{2x^2-1} = x^{6x+19} \text{에서 } 2x^2 - 1 = 6x + 19$$

$$2x^2 - 6x - 20 = 0, x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x+2)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 5 \quad (\because 0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1)$$

..... ②

(i), (ii)에서 방정식 $x^{2x^2-1} = x^{6x+19}$ 의 실근은 $x=1$ 또는 $x=5$ 이므로 모든 실근의 합은

$$1 + 5 = 6$$

..... ③

답 6

채점기준	배점
① $x=1$ 이 방정식의 근임을 설명하기	2
② $0 < x < 1$ 또는 $x > 1$ 일 때 방정식의 근 구하기	2
③ 모든 실근의 합 구하기	1

18 n 년 후 A지역, B지역의 인구는 각각 16×1.15^n 만 명,

64×0.85^n 만 명이고, n 년 후 A지역의 인구가 B지역 인구 이상 이 된다고 하면

$$16 \times 1.15^n \geq 64 \times 0.85^n$$

..... ①

$$1.15^n \geq 4 \times 0.85^n$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 1.15^n \geq \log (4 \times 0.85^n)$$

$$n \log 1.15 \geq 2 \log 2 + n \log 0.85$$

$$n \log 1.15 - n \log 0.85 \geq 2 \log 2$$

$$n (\log 1.15 - \log 0.85) \geq 2 \log 2$$

$$\begin{aligned}n &\geq \frac{2 \log 2}{\log 1.15 - \log 0.85} = \frac{2 \log 2}{\log 1.15 - (\log 8.5 - 1)} \\ &= \frac{2 \times 0.3}{0.06 - (0.93 - 1)} = \frac{0.6}{0.13}\end{aligned}$$

$$\therefore n \geq 4.6 \dots$$

..... ②

따라서 A지역의 인구가 처음으로 B지역의 인구 이상이 되는 것은 5년 후이다.

$$\therefore N = 5$$

..... ③

답 5

채점기준	배점
① n 에 대한 부등식 세우기	2
② 부등식을 풀어 n 의 값의 범위 구하기	2
③ 자연수 N 의 값 구하기	1

19 $x^2 + 3x - 28 = 0$ 에서 $(x+7)(x-4) = 0$

$$\therefore x = -7 \text{ 또는 } x = 4$$

$$x^2 + 3x - 28 > 0 \text{에서 } x < -7 \text{ 또는 } x > 4$$

$$x^2 + 3x - 28 < 0 \text{에서 } -7 < x < 4$$

..... ①

(i) $x^2 + 3x - 28$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 항상 1개이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 1$

..... ②

- 04 함수 $y=3\log_{\frac{1}{3}}(x+k)$ ($0 \leq x \leq 18$)는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하는 함수이므로 $x=0$ 에서 최댓값 $3\log_{\frac{1}{3}}k$, $x=18$ 에서 최솟값 $3\log_{\frac{1}{3}}(18+k)$ 를 갖는다.

이때 최댓값이 -6 이므로

$$3\log_{\frac{1}{3}}k = -6, \log_{\frac{1}{3}}k = -2$$

$$\therefore k = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9$$

따라서 최솟값은

$$3\log_{\frac{1}{3}}(18+9) = 3\log_{\frac{1}{3}}27 = -3\log_3 3^3 = -3 \times 3 = -9$$

$$\therefore m = -9$$

$$\therefore k-m = 9 - (-9) = 18$$

답 ⑤

- 05 $3\log_n 2 = k$ (k 는 자연수)라 하면

$$\log_n 2 = \frac{k}{3}, n^{\frac{k}{3}} = 2 \quad \therefore n = 2^{\frac{3}{k}}$$

이때 n 이 2 이상의 자연수이려면 $\frac{3}{k}$ 이 자연수이어야 하므로 k 는

3의 양의 약수이어야 한다. 즉, $k=1$ 또는 $k=3$ 이므로

$$n = 2^3 = 8 \text{ 또는 } n = 2^1 = 2$$

따라서 구하는 합은

$$8+2=10$$

답 ②

- 06 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 1$$

이 함수의 그래프가 직선 $x=1$ 과 만나는 점의 y 좌표는

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2} - 1 = 3 - 1 = 2 \quad \therefore p = 2$$

y 축과 만나는 점의 y 좌표는

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 1 = 9 - 1 = 8 \quad \therefore q = 8$$

$$\therefore p+q = 2+8 = 10$$

답 ④

- 07 $\sin\theta \cos\theta > 0$ 에서

$$\sin\theta > 0, \cos\theta > 0 \text{ 또는 } \sin\theta < 0, \cos\theta < 0$$

이때 $\sin\theta + \cos\theta < 0$ 이므로

$$\sin\theta < 0, \cos\theta < 0$$

따라서 θ 는 제3사분면의 각이므로 $\tan\theta > 0$ 이고

$$\sin\theta - \tan\theta < 0$$

$$\therefore |\sin\theta| - \sqrt{\tan^2\theta} + |\sin\theta - \tan\theta|$$

$$= |\sin\theta| - |\tan\theta| + |\sin\theta - \tan\theta|$$

$$= -\sin\theta - \tan\theta - (\sin\theta - \tan\theta)$$

$$= -\sin\theta - \tan\theta - \sin\theta + \tan\theta$$

$$= -2\sin\theta$$

답 ②

- 08 직선 $y=ax+b$ 에서 기울기가 양수이므로 $a > 0$

y 절편이 1보다 크므로 $b > 1$

함수 $y=\log_b ax$ 가 정의되려면 진수의 조건에서 $ax > 0$ 이어야 하므로 $x > 0$ ($\because a > 0$)

이때 $b > 1$ 이므로 함수 $y=\log_b ax$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이다.

따라서 함수 $y=\log_b ax$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

답 ②

- 09 1등성에서 6등성까지의 밝기가 일정한 비율로 감소하므로 6등성에서 1등성까지의 밝기는 일정한 비율로 증가한다.

n 등성의 밝기를 $(n+1)$ 등성의 밝기의 r 배라 하고, 6등성의 밝기를 a 라 하면 1등성의 밝기는 ar^5

이때 1등성의 밝기가 6등성의 밝기의 100배이므로

$$ar^5 = 100a, r^5 = 100$$

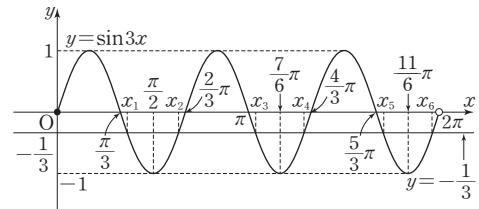
$$\therefore r = 100^{\frac{1}{5}} = (10^2)^{\frac{1}{5}} = 10^{\frac{2}{5}}$$

2등성의 밝기는 5등성의 밝기의 r^3 배, 즉 $(10^{\frac{2}{5}})^3 = 10^{\frac{6}{5}}$ 배이므로

$$P = \frac{6}{5}$$

답 ⑤

- 10 함수 $y=\sin 3x$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1 , 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 함수 $y=\sin 3x$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{3}$ 의 교점은 6개이고, 각 교점의 x 좌표를 작은 것부터 차례로 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$ 이라 하면

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{x_3+x_4}{2} = \frac{7}{6}\pi, \frac{x_5+x_6}{2} = \frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore x_1+x_2 = \pi, x_3+x_4 = \frac{7}{3}\pi, x_5+x_6 = \frac{11}{3}\pi$$

따라서 모든 교점의 x 좌표의 합은

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = \pi + \frac{7}{3}\pi + \frac{11}{3}\pi = 7\pi$$

답 ⑤

- 11 $f(x) = \log_5 \left(\frac{2}{2x-1} + 1 \right) = \log_5 \frac{2x+1}{2x-1}$ 이므로

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)$$

$$= \log_5 3 + \log_5 \frac{5}{3} + \log_5 \frac{7}{5} + \dots + \log_5 \frac{2n+1}{2n-1}$$

$$= \log_5 \left(3 \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \dots \times \frac{2n+1}{2n-1} \right)$$

$$= \log_5 (2n+1)$$

즉, $\log_5 (2n+1) = 2$ 이므로

$$2n+1 = 5^2, 2n = 24$$

$$\therefore n = 12$$

답 ①

12 $3\cos^2 A - 7\cos A + 2 = 0$ 에서

$$(3\cos A - 1)(\cos A - 2) = 0$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{3} \quad (\because 0 < A < \pi \text{에서 } -1 < \cos A < 1)$$

$A + B + C = \pi$ 에서 $B + C = \pi - A$ 이므로

$$\sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 A} \quad (\because 0 < A < \pi \text{에서 } \sin A > 0)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{답 ⑤}$$

13 $x + 3y = 6$ 에서 $3y = 6 - x$

$3^x > 0, 27^y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3^x + 27^y = 3^x + 3^{6-x}$$

$$= 3^x + 3^{6-x}$$

$$\geq 2\sqrt{3^x \times 3^{6-x}}$$

$$= 2\sqrt{3^6} = 54 \quad (\text{단, 등호는 } 3^x = 3^{6-x}, \text{ 즉 } x = 3 \text{일 때 성립})$$

따라서 $3^x + 27^y$ 의 최솟값은 54이다. 답 ⑤

14 $\overline{OA} = 2\sqrt{3}, \angle POA = \frac{\pi}{6}, \angle PAO = \frac{\pi}{2}$ 이

므로 직각삼각형 APO에서

$$\overline{AP} = \overline{OA} \tan \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$$

$$\therefore \square APBO = 2\triangle APO = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{AO}\right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$$

또, 부채꼴 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

따라서 색칠한 도형의 넓이는

$$(\text{사각형 APBO의 넓이}) - (\text{부채꼴 AOB의 넓이}) = 4\sqrt{3} - 2\pi$$

이므로 $a = 4, b = -2$

$$\therefore a + b = 4 + (-2) = 2 \quad \text{답 ④}$$

15 양수 a, b 에 대하여 $a^2 < a < b < b^2$ 이므로

$$a^2 < a \text{에서 } a^2 - a < 0, a(a-1) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$b < b^2 \text{에서 } b^2 - b > 0, b(b-1) > 0$$

$$b < 0 \text{ 또는 } b > 1 \quad \therefore b > 1 \quad (\because b > 0)$$

ㄱ. 밑 a 가 1보다 작고, $a < b$ 이므로 $a^a > a^b$ (참)

ㄴ. 밑 b 가 1보다 크고, $a < 1$ 이므로

$$\log_b a < \log_b 1 \quad \therefore \log_b a < 0 \quad (\text{거짓})$$

ㄷ. ㉠에서 $a+1 > 1$

밑 $a+1$ 이 1보다 크고, $b > 1$ 이므로

$$\log_{a+1} b > \log_{a+1} 1 \quad \therefore \log_{a+1} b > 0$$

밑 a 가 1보다 작고, $b+1 > 2 > 1$ 이므로

$$\log_a (b+1) < \log_a 1 \quad \therefore \log_a (b+1) < 0$$

$$\therefore \log_{a+1} b \times \log_a (b+1) < 0 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

16 $\cos^2 x - 4\sin x \leq a$ 에서 $(1 - \sin^2 x) - 4\sin x \leq a$

$$\therefore \sin^2 x + 4\sin x + a - 1 \geq 0$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$t^2 + 4t + a - 1 \geq 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$y = t^2 + 4t + a - 1 = (t+2)^2 + a - 5 \text{라 하면}$$

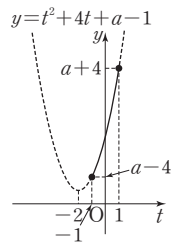
$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 함수 $y = (t+2)^2 + a - 5$

는 $t = -1$ 에서 최솟값 $a - 4$ 를 가지므로

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 부등식 ㉠이 성립하려면

$$a - 4 \geq 0 \quad \therefore a \geq 4$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 4이다. 답 ⑤



17 평균 온도가 일정하므로 평균 온도를 $a^\circ\text{C}$ 라 하고, 평균 상대 습도가 70%일 때의 부패지수를 G_1 이라 하면

$$G_1 = \frac{70-65}{14} \times 1.054^a = \frac{5}{14} \times 1.054^a \quad \dots\dots ①$$

평균 상대 습도가 $n\%$ 일 때의 부패지수를 G_2 라 하면

$$G_2 = \frac{n-65}{14} \times 1.054^a \quad \dots\dots ②$$

이때 $G_2 = 2G_1$ 이므로

$$\frac{n-65}{14} \times 1.054^a = 2 \times \left(\frac{5}{14} \times 1.054^a\right)$$

$$n - 65 = 10 \quad \therefore n = 75 \quad \dots\dots ③$$

답 75

채점기준	배점
① 평균 온도를 $a^\circ\text{C}$ 라 하고, 평균 상대 습도가 70%일 때의 부패지수를 a 에 대한 식으로 나타내기	2
② 평균 상대 습도가 $n\%$ 일 때의 부패지수를 a, n 에 대한 식으로 나타내기	2
③ n 의 값 구하기	2

18 $(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + a\log_2 x + b > 0$ 에서

$$(-\log_2 x)^2 + a\log_2 x + b > 0$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 + a\log_2 x + b > 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 + at + b > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 주어진 부등식의 해가 $0 < x < \frac{1}{4}$ 또는 $x > 8$ 이므로

$$\log_2 x < \log_2 \frac{1}{4} \text{ 또는 } \log_2 x > \log_2 8$$

$$\log_2 x < -2 \text{ 또는 } \log_2 x > 3$$

$$\therefore t < -2 \text{ 또는 } t > 3 \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots ②$$

㉠을 해로 갖고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(t+2)(t-3) > 0$$

$$\therefore t^2 - t - 6 > 0 \quad \dots\dots ㉢ \quad \dots\dots ③$$

㉠, ㉡이 일치해야 하므로 $a = -1, b = -6$

$$\therefore a - b = -1 - (-6) = 5 \quad \dots\dots ④$$

답 5

채점기준	배점
① 주어진 부등식을 $\log_2 x$ 에 대한 부등식으로 변형하기	1
② $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식의 해 구하기	2
③ ㉠을 해로 갖는 t 에 대한 이차부등식 구하기	2
④ $a - b$ 의 값 구하기	1

19 진수의 조건에서 $2f(x) > 0, g(x) > 0$

$$\therefore f(x) > 0, g(x) > 0$$

$f(x) > 0$ 에서

$$x^2 + 3x + 2 > 0, (x+2)(x+1) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$g(x) > 0$ 에서

$$x^2 - 4x - 5 > 0, (x+1)(x-5) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$x < -2 \text{ 또는 } x > 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\log_2 \{2f(x)\} < \log_2 g(x) - 1 \text{에서}$$

$$\log_2 \{2f(x)\} < \log_2 g(x) - \log_2 2$$

$$\log_2 \{2f(x)\} < \log_2 \frac{g(x)}{2}$$

밑 2가 1보다 크므로

$$2f(x) < \frac{g(x)}{2}, 4f(x) < g(x), 4f(x) - g(x) < 0$$

$$4(x^2 + 3x + 2) - (x^2 - 4x - 5) < 0$$

$$3x^2 + 16x + 13 < 0, (3x+13)(x+1) < 0$$

$$\therefore -\frac{13}{3} < x < -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 부등식의 해는

$$-\frac{13}{3} < x < -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉤}$$

따라서 정수 x 는 $-4, -3$ 이므로 구하는 합은

$$-4 + (-3) = -7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉥}$$

..... ①

..... ②

..... ③

..... ④

답 -7

채점기준	배점
① 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	2
② 주어진 부등식을 이차부등식으로 변형했을 때의 x 의 값의 범위 구하기	3
③ 주어진 부등식의 해 구하기	1
④ 모든 정수 x 의 값의 합 구하기	1

20 $\sin x + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - a = 0$ 에서

$$\sin x + \sin x - a = 0, 2\sin x = a$$

$$\therefore \sin x = \frac{a}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠이 오직 한 개의 실근을 가지려면 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와

직선 $y = \frac{a}{2}$ 가 한 점에서 만나야 한다. ②

$0 < x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의

그래프와 직선 $y = \frac{a}{2}$ 가 한 점에서

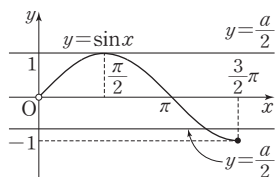
만나려면 오른쪽 그림에서

$$-1 \leq \frac{a}{2} \leq 0 \text{ 또는 } \frac{a}{2} = 1$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 0 \text{ 또는 } a = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 2$ 의 4개이다. ④

답 4



채점기준	배점
① 주어진 방정식 간단히 하기	1
② 주어진 방정식이 오직 한 개의 실근을 가질 조건 설명하기	1
③ a 의 값의 범위 구하기	3
④ 정수 a 의 개수 구하기	1

실전 모의고사 5회

p.184~187

01 $a = f(4) = \log_3 4, b = f(16) = \log_3 16$ 이므로 $f(k) = \frac{a+b}{6}$ 에서

$$\log_3 k = \frac{a+b}{6} = \frac{\log_3 4 + \log_3 16}{6} = \frac{\log_3 (4 \times 16)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \log_3 64 = \log_3 64^{\frac{1}{6}} = \log_3 2$$

$$\therefore k = 2$$

답 ③

02 $13 \log_{\sqrt{bc}} a = \frac{13}{\log_a \sqrt{bc}} = \frac{13}{\log_a (bc)^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{13}{\frac{1}{2} \log_a bc} = \frac{26}{\log_a b + \log_a c}$$

$$= \frac{26}{\log_a b + \frac{1}{\log_c a}}$$

$$= \frac{26}{4 + \frac{1}{3}} = 6$$

답 ②

03 $2.7185 = 2 + 0.7185$ 이고, 상용로그표에서 $\log 5.23 = 0.7185$ 이므로

$$\log x = 2.7185 = 2 + 0.7185 = \log 10^2 + \log 5.23$$

$$= \log (10^2 \times 5.23) = \log 523$$

$$\therefore x = 523$$

또, $-0.2916 = -1 + 0.7084$ 이고, 상용로그표에서

$$\log 5.11 = 0.7084 \text{이므로}$$

$$\log y = -0.2916 = -1 + 0.7084 = \log 10^{-1} + \log 5.11$$

$$= \log (10^{-1} \times 5.11) = \log 0.511$$

$$\therefore y = 0.511$$

$$\therefore x + y = 523 + 0.511 = 523.511$$

답 ⑤

04 $\left(\frac{1}{9^{12}}\right)^{\frac{1}{n}} = (9^{-12})^{\frac{1}{n}} = \{(3^2)^{-12}\}^{\frac{1}{n}} = 3^{-\frac{24}{n}}$

이것이 자연수가 되려면 $-\frac{24}{n}$ 가 음이 아닌 정수이어야 한다.

즉, $-n$ 이 24의 양의 약수이어야 하므로

$$-n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

따라서 정수 n 은 $-1, -2, -3, -4, -6, -8, -12, -24$ 의 8개이다. ③

05 $\frac{a^m - a^{-m}}{a^m + a^{-m}} = \frac{4}{5}$ 에서

$$\frac{a^m(a^m - a^{-m})}{a^m(a^m + a^{-m})} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{a^{2m} - 1}{a^{2m} + 1} = \frac{4}{5}$$

$$5a^{2m} - 5 = 4a^{2m} + 4 \Rightarrow a^{2m} = 9$$

$$\therefore a^m = 3 \quad (\because a^m > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^{\frac{m}{2}} - a^{-\frac{3}{2}m}}{a^{\frac{3}{2}m} - a^{-\frac{m}{2}}} &= \frac{a^{\frac{m}{2}}(a^{\frac{m}{2}} - a^{-\frac{3}{2}m})}{a^{\frac{m}{2}}(a^{\frac{3}{2}m} - a^{-\frac{m}{2}})} = \frac{a^m - a^{-m}}{a^{2m} - 1} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{9 - 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ③

06 함수 $y = \log_5(x-3) - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - 6 = \log_5\{(x - m) - 3\} - 3$$

$$\therefore y = \log_5(x - m - 3) + 3 \quad \dots\dots ㉑$$

이때

$$y = \log_5(5x + 10) + n$$

$$= \log_5\{5(x+2)\} + n$$

$$= \log_5 5 + \log_5(x+2) + n$$

$$= \log_5(x+2) + n + 1 \quad \dots\dots ㉒$$

이고 ㉑, ㉒이 서로 일치하므로

$$-m - 3 = 2, \quad 3 = n + 1$$

$$\therefore m = -5, \quad n = 2$$

$$\therefore m + n = -5 + 2 = -3$$

답 ②

07 (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > \frac{1}{16}$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > \left(\frac{1}{2}\right)^4$

밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로

$$x - 2 < 4 \quad \therefore x < 6$$

(ii) $\log_3(x-3) < \log_9(3x+1)$ 의 진수의 조건에서

$$x - 3 > 0, \quad 3x + 1 > 0 \quad \therefore x > 3 \quad \dots\dots ㉑$$

또, $\log_3(x-3) < \log_9(3x+1)$ 에서

$$\log_9(x-3)^2 < \log_9(3x+1)$$

밑 9가 1보다 크므로 $(x-3)^2 < 3x+1$

$$x^2 - 6x + 9 < 3x + 1, \quad x^2 - 9x + 8 < 0$$

$$(x-1)(x-8) < 0 \quad \therefore 1 < x < 8 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒의 공통부분을 구하면 $3 < x < 8$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는

$$3 < x < 6$$

따라서 정수 x 는 4, 5이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$$4 + 5 = 9$$

답 ②

08 ① 최솟값은 $-3 + 1 = -2$

② 최댓값은 $3 + 1 = 4$

③ $f(0) = 3\cos\frac{\pi}{3} + 1 = 3 \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ 이므로 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 점 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 를 지난다.

④ 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x + \pi) = f(x)$$

⑤ $f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 3\cos\left\{2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right\} + 1$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = 3\cos 2x$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행

이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

참고 ⑤ 함수 $y = 3\cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만

큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - 1 = 3\cos\left[2\left\{x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\right]$$

$$\therefore y = 3\cos\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right) + 1$$

이 함수의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 일치하지 않는다.

09 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$x^2 + 2(1 + \log_3 a)x + 7\log_3 a - 5 > 0$ 이 성립해야 하므로 이차 방정식 $x^2 + 2(1 + \log_3 a)x + 7\log_3 a - 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (1 + \log_3 a)^2 - (7\log_3 a - 5) < 0$$

$$(\log_3 a)^2 + 2\log_3 a + 1 - 7\log_3 a + 5 < 0$$

$$(\log_3 a)^2 - 5\log_3 a + 6 < 0$$

$$(\log_3 a - 2)(\log_3 a - 3) < 0$$

$$2 < \log_3 a < 3, \quad \log_3 3^2 < \log_3 a < \log_3 3^3$$

밑 3이 1보다 크므로 $3^2 < a < 3^3$

$$\therefore 9 < a < 27$$

따라서 정수 a 는 10, 11, 12, ..., 26이므로

$$M = 26, \quad m = 10$$

$$\therefore M - m = 26 - 10 = 16$$

답 ④

10 $\neg. (1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = \cos^2 \theta \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right)$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (\text{참})$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{\sin \theta}\right)\left(1 - \frac{1}{\sin \theta}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta} = -\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= -\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = -\frac{1}{\tan^2 \theta} \quad (\text{거짓})$$

$$\therefore \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2\sin^2 \theta \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \therefore$ 이다.

답 ③

$$11 \quad \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 3 \text{ 이므로 } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ = \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9$$

답 ③

12 A(3, log_a3), B(3, log_b3), C(3, -log_a3)이므로

$$\overline{AB} = \log_a 3 - \log_b 3$$

$$\overline{BC} = \log_b 3 - (-\log_a 3) = \log_b 3 + \log_a 3$$

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 4 \text{ 에서 } \overline{BC} = 4\overline{AB} \text{ 이므로}$$

$$\log_b 3 + \log_a 3 = 4(\log_a 3 - \log_b 3)$$

$$\log_b 3 + \log_a 3 = 4\log_a 3 - 4\log_b 3$$

$$-3\log_a 3 = -5\log_b 3, \quad -\frac{3}{\log_3 a} = -\frac{5}{\log_3 b}$$

$$\frac{\log_3 a}{\log_3 b} = \frac{3}{5} \quad \therefore \log_b a = \frac{3}{5}$$

답 ③

13 $\cos x = 0$ 이면 $\sin x = \pm 1$ 이므로 방정식 $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ 의 해가 존재하지 않는다.

따라서 $\cos x \neq 0$ 이므로

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan x = \sqrt{3} \quad \dots\dots ㉠$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 ㉠의 근

은 오른쪽 그림에서

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \cos\left(\alpha + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$= \cos \frac{5}{3}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

답 ①

14 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 도형의 넓이는

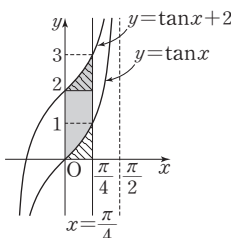
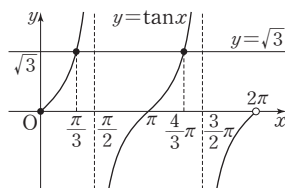
가로의 길이가 $\frac{\pi}{4}$, 세로의 길이가

2인 직사각형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{\pi}{4} \times 2 = \frac{\pi}{2}$$

답 ③



$$15 \quad 9^{f(x)} - 3^{1+f(x)} < 54 \text{ 에서 } \{3^{f(x)}\}^2 - 3 \times 3^{f(x)} - 54 < 0$$

$$3^{f(x)} = t \text{ 라 하면}$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 6 = (x-1)^2 - 7 \geq -7$$

$$\text{이므로 } 3^{f(x)} \geq 3^{-7}, \text{ 즉 } t \geq 3^{-7} \text{ 이고}$$

$$t^2 - 3t - 54 < 0$$

$$(t+6)(t-9) < 0, \quad t-9 < 0 \quad (\because t+6 > 0)$$

$$\therefore t < 9$$

$$\text{즉, } 3^{f(x)} < 9 \text{ 이므로 } 3^{f(x)} < 3^2$$

$$\text{밑 3이 1보다 크므로 } f(x) < 2$$

$$x^2 - 2x - 6 < 2, \quad x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$(x+2)(x-4) < 0 \quad \therefore -2 < x < 4$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

답 ④

16 점 A의 x 좌표는 $0 = 3^x - 3$ 에서

$$3^x = 3 \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore A(1, 0)$$

점 B의 x 좌표는 $0 = x + \log_3 a$ 에서 $x = -\log_3 a$

$$\therefore B(-\log_3 a, 0)$$

$$\therefore f(a) = \overline{AB} = |1 - (-\log_3 a)| = |1 + \log_3 a|$$

$$\neg. f(9) = |1 + \log_3 9| = |1 + 2| = 3 \text{ (참)}$$

$$\neg. f(a) = 2 \text{ 에서 } |1 + \log_3 a| = 2$$

$$1 + \log_3 a = -2 \text{ 또는 } 1 + \log_3 a = 2$$

$$\log_3 a = -3 \text{ 또는 } \log_3 a = 1$$

$$\therefore a = 3^{-3} = \frac{1}{27} \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 $f(a) = 2$ 를 만족시키는 모든 양수 a 의 값의 곱은

$$\frac{1}{27} \times 3 = \frac{1}{9} \text{ (참)}$$

$$\neg. f(a) \leq 3 \text{ 에서 } |1 + \log_3 a| \leq 3$$

$$-3 \leq 1 + \log_3 a \leq 3, \quad -4 \leq \log_3 a \leq 2$$

$$\log_3 3^{-4} \leq \log_3 a \leq \log_3 3^2$$

$$\text{밑 3이 1보다 크므로 } 3^{-4} \leq a \leq 3^2$$

$$\therefore \frac{1}{81} \leq a \leq 9 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ②

17 조건 ㉠의 $a \log_{108} 2 + b \log_{108} 3 = c$ 에서

$$\log_{108} 2^a + \log_{108} 3^b = c, \quad \log_{108} (2^a \times 3^b) = c$$

$$2^a \times 3^b = 108^c, \quad 2^a \times 3^b = (2^2 \times 3^3)^c$$

$$2^a \times 3^b = 2^{2c} \times 3^{3c}$$

a, b, c 가 자연수이므로

$$a = 2c, \quad b = 3c \quad \dots\dots ㉡$$

또, 조건 ㉡의 $\log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 7$ 에서

$$\log_6 abc = 7 \quad \therefore abc = 6^7 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡을 ㉢에 대입하면

$$2c \times 3c \times c = 6^7, \quad 6c^3 = 6^7, \quad c^3 = 6^6$$

$$\therefore c = (6^6)^{\frac{1}{3}} = 6^2 = 36 \quad (\because c > 0)$$

..... ②

따라서 $a=2 \times 36=72$, $b=3 \times 36=108$ 이므로

$$a+b+c=72+108+36=216 \quad \dots\dots ③$$

답 216

채점기준	배점
① a, b, c 사이의 관계식 구하기	3
② c 의 값 구하기	2
③ $a+b+c$ 의 값 구하기	1

18 $y=2^{x^2-6x+10}=2^{(x-3)^2+1}$

$f(x)=(x-3)^2+1$ 이라 하면 $y=2^{f(x)}$

밑 2가 1보다 크므로 함수 $y=2^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값, 최소일 때 최솟값을 갖는다. $\dots\dots ①$

$2 \leq x \leq 5$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=5$ 에서 최댓값 5, $x=3$ 에서 최솟값 1을 가지므로 함수 $y=2^{f(x)}$ 의 최댓값은 $2^5=32$, 최솟값은 $2^1=2$ $\dots\dots ②$

$$\therefore M=32, m=2 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore \frac{M}{m}=\frac{32}{2}=16 \quad \dots\dots ④$$

답 16

채점기준	배점
① 주어진 함수가 최대 또는 최소가 될 조건 설명하기	2
② $2 \leq x \leq 5$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값 구하기	2
③ M, m 의 값 구하기	1
④ $\frac{M}{m}$ 의 값 구하기	1

19 B(m, a^m)이라 하면 C($m, 2^{-m}$)이고 $\overline{AB}=3$ 이므로

$$A(m-3, 2^{3-m}) \quad \dots\dots ①$$

$$\text{이때 } \overline{BC}=\frac{7}{2} \text{이므로}$$

$$a^m-2^{-m}=\frac{7}{2} \quad \dots\dots ②$$

또, 점 A와 점 B의 y 좌표가 같으므로

$$a^m=2^{3-m} \quad \dots\dots ③$$

③을 ②에 대입하면

$$2^{3-m}-2^{-m}=\frac{7}{2}, 2^{-m}(2^3-1)=\frac{7}{2}$$

$$2^{-m}=\frac{1}{2}, -m=-1 \quad \therefore m=1 \quad \dots\dots ④$$

이것을 ③에 대입하면

$$a=2^{3-1}=4 \quad \dots\dots ⑤$$

답 4

채점기준	배점
① 세 점 A, B, C의 좌표를 문자 m 에 대하여 나타내기	1
② a, m 사이의 관계식 세우기	2
③ m 의 값 구하기	2
④ a 의 값 구하기	1

20 $6x^2+3x+k=0$ 의 두 근이 $\sin\theta, \cos\theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{6} \quad \dots\dots ② \quad \dots\dots ①$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}, 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8} \quad \dots\dots ③$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } \frac{k}{6}=-\frac{3}{8} \quad \therefore k=-\frac{9}{4} \quad \dots\dots ④$$

$3x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\sin\theta}, \frac{1}{\cos\theta}$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{a}{3}, \frac{1}{\sin\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}=\frac{b}{3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{a}{3} \text{에서 } \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{a}{3}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}}=-\frac{a}{3} \quad \therefore a=-4$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}=\frac{b}{3} \text{에서 } \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{b}{3}$$

$$-\frac{8}{3}=\frac{b}{3} \quad \therefore b=-8 \quad \dots\dots ⑤$$

$$\therefore kab=-\frac{9}{4} \times (-4) \times (-8)=-72 \quad \dots\dots ⑥$$

답 -72

채점기준	배점
① $\sin\theta+\cos\theta$ 의 값을 구하고 $\sin\theta\cos\theta$ 의 값을 k 에 대하여 나타내기	1
② k 의 값 구하기	2
③ a, b 의 값 구하기	3
④ kab 의 값 구하기	1



A series of horizontal dotted lines for writing, spanning the width of the page.



A series of horizontal dotted lines for writing, spanning the width of the page.