정답 및 해설

고등 내신 1등급을 위한 기출문제집

100발100중

고등 기출문제집

확률과 통계 상

I 경우의 수

1 여러 가지 순열

교과서 예제 p.7

01 (1) 216 (2) 256 (3) 81 (4) 125
02 (1) 3 (2) 7
03 64
04 243
05 81
06 (1) 64 (2) 24
07 625
08 96
09 210
10 (1) 2520 (2) 90
11 20
12 24

기출 Best | 1회 p.8~11

01 ②	02 ⑤	03 ④	04 ④	05 ⑤
06 ⑤	07 ③	08 ④	09 ②	10 ②
11 ⑤	12 ③	13 ③	14 ①	15 ⑤
16 ③	17 ②	18 ②	19 ⑤	

기출 Best | 2회 p.12~15

01 ⑤	02 ④	03 ①	04 ⑤	05 ①
06 ③	07 ②	08 ⑤	09 ①	10 ③
11 ⑤	12 ⑤	13 ①	14 ①	15 ②
16 ③	17 ④	18 ④	19 ④	

변형유형 집중공략 p.16~17

1-1 ③	1-2 ④	2-1 ①	2-2 ④

서술형 What & How p.18~19

1 125	2 96	3 120	4 120

실전 문제 | 1회 p.20~23

01 ①	02 ②	03 ④	04 ②	05 ③
06 ②	07 ②	08 ④	09 ④	10 ④
11 ④	12 ④	13 ①	14 ②	15 ⑤
16 ①	17 ②	18 50	19 225	

실전 문제 | 2회 p.24~27

01 ⑤	02 ③	03 ④	04 ①	05 ①
06 ④	07 ③	08 ③	09 ①	10 ①
11 ③	12 ②	13 ②	14 ⑤	15 ⑤
16 ①	17 ④	18 112	19 96	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.28~32

1 ③	2 ①	3 ②	4 ①	5 ⑤
6 ④	7 ①	8 ④	9 40	10 80

2 중복조합과 이항정리

교과서 예제 p.35

01 (1) 6 (2) 10 (3) 35 (4) 28
02 (1) $n=9$ (2) $r=5$
03 36
04 286
05 56
06 45
07 84
08 (1) $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$
(2) $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$
(3) $x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$
(4) $x^6-6x^4+15x^2-20+\frac{15}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}$
09 (1) -20 (2) 189 (3) 240 (4) 4
10 (1) 32 (2) 0 (3) 512 (4) 64
11 (1) $a^5+10a^4+40a^3+80a^2+80a+32$
(2) $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$
12 (1) ${}_6C_3$ (2) ${}_{10}C_5$ (3) ${}_5C_2$

기출 Best | 1회 p.36~39

01 ③	02 ①	03 ④	04 ②	05 ②
06 ②	07 ④	08 ⑤	09 ⑤	10 ③
11 ③	12 ②	13 ④	14 ④	15 ⑤
16 ②	17 ③	18 ④	19 ②	20 ④

기출 Best | 2회 p.40~43

01 ③	02 ⑤	03 ④	04 ⑤	05 ⑤
06 ①	07 ④	08 ②	09 ①	10 ①
11 ④	12 ③	13 ②	14 ④	15 ⑤
16 ③	17 ④	18 ④	19 ①	20 ②

변형유형 집중공략 p.44~45

1-1 ⑤	1-2 ③	2-1 ①	2-2 ②

서술형 What & How p.46~47

1 7	2 -3	3 84	4 126

실전 문제 | 1회 p.48~51

01 ①	02 ②	03 ①	04 ①	05 ②
06 ②	07 ③	08 ⑤	09 ⑤	10 ①
11 ④	12 ④	13 ②	14 ⑤	15 ②
16 ②	17 ③	18 196	19 70	

실전 문제 | 2회 p.52~55

01 ①	02 ③	03 ⑤	04 ③	05 ③
06 ①	07 ②	08 ④	09 ①	10 ③
11 ③	12 ③	13 ⑤	14 ③	15 ⑤
16 ⑤	17 ③	18 27	19 550	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.56~58

1 ③	2 ②	3 ①
4 ②	5 ②	6 ③

Ⅱ 확률

1 확률의 개념과 활용

교과서 예제 p.61

01 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
(2) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$
(3) $\{1, 2, 4\}$

02 (1) $\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$
(2) $\{(H, H)\}$, $\{(H, T)\}$, $\{(T, H)\}$, $\{(T, T)\}$
(3) $\{(H, H), (T, T)\}$

03 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$
(2) $\{2, 3\}$
(3) $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$
(4) A와 B

04 $\frac{1}{36}$

05 $\frac{1}{12}$

06 $\frac{15}{56}$

07 $\frac{1}{5}$

08 (1) 0 (2) 1

09 $\frac{13}{36}$

10 $\frac{1}{2}$

11 $\frac{7}{8}$

12 $\frac{35}{36}$

기출 Best | 1회 p.62~65

01 ④	02 ②	03 ①	04 ⑤	05 ④
06 ①	07 ①	08 ②	09 ③	10 ③
11 ①	12 ②	13 ②	14 ①	15 ②
16 ②	17 ⑤	18 ④	19 ②	20 ⑤

기출 Best | 2회 p.66~69

01 ①	02 ②	03 ②	04 ⑤	05 ③
06 ②	07 ③	08 ①	09 ①	10 ④
11 ②	12 ②	13 ④	14 ③	15 ①
16 ④	17 ⑤	18 ④	19 ①	20 ①

변형유형 집중공략 p.70~71

1-1 ④ 1-2 ③ 2-1 ⑤ 2-2 ②

서술형 What & How p.72~73

1 9 2 26 3 7 4 48

실전 문제 | 1회 p.74~77

01 ⑤	02 ③	03 ①	04 ②	05 ③
06 ②	07 ④	08 ③	09 ③	10 ①
11 ④	12 ④	13 ②	14 ④	15 ⑤
16 ④	17 ⑤	18 ①	19 15	20 4

실전 문제 | 2회 p.78~81

01 ③	02 ④	03 ②	04 ⑤	05 ②
06 ③	07 ④	08 ③	09 ②	10 ②
11 ⑤	12 ③	13 ③	14 ⑤	15 ⑤
16 ⑤	17 ②	18 ③	19 20	20 3149

수능형 기출문제 & 변형문제 p.82~86

1 ③	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 ③
6 ①	7 ③	8 ②	9 ④	10 ④

2 조건부확률

교과서 예제 p.89

01 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{2}{3}$

02 $\frac{10}{21}$

03 $\frac{3}{28}$

04 (1) 종속 (2) 독립

05 독립

06 (1) $\frac{8}{81}$ (2) $\frac{16}{81}$ (3) $\frac{65}{81}$

07 $\frac{1}{64}$

기출 Best | 1회 p.90~93

01 ④	02 ③	03 ④	04 ⑤	05 ②
06 ②	07 ②	08 ③	09 ④	10 ③
11 ②	12 ④	13 ⑤	14 ①	15 ②
16 ①	17 ③	18 ⑤	19 ①	20 ③

기출 Best | 2회 p.94~97

01 ⑤	02 ④	03 ②	04 ④	05 ②
06 ①	07 ⑤	08 ②	09 ②	10 ④
11 ①	12 ⑤	13 ③	14 ④	15 ⑤
16 ①	17 ③	18 ⑤	19 ①	20 ③

변형유형 집중공략 p.98~99

1-1 15 1-2 161 2-1 ④ 2-2 ⑤

서술형 What & How p.100~101

1 31 2 23 3 200 4 289

실전 문제 | 1회
p.102~105

01 ③	02 ⑤	03 ①	04 ④	05 ①
06 ④	07 ②	08 ④	09 ③	10 ③
11 ④	12 ⑤	13 ⑤	14 ③	15 ②
16 ⑤	17 ④	18 (1) 20 (2) 16		19 19

실전 문제 | 2회
p.106~109

01 ③	02 ③	03 ⑤	04 ②	05 ①
06 ②	07 ②	08 ⑤	09 ④	10 ③
11 ⑤	12 ①	13 ②	14 ③	15 ①
16 ③	17 ④	18 9	19 20	

수능형 기출문제 & 변형문제
p.110~114

1 ④	2 ①	3 ②	4 ⑤	5 62
6 1094	7 ④	8 ①	8 ①	10 ⑤

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회
p.116~119

01 ②	02 ③	03 ③	04 ①	05 ③
06 ③	07 ④	08 ②	09 ③	10 ④
11 ④	12 ⑤	13 ①	14 ②	15 ①
16 ④	17 48	18 21	19 254	20 35

실전 모의고사 2회
p.120~123

01 ③	02 ③	03 ④	04 ④	05 ④
06 ⑤	07 ④	08 ③	09 ①	10 ③
11 ①	12 ⑤	13 ③	14 ④	15 ③
16 ③	17 42	18 560	19 4	20 11

실전 모의고사 3회
p.124~127

01 ①	02 ④	03 ④	04 ④	05 ④
06 ②	07 ③	08 ⑤	09 ①	10 ④
11 ⑤	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ⑤
16 ③	17 288	18 59	19 3	20 19

실전 모의고사 4회
p.128~131

01 ⑤	02 ②	03 ③	04 ③	05 ⑤
06 ②	07 ③	08 ②	09 ③	10 ③
11 ⑤	12 ②	13 ⑤	14 ④	15 ②
16 ④	17 19	18 11	19 93	20 149

실전 모의고사 5회
p.132~135

01 ④	02 ⑤	03 ①	04 ⑤	05 ③
06 ③	07 ②	08 ④	09 ③	10 ①
11 ①	12 ①	13 ①	14 ⑤	15 ④
16 ④	17 462	18 10	19 269	20 71

I 경우의 수

1 여러 가지 순열

교과서 예제 p.7

01 (1) ${}_6\Pi_3=6^3=216$

(2) ${}_2\Pi_8=2^8=256$

(3) ${}_9\Pi_2=9^2=81$

(4) ${}_5\Pi_3=5^3=125$

답 (1) 216 (2) 256 (3) 81 (4) 125

02 (1) ${}_n\Pi_4=81$에서 $n^4=81$

$3^4=81$이므로 $n=3$

(2) ${}_2\Pi_r=128$에서 $2^r=128$

$2^7=128$이므로 $r=7$

답 (1) 3 (2) 7

03 ${}_4\Pi_3=4^3=64$ 답 64

04 가위, 바위, 보에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$ 답 243

05 국어, 수학, 영어 3과목에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ 답 81

06 (1) X에서 Y로의 함수의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_4P_3=24$

답 (1) 64 (2) 24

참고 (1) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 각각 4, 5, 6, 7의 4개씩이므로

$4\times4\times4=64$

(2) $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 4개, $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 3개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$, $f(2)$의 값을 제외한 2개이므로

$4\times3\times2=24$

07 1, 2, 3, 4, 5에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_4=5^4=625$ 답 625

08 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3개

백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의 2개

따라서 구하는 홀수의 개수는

$3\times16\times2=96$ 답 96

09 $\dfrac{7!}{2!\times2!\times3!}=210$ 답 210

10 (1) $\dfrac{8!}{2!\times2!\times2!\times2!}=2520$

(2) m을 양 끝에 놓고 가운데에 t, t, e, e, a, a를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$

답 (1) 2520 (2) 90

11 $\dfrac{6!}{3!\times3!}=20$ 답 20

12 $A\longrightarrow P\longrightarrow B$와 같이 이동해야 하므로

(i) $A\longrightarrow P$로 가는 경우의 수

$\dfrac{4!}{3!}=4$

(ii) $P\longrightarrow B$로 가는 경우의 수

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4\times6=24$ 답 24

기출 Best | 1회 p.8~11

01 3명의 손님이 카페 4곳 중 한 곳씩을 택하여 방문하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$ 답 ②

02 서로 다른 6송이의 꽃 중 5송이를 택하는 경우의 수는

${}_6C_5={}_6C_1=6$

서로 다른 5송이의 꽃을 서로 다른 3개의 접시에 나누어 담는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times243=1458$ 답 ⑤

03 4명의 학생이 영화 4편 중에서 임의로 1편씩을 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_4=4^4=256$

4명의 학생이 모두 다른 영화를 관람하는 경우의 수는

${}_4P_4=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$256-24=232$ 답 ④

04 두 기호 •, ─ 중

(i) 2개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수
두 기호에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_2=2^2=4$

(ii) 3개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수
두 기호에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_3=2^3=8$

(iii) 4개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수
두 기호에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_4=2^4=16$

(i), (ii), (iii)에서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

$4+8+16=28$ 답 ④

05 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 5에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수 중 4의 배수인 경우는

□□□00, □□□12, □□□20, □□□32, □□□52의 5가지

각각의 경우에 대하여 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 4개이고, 천의 자리와 백의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 5에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 4의 배수의 개수는

$5\times4\times25=500$ 답 ⑤

06 네 개의 숫자 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

각 자리의 숫자의 합이 가장 작은 네 자리 자연수는 2222이고, $2+2+2+2=8$이므로 2222를 제외한 모든 네 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 합은 9 이상이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$256-1=255$ 답 ⑤

07 (i) 한 개의 숫자를 택하여 만든 자연수의 개수
네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 한 개의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
한 개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 1이므로
$4\times1=4$

(ii) 서로 다른 두 개의 숫자를 택하여 만든 자연수의 개수
네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 두 개의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$
두 개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 ${}_2\Pi_4=2^4=16$
이때 한 개의 숫자만으로 만들어진 네 자리 자연수의 개수는 2이므로
$6\times(16-2)=84$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$4+84=88$ 답 ③

08 서로 다른 3개의 문자에서 중복을 허용하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

양 끝에 같은 문자가 오는 경우는

a□□a, b□□b, c□□c의 3가지

이 3가지에 대한 경우의 수는 각각 ${}_3\Pi_2=3^2=9$이므로 양 끝에 같은 문자가 오는 모든 경우의 수는

$3\times9=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$81-27=54$ 답 ④

09 X에서 Y로의 함수의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_4=5^4=625$ $\therefore a=625$

X에서 Y로의 함수 중 $f(2)<f(3)$인 함수의 개수는

$f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수가 ${}_5C_2=10$

$f(1)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수가 ${}_5\Pi_2=5^2=25$

이므로 $10\times25=250$ $\therefore b=250$

$\therefore a+b=625+250=875$ 답 ②

10 X에서 Y로의 함수의 개수는 집합 Y의 원소 3개 중 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

(i) 치역의 원소가 1개인 함수의 개수는 집합 Y의 원소 3개 중 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$

(ii) 치역의 원소가 2개인 함수의 개수는
공역 Y의 원소 3개 중 치역의 원소가 될 2개를 택하는 경우의 수가 ${}_3C_2={}_3C_1=3$
이 원소 2개가 X의 원소에 대응하는 모든 경우의 수가
${}_2\Pi_5=2^5=32$
이 2개의 원소 중 1개의 원소가 X의 원소에 모두 대응하는 경우의 수가 2이므로
$3\times(32-2)=90$

따라서 공역과 치역이 서로 같은 함수의 개수는

$243-(3+90)=150$ 답 ②

11 $a+f(a)$의 값이 짝수이려면 a가 홀수일 때 $f(a)$는 홀수, a가 짝수일 때 $f(a)$는 짝수이어야 하므로 $f(1)$, $f(3)$은 홀수, $f(2)$, $f(4)$는 짝수이어야 한다.

이때 공역 Y의 원소 중 짝수는 3개, 홀수는 4개이므로

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 홀수 1, 3, 5, 7의 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 짝수 2, 4, 6의 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

따라서 구하는 함수의 개수는

$16\times9=144$

답 ⑤

12 양 끝에 s, i를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

5개의 문자 c, c, e, e, n을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times30=60$

답 ③

13 v, v를 하나의 문자 V로 생각하면 4개의 문자 V, i, i, d를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!}=12$

답 ③

14 (i) 2, 2, 3, 3을 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

(ii) 2, 2, 2, 3을 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수

$\dfrac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$6+4=10$

답 ①

15 (i) 1과 3 사이에 숫자 2가 오는 경우의 수

1, 2, 3을 묶어 한 문자 A로 생각하여 A, 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

각 경우에 1과 3이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$이므로

$12\times2=24$

(ii) 1과 3 사이에 숫자 4가 오는 경우의 수

(i)과 같은 방법으로 24

따라서 구하는 경우의 수는

$24+24=48$

답 ⑤

16 A, B, C, D를 모두 a로 생각하여 7명의 육상 선수가 일렬로 서는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{4!}=210$

4개의 a를 A, C, D, B 또는 B, C, D, A로 바꾸는 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$210\times2=420$

답 ③

17 같은 색의 블록은 순서가 정해져 있으므로 파란색 블록 3개는 X로, 빨간색 블록 2개는 Y로 생각하여 X, X, X, Y, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하면

$\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$

답 ②

18 A $\longrightarrow$ B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{5!\times4!}=126$

A $\longrightarrow$ P $\longrightarrow$ B로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!\times2!}\times\dfrac{4!}{2!\times2!}=10\times6=60$

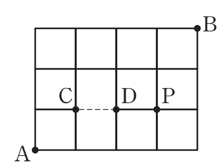
따라서 구하는 경우의 수는

$126-60=66$

답 ②

19 (i) A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수

오른쪽 그림과 같이 점선 부분까지 도로망이 있을 때, A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 전체 경우의 수는



$\dfrac{7!}{4!\times3!}=35$

이때 점선을 지나는 경우의 수, 즉 A → C → D → B로 가는 경우의 수는

$2\times1\times\dfrac{4!}{2!\times2!}=12$

이므로 $35-12=23$

$\therefore a=23$

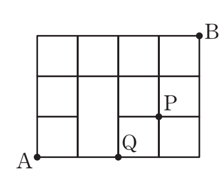
(ii) A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수

A → Q → P → B로 가야 한다.

A → Q로 가는 경우의 수는 1

Q → P로 가는 경우의 수는 2

P → B로 가는 경우의 수는



$\dfrac{3!}{1!\times2!}=3$

이므로 A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$1\times2\times3=6$

$\therefore b=6$

$\therefore a+b=23+6=29$

답 ⑤

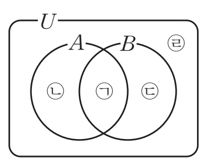
기출 Best | 2회

p.12~15

01 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_{3}\Pi_{4}=3^4=81$ 답 ⑤

02 3명의 사람이 5개국 중 각자 1개국을 택하는 경우의 수는
$_{5}\Pi_{3}=5^3=125$
3명이 모두 다른 국가를 여행하는 경우의 수는
$_{5}P_{3}=5\times4\times3=60$
따라서 구하는 경우의 수는
$125-60=65$ 답 ④

03 $A\cap B=\{1, 3, 5\}$이므로 전체집합 U의 원소 1, 3, 5는 ㉠ 영역에 위치하고 2, 4, 6 각각은 ㉡, ㉢, ㉣ 중 한 영역에 위치하면 된다.



따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 ㉡, ㉢, ㉣에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_{3}\Pi_{3}=3^3=27$ 답 ①

04 깃발을 1번 들어 올려 만들 수 있는 신호의 개수는
$_{3}\Pi_{1}=3^1=3$
깃발을 2번 들어 올려 만들 수 있는 신호의 개수는
$_{3}\Pi_{2}=3^2=9$
깃발을 3번 들어 올려 만들 수 있는 신호의 개수는
$_{3}\Pi_{3}=3^3=27$
깃발을 4번 들어 올려 만들 수 있는 신호의 개수는
$_{3}\Pi_{4}=3^4=81$
따라서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는
$3+9+27+81=120$ 답 ⑤

05 천의 자리의 숫자가 백의 자리의 숫자보다 작으므로 서로 다른 2개의 숫자를 택하면 천의 자리와 백의 자리의 숫자가 결정된다.
0부터 9까지 10개의 숫자 중에서 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수는 $_{10}C_{2}=45$, 이때 천의 자리의 숫자가 0인 경우의 수는 9이므로 천의 자리와 백의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는
$45-9=36$
십의 자리와 일의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는 0부터 9까지 10개의 숫자에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_{10}\Pi_{2}=10^2=100$
따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는
$36\times100=3600$ 답 ①

06 세 개의 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는
$_{3}\Pi_{4}=3^4=81$
각 자리의 숫자의 합이 가장 큰 경우는 $3+3+3+3=12$
그 다음으로 큰 경우는 $3+3+3+2=11$이므로 전체 경우에서 각 자리의 숫자의 합이 12, 11인 경우를 제외하면 된다.
각 자리의 숫자의 합이 12인 네 자리 자연수는 3333의 1개
각 자리의 숫자의 합이 11인 네 자리 자연수는 3332, 3323, 3233, 2333의 4개
따라서 구하는 경우의 수는
$81-(1+4)=76$ 답 ③

07 (ⅰ) 천의 자리의 숫자가 3인 네 자리 짝수의 개수는
3□□0, 3□□2 꼴이다.
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2의 3개
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3의 4개
이므로 천의 자리의 숫자가 3인 자연수 중 숫자 3끼리는 서로 이웃하지 않는 짝수의 개수는
$2\times3\times4=24$
(ⅱ) 천의 자리의 숫자가 1인 네 자리 짝수의 개수는
1□□0, 1□□2 꼴이다.
0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 백의 자리와 십의 자리에 올 숫자를 택하는 경우의 수는
$_{4}\Pi_{2}=4^2=16$
이 중 백의 자리와 십의 자리에 3, 3이 나란히 오는 경우 1가지를 제외해야 하므로 천의 자리가 1인 네 자리 짝수의 개수는
$2\times(16-1)=30$
(ⅲ) 천의 자리의 숫자가 2인 네 자리 짝수의 개수는
(ⅱ)와 같은 방법으로 30
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 숫자 3끼리는 서로 이웃하지 않는 짝수의 개수는
$24+30+30=84$ 답 ②

08 양 끝 2개의 자리에 모음 a 또는 e가 오는 경우의 수는
$_{2}\Pi_{2}=2^2=4$
5개의 문자 a, b, c, d, e에서 중복을 허용하여 3개를 택해 가운데 3개의 자리에 나열하는 경우의 수는
$_{5}\Pi_{3}=5^3=125$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times125=500$ 답 ⑤

09 $f(1)=2$인 함수의 개수는 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수와 같으므로
$_{4}\Pi_{3}=4^3=64$ $\quad\therefore a=64$
한편 $f(2)\neq3$인 함수의 개수는
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것이 1, 2, 4의 3개
$f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수가 $_{4}\Pi_{3}=4^3=64$이므로
$3\times64=192$ $\quad\therefore b=192$
$\therefore a+b=64+192=256$ 답 ①

10 공역 X의 부분집합 중 원소가 3개인 것을 Y라 할 때, 집합 Y의 개수는 1, 2, 3, 4에서 치역의 원소 3개를 택하는 경우의 수이므로

${}_4C_3={}_4C_1=4$

집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

이때 다음 (i), (ii)의 경우를 제외해야 한다.

(i) 치역의 원소가 1개인 함수의 개수는 집합 Y의 원소 3개 중 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$

(ii) 치역의 원소가 2개인 함수의 개수는 집합 Y의 원소 3개 중 치역의 원소가 될 2개를 택하는 경우의 수가 ${}_3C_2={}_3C_1=3$,

집합 X의 원소에 이 원소 2개가 모두 대응하는 경우의 수가

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$이므로

$3\times14=42$

따라서 구하는 함수의 개수는

$4\times\{81-(3+42)\}=144$ 답 ③

11 (i) 정의역 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)\neq0$인 함수의 개수

정의역 X의 각 원소에 공역 Y의 원소 중 0을 제외한 1, 2, 3 중 하나가 대응하는 경우의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

(ii) 정의역 X의 원소 중 오직 한 개의 원소에만 0이 대응하는 함수의 개수

정의역 X의 원소 중 함숫값이 0인 원소를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

정의역 X의 나머지 3개의 원소에 공역 Y의 원소 중 0을 제외한 1, 2, 3 중 하나가 대응하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$이므로

$4\times27=108$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$81+108=189$ 답 ⑤

12 (i) a가 첫 번째에 오는 경우의 수

a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$

(ii) a가 마지막에 오는 경우의 수

(i)과 같은 방법으로 60

(iii) 양 끝에 모두 a가 오는 경우의 수

가운데에 b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!\times3!}=10$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$60+60-10=110$ 답 ⑤

13 홀수 번째 자리, 즉 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째, 일곱 번째 자리 중 홀수 1, 1, 3을 나열할 3개의 자리를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이 3개의 자리에 홀수 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

남은 4개의 자리에 짝수 2, 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times6=72$ 답 ①

14 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$

만의 자리에 0이 오는 경우의 수는 4개의 숫자 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

따라서 구하는 다섯 자리 자연수의 개수는

$30-6=24$ 답 ①

15 5의 배수가 되려면 일의 자리의 숫자가 5이어야 한다.

이때 만의 자리에서 십의 자리까지는 1, 1, 2, 2, 5에서 4개를 택하여 일렬로 나열하면 된다.

(i) 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

(ii) 1, 1, 2, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수

$\dfrac{4!}{2!}=12$

(iii) 1, 2, 2, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수

$\dfrac{4!}{2!}=12$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$6+12+12=30$ 답 ②

16 모음 A, E, I의 순서가 알파벳 순서대로 정해져 있으므로 같은 문자 X로, D, R의 순서도 정해져 있으므로 같은 문자 Y로 생각하면 구하는 경우의 수는 X, X, X, Y, Y, M을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\times2!}=60$ 답 ③

17 남학생 A와 여학생 3명의 순서가 정해져 있으므로 이 네 명을 모두 같은 문자 a로, 남학생 2명을 각각 b, c로 놓으면 a, a, a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!}=30$

두 번째 a는 남학생 A이고, 첫 번째, 세 번째, 네 번째 a는 여학생 3명이므로 여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$30\times6=180$ 답 ④

18 (ⅰ) $A \longrightarrow P \longrightarrow B$로 가는 경우의 수

$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{7!}{4!\times3!}=3\times35=105$

(ⅱ) $A \longrightarrow Q \longrightarrow B$로 가는 경우의 수

$\dfrac{7!}{4!\times3!}\times\dfrac{3!}{2!}=35\times3=105$

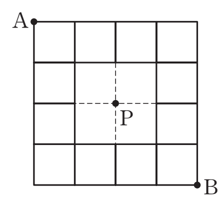
(ⅲ) $A \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow B$로 가는 경우의 수

$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{2!\times2!}\times\dfrac{3!}{2!}=3\times6\times3=54$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$105+105-54=156$ 답 ④

19 오른쪽 그림과 같이 점선 부분까지 도로망이 있을 때, A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 전체 경우의 수는



$\dfrac{8!}{4!\times4!}=70$

이때 $A \longrightarrow P \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}\times\dfrac{4!}{2!\times2!}=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$70-36=34$ 답 ④

변형유형 집중공략 p.16~17

1-1 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 자연수의 개수를 한 자리 자연수부터 크기 순으로 구한다.

한 자리 자연수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개

두 자리 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_2=5^2=25$

세 자리 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

네 자리 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_4=5^4=625$

11□□□ 꼴의 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

12□□□ 꼴의 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

즉 13111보다 작은 자연수의 개수는

$5+25+125+625+125+125=1030$

이다. 이때 13111은 1031번째 수이므로 13115는 1035번째 수이다. 답 ③

1-2 4개의 숫자 0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 자연수 중 짝수의 개수를 한 자리 자연수부터 크기 순으로 구한다.

한 자리 자연수 중 짝수는 2의 1개

두 자리 자연수 중 짝수의 개수는 십의 자리에 1, 2, 3의 3개, 일의 자리에 0, 2의 2개를 나열하는 경우의 수이므로 $3\times2=6$

세 자리 자연수 중 짝수는 □□0, □□2 꼴이고, 그 개수는

백의 자리에 1, 2, 3의 3개, 십의 자리에 0, 1, 2, 3의 4개를 나열하는 경우의 수이므로

$3\times4\times2=24$

네 자리 자연수 중 짝수는 □□□0, □□□2 꼴이므로 그 개수

$3\times{}_4\Pi_2\times2=3\times4^2\times2=96$

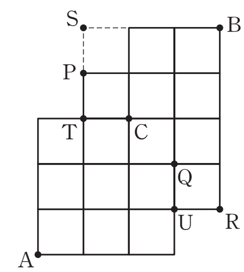
10□□□ 꼴의 짝수의 개수는 ${}_4\Pi_2\times2=16\times2=32$

즉 11000보다 작은 자연수 중 짝수의 개수는

$1+6+24+96+32=159$

따라서 11000은 160번째 짝수이므로 11002는 161번째 짝수이다. 답 ④

2-1



A 지점에서 B 지점까지 이동할 때, C 지점을 거치지 않으려면 위의 그림의 세 지점 P, Q, R 중 하나는 반드시 지나야 한다.

(ⅰ) $A \longrightarrow P \longrightarrow B$로 가는 경우의 수

$A \longrightarrow T \longrightarrow P \longrightarrow B$와 같이 이동해야 한다.

$P \longrightarrow B$로 갈 때, S 지점을 거쳐 가는 1가지 경우를 제외해야 하므로

$\dfrac{4!}{3!}\times1\times\left(\dfrac{4!}{3!}-1\right)=12$

(ⅱ) $A \longrightarrow Q \longrightarrow B$로 가는 경우의 수

$\dfrac{5!}{3!\times2!}\times\dfrac{4!}{3!}=40$

(ⅲ) $A \longrightarrow R \longrightarrow B$로 가는 경우의 수

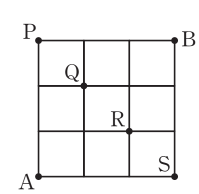
$A \longrightarrow U \longrightarrow R \longrightarrow B$와 같이 이동해야 하므로

$\dfrac{4!}{3!}\times1\times1=4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$12+40+4=56$ 답 ①

2-2 정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하면 갑, 을이 각각 3씩 이동했을 때 마주치게 되므로 마주칠 수 있는 지점은 P, Q, R, S이다.



(ⅰ) P에서 마주치는 경우의 수

갑은 $A \longrightarrow P \longrightarrow B$로 이동하고, 을은 $B \longrightarrow P \longrightarrow A$로 이동하는 경우의 수이므로

$(1\times1)\times(1\times1)=1$

(ⅱ) Q에서 마주치는 경우의 수

갑은 $A \longrightarrow Q \longrightarrow B$로 이동하고, 을은 $B \longrightarrow Q \longrightarrow A$로 이동하는 경우의 수이므로

$\left(\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}\right)\times\left(\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}\right)=81$

(ⅲ) R에서 마주치는 경우의 수

갑은 $A \longrightarrow R \longrightarrow B$로 이동하고, 을은 $B \longrightarrow R \longrightarrow A$로 이동하는 경우의 수이므로

$\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)\times\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)=81$

(iv) S에서 마주치는 경우의 수

갑은 $\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{S}\longrightarrow\mathrm{B}$로 이동하고, 을은 $\mathrm{B}\longrightarrow\mathrm{S}\longrightarrow\mathrm{A}$로 이동하는 경우의 수이므로

$(1\times1)\times(1\times1)=1$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+81+81+1=164$

답 ④

서술형 What & How

p.18~19

1 $f(2)+f(3)=6$을 만족시키는 $f(2)$, $f(3)$의 순서쌍 $(f(2), f(3))$은

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5개 …… ❶

$f(1)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 Y의 원소 5개 중 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$ …… ❷

따라서 구하는 함수의 개수는

$5\times25=125$ …… ❸

답 125

2 공역 Y의 원소 1, 2, 3, 4 중 중복을 허용하여 택한 세 원소의 합이 5인 경우는 $1+2+2=5$, $1+1+3=5$

따라서 $f(2)+f(3)+f(4)=5$를 만족시키는 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$의 개수는 1, 2, 2 또는 1, 1, 3을 각각 일렬로 나열한 경우의 수의 합과 같으므로

$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=3+3=6$ …… ❶

$f(1)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 Y의 원소 4개 중 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$ …… ❷

따라서 구하는 함수의 개수는

$6\times16=96$ …… ❸

답 96

채점기준	배점
❶ $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수 구하기	3
❷ $f(1)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수 구하기	2
❸ 함수의 개수 구하기	1

3 네 문자 A, B, C, D의 순서가 정해져 있으므로 A, B, C, D를 같은 문자 X로 놓으면 X, X, X, X, E, F를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!}=30$ …… ❶

4개의 X 중 양 끝의 2개를 A, D로 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$ …… ❷

4개의 X 중 가운데 2개를 B, C로 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$ …… ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$30\times2\times2=120$ …… ❹

답 120

4 조건 (가)에서 B, C, D의 순서가 정해져 있으므로 B, C, D를 같은 문자 X로, 조건 (나)에서 모음 A, E를 같은 문자 Y로 놓으면 X, X, X, Y, Y, F를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$ …… ❶

3개의 X 중 양 끝의 2개를 B, C로, 가운데 1개를 D로 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$ …… ❷

A, E의 순서가 정해져 있으므로 2개의 Y 중 앞에 있는 것을 A로, 뒤에 있는 것을 E로 바꾸는 경우의 수는 1 …… ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times2\times1=120$ …… ❹

답 120

채점기준	배점
❶ B, C, D를 같은 문자 X로, A, E를 같은 문자 Y로 놓고 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	2
❷ X를 B, C, D로 바꾸는 경우의 수 구하기	1
❸ Y를 A, E로 바꾸는 경우의 수 구하기	1
❹ 경우의 수 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.20~23

01 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

각 자리의 숫자가 모두 홀수인 네 자리 자연수의 개수는 홀수 1, 3에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$256-16=240$

답 ①

02 6권의 노트 중 갑에게 줄 노트 2권을 택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2=15$

남은 4권의 노트를 을, 병, 정 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

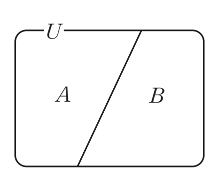
${}_3\Pi_4=3^4=81$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times81=1215$

답 ②

03 세 집합 U, A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$A\cup B=U$, $A\cap B=\varnothing$을 만족시키는 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수

는 집합 U의 6개의 원소가 A, B 중 하나에 반드시 속하는 경우의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_6=2^6=64$

두 집합 A, B 중 한 집합이 공집합인 순서쌍 (A, B)의 개수는 2

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$64-2=62$ 답 ④

04 두 기호 •, — 중

1개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_1=2^1=2$

2개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

3개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

4개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

⋮

n개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_n=2^n$

두 기호 •, —를 합해서 1개 이상 n개 이하로 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n$

이때

$2+2^2+2^3+2^4+2^5=62<100$

$2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=126>100$

이므로 $2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n\ge100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다. 답 ②

05 1□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

20□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

210□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$

2110□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3\Pi_1=3^1=3$

이때 $81+27+9+3=120$이므로 120번째 자연수는 2110□ 꼴의 수 중 가장 큰 수이다.

따라서 120번째 자연수는 21102이다. 답 ③

06 $f(1)<f(3)<f(5)$이므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는

$10\times25=250$ 답 ②

07 6명의 학생을 1반, 2반, 3반에 나누어 배정하는 모든 경우의 수는

${}_3\Pi_6=3^6=729$

(i) 6명의 학생을 1반, 2반, 3반 중 한 반에 모두 배정하는 경우의 수는 3

(ii) 6명의 학생을 1반, 2반, 3반 중 두 반에만 배정하는 경우의 수는 1반, 2반, 3반 중 두 반을 택하는 경우의 수가

${}_3C_2={}_3C_1=3$

6명의 학생을 선택한 두 반에 배정할 때 한 반에만 모두 배정하는 2가지 경우를 제외하는 경우의 수가

${}_2\Pi_6-2=2^6-2=62$이므로

$3\times62=186$

따라서 구하는 경우의 수는

$729-(3+186)=540$ 답 ②

08 어떤 자연수가 9의 배수이려면 각 자리 숫자의 합이 9의 배수이어야 한다. 이때 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중 세 숫자의 합의 최댓값은 $5+5+5=15$이므로 세 자리 자연수의 각 자리 숫자의 합이 9의 배수인 경우는 합이 9인 경우뿐이다.

세 숫자의 합이 9인 경우는

$1+3+5=9$, $1+4+4=9$, $2+2+5=9$, $2+3+4=9$,

$3+3+3=9$

의 5가지이므로

1, 3, 5로 이루어진 세 자리 자연수의 개수는 $3!=6$

1, 4, 4로 이루어진 세 자리 자연수의 개수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$

2, 2, 5로 이루어진 세 자리 자연수의 개수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$

2, 3, 4로 이루어진 세 자리 자연수의 개수는 $3!=6$

3, 3, 3으로 이루어진 세 자리 자연수의 개수는 1

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$6+3+3+6+1=19$ 답 ④

09 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 다섯 자리 자연수를 만드는 경우의 수는 ${}_4\Pi_5=4^5=1024$

각 자리 숫자의 합이 5인 경우는 11111의 1개

각 자리 숫자의 합이 6인 경우의 수는 1, 1, 1, 1, 2를 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{5!}{4!}=5$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$1024-(1+5)=1018$ 답 ④

10 e, i, o, e는 모음, p, s, d는 자음이므로 모음끼리 이웃하지 않으려면

모음 자음 모음 자음 모음 자음 모음

과 같이 나열해야 한다.

모음 e, e, i, o를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

자음 d, p, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times6=72$ 답 ④

11 한 계단씩 올라가는 것을 A, 세 계단씩 올라가는 것을 B로 나타내자. 이때 한 계단씩 올라가는 횟수를 x, 세 계단씩 올라가는 횟수를 y라 하면 $x+3y=8$이고, 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(2, 2)$, $(5, 1)$, $(8, 0)$이다.

(ⅰ) $x=2$, $y=2$일 때 → 한 계단씩 2번, 세 계단씩 2번 올라가기

계단을 올라가는 경우의 수는 A, A, B, B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$

(ⅱ) $x=5$, $y=1$일 때 → 한 계단씩 5번, 세 계단씩 1번 올라가기

계단을 올라가는 경우의 수는 A, A, A, A, A, B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{5!}=6$

(ⅲ) $x=8$, $y=0$일 때 → 한 계단씩 8번 올라가기

계단을 올라가는 경우의 수는 8개의 A를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 1

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$6+6+1=13$ 답 ④

12 (ⅰ) 서로 다른 숫자 4개를 사용한 여섯 자리 비밀번호의 개수

5개의 숫자 중 비밀번호에 사용할 서로 다른 4개의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_4={}_5C_1=5$

택한 숫자 4개 중에서 2번씩 사용할 문자 2개를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

같은 것이 2개씩 있는 숫자 2개를 포함하여 총 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!\times 2!}=180$이므로

$5\times 6\times 180=5400$

(ⅱ) 서로 다른 숫자 3개를 사용한 여섯 자리 비밀번호의 개수

5개의 숫자 중 비밀번호에 사용할 서로 다른 3개의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$

택한 숫자 3개를 각각 2번씩 사용하여 총 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!\times 2!\times 2!}=90$이므로

$10\times 90=900$

(ⅰ), (ⅱ)에서 만들 수 있는 비밀번호의 개수는

$5400+900=6300$ 답 ④

13 순서가 정해진 4개의 작업 A, B, C, D를 같은 문자 X로 생각하면 X, X, X, X, E, F, G를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{4!}=210$

조건 ㈎, ㈏에서 4개의 X 중 네 번째 X는 D가 된다.

나머지 3개의 X 중 하나를 B로 바꾸는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

A, C의 순서가 정해져 있으므로 나머지 2개의 X 중 앞에 있는 것을 A로, 뒤에 있는 것을 C로 바꾸는 경우의 수는 1

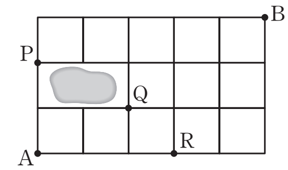
따라서 구하는 경우의 수는

$210\times 3\times 1=630$ 답 ①

14 → 방향으로 가는 것을 a, ↗ 방향으로 가는 것을 b라 하면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{7!}{4!\times 3!}=35$ 답 ②

15 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 이동할 때, 오른쪽 그림의 세 지점 P, Q, R을 반드시 지나야 한다.



(ⅰ) A ⟶ P ⟶ B로 가는 경우의 수

$1\times\dfrac{6!}{5!}=6$

(ⅱ) A ⟶ Q ⟶ B로 가는 경우의 수

$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{5!}{3!\times 2!}=3\times 10=30$

(ⅲ) A ⟶ R ⟶ B로 가는 경우의 수

$1\times\dfrac{5!}{2!\times 3!}=10$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$6+30+10=46$ 답 ⑤

16 축구 선수 캐릭터 인형 3개를 각각 a, b, c라 하면 각 인형마다 양말, 발목 보호대, 축구화를 신기는 순서는 정해져 있으므로 3개의 인형에 양말, 발목 보호대, 축구화를 신기는 경우의 수는 a, a, a, b, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{3!\times 3!\times 3!}=1680$ 답 ①

17 (ⅰ) 다섯 자리의 대칭수의 개수

만의 자리, 천의 자리, 백의 자리의 숫자가 결정되면 십의 자리, 일의 자리의 숫자는 저절로 정해지고

만의 자리에 올 수 있는 숫자가 1, 2, 3, ⋯, 9의 9개

천의 자리와 백의 자리에 10개의 숫자 0, 1, 2, ⋯, 9에서 중복을 허용하여 2개의 숫자를 나열하는 경우의 수가

${}_{10}\Pi_2=10^2=100$이므로

$9\times 100=900$

(ⅱ) 여섯 자리의 대칭수의 개수

십만의 자리, 만의 자리, 천의 자리의 숫자가 결정되면 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자는 저절로 정해지고

십만의 자리에 올 수 있는 숫자가 1, 2, 3, ⋯, 9의 9개

만의 자리와 천의 자리에 10개의 숫자 0, 1, 2, ⋯, 9에서 중복을 허용하여 2개의 숫자를 나열하는 경우의 수가

${}_{10}\Pi_2=10^2=100$이므로

$9\times 100=900$

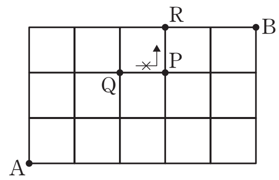
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 대칭수의 개수는

$900+900=1800$ 답 ②

18 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 모든 경우의 수는

$\dfrac{8!}{5!\times3!}=56$ …… ❶

P 지점에서 좌회전해서 가는 경우의 수는 오른쪽 그림에서



A ⟶ Q ⟶ P ⟶ R ⟶ B로 가는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!\times2!}\times1\times1\times1=6$ …… ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$56-6=50$ …… ❸

답 50

채점기준	배점
❶ A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 모든 경우의 수 구하기	1
❷ A ⟶ B로 갈 때 P 지점에서 좌회전해서 가는 경우의 수 구하기	3
❸ A ⟶ B로 갈 때 P 지점에서 좌회전하지 않고 가는 경우의 수 구하기	1

19 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 뽑은 3개의 수의 곱이 12가 되는 경우는

$1\times3\times4=12$, $2\times2\times3=12$

이때 $f(1)\times f(3)\times f(5)=12$이고

1, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$

이므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$6+3=9$ …… ❶

또 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$ …… ❷

따라서 구하는 함수의 개수는

$9\times25=225$ …… ❸

답 225

채점기준	배점
❶ $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수 구하기	3
❷ $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수 구하기	1
❸ 함수의 개수 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.24~27

01 a, b, c 중 양 끝 2개의 자리에 놓을 한 문자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

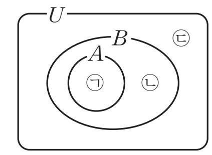
가운데 4개의 자리에 a, b, c에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 나열하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times81=243$

답 ⑤

02 $A-B=\varnothing$에서 $A\subset B$이어야 하므로 전체집합 U의 원소 각각은 오른쪽 그림의 ㉠, ㉡, ㉢ 영역 중 어느 하나에 위치해야 한다. 즉 $A\subset B$인 순서쌍 (A, B)의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로



${}_3\Pi_5=3^5=243$

이때 집합 A가 공집합인 경우는 전체집합 U의 원소 각각이 ㉡, ㉢ 영역 중 어느 하나에 위치하는 경우이다. 즉 A가 공집합일 때 순서쌍 (A, B)의 개수는 ㉡, ㉢에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$243-32=211$

답 ③

03 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3개

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 3개를 나열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$4\times3\times125=1500$

답 ④

04 서로 다른 종류의 쿠키 5개를 갑, 을, 병 3명에게 나누어 주는 모든 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

(i) 갑이 쿠키를 받지 못하는 경우의 수

서로 다른 종류의 쿠키 5개를 을, 병에게만 나누어 주는 경우의 수이므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

(ii) 갑이 쿠키를 1개 받는 경우의 수

서로 다른 종류의 쿠키 5개 중 갑에게 줄 1개를 택하는 경우의 수가 ${}_5C_1=5$

나머지 쿠키 4개를 을, 병에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_2\Pi_4=2^4=16$이므로

$5\times16=80$

(i), (ii)에서 갑이 쿠키를 1개 이하로 받는 경우의 수는

$32+80=112$

따라서 갑이 쿠키를 2개 이상 받는 경우의 수는

$243-112=131$

답 ①

05 (i) 한 자리 자연수의 개수

한 자리 자연수는 1, 2, 3, 4의 4개이므로 4

(ii) 두 자리 자연수의 개수

십의 자리에 올 수 있는 숫자가 1, 2, 3, 4의 4개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이므로

$4\times5=20$

(ii) 230보다 작은 세 자리 자연수의 개수

(ㄱ) 백의 자리의 숫자가 1인 수의 개수는 1□□ 꼴이므로

$_{5}\Pi_{2}=5^{2}=25$

(ㄴ) 백의 자리의 숫자가 2인 수의 개수

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2의 3개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3, 4의 5개

이므로 $3\times5=15$

(ㄱ), (ㄴ)에서 230보다 작은 세 자리 자연수의 개수는

$25+15=40$

(i), (ii)에서 230보다 작은 자연수의 개수는

$24+40=64$ 답 ①

06 양 끝 2개의 자리에 중복을 허용하여 자음 b, c, d의 3개를 나열하는 경우의 수는 $_{3}\Pi_{2}=3^{2}=9$

가운데 3개의 자리 중 1개를 택하여 e를 나열하는 경우의 수는 $_{3}C_{1}=3$

남은 2개의 자리에 e를 제외한 나머지 4개의 문자 중 중복을 허용하여 2개를 나열하는 경우의 수는 $_{4}\Pi_{2}=4^{2}=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$9\times3\times16=432$ 답 ④

07 $f(X)$는 함수 f의 치역이므로 $n(f(X))=2$, 즉 치역의 원소의 개수가 2인 함수의 개수를 구한다.

공역 Y의 원소 1, 2, 3, 4에서 2개를 택하는 경우의 수는 $_{4}C_{2}=6$

택한 2개의 원소가 X의 원소에 대응하는 모든 경우의 수는

$_{2}\Pi_{6}=2^{6}=64$

택한 2개의 원소 중 한 원소가 X의 모든 원소에 대응하는 경우의 수는 2

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$6\times(64-2)=372$ 답 ③

08 (i) e끼리 이웃하는 경우의 수

e, e를 묶어 한 문자 X로 생각하여 c, f, f, o, X를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하면

$\frac{5!}{2!}=60$

(ii) f끼리 이웃하는 경우의 수

f, f를 묶어 한 문자 Y로 생각하여 c, e, e, o, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하면

$\frac{5!}{2!}=60$

(iii) e끼리, f끼리 모두 이웃하는 경우의 수

2개의 e를 묶어 한 문자 X, 2개의 f를 묶어 한 문자 Y로 생각하여 c, o, X, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하면

$4!=24$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$60+60-24=96$ 답 ③

09 5일 동안 하루에 국어, 영어, 수학 중 한 과목씩 공부하므로 5일 동안 국어를 x번, 영어를 y번 공부했다고 하면 수학은 $(5-x-y)$번 공부하게 된다.

이때 5일 동안 공부한 시간의 합이 14시간이므로

$3x+2y+4(5-x-y)=14$

$\therefore x+2y=6$ (단, $0\le x\le5$, $0\le y\le5$, $0\le x+y\le5$)

이를 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 $(0, 3)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$이다.

(i) $x=0$, $y=3$일 때

5일 동안 국어를 0번, 영어를 3번, 수학을 2번 공부하는 경우의 수는 '영어, 영어, 영어, 수학, 수학'을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

(ii) $x=2$, $y=2$일 때

5일 동안 국어를 2번, 영어를 2번, 수학을 1번 공부하는 경우의 수는 '국어, 국어, 영어, 영어, 수학'을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(iii) $x=4$, $y=1$일 때

5일 동안 국어를 4번, 영어를 1번 공부하는 경우의 수는 '국어, 국어, 국어, 국어, 영어'를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{4!}=5$

(i), (ii), (iii)에서 5일 동안 공부한 시간의 합이 14시간이 되도록 계획표를 짜는 경우의 수는

$10+30+5=45$ 답 ①

10 7개의 문자 a, a, b, b, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times2!}=1260$

(i) 문자 d와 e 사이에 4개의 문자가 오는 경우의 수

(ㄱ) 첫 번째, 다섯 번째 자리에 d, e가 오는 경우의 수

■□□□□■□에서 ■로 표시한 자리에 d, e를 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

남은 5개의 □ 자리에 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times2!}=30$

이므로 $2\times30=60$

(ㄴ) 두 번째, 여섯 번째 자리에 d, e가 오는 경우의 수

(ㄱ)과 같은 방법으로 $2\times30=60$

(ㄱ), (ㄴ)에서 문자 d와 e 사이에 4개의 문자가 오는 경우의 수는

$60+60=120$

(ii) 문자 d와 e 사이에 5개의 문자가 오는 경우의 수

양 끝에 d, e를 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

가운데 5개의 자리에 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times2!}=30$이므로

$2\times30=60$

(i), (ii)에서 문자 d와 e 사이에 4개 이상의 문자가 오는 경우의 수는 $120+60=180$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260-180=1080$ 답 ①

11 자연수가 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

(i) 각 자리의 숫자의 합이 6인 네 자리 자연수의 개수

7개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3 중 4개의 숫자의 합이 6인 경우는 $1+1+1+3=6$, $1+1+2+2=6$

1, 1, 1, 3을 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

1, 1, 2, 2를 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$

이므로 $4+6=10$

(ii) 각 자리의 숫자의 합이 9인 네 자리 자연수의 개수

7개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3 중 4개의 숫자의 합이 9인 경우는 $2+2+2+3=9$

2, 2, 2, 3을 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

(i), (ii)에서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$10+4=14$ 답 ③

참고 7개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3에서 4개를 택했을 때, 4개의 숫자의 합의

최댓값은 $3+2+2+2=9$,

최솟값은 $1+1+1+2=5$

따라서 네 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 합이 될 수 있는 3의 배수는 6 또는 9이다.

12 (i) 이웃하는 숫자의 합이 모두 홀수인 네 자리 자연수의 개수

'홀수, 짝수, 홀수, 짝수' 또는 '짝수, 홀수, 짝수, 홀수' 꼴이고, 각 경우에 대하여

2개의 자리에 홀수 1, 3 중 2개를 중복을 허용하여 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$

2개의 자리에 짝수 2, 4 중 2개를 중복을 허용하여 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$

이므로 이웃하는 숫자의 합이 모두 홀수인 네 자리 자연수의 개수는

$2\times 4\times 4=32$

(ii) 이웃하는 숫자의 합이 모두 짝수인 네 자리 자연수의 개수

'홀수, 홀수, 홀수, 홀수' 또는 '짝수, 짝수, 짝수, 짝수' 꼴이고, 각 경우에 대하여

'홀수, 홀수, 홀수, 홀수' 꼴인 수의 개수는 1, 1, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$

'짝수, 짝수, 짝수, 짝수' 꼴인 수의 개수는 2, 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$

따라서 이웃하는 숫자의 합이 모두 짝수인 네 자리 자연수의 개수는

$6+6=12$

(i), (ii)에서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$32+12=44$ 답 ②

13 조건 (가), (나), (다)에서 a는 맨 앞에 와야 한다.

$a\square\square\square\square\square$ 꼴로 나열할 때, b, c와 1, 2, 3은 각각 순서가 정해져 있으므로 두 문자 b, c를 각각 같은 문자 X로, 세 숫자 1, 2, 3을 각각 같은 문자 Y로 생각하면 구하는 경우의 수는 X, X, Y, Y, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!\times 3!}=10$ 답 ②

14 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{3!\times 3!}=140$

꼭짓점 A에서 모서리 PQ를 거쳐 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우, 즉 $A \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는

$A \longrightarrow P$로 가는 경우의 수가 $\dfrac{3!}{2!}=3$

$P \longrightarrow Q$로 가는 경우의 수가 1

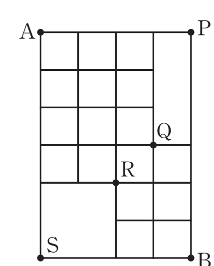
$Q \longrightarrow B$로 가는 경우의 수가 $\dfrac{3!}{2!}=3$

이므로 $3\times 1\times 3=9$

따라서 꼭짓점 A에서 모서리 PQ를 거치지 않고 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$140-9=131$ 답 ⑤

15 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때, 오른쪽 그림의 네 지점 P, Q, R, S 중 하나는 반드시 지나야 하므로



(i) $A \longrightarrow P \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는 1

(ii) $A \longrightarrow S \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는 1

(iii) $A \longrightarrow Q \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는

$A \longrightarrow Q$로 가는 경우의 수가 $\dfrac{6!}{3!\times 3!}=20$

$Q \longrightarrow B$로 가는 경우의 수가 $\dfrac{4!}{3!}=4$

이므로 $20\times 4=80$

(iv) $A \longrightarrow R \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는

$A \longrightarrow R$로 가는 경우의 수가 $\dfrac{6!}{2!\times 4!}=15$

$R \longrightarrow B$로 가는 경우의 수가 $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$

이므로 $15\times 6=90$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$1+1+80+90=172$ 답 ⑤

16 (ⅰ) A팀이 5차전에서 우승하는 경우의 수

□□□BA에서 □에 A를 모두 나열하는 경우의 수와 같으므로 1

(ⅱ) A팀이 6차전에서 우승하는 경우의 수

□□□B□A에서 4개의 □에 A, A, A, B를 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{3!}=4$

(ⅲ) A팀이 7차전에서 우승하는 경우의 수

□□□B□□A에서 5개의 □에 A, A, A, B, B를 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{5!}{3!\times2!}=10$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$1+4+10=15$ 답 ①

17 네 개의 숫자 0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 모든 네 자리 자연수의 개수는

$3\times{}_4\Pi_3=3\times4^3=192$

(ⅰ) 각 자리의 숫자로 0을 포함하지 않는 네 자리 자연수의 개수는 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수이므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

(ⅱ) 각 자리의 숫자로 1을 포함하지 않는 네 자리 자연수의 개수는 0, 2, 3에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수이므로

$2\times{}_3\Pi_3=2\times3^3=54$

(ⅲ) 각 자리의 숫자로 0도 1도 포함하지 않는 네 자리 자연수의 개수는 2, 3에서 중복을 허용하여 만든 네 자리 자연수의 개수이므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 0 또는 1을 각 자리의 숫자로 포함하지 않는 네 자리 자연수의 개수는

$81+54-16=119$

따라서 0과 1을 각 자리의 숫자로 모두 포함한 네 자리 자연수의 개수는

$192-119=73$ 답 ④

18 $\{f(1)-2\}\{f(2)-f(4)\}=0$에서 $f(1)=2$ 또는 $f(2)=f(4)$

(ⅰ) $f(1)=2$인 함수의 개수

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수이므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$ …… ❶

(ⅱ) $f(2)=f(4)$인 함수의 개수

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

이므로 $4\times16=64$ …… ❷

(ⅲ) $f(1)=2$이고 $f(2)=f(4)$인 함수의 개수

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

$f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 4이므로

$4\times4=16$ …… ❸

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수의 개수는

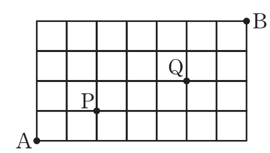
$64+64-16=112$ …… ❹

답 112

채점기준	배점
❶ $f(1)=2$인 함수의 개수 구하기	2
❷ $f(2)=f(4)$인 함수의 개수 구하기	2
❸ $f(1)=2$, $f(2)=f(4)$인 함수의 개수 구하기	2
❹ 함수의 개수 구하기	1

19 (ⅰ) A ⟶ P로 가는 경우의 수

$\frac{3!}{2!}=3$ …… ❶



(ⅱ) P에서 Q를 거치지 않고 B로 가는 경우의 수

(P ⟶ B로 가는 경우의 수) − (P ⟶ Q ⟶ B로 가는 경우의 수)

$=\frac{8!}{5!\times3!}-\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{2!\times2!}$ …… ❷

$=56-4\times6=32$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times32=96$ …… ❹

답 96

채점기준	배점
❶ A ⟶ P로 가는 경우의 수 구하기	2
❷ P에서 Q를 거치지 않고 B로 가는 경우의 수 구하기	3
❸ 경우의 수 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제 p.28~32

1 a, b, X, Y 중에서 중복을 허용하여 6개를 택해

■□□□□■과 같이 나열할 때

양 끝에 대문자를 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$

문자 a는 한 번만 사용해야 하므로 가운데 4개의 자리 중 하나를 택하여 a를 나열하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

가운데 남은 3개의 자리에는 a를 제외한 문자 b, X, Y가 올 수 있으므로 그 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times4\times27=432$ 답 ③

2 조건 ㈎, ㈏에서 대문자는 2개 또는 3개만 사용해야 한다.

(ⅰ) 대문자 2개, 소문자 3개를 사용하는 경우의 수

소문자 a, b에서 중복을 허용하여 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3=2^3=8$

3개의 소문자 양 끝과 사이사이 4개의 자리 중 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

이 2개의 자리에 대문자 X, Y에서 중복을 허용하여 2개를 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$

이므로 $8\times6\times4=192$

(ii) 대문자 3개, 소문자 2개를 사용하는 경우의 수

$\boxed{\text{대문자}}\,\boxed{\text{소문자}}\,\boxed{\text{대문자}}\,\boxed{\text{소문자}}\,\boxed{\text{대문자}}$

와 같이 나열해야 하고

대문자 X, Y에서 중복을 허용하여 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3=2^3=8$

소문자 a, b에서 중복을 허용하여 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$

이므로 $8\times4=32$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$192+32=224$

답 ①

3 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 5의 2개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개

십의 자리, 백의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 4000 이상인 홀수의 개수는

$2\times3\times25=150$

답 ②

4 (i) 각 자리의 숫자 중 홀수가 1개, 짝수가 3개인 네 자리 자연수의 개수

홀수 1, 3, 5 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

이 홀수 1개를 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 중 어느 한 자리에 나열하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

짝수 2, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 남은 세 자리에 나열하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

이므로 $3\times4\times8=96$

(ii) 각 자리의 숫자 중 홀수가 3개, 짝수가 1개인 네 자리 자연수의 개수

짝수 2, 4 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

이 짝수 1개를 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 중 어느 한 자리에 나열하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

홀수 1, 3, 5 중에서 중복을 허용하여 3개를 남은 세 자리에 나열하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

이므로 $2\times4\times27=216$

(i), (ii)에서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$96+216=312$

답 ①

5 (i) 4 이상의 눈의 수가 나오지 않는 경우

순서쌍 (a, b, c, d)는 $(1, 1, 1, 1)$의 1개

(ii) 4 이상의 눈의 수가 1번 나오는 경우

4 이상의 눈의 수가 나오면 0점을 얻고, a, b, c, d 중 4 이상의 자연수는 1개이므로 나머지 3개는 각각 1, 1, 2이어야 한다.

0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

0 자리에 올 수 있는 눈의 수는 4, 5, 6의 3개

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $12\times3=36$

(iii) 4 이상의 눈의 수가 2번 나오는 경우

4 이상의 눈의 수가 나오면 0점을 얻고, a, b, c, d 중 4 이상의 자연수는 2개이므로 나머지 2개는 각각 1, 3 또는 2, 2이어야 한다.

0, 0, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

0, 0, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

각 경우에 대하여 0 자리에 올 수 있는 눈의 수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $(12+6)\times9=162$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+36+162=199$

답 ⑤

6 (i) 시계 방향으로 네 번 이동하는 경우

주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수가 모두 $\underbrace{\text{홀수}}_{1,\,3,\,5}$인 경우이므로

그 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

(ii) 반시계 방향으로 네 번 이동하는 경우

주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수가 모두 $\underbrace{\text{짝수}}_{2,\,4,\,6}$인 경우이므로

그 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

(iii) 시계 방향으로 두 번, 반시계 방향으로 두 번 이동하는 경우

주사위를 네 번 던져 홀수 2개, 짝수 2개가 나와야 한다.

홀수, 짝수가 나오는 순서를 정하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

정해진 자리에 홀수 2개, 짝수 2개를 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_2\times{}_3\Pi_2=3^2\times3^2=81$

따라서 시계 방향으로 두 번, 반시계 방향으로 두 번 이동하는 경우의 수는

$6\times81=486$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$81+81+486=648$

답 ④

7 (i) 1이 적힌 상자에 A가 적힌 공을 넣는 경우

3개의 문자 B, B, C를 X, X, X로 놓으면

X, X, X, D, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$

X, X, X 자리에 B, B, C 또는 B, C, B를 차례로 나열하는 경우의 수는 2

따라서 공을 넣는 경우의 수는 $10\times2=20$

(ii) 1이 적힌 상자에 B가 적힌 공을 넣는 경우

조건 (나)가 항상 성립하므로 A, B, C, D, D가 적힌 나머지 공을 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 상자에 하나씩 넣으면 된다.

즉 A, B, C, D, D를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하면

$\frac{5!}{2!}=60$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$20+60=80$ 답 ①

8 1부터 6까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5의 3개이므로 A가 적힌 공을 넣는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

조건 (나), (다)에 따라 남은 5개의 상자에 B, B, C, D, D가 적힌 공을 넣는 경우의 수는

(i) $\square\boxed{\text{C}}\square\square\square$와 같이 나열하는 경우

조건 (나)에서 B가 C 앞에 적어도 하나는 있어야 하므로 $\boxed{\text{B}}\boxed{\text{C}}\square\square\square$와 같이 나열하고, 나머지 3개의 자리에 문자 B, D, D를 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(ii) $\square\square\boxed{\text{C}}\square\square$와 같이 나열하는 경우

나머지 4개의 자리에 B, B, D, D를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

$\boxed{\text{D}}\boxed{\text{D}}\boxed{\text{C}}\boxed{\text{B}}\boxed{\text{B}}$와 같이 나열하는 경우의 수는 1

따라서 $\square\square\boxed{\text{C}}\square\square$와 같이 나열하는 경우의 수는 $6-1=5$

(iii) $\square\square\square\boxed{\text{C}}\square$와 같이 나열하는 경우

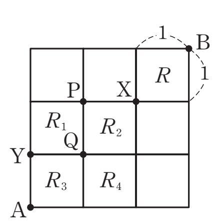
조건 (다)에서 D가 C 뒤에 적어도 하나는 있어야 하므로 $\square\square\square\boxed{\text{C}}\boxed{\text{D}}$와 같이 나열하고, 나머지 3개의 자리에 문자 B, B, D를 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$3\times(3+5+3)=33$ 답 ④

참고 $\boxed{\text{C}}\square\square\square\square$와 같이 나열하면 조건 (나)를, $\square\square\square\square\boxed{\text{C}}$와 같이 나열하면 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

9 조건 (가)를 만족시키려면 반드시 X 지점을 지나야 하고, 정사각형 R의 모든 변을 지나기 위하여 X ⟶ B로 가는 2개의 경로 중 하나를 택하면 B ⟶ X로 가는 경로는 자동으로 정해지므로 A ⟶ X ⟶ B ⟶ X ⟶ A로 가는 경우의 수는



$\frac{4!}{2!\times2!}\times2\times1\times\frac{4!}{2!\times2!}=72$

위의 그림과 같이 4개의 정사각형을 R_1, R_2, R_3, R_4라 하면

(i) R_1의 네 변을 모두 지나는 경우의 수

Y 지점과 P 지점을 반드시 지나야 하므로

A ⟶ Y ⟶ P ⟶ X ⟶ B ⟶ X ⟶ P ⟶ Y ⟶ A로 가는 경우의 수는

$1\times2\times1\times2\times1\times1\times1\times1=4$

(ii) R_2 또는 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우의 수

정사각형 R_2의 네 변을 모두 지나려면 Q 지점과 X 지점을 반드시 지나야 하므로

A ⟶ Q ⟶ X ⟶ B ⟶ X ⟶ Q ⟶ A로 가는 경우의 수는 $2\times2\times2\times1\times1\times2=16$

같은 방법으로 정사각형 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우의 수도 16

R_2와 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우의 수, 즉

A ⟶ Q ⟶ X ⟶ B ⟶ X ⟶ Q ⟶ A로 가는 경우의 수는

$2\times2\times2\times1\times1\times1=8$

따라서 R_2 또는 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우의 수는

$16+16-8=24$

(iii) R_4의 네 변을 모두 지나는 경우의 수

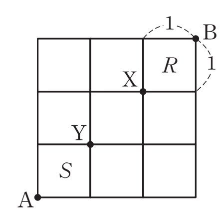
(i)과 같은 방법으로 4

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$72-(4+24+4)=40$ 답 40

10 조건 (가)를 만족시키려면 X 지점을 반드시 지나야 하므로

A ⟶ X ⟶ B ⟶ X ⟶ A로 가는 경우의 수는



$\frac{4!}{2!\times2!}\times2\times2\times\frac{4!}{2!\times2!}=144$

정사각형 S를 둘러싼 도로를 지난 길이의 합이 4이려면 A ⟶ X, X ⟶ A로 갈 때 각각 정사각형 S의 두 변을 지나야 하므로 Y 지점을 반드시 지나야 한다. 즉

A ⟶ Y ⟶ X ⟶ B ⟶ X ⟶ Y ⟶ A로 가는 경우의 수는

$2\times2\times2\times2\times2\times2=64$

따라서 구하는 경우의 수는

$144-64=80$ 답 80

2 중복조합과 이항정리

교과서 예제 p.35

01 (1) ${}_6\mathrm{H}_1={}_{6+1-1}\mathrm{C}_1={}_6\mathrm{C}_1=6$

(2) ${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

(3) ${}_5\mathrm{H}_3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

(4) ${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

답 (1) 6 (2) 10 (3) 35 (4) 28

02 (1) ${}_6\mathrm{H}_4={}_{6+4-1}\mathrm{C}_4={}_9\mathrm{C}_4={}_n\mathrm{C}_4$ $\quad\therefore n=9$

(2) ${}_4\mathrm{H}_r={}_{4+r-1}\mathrm{C}_r={}_{r+3}\mathrm{C}_r={}_{r+3}\mathrm{C}_3={}_8\mathrm{C}_3$

즉 $r+3=8$이므로 $r=5$

답 (1) $n=9$ (2) $r=5$

03 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

답 36

04 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_{10}={}_{4+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_3=286$

답 286

05 $(a+b+c+d)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$

답 56

06 방정식 $x+y+z=8$의 음이 아닌 정수 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_8={}_{3+8-1}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=45$

답 45

07 x, y, z, w가 자연수이므로

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$

(X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수)

라 하면 $x+y+z+w=10$에서

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)=10$

$\therefore X+Y+Z+W=6$

이 방정식의 해의 개수는 4개의 문자 X, Y, Z, W에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=84$

답 84

08 (1) $(x+y)^5$

$={}_5\mathrm{C}_0x^5+{}_5\mathrm{C}_1x^4y+{}_5\mathrm{C}_2x^3y^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2y^3+{}_5\mathrm{C}_4xy^4+{}_5\mathrm{C}_5y^5$

$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

(2) $(x-2)^5$

$={}_5\mathrm{C}_0x^5+{}_5\mathrm{C}_1x^4(-2)+{}_5\mathrm{C}_2x^3(-2)^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2(-2)^3$
$\quad+{}_5\mathrm{C}_4x(-2)^4+{}_5\mathrm{C}_5(-2)^5$

$=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

(3) $(x+2y)^4$

$={}_4\mathrm{C}_0x^4+{}_4\mathrm{C}_1x^3(2y)+{}_4\mathrm{C}_2x^2(2y)^2+{}_4\mathrm{C}_3x(2y)^3+{}_4\mathrm{C}_4(2y)^4$

$=x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$

(4) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$

$={}_6\mathrm{C}_0x^6+{}_6\mathrm{C}_1x^5\left(-\dfrac{1}{x}\right)+{}_6\mathrm{C}_2x^4\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2+{}_6\mathrm{C}_3x^3\left(-\dfrac{1}{x}\right)^3$
$\quad+{}_6\mathrm{C}_4x^2\left(-\dfrac{1}{x}\right)^4+{}_6\mathrm{C}_5x\left(-\dfrac{1}{x}\right)^5+{}_6\mathrm{C}_6\left(-\dfrac{1}{x}\right)^6$

$=x^6-6x^4+15x^2-20+\dfrac{15}{x^2}-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{1}{x^6}$

답 (1) $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$
(2) $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$
(3) $x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$
(4) $x^6-6x^4+15x^2-20+\dfrac{15}{x^2}-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{1}{x^6}$

09 (1) $(x-y)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_rx^{6-r}(-y)^r={}_6\mathrm{C}_r(-1)^rx^{6-r}y^r$ ($r=0, 1, 2, \dots, 6$)

x^3y^3항은 $r=3$일 때이므로 x^3y^3의 계수는

${}_6\mathrm{C}_3(-1)^3=-20$

(2) $(a+3)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_ra^{7-r}3^r={}_7\mathrm{C}_r3^ra^{7-r}$ ($r=0, 1, 2, \dots, 7$)

a^5항은 $7-r=5$, 즉 $r=2$일 때이므로 a^5의 계수는

${}_7\mathrm{C}_2\times3^2=21\times9=189$

(3) $(3a-2b)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(3a)^{5-r}(-2b)^r={}_5\mathrm{C}_r3^{5-r}(-2)^ra^{5-r}b^r$

($r=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

ab^4항은 $r=4$일 때이므로 ab^4의 계수는

${}_5\mathrm{C}_4\times3^1\times(-2)^4=5\times3\times16=240$

(4) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_rx^{4-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_4\mathrm{C}_r\dfrac{x^{4-r}}{x^r}$ ($r=0, 1, 2, 3, 4$)

x^2항은 $\dfrac{x^{4-r}}{x^r}=x^2$일 때이므로 $(4-r)-r=2$

$-2r=-2$ $\quad\therefore r=1$

따라서 x^2의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

답 (1) -20 (2) 189 (3) 240 (4) 4

10 (1) ${}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5=2^5=32$

(3) ${}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_9=2^{10-1}=2^9=512$

(4) ${}_7\mathrm{C}_0+{}_7\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_6=2^{7-1}=2^6=64$

답 (1) 32 (2) 0 (3) 512 (4) 64

11 (1) 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

$(a+2)^5$

$=a^5+5\times a^4\times2+10\times a^3\times2^2$
$\quad+10\times a^2\times2^3+5\times a\times2^4$
$\quad+2^5$

$=a^5+10a^4+40a^3+80a^2$
$\quad+80a+32$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

(2) 오른쪽 파스칼의 삼각형에서

$(x-y)^6$
$=x^6+6\times x^5\times(-y)$
$\quad+15\times x^4\times(-y)^2$
$\quad+20\times x^3\times(-y)^3$
$\quad+15\times x^2\times(-y)^4$
$\quad+6\times x\times(-y)^5$
$\quad+(-y)^6$
$=x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

답 풀이 참조

12 (1) ${}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3={}_5C_2+{}_5C_3={}_6C_3$
(2) ${}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5={}_8C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$
$={}_9C_4+{}_9C_5$
$={}_{10}C_5$
(3) ${}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1$
$={}_4C_2+{}_4C_1$
$={}_5C_2$

답 (1) ${}_6C_3$ (2) ${}_{10}C_5$ (3) ${}_5C_2$

기출 Best | 1회

p.36~39

01 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$ 답 ③

02 A 후보가 2표 이상 받아야 하므로 먼저 A 후보가 2표를 받고 남은 8표를 A, B, C 3명의 후보가 나누어 받으면 된다. 따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$ 답 ①

03 (i) A, B가 각각 0개의 응원봉을 받는 경우의 수
C, D가 총 5개의 응원봉을 받아야 하므로
${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$
(ii) A, B가 각각 1개의 응원봉을 받는 경우의 수
C, D가 총 3개의 응원봉을 받아야 하므로
${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$
(iii) A, B가 각각 2개의 응원봉을 받는 경우의 수
C, D가 총 1개의 응원봉을 받아야 하므로
${}_2H_1={}_{2+1-1}C_1={}_2C_1=2$
(i), (ii), (iii)에서 A, B가 같은 개수의 응원봉을 받는 경우의 수는
$6+4+2=12$ 답 ④

04 구하는 순서쌍의 개수는 1부터 9까지의 9개의 자연수 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_9H_3={}_{9+3-1}C_3={}_{11}C_3=165$ 답 ②

05 먼저 딸기맛 사탕, 포도맛 사탕, 사과맛 사탕을 각각 1개씩 택한 후 나머지 3개의 사탕을 택하면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ 답 ②
다른풀이 딸기맛 사탕, 포도맛 사탕, 사과맛 사탕의 개수를 각각 x, y, z라 하면
$x+y+z=6$ (단, x, y, z는 자연수)
$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$ (x', y', z'은 음이 아닌 정수)
라 하면
$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=6$
$\therefore x'+y'+z'=3$
구하는 경우의 수는 이 방정식의 해의 개수와 같으므로
${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

06 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로 $x+y+z<4$에서
$x+y+z=0, 1, 2, 3$
음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
(i) $x+y+z=0$인 경우
${}_3H_0={}_{3+0-1}C_0={}_2C_0=1$
(ii) $x+y+z=1$인 경우
${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$
(iii) $x+y+z=2$인 경우
${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$
(iv) $x+y+z=3$인 경우
${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$1+3+6+10=20$ 답 ②
다른풀이 부등식 $x+y+z<4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식
$x+y+z+w=3$ (w는 음이 아닌 정수)
의 해의 개수와 같으므로
${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

07 x, y, z가 자연수이므로
$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$ (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)
라 하면 $x+y+z=n$에서
$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=n$
$\therefore X+Y+Z=n-3$
이 방정식의 해의 개수가 55이므로
${}_3H_{n-3}={}_{3+(n-3)-1}C_{n-3}={}_{n-1}C_{n-3}={}_{n-1}C_2=55$

$\frac{(n-1)(n-2)}{2\times1}=55$, $n^2-3n+2=110$

$n^2-3n-108=0$, $(n+9)(n-12)=0$

$\therefore n=12$ ($\because n$은 자연수) 답 ④

08 $x\geq2$, $y\geq3$, $z\geq4$이므로 $x-2\geq0$, $y-3\geq0$, $z-4\geq0$

$x-2=X$, $y-3=Y$, $z-4=Z$ (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)

라 하면 $x+y+z=20$에서

$(X+2)+(Y+3)+(Z+4)=20$

$\therefore X+Y+Z=11$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 위의 방정식의 해의 개수와 같으므로

${}_3H_{11}={}_{3+11-1}C_{11}={}_{13}C_{11}={}_{13}C_2=78$ 답 ⑤

09 $f(1)\leq f(3)$이므로 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 $f(1)$, $f(3)$의 값이 정해진다. 즉 $f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 함수의 개수는

$10\times16=160$ 답 ⑤

10 조건 (가), (나)에서 $f(1)\leq f(2)\leq3\leq f(4)\leq f(5)$이어야 한다.

(i) $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

(ii) $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 3, 4, 5, 6에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$6\times10=60$ 답 ③

11 $\left(ax^2+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(ax^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_ra^{6-r}x^{12-2r}\times\frac{1}{x^r}$

$={}_6C_ra^{6-r}\times\frac{x^{12-2r}}{x^r}$ $(r=0, 1, 2, \dots, 6)$

x^3항은 $\frac{x^{12-2r}}{x^r}=x^3$일 때이므로 $(12-2r)-r=3$

$-3r=-9$ $\quad\therefore r=3$

x^3의 계수가 160이므로

${}_6C_3a^3=160$, $20a^3=160$

$a^3=8$, $a^3-8=0$, $(a-2)(a^2+2a+4)=0$

$\therefore a=2$ 답 ③

12 $\left(x+\frac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_rx^{10-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r={}_{10}C_r\frac{x^{10-r}}{x^{nr}}$ $(r=0, 1, 2, \dots, 10)$

상수항은 $\frac{x^{10-r}}{x^{nr}}=1$일 때이므로 $10-r=nr$

$nr+r=10$ $\quad\therefore r(n+1)=10$ $\quad\cdots\cdots㉠$

이때 상수항이 45이므로

${}_{10}C_r=45$ $\quad\therefore r=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$2(n+1)=10$, $n+1=5$ $\quad\therefore n=4$ 답 ②

13 $(1-x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r1^{5-r}(-x)^r={}_5C_r(-1)^rx^r$

이므로 $(1+2x)(1-x)^5$의 전개식에서 x^4항은

$1\times{}_5C_4(-1)^4x^4+2x\times{}_5C_3(-1)^3x^3$

$={}_5C_4x^4-2\times{}_5C_3x^4$

$=5x^4-20x^4=-15x^4$

따라서 x^4의 계수는 -15이다. 답 ④

14 $(1+x^3)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r1^{7-r}(x^3)^r={}_7C_rx^{3r}$ $(r=0, 1, 2, \dots, 7)$

$(1+x^2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s1^{5-s}(x^2)^s={}_5C_sx^{2s}$ $(s=0, 1, 2, \dots, 5)$

이므로 $(1+x^3)^7(1+x^2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_7C_rx^{3r}\times{}_5C_sx^{2s}={}_7C_r\times{}_5C_sx^{3r+2s}$

x^8항은 $3r+2s=8$일 때이므로

이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 4)$, $(2, 1)$

따라서 $(1+x^3)^7(1+x^2)^5$의 전개식에서 x^8의 계수는

${}_7C_0\times{}_5C_4+{}_7C_2\times{}_5C_1=1\times5+21\times5=110$ 답 ④

15 ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_7+{}_{10}C_8$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_7+{}_{10}C_8$ ($\because {}_2C_0={}_3C_0=1$)

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_7+{}_{10}C_8$

$={}_5C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_9C_7+{}_{10}C_8$

$\vdots$

$={}_{10}C_7+{}_{10}C_8$

$={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$ 답 ⑤

16 ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$ ($\because {}_2C_2={}_3C_3=1$)

$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2$

$={}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2$

$={}_6C_3+{}_6C_2$

$={}_7C_3$ 답 ②

17 ${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$이고

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5$

$={}_{11}C_{11}+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_9+{}_{11}C_8+{}_{11}C_7+{}_{11}C_6$

이므로

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5=\frac{1}{2}\times2^{11}=2^{10}=1024$

답 ③

18 원소의 개수가 1인 부분집합의 개수는 ${}_8C_1$

원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 ${}_8C_3$

원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 ${}_8C_5$

원소의 개수가 7인 부분집합의 개수는 ${}_8C_7$

따라서 구하는 집합의 개수는

${}_8C_1+{}_8C_3+{}_8C_5+{}_8C_7=2^{8-1}=128$

답 ④

19 $1+{}_8C_1\times7+{}_8C_2\times7^2+{}_8C_3\times7^3+\cdots+{}_8C_8\times7^8$

$={}_8C_0\times1^8+{}_8C_1\times1^7\times7^1+{}_8C_2\times1^6\times7^2+{}_8C_3\times1^5\times7^3+\cdots+{}_8C_8\times7^8$

$=(1+7)^8=8^8=(2^3)^8=2^{24}$

$\therefore n=24$

답 ②

20 $31^{15}=(30+1)^{15}$

$={}_{15}C_0\times30^{15}+{}_{15}C_1\times30^{14}+{}_{15}C_2\times30^{13}+\cdots+{}_{15}C_{13}\times30^2+{}_{15}C_{14}\times30+{}_{15}C_{15}$

이때 ${}_{15}C_0\times30^{15}+{}_{15}C_1\times30^{14}+{}_{15}C_2\times30^{13}+\cdots+{}_{15}C_{13}\times30^2$은 $900=30^2$으로 나누어떨어지므로 31^{15}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{15}C_{14}\times30+{}_{15}C_{15}$를 900으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는

${}_{15}C_{14}\times30+{}_{15}C_{15}={}_{15}C_1\times30+{}_{15}C_0=451$

답 ④

기출 Best | 2회

p.40~43

01 $(a+b+c)^2$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

$(x+y)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 x, y에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

각각의 전개식에 동시에 포함되는 문자가 없으므로

$(a+b+c)^2(x+y)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$6\times5=30$

답 ③

02 5개의 꽃병 중 3개를 택하여 빨간색 장미꽃을 1송이씩 꽂는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$

빈 꽃병이 없어야 하므로 빨간색 장미꽃을 꽂지 않은 2개의 꽃병에 노란색 장미꽃을 한 송이씩 꽂고, 남은 노란색 장미꽃 5송이를 5개의 꽃병에 꽂는 경우의 수는 서로 다른 5개의 꽃병에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5={}_9C_4=126$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times126=1260$

답 ⑤

03 같은 종류의 스티커 7장을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

스티커 7장을 세 묶음으로 나눌 때, 세 묶음 중 두 묶음의 스티커의 수가 같은 경우는

(0장, 0장, 7장), (1장, 1장, 5장),

(2장, 2장, 3장), (3장, 3장, 1장)

의 4가지이고, 각 경우를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

이므로 3명 중 2명에게 같은 수의 스티커를 주는 경우의 수는

$4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$36-12=24$

답 ④

참고 스티커는 7장이므로 3명이 모두 같은 수의 스티커를 받을 수는 없다.

04 $1\le a\le b\le c\le d\le9$를 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 1부터 9까지의 9개의 수 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_9H_4={}_{9+4-1}C_4={}_{12}C_4=495$

$1\le a\le b=c\le d\le9$를 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 1부터 9까지의 9개의 수 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_9H_3={}_{9+3-1}C_3={}_{11}C_3=165$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$495-165=330$

답 ⑤

05 연필 9자루를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_4H_9={}_{4+9-1}C_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

학생 4명 모두 적어도 한 자루 이상의 연필을 받는 경우의 수는 4명에게 연필을 각각 한 자루씩 나누어 준 후 남은 5자루의 연필을 4명에게 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

따라서 구하는 경우의 수는

$220-56=164$

답 ⑤

06 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$ (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)이라 하면 $x+y+z<8$에서

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)<8$

$\therefore X+Y+Z<5$

X, Y, Z가 음이 아닌 정수이므로
$X+Y+Z=0, 1, 2, 3, 4$
음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는
(i) $X+Y+Z=0$인 경우
$_3H_0={}_{3+0-1}C_0={}_2C_0=1$
(ii) $X+Y+Z=1$인 경우
$_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$
(iii) $X+Y+Z=2$인 경우
$_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$
(iv) $X+Y+Z=3$인 경우
$_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$
(v) $X+Y+Z=4$인 경우
$_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$1+3+6+10+15=35$ 답 ①

07 x, y, z가 홀수인 자연수이므로
$x=2X+1$, $y=2Y+1$, $z=2Z+1$
(X, Y, Z는 음이 아닌 정수)
이라 하면 $x+y+z=15$에서
$(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+1)=15$
$2X+2Y+2Z=12 \qquad \therefore X+Y+Z=6$
이 방정식의 해의 개수는
$_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$ 답 ④

08 $a\geq 1$, $b\geq 2$이므로
$a-1=A$, $b-2=B$ (A, B는 음이 아닌 정수)
라 하면 $a+b+c=10$에서
$(A+1)+(B+2)+c=10 \qquad \therefore A+B+c=7$
$c\leq 3$인 자연수이므로
(i) $c=1$일 때
$A+B=6$이고, 이 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
$_2H_6={}_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7$
(ii) $c=2$일 때
$A+B=5$이고, 이 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
$_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$
(iii) $c=3$일 때
$A+B=4$이고, 이 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
$_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$7+6+5=18$ 답 ②

09 조건 (가), (나)에서 $2\leq f(2)\leq f(3)\leq 4\leq f(5)$이어야 한다.
$2\leq f(2)\leq f(3)\leq 4$에서 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 2, 3, 4에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$
$4\leq f(5)$에서 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 4, 5, 6에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 $_3C_1=3$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$6\times 3=18$ 답 ①

10 조건 (가), (나)에서 $3\leq f(4)\leq f(3)\leq f(2)\leq f(1)$이므로 공역 Y의 원소 3, 4, 5, 6 중 4개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 정의역 X의 원소 4, 3, 2, 1에 대응시키면 된다.
따라서 $f(4)$, $f(3)$, $f(2)$, $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 Y의 원소 3, 4, 5, 6에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는
$_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=35$ 답 ①

11 $\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은
$$_4C_r x^{4-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r={}_4C_r x^{4-r}\times(-2)^r\times\left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$
$$={}_4C_r(-2)^r\frac{x^{4-r}}{x^{2r}} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$
x항은 $\dfrac{x^{4-r}}{x^{2r}}=x$일 때이므로 $(4-r)-2r=1$
$-3r=-3 \qquad \therefore r=1$
따라서 x의 계수는
$_4C_1\times(-2)^1=4\times(-2)=-8 \qquad \therefore a=-8$
또 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $\dfrac{x^{4-r}}{x^{2r}}=\dfrac{1}{x^2}$일 때이므로 $2r-(4-r)=2$
$3r=6 \qquad \therefore r=2$
따라서 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수는
$_4C_2\times(-2)^2=6\times 4=24 \qquad \therefore b=24$
$\therefore a+b=-8+24=16$ 답 ④

12 $(x+\sqrt{2})^{11}$의 전개식의 일반항은
$_{11}C_r x^{11-r}(\sqrt{2})^r={}_{11}C_r(\sqrt{2})^r x^{11-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 11)$
계수가 무리수이려면 $(\sqrt{2})^r$에서 r가 홀수이어야 하므로
$r=1, 3, 5, 7, 9, 11$
따라서 계수가 무리수인 항은 6개이다. 답 ③

13 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은
$$_6C_r x^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_6C_r x^{6-r}(-2)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r$$
$$={}_6C_r(-2)^r\frac{x^{6-r}}{x^r}$$
$(x^2+2)\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항이 되는 경우는
(i) x^2+2에서 x^2과 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^2}$항을 곱할 때
$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $\dfrac{x^{6-r}}{x^r}=\dfrac{1}{x^2}$일 때이므로
$r-(6-r)=2$, $2r-6=2$, $2r=8 \qquad \therefore r=4$

따라서 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은

${}_6C_4\times(-2)^4\times\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{240}{x^2}$

(ii) x^2+2에서 2와 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항을 곱할 때

$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항은 $\dfrac{x^{6-r}}{x^r}=1$일 때이므로

$6-r=r,\ -2r=-6\qquad \therefore r=3$

따라서 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항은

${}_6C_3\times(-2)^3=20\times(-8)=-160$

(i), (ii)에서 구하는 상수항은

$x^2\times\dfrac{240}{x^2}+2\times(-160)=-80$ 답 ②

14 $(1+2x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r1^{4-r}(2x)^r={}_4C_r2^rx^r\ (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s(-1)^{5-s}\left(\dfrac{1}{x}\right)^s={}_5C_s(-1)^{5-s}\dfrac{1}{x^s}\ (s=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 5)$

따라서 $(1+2x)^4\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r2^rx^r\times{}_5C_s(-1)^{5-s}\dfrac{1}{x^s}$

$={}_4C_r\times{}_5C_s\times2^r\times(-1)^{5-s}\times\dfrac{x^r}{x^s}$

x^3항은 $\dfrac{x^r}{x^s}=x^3$일 때이므로 $r-s=3$

이를 만족시키는 $r,\ s$의 순서쌍 $(r,\ s)$는 $(4,\ 1),\ (3,\ 0)$

따라서 구하는 x^3의 계수는

${}_4C_4\times{}_5C_1\times2^4\times(-1)^4+{}_4C_3\times{}_5C_0\times2^3\times(-1)^5=48$ 답 ④

15 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r1^{n-r}x^r={}_nC_rx^r$

x^3항은 $r=3$일 때이므로 x^3의 계수는 ${}_nC_3$

따라서

$(1+x)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_3C_3$

$(1+x)^4$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_4C_3$

$(1+x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_5C_3$

$\vdots$

$(1+x)^9$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_9C_3$

이므로 $(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^9$의 전개식에서 x^3의 계수는

${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3$

$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3\ (\because {}_3C_3={}_4C_4=1)$

$={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3$

$={}_6C_4+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3$

$={}_7C_4+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3$

$={}_8C_4+{}_8C_3+{}_9C_3$

$={}_9C_4+{}_9C_3={}_{10}C_4=210$ 답 ⑤

16 ${}_5C_0={}_6C_0$이므로

${}_5C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_{19}C_{14}+{}_{20}C_{15}$

$={}_6C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_{19}C_{14}+{}_{20}C_{15}$

$={}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_{19}C_{14}+{}_{20}C_{15}$

$\vdots$

$={}_{20}C_{14}+{}_{20}C_{15}$

$={}_{21}C_{15}={}_{21}C_6$

$\therefore n=21$ 답 ③

17 ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+{}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7=2^7$이므로

${}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+{}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7$

$=({}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+{}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7)-{}_7C_0$

$=2^7-1=127$ 답 ④

18 ${}_{25}C_0-{}_{25}C_1+{}_{25}C_2-{}_{25}C_3+\cdots+{}_{25}C_{24}-{}_{25}C_{25}=0$이므로

${}_{25}C_1-{}_{25}C_2+{}_{25}C_3-{}_{25}C_4+\cdots-{}_{25}C_{24}+{}_{25}C_{25}={}_{25}C_0=1$ 답 ④

19 ${}_{10}C_0+3\times{}_{10}C_1+3^2\times{}_{10}C_2+3^3\times{}_{10}C_3+\cdots+3^{10}\times{}_{10}C_{10}$

$={}_{10}C_0\times1^{10}+{}_{10}C_1\times1^9\times3^1+{}_{10}C_2\times1^8\times3^2+{}_{10}C_3\times1^7\times3^3$

$+\cdots+{}_{10}C_9\times1^1\times3^9+{}_{10}C_{10}\times3^{10}$

$=(1+3)^{10}=4^{10}=2^{20}$

$\therefore 3\times{}_{10}C_1+3^2\times{}_{10}C_2+3^3\times{}_{10}C_3+\cdots+3^{10}\times{}_{10}C_{10}$

$=2^{20}-{}_{10}C_0=2^{20}-1$ 답 ①

20 11^{20}

$=(10+1)^{20}$

$={}_{20}C_0\times10^{20}+{}_{20}C_1\times10^{19}+{}_{20}C_2\times10^{18}$

$+\cdots+{}_{20}C_{18}\times10^2+{}_{20}C_{19}\times10+{}_{20}C_{20}$

$=10^3({}_{20}C_0\times10^{17}+{}_{20}C_1\times10^{16}+{}_{20}C_2\times10^{15}+\cdots+{}_{20}C_{17})$

$+{}_{20}C_{18}\times10^2+{}_{20}C_{19}\times10+{}_{20}C_{20}$

$=10^3({}_{20}C_0\times10^{17}+{}_{20}C_1\times10^{16}+{}_{20}C_2\times10^{15}+\cdots+{}_{20}C_{17})$

$+19000+200+1$

$=10^3({}_{20}C_0\times10^{17}+{}_{20}C_1\times10^{16}+{}_{20}C_2\times10^{15}+\cdots+{}_{20}C_{17}+19)$

$+201$

따라서 11^{20}의 마지막 세 자리 숫자는 201이다.

즉 $a=2,\ b=0,\ c=1$이므로

$a+b+c=2+0+1=3$ 답 ②

변형유형 집중공략

p.44~45

1-1 공역 Y의 원소 2개의 합이 10인 경우는

$2+8=10,\ 4+6=10$

$f(2)+f(4)=10$이고 조건 (나)에서 $f(2)\le f(4)$이므로

$f(2)=2,\ f(4)=8$ 또는 $f(2)=4,\ f(4)=6$

(i) $f(2)=2$, $f(4)=8$일 때

조건 (나)에서 $f(1) \le f(2)$이므로 $f(1)=2$

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8의 4개

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 8, 10, 12에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

따라서 함수 f의 개수는 $4\times6=24$

(ii) $f(2)=4$, $f(4)=6$일 때

조건 (나)에서 $f(1) \le f(2)$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 4의 2개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 4, 6의 2개

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 6, 8, 10, 12에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

따라서 함수 f의 개수는 $2\times2\times10=40$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$24+40=64$

답 ⑤

1-2 공역 Y의 원소 2개의 합이 8인 경우는 $2+6=8$, $4+4=8$

따라서 조건 (가)에서

$f(2)=2$, $f(5)=6$ 또는 $f(2)=4$, $f(5)=4$ 또는 $f(2)=6$, $f(5)=2$

(i) $f(2)=2$, $f(5)=6$일 때

조건 (나)에서 $f(1)\le f(3)\le 6$

따라서 $f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 2, 4, 6에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 집합 Y의 원소 2, 4, 6, 8, 10의 5개

따라서 함수 f의 개수는

$6\times5=30$

(ii) $f(2)=4$, $f(5)=4$일 때

조건 (나)에서 $f(1)\le f(3)\le 4$

따라서 $f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 2, 4에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 집합 Y의 원소 2, 4, 6, 8, 10의 5개

따라서 함수 f의 개수는

$3\times5=15$

(iii) $f(2)=6$, $f(5)=2$일 때

조건 (나)에서 $f(1)\le f(3)\le 2$ $\quad\therefore f(1)=f(3)=2$

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 집합 Y의 원소 2, 4, 6, 8, 10의 5개

따라서 함수 f의 개수는 5

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는

$30+15+5=50$

답 ③

2-1 $a+b+c=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_3H_{12}={}_{3+12-1}C_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=91$

이 중에서 $a\le8$을 만족시키지 않는 경우는 $a\ge9$인 경우이다. 이때 $a\ge9$이면 $a-9\ge0$이므로 $a-9=A$라 하면 A는 음이 아닌 정수이고, $a=A+9$이므로 $a+b+c=12$에서

$(A+9)+b+c=12 \qquad \therefore A+b+c=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, b, c의 순서쌍 (A, b, c)의 개수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 $a\le8$일 때, 방정식 $a+b+c=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$91-10=81$

답 ①

2-2 $a+b+c=15$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_3H_{15}={}_{3+15-1}C_{15}={}_{17}C_{15}={}_{17}C_2=136$

이 중에서 $a\le5$이고 $b\le5$를 만족시키지 않는 경우는 $a\ge6$ 또는 $b\ge6$인 경우이다.

(i) $a\ge6$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수

$a-6\ge0$이므로 $A=a-6$이라 하면 A는 음이 아닌 정수이고, $a=A+6$이므로 $a+b+c=15$에서

$(A+6)+b+c=15$

$\therefore A+b+c=9$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, b, c의 순서쌍 (A, b, c)의 개수는

${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

즉 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 55

(ii) $b\ge6$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수

(i)과 같은 방법으로 55

(iii) $a\ge6$이고 $b\ge6$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수

$a-6\ge0$, $b-6\ge0$이므로 $A=a-6$, $B=b-6$이라 하면 A, B는 음이 아닌 정수이고, $a=A+6$, $b=B+6$이므로 $a+b+c=15$에서

$(A+6)+(B+6)+c=15$

$\therefore A+B+c=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, c의 순서쌍 (A, B, c)의 개수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

즉 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 10

(i), (ii), (iii)에서 $a\ge6$ 또는 $b\ge6$일 때, $a+b+c=15$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$55+55-10=100$

따라서 $a\le5$이고 $b\le5$일 때, $a+b+c=15$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$136-100=36$

답 ②

참고 $a+b+c=15$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 집합을 U, U의 원소 중 $a\le5$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 집합을 A, $b\le5$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 집합을 B라 하면 $a\le5$이고 $b\le5$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 집합은 $A\cap B$이다. 또 집합 A^C는 $a\ge6$을, 집합 B^C는 $b\ge6$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 집합이다.
이때 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$\begin{aligned}n(A\cap B)&=n(U)-n((A\cap B)^C)\\&=n(U)-n(A^C\cup B^C)\\&=n(U)-\{n(A^C)+n(B^C)-n(A^C\cap B^C)\}\\&=136-(55+55-10)=36\end{aligned}$$

서술형 What & How

p.46~47

1 $(1+x)^3$의 전개식의 일반항은
${}_3C_r1^{3-r}x^r={}_3C_rx^r$ $(r=0, 1, 2, 3)$
$(1-x^2)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_s1^{n-s}(-x^2)^s={}_nC_s(-1)^sx^{2s}$ $(s=0, 1, 2, \dots, n)$
따라서 $(1+x)^3(1-x^2)^n$의 전개식의 일반항은
${}_3C_rx^r\times{}_nC_s(-1)^sx^{2s}={}_3C_r\times{}_nC_s(-1)^sx^{r+2s}$ …… ❶
이때 x^4항은 $r+2s=4$일 때이므로 r, s의 순서쌍 (r, s)는
$(0, 2)$, $(2, 1)$ …… ❷
따라서 $(1+x)^3(1-x^2)^n$의 전개식에서 x^4의 계수는
${}_3C_0\times{}_nC_2(-1)^2+{}_3C_2\times{}_nC_1(-1)^1=\dfrac{n(n-1)}{2}-3n$ …… ❸
이고, x^4의 계수가 -5이므로
$\dfrac{n(n-1)}{2}-3n=-5$, $n(n-1)-6n=-10$
$n^2-7n+10=0$, $(n-2)(n-5)=0$
$\therefore n=2$ 또는 $n=5$
따라서 모든 자연수 n의 값의 합은
$2+5=7$ …… ❹

답 7

2 $(1-x)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r1^{6-r}(-x)^r={}_6C_r(-1)^rx^r$ $(r=0, 1, 2, \dots, 6)$
$(a+x^2)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_sa^{4-s}(x^2)^s={}_4C_sa^{4-s}x^{2s}$ $(s=0, 1, 2, 3, 4)$
이므로 $(1-x)^6(a+x^2)^4$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r(-1)^rx^r\times{}_4C_sa^{4-s}x^{2s}={}_6C_r\times{}_4C_s(-1)^ra^{4-s}x^{r+2s}$ …… ❶
이때 x^{11}항은 $r+2s=11$일 때이므로 r, s의 순서쌍 (r, s)는
$(3, 4)$, $(5, 3)$ …… ❷
따라서 $(1-x)^6(a+x^2)^4$의 전개식에서 x^{11}의 계수는
${}_6C_3\times{}_4C_4(-1)^3a^0+{}_6C_5\times{}_4C_3(-1)^5a^1=-20-24a$ …… ❸
이고, x^{11}의 계수가 52이므로
$-20-24a=52$, $-24a=72$
$\therefore a=-3$ …… ❹

답 -3

채점기준	배점
❶ $(1-x)^6(a+x^2)^4$의 전개식의 일반항 구하기	2
❷ x^{11}항이 나오는 경우 구하기	2
❸ x^{11}의 계수를 a에 대한 식으로 나타내기	1
❹ a의 값 구하기	1

참고 0이 아닌 실수 a에 대하여 $a^0=1$로 정의한다.

3 $x+y+z\le6$ (x, y, z는 음이 아닌 정수)이므로
$x+y+z=0, 1, 2, \dots, 6$ …… ❶
음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$x+y+z=0$일 때, ${}_3H_0={}_{3+0-1}C_0={}_2C_0$
$x+y+z=1$일 때, ${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1$
$x+y+z=2$일 때, ${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2$
⋮
$x+y+z=6$일 때, ${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6$ …… ❷
따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$$\begin{aligned}&{}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6\\&={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6\ (\because {}_2C_0={}_3C_0=1)\\&={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6\\&={}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6\\&={}_6C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6\\&={}_7C_4+{}_7C_5+{}_8C_6\\&={}_8C_5+{}_8C_6\\&={}_9C_6={}_9C_3=84\end{aligned}$$ …… ❸

답 84

다른풀이 부등식 $x+y+z\le6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식
$x+y+z+w=6$ (x, y, z, w는 음이 아닌 정수)
의 해의 개수와 같으므로
${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$
참고 중복조합에서 다음과 같은 성질이 성립한다.
${}_nH_0+{}_nH_1+{}_nH_2+\cdots+{}_nH_r={}_{n+1}H_r$

4 $x+y+z+w\le5$ (x, y, z, w는 음이 아닌 정수)이므로
$x+y+z+w=0, 1, 2, \dots, 5$ …… ❶
음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는
$x+y+z+w=0$일 때, ${}_4H_0={}_{4+0-1}C_0={}_3C_0$
$x+y+z+w=1$일 때, ${}_4H_1={}_{4+1-1}C_1={}_4C_1$
$x+y+z+w=2$일 때, ${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2$
⋮
$x+y+z+w=5$일 때, ${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5$ …… ❷
따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$$\begin{aligned}&{}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4+{}_8C_5\\&={}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4+{}_8C_5\ (\because {}_3C_0={}_4C_0=1)\\&={}_5C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4+{}_8C_5\end{aligned}$$

$=_{6}C_{2}+_{6}C_{3}+_{7}C_{4}+_{8}C_{5}$

$=_{7}C_{3}+_{7}C_{4}+_{8}C_{5}$

$=_{8}C_{4}+_{8}C_{5}$

$=_{9}C_{5}=_{9}C_{4}=126$ …… ❸

답 126

채점기준	배점
❶ $x+y+z+w$의 값이 될 수 있는 정수 구하기	1
❷ ❶의 각 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수 구하기	2
❸ 모든 순서쌍의 개수 구하기	2

다른풀이 $x+y+z+w\le5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 방정식
$x+y+z+w+v=5$ (x, y, z, w, v는 음이 아닌 정수)
의 해의 개수와 같으므로
$_{5}H_{5}=_{5+5-1}C_{5}=_{9}C_{5}=_{9}C_{4}=126$

실전 문제 | 1회

p.48~51

01 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 a, b, c에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{n}=_{3+n-1}C_{n}=_{n+2}C_{n}=_{n+2}C_{2}=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$

이때 서로 다른 항의 개수가 55이므로

$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}=55$

$(n+2)(n+1)=110$, $n^2+3n-108=0$

$(n+12)(n-9)=0$ $\quad\therefore n=9$ ($\because$ n은 자연수) 답 ①

02 먼저 3명에게 애플파이를 각각 2개씩 나누어 준 후 남은 4개의 애플파이를 3명에게 나누어 주면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{4}=_{3+4-1}C_{4}=_{6}C_{4}=_{6}C_{2}=15$ 답 ②

03 (i) $1\le a\le b\le c\le6$일 때

자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{6}H_{3}=_{6+3-1}C_{3}=_{8}C_{3}=56$

(ii) $2\le a\le c\le b\le8$일 때

자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 2, 3, 4, …, 8에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{7}H_{3}=_{7+3-1}C_{3}=_{9}C_{3}=84$

(iii) $1\le a\le b\le c\le6$이고 $2\le a\le c\le b\le8$일 때

$b\le c$, $c\le b$에서 $b=c$이므로 $2\le a\le b=c\le6$

따라서 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 2, 3, 4, 5, 6에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{5}H_{2}=_{5+2-1}C_{2}=_{6}C_{2}=15$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$56+84-15=125$ 답 ①

04 같은 종류의 구슬 7개를 크기가 모두 다른 3개의 주머니에 남김 없이 나누어 담는 경우의 수는

$_{3}H_{7}=_{3+7-1}C_{7}=_{9}C_{7}=_{9}C_{2}=36$

(i) 어떤 주머니 하나에 구슬 6개를 담는 경우의 수

구슬 6개를 담을 주머니를 고르는 경우의 수는 $_{3}C_{1}=3$

이때 남은 2개의 주머니 중 하나를 골라 남은 1개의 구슬을 담는 경우의 수는 $_{2}C_{1}=2$이므로

$3\times2=6$

(ii) 어떤 주머니 하나에 구슬 7개를 모두 담는 경우의 수

구슬 7개를 담을 주머니를 고르는 경우의 수이므로

$_{3}C_{1}=3$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36-(6+3)=27$ 답 ①

05 장미꽃, 국화꽃, 민들레꽃의 수를 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=7$ $(0\le x\le7,\ 0\le y\le7,\ 0\le z\le4)$

$x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$_{3}H_{7}=_{3+7-1}C_{7}=_{9}C_{7}=_{9}C_{2}=36$

$z\ge5$일 때, $z-5\ge0$이므로 $Z=z-5$라 하면 $z=Z+5$이고

$x+y+z=5$에서 $x+y+(Z+5)=7$

$\therefore x+y+Z=2$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, Z의 순서쌍 (x, y, Z)의 개수는

$_{3}H_{2}=_{3+2-1}C_{2}=_{4}C_{2}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$36-6=30$ 답 ②

06 조건 (가)에서 강아지 인형은 3개, 1개, 1개 또는 2개, 2개, 1개씩 나누어 주어야 한다.

(i) 강아지 인형을 3개, 1개, 1개씩 나누어 주는 경우

세 명의 학생 중 강아지 인형 3개를 받을 학생을 택하는 경우의 수는 $_{3}C_{1}=3$

세 명의 학생이 받는 고양이 인형의 개수를 각각 x, y, z라 하면 $x+y+z=7$ (x, y, z는 음이 아닌 정수)이고, 조건 (나)에서 x, y, z는 모두 홀수이어야 하므로

$x=2X+1$, $y=2Y+1$, $z=2Z+1$

(X, Y, Z는 음이 아닌 정수)

이라 하면

$(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+1)=7$

$2X+2Y+2Z=4$

$\therefore X+Y+Z=2$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는

$_{3}H_{2}=_{3+2-1}C_{2}=_{4}C_{2}=6$

따라서 인형을 나누어 주는 경우의 수는

$3\times6=18$

(ⅱ) 강아지 인형을 2개, 2개, 1개씩 나누어 주는 경우

세 명의 학생 중 강아지 인형 1개를 받을 학생을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

세 명의 학생이 받는 고양이 인형의 개수를 각각 x, y, z라 하면 $x+y+z=7$ (x, y, z는 음이 아닌 정수)이고, 조건 (나)에서 x, y, z 중 2개는 0 또는 짝수, 1개는 홀수이어야 한다.

이때 x를 홀수라 하고,

$x=2X+1$, $y=2Y$, $z=2Z$ (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)

라 하면

$(2X+1)+2Y+2Z=7$

$2X+2Y+2Z=6 \qquad \therefore X+Y+Z=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 인형을 나누어 주는 경우의 수는

$3\times10=30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$18+30=48$

답 ②

07 조건 (가)에서

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$

(X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수)

이라 하면 $x+y+z+w=12$에서

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)=12$

$\therefore X+Y+Z+W=8$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는

${}_4H_8={}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

한편 x, y, z, w가 모두 홀수인 자연수라 하면

$x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$, $w=2d+1$

(a, b, c, d는 음이 아닌 정수)

이므로 $x+y+z+w=12$에서

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=12$

$2a+2b+2c+2d=8$

$\therefore a+b+c+d=4$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

따라서 구하는 방정식의 해의 개수는

$165-35=130$

답 ③

08 $(x+a)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}a^r={}_5C_r a^r x^{5-r}$ $(r=0, 1, 2, \dots, 5)$

x^3항은 $x^{5-r}=x^3$일 때이므로

$5-r=3 \qquad \therefore r=2$

따라서 x^3의 계수는 ${}_5C_2 a^2=10a^2$

이때 x^3의 계수가 40이므로

$10a^2=40$, $a^2=4 \qquad \therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 $(x+2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r 2^r x^{5-r}$ $(r=0, 1, 2, \dots, 5)$

x^2항은 $x^{5-r}=x^2$일 때이므로

$5-r=2 \qquad \therefore r=3$

따라서 $(x+2)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_5C_3\times2^3=80 \qquad \therefore b=80$

$\therefore a+b=2+80=82$

답 ⑤

09 $\dfrac{(2x+1)^4(x-3)^4}{x^2}$의 전개식에서 x^4의 계수는

$(2x+1)^4(x-3)^4$의 전개식에서 x^6의 계수와 같다.

$(2x+1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(2x)^{4-r}1^r={}_4C_r 2^{4-r}x^{4-r}$ $(r=0, 1, 2, 3, 4)$

$(x-3)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s x^{4-s}(-3)^s={}_4C_s(-3)^s x^{4-s}$ $(s=0, 1, 2, 3, 4)$

따라서 $(2x+1)^4(x-3)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r 2^{4-r}x^{4-r}\times{}_4C_s(-3)^s x^{4-s}={}_4C_r\times{}_4C_s 2^{4-r}(-3)^s x^{8-r-s}$

x^6항은 $8-r-s=6$, 즉 $r+s=2$일 때이고, 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

$r=0$, $s=2$일 때, x^6의 계수는 ${}_4C_0\times{}_4C_2\times2^4\times(-3)^2=864$

$r=1$, $s=1$일 때, x^6의 계수는 ${}_4C_1\times{}_4C_1\times2^3\times(-3)^1=-384$

$r=2$, $s=0$일 때, x^6의 계수는 ${}_4C_2\times{}_4C_0\times2^2\times(-3)^0=24$

따라서 $(2x+1)^4(x-3)^4$의 전개식에서 x^6의 계수는

$864-384+24=504$

이므로 $\dfrac{(2x+1)^4(x-3)^4}{x^2}$의 전개식에서 x^4의 계수는 504이다.

답 ⑤

10 ${}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+{}_3H_4+{}_3H_5+{}_3H_6+{}_3H_7$

$={}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7-1$ ($\because {}_3C_1={}_4C_1-1$)

$={}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7-1$

$={}_6C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7-1$

$={}_7C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7-1$

$={}_8C_5+{}_8C_6+{}_9C_7-1$

$={}_9C_6+{}_9C_7-1$

$={}_{10}C_7-1$

$={}_{10}C_3-1$

$=120-1=119$

답 ①

다른풀이

${}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+{}_3H_4+{}_3H_5+{}_3H_6+{}_3H_7$

$={}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7$

$={}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2+{}_9C_2$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2+{}_9C_2-1$ ($\because {}_3C_3=1$)

$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2+{}_9C_2-1$

$={}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2+{}_9C_2-1$

$={}_6C_3+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2+{}_9C_2-1$
$={}_7C_3+{}_7C_2+{}_8C_2+{}_9C_2-1$
$={}_8C_3+{}_8C_2+{}_9C_2-1$
$={}_9C_3+{}_9C_2-1$
$={}_{10}C_3-1$
$=120-1=119$

11 ㄱ. ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7=2^7$이므로
${}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+\cdots+{}_7C_7=2^7-{}_7C_0=128-1=127$ (거짓)
ㄴ. ${}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-\cdots+{}_{10}C_{10}=0$ (참)
ㄷ. ${}_9C_5+{}_9C_6+{}_9C_7+{}_9C_8+{}_9C_9={}_9C_4+{}_9C_3+{}_9C_2+{}_9C_1+{}_9C_0$이고
${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9=2^9$이므로
${}_9C_5+{}_9C_6+{}_9C_7+{}_9C_8+{}_9C_9=\frac{1}{2}\times 2^9=2^8=256$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.
답 ④

12 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_r1^{n-r}x^r={}_nC_rx^r$ $(r=0, 1, 2, \dots, n)$
x^5항은 $r=5$일 때이므로 x^5의 계수는 ${}_nC_5$
이때 $(1+x)^3+(1+x)^4$에서는 x^5항이 나오지 않고
$(1+x)^5$에서 x^5의 계수는 ${}_5C_5$
$(1+x)^6$에서 x^5의 계수는 ${}_6C_5$
$(1+x)^7$에서 x^5의 계수는 ${}_7C_5$
⋮
$(1+x)^{10}$에서 x^5의 계수는 ${}_{10}C_5$
이므로 $(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^5의 계수는
${}_5C_5+{}_6C_5+{}_7C_5+{}_8C_5+{}_9C_5+{}_{10}C_5$
$={}_6C_6+{}_6C_5+{}_7C_5+{}_8C_5+{}_9C_5+{}_{10}C_5$ $(\because {}_5C_5={}_6C_6=1)$
$={}_7C_6+{}_7C_5+{}_8C_5+{}_9C_5+{}_{10}C_5$
$={}_8C_6+{}_8C_5+{}_9C_5+{}_{10}C_5$
$={}_9C_6+{}_9C_5+{}_{10}C_5$
$={}_{10}C_6+{}_{10}C_5$
$={}_{11}C_6$
답 ④

13 $({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2+\cdots+({}_{10}C_{10})^2$
$={}_{10}C_0\times{}_{10}C_0+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_1+{}_{10}C_2\times{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_{10}$
$={}_{10}C_0\times{}_{10}C_{10}+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_9+{}_{10}C_2\times{}_{10}C_8+\cdots+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_0$ ……㉠
이때 $(1+x)^{10}(1+x)^{10}$의 전개식의 일반항은
${}_{10}C_r1^{10-r}x^r\times{}_{10}C_s1^{10-s}x^s={}_{10}C_r\times{}_{10}C_sx^{r+s}$
$(r, s=0, 1, 2, \dots, 10)$
이므로 x^{10}항은 $r+s=10$일 때이고, 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는
$(0, 10), (1, 9), (2, 8), \dots, (10, 0)$
이므로 x^{10}의 계수는
${}_{10}C_0\times{}_{10}C_{10}+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_9+{}_{10}C_2\times{}_{10}C_8+\cdots+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_0$
이다. 따라서 ㉠은 $(1+x)^{10}(1+x)^{10}$, 즉 $(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^{10}의 계수와 같고, $(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ${}_{20}C_{10}$이므로
$({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2+\cdots+({}_{10}C_{10})^2$
$={}_{10}C_0\times{}_{10}C_{10}+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_9+{}_{10}C_2\times{}_{10}C_8+\cdots+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_0$
$={}_{20}C_{10}$
답 ②

14 $22^{55}=(20+2)^{55}$
$={}_{55}C_0\times 20^{55}+{}_{55}C_1\times 20^{54}\times 2^1+{}_{55}C_2\times 20^{53}\times 2^2$
$+\cdots+{}_{55}C_{53}\times 20^2\times 2^{53}+{}_{55}C_{54}\times 20^1\times 2^{54}+{}_{55}C_{55}\times 2^{55}$
$=20^2({}_{55}C_0\times 20^{53}+{}_{55}C_1\times 20^{52}\times 2^1+{}_{55}C_2\times 20^{51}\times 2^2$
$+\cdots+{}_{55}C_{53}\times 2^{53})+{}_{55}C_{54}\times 20^1\times 2^{54}+{}_{55}C_{55}\times 2^{55}$
이때 ${}_{55}C_{54}\times 20^1\times 2^{54}=55\times 20\times 2^{54}=11\times 20^2\times 2^{52}$이므로
${}_{55}C_{54}\times 20^1\times 2^{54}$은 400의 배수이다.
따라서 22^{55}을 400으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{55}C_{55}\times 2^{55}$, 즉 2^{55}을 400으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 368이다.
답 ⑤

15 ${}_{2k}C_0+{}_{2k}C_2+{}_{2k}C_4+\cdots+{}_{2k}C_{2k}=2^{2k-1}=512=2^9$에서
$2k-1=9$, $2k=10$ $\therefore k=5$
$\therefore {}_kC_0+{}_{k+1}C_1+{}_{k+2}C_2+{}_{k+3}C_3+{}_{k+4}C_4$
$={}_5C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+{}_8C_3+{}_9C_4$
$={}_6C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+{}_8C_3+{}_9C_4$ $(\because {}_5C_0={}_6C_0=1)$
$={}_7C_1+{}_7C_2+{}_8C_3+{}_9C_4$
$={}_8C_2+{}_8C_3+{}_9C_4$
$={}_9C_3+{}_9C_4$
$={}_{10}C_4=210$
답 ②

참고 ${}_{2k}C_0+{}_{2k}C_1+{}_{2k}C_2+\cdots+{}_{2k}C_{2k}=2^{2k}$ ……㉠
${}_{2k}C_0-{}_{2k}C_1+{}_{2k}C_2-\cdots+{}_{2k}C_{2k}=0$ ……㉡
㉠+㉡을 하면
$2({}_{2k}C_0+{}_{2k}C_2+{}_{2k}C_4+\cdots+{}_{2k}C_{2k})=2^{2k}$
$\therefore {}_{2k}C_0+{}_{2k}C_2+{}_{2k}C_4+\cdots+{}_{2k}C_{2k}=2^{2k-1}$
㉠−㉡을 하면
$2({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1})=2^{2k}$
$\therefore {}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}=2^{2k-1}$

16 조건 (가)에서 집합 A는 함수 f의 치역이고, 치역의 원소가 3개이므로 공역 X의 원소 중 치역의 원소 3개를 택하는 경우의 수는
${}_6C_3=20$
치역의 각 원소에 대응하는 정의역의 원소의 개수가 정해지면 조건 (나)에 의하여 치역의 원소에 대응하는 정의역의 원소가 정해지므로 함수 f가 정해진다.
치역의 각 원소에 대응하는 정의역 X의 원소의 개수를 각각 a, b, c라 하면
$a+b+c=6$ (a, b, c는 자연수)
이때
$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$ (A, B, C는 음이 아닌 정수)

이라 하면

$(A+1)+(B+1)+(C+1)=6$

$\therefore A+B+C=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 모든 순서쌍 (A, B, C)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$20\times10=200$ 답 ②

17 $103^7=(100+3)^7$

$={}_7\mathrm{C}_0\times100^7+{}_7\mathrm{C}_1\times100^6\times3^1+{}_7\mathrm{C}_2\times100^5\times3^2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_6\times100^1\times3^6+{}_7\mathrm{C}_7\times3^7$

${}_7\mathrm{C}_r\ (1\le r\le6)$는 7의 배수이므로

${}_7\mathrm{C}_1\times100^6\times3^1+{}_7\mathrm{C}_2\times100^5\times3^2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_6\times100^1\times3^6=7M$ (M은 자연수)

이라 하면

$103^7={}_7\mathrm{C}_0\times100^7+{}_7\mathrm{C}_1\times100^6\times3^1+{}_7\mathrm{C}_2\times100^5\times3^2+\cdots+{}_7\mathrm{C}_6\times100^1\times3^6+{}_7\mathrm{C}_7\times3^7$

$=100^7+7M+3^7$

$=100^7+7M+2187$

$=100^7+7M+(7\times312+3)$

$=100^7+7(M+312)+3$

오늘부터 100^7일 후가 수요일이므로 오늘부터 103^7일 후는 수요일의 3일 후인 토요일이다. 답 ③

18 크기가 모두 다른 주사위 3개를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 ${}_6\Pi_3=6^3=216$ …… ❶

세 주사위의 눈의 수의 합이 7 이상이어야 하므로 먼저 세 주사위의 눈의 수의 합이 6 이하인 경우의 수를 구해 보자.

세 주사위의 눈의 수를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c\le6$ (a, b, c는 자연수) ……㉠

이때 $a+b+c=n$이라 하면 $n=3, 4, 5, 6$이고

$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$ (A, B, C는 음이 아닌 정수)

이라 하면 $a+b+c=n$에서

$(A+1)+(B+1)+(C+1)=n$

$\therefore A+B+C=n-3$

즉 $A+B+C=0, 1, 2, 3$이고, 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수는 각각

$A+B+C=0$일 때, ${}_3\mathrm{H}_0={}_{3+0-1}\mathrm{C}_0={}_2\mathrm{C}_0=1$

$A+B+C=1$일 때, ${}_3\mathrm{H}_1={}_{3+1-1}\mathrm{C}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

$A+B+C=2$일 때, ${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$A+B+C=3$일 때, ${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

이므로 순서쌍 (A, B, C)의 개수의 합은

$1+3+6+10=20$ …… ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$216-20=196$ …… ❸

답 196

채점기준	배점
❶ 주사위 3개를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수 구하기	1
❷ 세 주사위의 눈의 수의 합이 6 이하인 경우의 수 구하기	4
❸ 세 주사위의 눈의 수의 합이 7 이상인 경우의 수 구하기	1

19 a가 홀수이고 $a+b+c$의 값이 홀수이므로 $b+c$의 값은 짝수이다. 즉 순서쌍 (a, b, c)는

(홀수, 홀수, 홀수) 또는 (홀수, 짝수, 짝수)

이다. …… ❶

(i) a, b, c가 모두 홀수일 때

조건 (다)에서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1, 3, 5, 7, 9에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$ …… ❷

(ii) a는 홀수, b, c는 짝수일 때

$a=1$일 때, 순서쌍 (b, c)의 개수는 2, 4, 6, 8, 10에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{H}_2={}_{5+2-1}\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

$a=3$일 때, 순서쌍 (b, c)의 개수는 4, 6, 8, 10에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

$a=5$일 때, 순서쌍 (b, c)의 개수는 6, 8, 10에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$a=7$일 때, 순서쌍 (b, c)의 개수는 8, 10에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_2\mathrm{H}_2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

$a=9$일 때, 순서쌍 (b, c)는 $(10, 10)$의 1개

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$15+10+6+3+1=35$ …… ❸

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$35+35=70$ …… ❹

답 70

채점기준	배점
❶ 세 수의 합이 홀수인 경우 구하기	1
❷ a, b, c가 모두 홀수인 경우의 수 구하기	2
❸ a는 홀수, b, c는 짝수인 경우의 수 구하기	3
❹ 순서쌍 (a, b, c)의 개수 구하기	1

다른풀이 (ii)에서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2$

$={}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2$ ($\because {}_2\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_3=1$)

$={}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2$

$={}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2$

$={}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_2$

$={}_7\mathrm{C}_3=35$

실전 문제 | 2회

p.52~55

01 4개의 접시에 담을 초콜릿의 개수를 각각 x, y, z, w라 하자.

(i) 접시의 일부만 사용해도 되는 경우의 수는

$x+y+z+w=10$ (x, y, z, w는 음이 아닌 정수)

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수와 같으므로

${}_4H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286$

$\therefore a=286$

(ii) 접시를 모두 사용하는 경우의 수는

$x+y+z+w=10$ (x, y, z, w는 자연수)

을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수와 같다.

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$ (X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수)이라 하면

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)=10$

$\therefore X+Y+Z+W=6$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는

${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

$\therefore b=84$

(i), (ii)에서 $a-b=286-84=202$ 답 ①

02 커피, 녹차, 오렌지 주스 중에서 n잔을 주문하는 모든 경우의 수가 120이므로 ${}_3H_n=120$

이때 ${}_3H_n={}_{3+n-1}C_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$이므로

$\frac{(n+2)(n+1)}{2}=120$, $(n+2)(n+1)=240$

$n^2+3n-238=0$, $(n+17)(n-14)=0$

$\therefore n=14$ ($\because$ n은 자연수)

14잔을 주문할 때 커피, 녹차, 오렌지 주스가 모두 포함되는 경우의 수는 먼저 커피, 녹차, 오렌지 주스를 한 잔씩 주문한 후 커피, 녹차, 오렌지 주스 중에서 남은 11잔을 주문하는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_{11}={}_{3+11-1}C_{11}={}_{13}C_{11}={}_{13}C_2=78$ 답 ③

03 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 5개를 택할 때

(i) 숫자 1을 0개 택하는 경우의 수

2, 3, 4, 5에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

(ii) 숫자 1을 1개 택하는 경우의 수

2, 3, 4, 5에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_4={}_{4+4-1}C_3={}_7C_3=35$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$56+35=91$ 답 ⑤

04 $3\le|a|\le|b|\le|c|\le7$을 만족시키는 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는 3, 4, 5, 6, 7에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$

이때 a, b, c는 양의 정수 또는 음의 정수이므로 구하는 경우의 수는

$35\times2\times2\times2=280$ 답 ③

05 x, y는 짝수인 자연수, z는 홀수인 자연수이므로

$x=2X+2$, $y=2Y+2$, $z=2Z+1$

(X, Y, Z는 음이 아닌 정수)

이라 하면 $x+y+z=21$에서

$(2X+2)+(2Y+2)+(2Z+1)=21$

$2X+2Y+2Z=16$ $\therefore X+Y+Z=8$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 45이다. 답 ③

06 $x+y+z+3w=7$에서

(i) $w=0$일 때, $x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

(ii) $w=1$일 때, $x+y+z=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_2={}_6C_2=15$

(iii) $w=2$일 때, $x+y+z=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$36+15+3=54$ 답 ①

07 세 학생이 받은 축구공의 개수를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=12$ (a, b, c는 1 이상 6 이하인 자연수)

이어야 한다.

(i) $a+b+c=12$를 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수

$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$ (A, B, C는 음이 아닌 정수)

이라 하면 $a+b+c=12$에서

$(A+1)+(B+1)+(C+1)=12$

$\therefore A+B+C=9$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수는

${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

(ii) $a+b+c=12$일 때, 자연수 a, b, c 중 하나가 7 이상인 경우의 수

a, b, c 중 하나를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

임의로 $a\ge7$이라 하고

$a=A+7$, $b=B+1$, $c=C+1$ (A, B, C는 음이 아닌 정수)

이라 하면 $a+b+c=12$에서

$(A+7)+(B+1)+(C+1)=12$

$\therefore A+B+C=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 a, b, c 중 하나가 7 이상인 경우의 수는

$3\times10=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$55-30=25$

답 ②

08 조건 (나)에서 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$가 모두 홀수이거나 모두 짝수이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다. 그러므로

정의역 X의 원소 중 홀수 1, 3, 5에 대하여

$f(1)\le f(3)\le f(5)$

정의역 X의 원소 중 짝수 2, 4, 6에 대하여

$f(2)\le f(4)\le f(6)$

이다. 이때 조건 (가)에서 x가 홀수이면 $f(x)$는 홀수이고 x가 짝수이면 $f(x)$도 짝수이므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 1, 3, 5 중에서 정해진다.

따라서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 3, 5에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

같은 방법으로 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값은 2, 4, 6 중에서 정해지므로 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수도 10

따라서 구하는 함수의 개수는

$10\times10=100$

답 ④

09 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r2^{6-r}x^{6-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$={}_6C_r2^{6-r}(-1)^r\frac{x^{6-r}}{x^r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 6)$$

x^4항은 $\frac{x^{6-r}}{x^r}=x^4$일 때이므로

$(6-r)-r=4$, $-2r=-2$ $\quad\therefore r=1$

따라서 x^4의 계수는 ${}_6C_1\times2^5\times(-1)^1=-192$ $\quad\therefore a=-192$

상수항은 $\frac{x^{6-r}}{x^r}=1$일 때이므로

$6-r=r$, $-2r=-6$ $\quad\therefore r=3$

따라서 상수항은 ${}_6C_3\times2^3\times(-1)^3=-160$ $\quad\therefore b=-160$

$\therefore a-b=-192-(-160)=-32$

답 ①

10 조건 (나)에서 집합 Y는 함수 f의 치역이므로 집합 Y가 될 수 있는 집합은

$\{2,\ 4\}$, $\{0,\ 2,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

치역의 각 원소에 대응하는 정의역의 원소의 개수가 정해지면 조건 (가)에 의하여 치역의 원소에 대응하는 정의역의 원소가 정해지므로 함수가 정해진다.

(i) 치역이 $Y=\{2,\ 4\}$인 함수 f의 개수

Y의 원소 2, 4에 대응하는 정의역 X의 원소의 개수를 각각 a, b (a, b는 자연수)라 하면 $a+b=5$

$a=A+1$, $b=B+1$ (A, B는 음이 아닌 정수)이라 하면

$(A+1)+(B+1)=5$ $\quad\therefore A+B=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

즉 함수 f의 개수는 4이다.

(ii) 치역이 $Y=\{0,\ 2,\ 4\}$인 함수 f의 개수

Y의 원소 0, 2, 4에 대응하는 정의역 X의 원소의 개수를 각각 a, b, c (a, b, c는 자연수)라 하면

$a+b+c=5$

$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$ (A, B, C는 음이 아닌 정수)이라 하면

$(A+1)+(B+1)+(C+1)=5$

$\therefore A+B+C=2$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$의 개수는

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

즉 함수 f의 개수는 6이다.

(iii) 치역이 $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$인 함수 f의 개수

(ii)와 같은 방법으로 6이다.

(iv) 치역이 $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$인 함수 f의 개수

Y의 원소 0, 1, 2, 3에 대응하는 정의역 X의 원소의 개수를 각각 a, b, c, d (a, b, c, d는 자연수)라 하면

$a+b+c+d=5$

$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$, $d=D+1$ (A, B, C, D는 음이 아닌 정수)라 하면

$(A+1)+(B+1)+(C+1)+(D+1)=5$

$\therefore A+B+C+D=1$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C, D의 순서쌍 $(A,\ B,\ C,\ D)$의 개수는

${}_4H_1={}_{4+1-1}C_1={}_4C_1=4$

즉 함수 f의 개수는 4이다.

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는

$4+6+6+4=20$

답 ③

11 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0=2^n-1$

따라서 $500<{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n<3000$에서

$500<2^n-1<3000$

$\therefore 501<2^n<3001$ $\quad\cdots\cdots$㉠

이때 $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n은 9, 10, 11

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$9+10+11=30$

답 ③

12 n^{11}을 11로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$n^{11}=11M+2$ (M은 자연수)라 하고

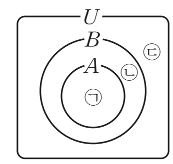
$(n+1)^{11}$

$={}_{11}C_0\times n^{11}+{}_{11}C_1\times n^{10}\times 1^1+{}_{11}C_2\times n^9\times 1^2$
$+\cdots+{}_{11}C_{10}\times n^1\times 1^{10}+{}_{11}C_{11}\times 1^{11}$
$={}_{11}C_0\times n^{11}+{}_{11}C_1\times n^{10}+{}_{11}C_2\times n^9+\cdots+{}_{11}C_{10}\times n+{}_{11}C_{11}$
에서 ${}_{11}C_r$ $(1\le r\le 10)$가 11의 배수이므로
${}_{11}C_1\times n^{10}+{}_{11}C_2\times n^9+{}_{11}C_3\times n^8+\cdots+{}_{11}C_{10}\times n=11K$
(K는 자연수)
라 하면
$(n+1)^{11}={}_{11}C_0\times n^{11}+{}_{11}C_1\times n^{10}+{}_{11}C_2\times n^9$
$+\cdots+{}_{11}C_{10}\times n+{}_{11}C_{11}$
$={}_{11}C_0 n^{11}+11K+{}_{11}C_{11}$
$=11K+n^{11}+1=11K+(11M+2)+1$
$=11(K+M)+3$
따라서 $(n+1)^{11}$을 11로 나누었을 때의 나머지는 3이다. 답 ③

13 $(\sqrt{3}x+\sqrt{2})^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r(\sqrt{3}x)^{6-r}(\sqrt{2})^r={}_6C_r(\sqrt{3})^{6-r}(\sqrt{2})^r x^{6-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 6)$
계수가 유리수가 되려면 $6-r$와 r가 모두 짝수가 되어야 하므로
$r=0,\ 2,\ 4,\ 6$
$r=0$일 때, x^6의 계수는 ${}_6C_0(\sqrt{3})^6(\sqrt{2})^0=27$
$r=2$일 때, x^4의 계수는 ${}_6C_2(\sqrt{3})^4(\sqrt{2})^2=15\times 9\times 2=270$
$r=4$일 때, x^2의 계수는 ${}_6C_4(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^4=15\times 3\times 4=180$
$r=6$일 때, 상수항은 ${}_6C_6(\sqrt{3})^0(\sqrt{2})^6=8$
따라서 계수가 유리수인 모든 항의 계수의 합은
$27+270+180+8=485$ 답 ⑤

14 ㄱ. ${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_6C_6=2^6$이므로
${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_6C_6=2^6-{}_6C_0=64-1=63$ (참)
ㄴ. ${}_{20}C_0-{}_{20}C_1+{}_{20}C_2-\cdots-{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{20}=0$이므로
${}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-\cdots+{}_{20}C_{19}={}_{20}C_0+{}_{20}C_{20}$
$=1+1=2$ (거짓)
ㄷ. ${}_{16}C_1+{}_{16}C_5+{}_{16}C_9+{}_{16}C_{13}={}_{16}C_{15}+{}_{16}C_{11}+{}_{16}C_7+{}_{16}C_3$이고
${}_{16}C_1+{}_{16}C_3+{}_{16}C_5+\cdots+{}_{16}C_{15}=2^{16-1}=2^{15}$이므로
${}_{16}C_1+{}_{16}C_5+{}_{16}C_9+{}_{16}C_{13}=\dfrac{1}{2}\times 2^{15}=2^{14}$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다. 답 ③
참고 ㄷ에서 ${}_{16}C_0+{}_{16}C_1+{}_{16}C_2+\cdots+{}_{16}C_{16}=2^{16}$ ⋯⋯㉠
${}_{16}C_0-{}_{16}C_1+{}_{16}C_2-\cdots+{}_{16}C_{16}=0$ ⋯⋯㉡
㉠+㉡을 하면
$2({}_{16}C_0+{}_{16}C_2+{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{16})=2^{16}$
$\therefore\ {}_{16}C_0+{}_{16}C_2+{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{16}=2^{15}$
㉠−㉡을 하면
$2({}_{16}C_1+{}_{16}C_3+{}_{16}C_5+\cdots+{}_{16}C_{15})=2^{16}$
$\therefore\ {}_{16}C_1+{}_{16}C_3+{}_{16}C_5+\cdots+{}_{16}C_{15}=2^{15}$

15 집합 B의 원소의 개수를 m $(0\le m\le 7)$이라 하면
원소의 개수가 m인 집합 B의 개수는 1, 2, 3, ..., 7에서 서로 다른 m개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_7C_m$
집합 A는 집합 B의 부분집합이므로 각 집합 B마다 집합 A의 개수는 2^m
따라서 두 집합 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는
${}_7C_m\times 2^m$
이때 $m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 7$이므로 구하는 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는
${}_7C_0\times 2^0+{}_7C_1\times 2^1+{}_7C_2\times 2^2+\cdots+{}_7C_7\times 2^7$
$={}_7C_0\times 1^7\times 2^0+{}_7C_1\times 1^6\times 2^1+{}_7C_2\times 1^5\times 2^2+\cdots+{}_7C_7\times 1^0\times 2^7$
$=(1+2)^7=3^7$ 답 ⑤
다른풀이 세 집합 U, A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 원소 1, 2, 3, ⋯, 7이 각각 세 영역 ㉠, ㉡, ㉢ 중 하나에 위치하면 된다.



따라서 구하는 경우의 수는 ㉠, ㉡, ㉢에서 7개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_7=3^7$

16 x, y, z, w가 자연수이므로
$x=X+1,\ y=Y+1,\ z=Z+1,\ w=W+1$
(X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수)
이라 하면 $x+y+z+w=9$에서
$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)=9$
$\therefore\ X+Y+Z+W=5$
이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z,\ W)$의 개수는
${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$
이때 $z=w$라 하면 $Z=W$이므로
$X+Y+Z+W=5$에서 $X+Y+2Z=5$
(i) $Z=0$일 때, $X+Y=5$
이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y의 순서쌍 $(X,\ Y)$의 개수는 ${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$
(ii) $Z=1$일 때, $X+Y=3$
이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y의 순서쌍 $(X,\ Y)$의 개수는 ${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$
(iii) $Z=2$일 때, $X+Y=1$
이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y의 순서쌍 $(X,\ Y)$의 개수는 ${}_2H_1={}_{2+1-1}C_1={}_2C_1=2$
(i), (ii), (iii)에서 $z=w$를 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는
$6+4+2=12$
따라서 구하는 순서쌍의 개수는
$56-12=44$ 답 ⑤

17 ㄱ. $(1+x)^{12}$의 전개식의 일반항은
${}_{12}C_r 1^{12-r}x^r={}_{12}C_r x^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 12)$
x^3의 계수는 ${}_{12}C_3$, x^9의 계수는 ${}_{12}C_9$이고 ${}_{12}C_3={}_{12}C_9$이므로 x^3의 계수와 x^9의 계수는 같다. (참)

ㄴ. $(1+x)^{24}$의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은
$_{24}C_0+{}_{24}C_1+{}_{24}C_2+\cdots+{}_{24}C_{24}=2^{24}$
$(1+x)^{12}$의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은
$_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{12}C_{12}=2^{12}$
즉 $(1+x)^{24}$의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은 $(1+x)^{12}$의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합의 2^{12}배이다. (거짓)

ㄷ. $({}_{12}C_0)^2+({}_{12}C_1)^2+({}_{12}C_2)^2+\cdots+({}_{12}C_{12})^2$
$={}_{12}C_0\times{}_{12}C_0+{}_{12}C_1\times{}_{12}C_1+{}_{12}C_2\times{}_{12}C_2+\cdots+{}_{12}C_{12}\times{}_{12}C_{12}$
$={}_{12}C_0\times{}_{12}C_{12}+{}_{12}C_1\times{}_{12}C_{11}+{}_{12}C_2\times{}_{12}C_{10}+\cdots+{}_{12}C_{12}\times{}_{12}C_0$ ……㉠
한편 $(1+x)^{12}(1+x)^{12}$의 전개식의 일반항은
${}_{12}C_r1^{12-r}x^r\times{}_{12}C_s1^{12-s}x^s={}_{12}C_r\times{}_{12}C_sx^{r+s}$
$(r,\ s=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 12)$
x^{12}항은 $r+s=12$일 때이고, 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 $(r,\ s)$는
$(0,\ 12),\ (1,\ 11),\ (2,\ 10),\ \dots,\ (12,\ 0)$
이므로 x^{12}의 계수는
${}_{12}C_0\times{}_{12}C_{12}+{}_{12}C_1\times{}_{12}C_{11}+{}_{12}C_2\times{}_{12}C_{10}+\cdots+{}_{12}C_{12}\times{}_{12}C_0$
따라서 ㉠은 $(1+x)^{12}(1+x)^{12}$, 즉 $(1+x)^{24}$의 전개식에서 x^{12}의 계수와 같고, $(1+x)^{24}$의 전개식에서 x^{12}의 계수는 ${}_{24}C_{12}$이므로
$({}_{12}C_0)^2+({}_{12}C_1)^2+({}_{12}C_2)^2+\cdots+({}_{12}C_{12})^2$
$={}_{12}C_0\times{}_{12}C_{12}+{}_{12}C_1\times{}_{12}C_{11}+{}_{12}C_2\times{}_{12}C_{10}+\cdots+{}_{12}C_{12}\times{}_{12}C_0$
$={}_{24}C_{12}$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

18 상자에서 꺼낸 빨간색 공, 파란색 공, 노란색 공의 개수를 각각 x, y, z라 하면
$x+y+z=7\ (0\le x\le 4,\ 0\le y\le 5,\ 0\le z\le 7)$
$x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는
${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$ …… ❶
그런데 $0\le x\le 4$, $0\le y\le 5$이므로
(i) $x\ge 5$일 때
$x-5\ge 0$이므로 $X=x-5$라 하면 X는 음이 아닌 정수이고, $x=X+5$이므로 $x+y+z=7$에서
$(X+5)+y+z=7$
$\therefore X+y+z=2$
이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, y, z의 순서쌍 $(X,\ y,\ z)$의 개수는
${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$ …… ❷
(ii) $y\ge 6$일 때
$y-6\ge 0$이므로 $Y=y-6$이라 하면 Y는 음이 아닌 정수이고, $y=Y+6$이므로 $x+y+z=7$에서
$x+(Y+6)+z=7$
$\therefore x+Y+z=1$
이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, Y, z의 순서쌍 $(x,\ Y,\ z)$의 개수는
${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$ …… ❸
(iii) $x\ge 5$, $y\ge 6$일 때
$x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는 존재하지 않는다. …… ❹
(i), (ii), (iii)에서 $x+y+z=7$을 만족시키고 $0\le x\le 4$, $0\le y\le 5$인 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는
$36-(6+3)=27$
따라서 구하는 경우의 수는 27이다. …… ❺

답 27

채점기준	배점
❶ 꺼낸 빨간색 공, 파란색 공, 노란색 공의 개수를 각각 x, y, z로 놓고 $x+y+z=7$의 음이 아닌 정수인 해의 개수 구하기	1
❷ $x\ge 5$일 때 $X=x-5$로 놓고 $X+y+z=2$의 음이 아닌 정수인 해의 개수 구하기	2
❸ $y\ge 6$일 때 $Y=y-6$으로 놓고 $x+Y+z=1$의 음이 아닌 정수인 해의 개수 구하기	2
❹ $x\ge 5$, $y\ge 6$일 때 $x+y+z=7$의 정수 해가 존재하지 않음을 설명하기	1
❺ 7개의 공을 꺼내는 경우의 수 구하기	1

19 조건 (가)에서 $f(3)=1$ 또는 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=5$
(i) $f(3)=1$일 때
조건 (나)에서 $1\le f(2)\le f(1)$
조건 (다)에서 $1\le f(4)\le f(5)$
따라서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_6H_2={}_{6+2-1}C_2={}_7C_2=21$
같은 방법으로 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수도
${}_6H_2={}_{6+2-1}C_2={}_7C_2=21$
따라서 함수 f의 개수는
$21\times 21=441$ …… ❶
(ii) $f(3)=3$일 때
조건 (나)에서 $3\le f(2)\le f(1)$
조건 (다)에서 $3\le f(4)\le f(5)$
따라서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 Y의 원소 3, 4, 5, 6에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$
같은 방법으로 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수도
${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$
따라서 함수 f의 개수는
$10\times 10=100$ …… ❷
(iii) $f(3)=5$일 때
조건 (나)에서 $5\le f(2)\le f(1)$
조건 (다)에서 $5\le f(4)\le f(5)$
따라서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 Y의 원소 5, 6에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$
같은 방법으로 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수도
${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

따라서 함수 f의 개수는

$3\times3=9$ …… ❸

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는

$441+100+9=550$ …… ❹

답 550

채점기준	배점
❶ $f(3)=1$인 함수의 개수 구하기	2
❷ $f(3)=3$인 함수의 개수 구하기	2
❸ $f(3)=5$인 함수의 개수 구하기	2
❹ 함수의 개수 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.56~58

1 세 명 중 한 명을 택하여 3가지 색의 카드를 모두 주는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

남은 파란색 카드 1장을 세 명 중 한 명에게 주는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

남은 빨간색 카드 3장을 세 명에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3\times10=90$

답 ③

2 3명 중 3가지 색의 카드를 모두 받을 1명을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

남은 빨간색 카드 3장, 파란색 카드 1장, 노란색 카드 1장을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_3H_3\times{}_3H_1\times{}_3H_1&={}_{3+3-1}C_3\times{}_{3+1-1}C_1\times{}_{3+1-1}C_1\\&={}_5C_3\times{}_3C_1\times{}_3C_1\\&=10\times3\times3\\&=90\end{aligned}$$

이때 3가지 색의 카드를 모두 받은 학생을 제외하고 남은 2명 중 1명도 3가지 색의 카드를 모두 받는 경우를 제외해야 한다.

남은 2명 중 1명이 3가지 색의 카드를 모두 받는 경우의 수는

남은 2명 중 3가지 색의 카드를 모두 받을 1명을 택하는 경우의 수가 ${}_2C_1=2$

남은 빨간색 카드 2장을 3명에게 나누어 주는 경우의 수가

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

이므로 $2\times6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times(90-12)=234$

답 ②

3 조건 (나)를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(3, 2)$, $(2, 3)$의 2개

또 $a+b=5$이므로 조건 (가)에서 $c+d+e=7$

$c=C+1$, $d=D+1$, $e=E+1$ (C, D, E는 음이 아닌 정수)

이라 하면 $c+d+e=7$에서

$(C+1)+(D+1)+(E+1)=7$

$\therefore C+D+E=4$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 C, D, E의 순서쌍 (C, D, E)의 개수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$2\times15=30$

답 ①

4 조건 (가), (나), (다)를 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는 $(1, 2, 4)$ 또는 $(1, 3, 9)$ 또는 $(2, 4, 8)$

(i) $a=1$, $b=2$, $c=4$일 때

$a+b+c=1+2+4=7$이므로 $a+b+c+d+e=17$에서

$d+e=10$

d, e는 자연수이므로

$d=D+1$, $e=E+1$ (D, E는 음이 아닌 정수)

이라 하면

$(D+1)+(E+1)=10$ $\quad\therefore D+E=8$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 D, E의 순서쌍 (D, E)의 개수는

${}_2H_8={}_{2+8-1}C_8={}_9C_8={}_9C_1=9$

즉 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 9이다.

(ii) $a=1$, $b=3$, $c=9$일 때

$a+b+c=1+3+9=13$이므로 $a+b+c+d+e=17$에서

$d+e=4$

d, e는 자연수이므로

$d=D+1$, $e=E+1$ (D, E는 음이 아닌 정수)

이라 하면

$(D+1)+(E+1)=4$ $\quad\therefore D+E=2$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 D, E의 순서쌍 (D, E)의 개수는

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

즉 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 3이다.

(iii) $a=2$, $b=4$, $c=8$일 때

$a+b+c=2+4+8=14$이므로 $a+b+c+d+e=17$에서

$d+e=3$

d, e는 자연수이므로

$d=D+1$, $e=E+1$ (D, E는 음이 아닌 정수)

이라 하면

$(D+1)+(E+1)=3$ $\quad\therefore D+E=1$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 D, E의 순서쌍 (D, E)의 개수는

${}_2H_1={}_{2+1-1}C_1={}_2C_1=2$

즉 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 2이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$9+3+2=14$

답 ②

5 $(x^2+1)^4$, 즉 $(1+x^2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r 1^{4-r}(x^2)^r={}_4C_r x^{2r}$ $(r=0, 1, 2, 3, 4)$

$(x^3+1)^n$, 즉 $(1+x^3)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_s 1^{n-s}(x^3)^s={}_nC_s x^{3s}$ $(s=0, 1, 2, \dots, n)$

따라서 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^{2r}\times{}_nC_s x^{3s}={}_4C_r\times{}_nC_s x^{2r+3s}$

x^5항은 $2r+3s=5$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(1, 1)$

이때 x^5의 계수는 ${}_4C_1\times{}_nC_1$이므로

${}_4C_1\times{}_nC_1=12$

$4n=12$ $\therefore n=3$

한편 x^6항은 $2r+3s=6$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(3, 0)$, $(0, 2)$

$r=3$, $s=0$일 때, x^6의 계수는 ${}_4C_3\times{}_3C_0=4$

$r=0$, $s=2$일 때, x^6의 계수는 ${}_4C_0\times{}_3C_2=3$

따라서 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^6의 계수는

$4+3=7$ 답 ②

6 다항식 $(x^2-1)^m(x^3+1)^n$의 최고차항은 x^{2m+3n}이고 최고차항의 차수가 15이므로

$2m+3n=15$

이를 만족시키는 2 이상의 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(3, 3)$

$(x^2-1)^3$, 즉 $(-1+x^2)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r(-1)^{3-r}(x^2)^r={}_3C_r(-1)^{3-r}x^{2r}$ $(r=0, 1, 2, 3)$

$(x^3+1)^3$, 즉 $(1+x^3)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_s 1^{3-s}(x^3)^s={}_3C_s x^{3s}$ $(s=0, 1, 2, 3)$

따라서 $(x^2-1)^3(x^3+1)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r(-1)^{3-r}x^{2r}\times{}_3C_s x^{3s}={}_3C_r\times{}_3C_s(-1)^{3-r}x^{2r+3s}$

x^9항은 $2r+3s=9$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(0, 3)$, $(3, 1)$

$r=0$, $s=3$일 때, x^9의 계수는 ${}_3C_0\times{}_3C_3\times(-1)^3=-1$

$r=3$, $s=1$일 때, x^9의 계수는 ${}_3C_3\times{}_3C_1\times(-1)^0=3$

따라서 $(x^2-1)^3(x^3+1)^3$의 전개식에서 x^9의 계수는

$-1+3=2$ 답 ③

Ⅱ 확률

1 확률의 개념과 활용

교과서 예제 p.61

01 답 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

(2) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$

(3) $\{1, 2, 4\}$

02 답 (1) $\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

(2) $\{(H, H)\}$, $\{(H, T)\}$, $\{(T, H)\}$, $\{(T, T)\}$

(3) $\{(H, H), (T, T)\}$

03 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$A=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B=\{5, 10\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$

(4) $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\{5\}$, $C\cap A=\{2, 3\}$

이므로 두 사건이 서로 배반사건인 것은 A와 B이다.

답 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$

(2) $\{2, 3\}$

(3) $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

(4) A와 B

04 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 집합을 표본공간 S라 하면

$n(S)=6\times6\times6=216$

나오는 세 눈의 수가 모두 같은 사건을 A라 하면

$A=\{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)\}$

이므로 $n(A)=6$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{36}$ 답 $\dfrac{1}{36}$

05 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 집합을 표본공간 S라 하면

$n(S)=6\times6=36$

나오는 두 눈의 수의 합이 10인 사건을 A라 하면

$A=\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$

이므로 $n(A)=3$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$ 답 $\dfrac{1}{12}$

06 전체 8명 중에서 대회에 나갈 3명을 뽑는 모든 경우의 집합을 표본공간 S라 하면

$n(S)={}_8C_3=56$

1학년 학생이 2명, 2학년 학생이 1명 뽑히는 사건을 A라 하면

$n(A)={}_3C_2\times{}_5C_1=3\times5=15$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{15}{56}$ 답 $\frac{15}{56}$

07 2학년 전체 학생의 수는

$15+27+33+24+21=120$

일본어 수업을 신청한 학생은 24명이므로 구하는 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

08 (1) 절대로 검은 공 2개를 꺼낼 수 없으므로 구하는 확률은 0이다.

(2) 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공은 반드시 나오므로 구하는 확률은 1이다.

답 (1) 0 (2) 1

09 세균 A에 항체가 있는 사람을 택하는 사건을 A, 세균 B에 항체가 있는 사람을 택하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이고

$P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{2}{9}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{2}{9}-\frac{1}{36}=\frac{13}{36}$ 답 $\frac{13}{36}$

10 표본공간을 S라 하면 $n(S)=80$

꺼낸 구슬에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이고

$n(A)=26$, $n(B)=20$, $n(A\cap B)=6$

$\therefore P(A)=\frac{26}{80}$, $P(B)=\frac{20}{80}$, $P(A\cap B)=\frac{6}{80}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{26}{80}+\frac{20}{80}-\frac{6}{80}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

참고 $A\cap B$는 꺼낸 구슬에 적힌 수가 12의 배수인 사건이다.

11 표본공간을 S라 하면 $n(S)=2\times2\times2=8$

적어도 한 번은 뒷면이 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 세 번 모두 앞면이 나오는 사건이므로 $P(A^C)=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ 답 $\frac{7}{8}$

12 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 집합을 표본공간 S라 하면

$n(S)=6\times6=36$

나오는 두 눈의 수의 합이 3 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 나오는 두 눈의 수의 합이 2 이하인 사건이다.

나오는 두 눈의 수의 합이 2 이하인 경우를 순서쌍으로 나타내면 (1, 1)의 1가지이므로 $n(A^C)=1$

$\therefore P(A^C)=\frac{n(A^C)}{n(S)}=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$ 답 $\frac{35}{36}$

기출 Best | 1회

p.62~65

01 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 2, 3, 6\}$, $D=\{1, 4\}$ 이므로

$A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\{2, 6\}$,

$B\cap C=\{2, 3\}$, $B\cap D=\varnothing$, $C\cap D=\{1\}$

따라서 서로 배반사건인 것은 B와 D이다. 답 ④

02 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

나오는 두 눈의 수의 합이 4 이하가 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(i) 나오는 두 눈의 수의 합이 4인 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(ii) 나오는 두 눈의 수의 합이 3인 경우는

(1, 2), (2, 1)의 2가지

(iii) 나오는 두 눈의 수의 합이 2인 경우는

(1, 1)의 1가지

(i), (ii), (iii)에서 나오는 두 눈의 수의 합이 4 이하가 되는 경우의 수는 $3+2+1=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ 답 ②

03 7명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $7!$

$\boxed{여}$ $\boxed{남}$ $\boxed{여}$ $\boxed{남}$ $\boxed{여}$ $\boxed{남}$ $\boxed{여}$와 같이 세우는 경우의 수는 $4!\times3!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4!\times3!}{7!}=\frac{1}{35}$ 답 ①

04 2명의 손님이 4종류의 음료 중 한 잔씩 주문하는 모든 경우의 수는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

2명의 손님이 4종류의 음료 중 서로 다른 음료를 한 잔씩 주문하는 경우의 수는 ${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$ 답 ⑤

05 6개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3! \times 2!}=60$

양 끝에 숫자 1이 적힌 카드를 놓고, 그 사이에 숫자 1, 2, 2, 3이 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ 답 ④

06 8명의 학생 중에서 4명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_{8}\mathrm{C}_{4}=70$

A는 대표로 뽑히고 B는 대표로 뽑히지 않는 경우의 수는 A를 대표로 뽑고, A, B를 제외한 6명의 학생 중에서 나머지 3명의 대표를 뽑는 경우의 수이므로

${}_{6}\mathrm{C}_{3}=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$ 답 ①

07 9명의 유권자가 네 명의 후보 A, B, C, D 중 한 명에게 무기명으로 투표하는 경우의 수는

${}_{4}\mathrm{H}_{9}={}_{4+9-1}\mathrm{C}_{9}={}_{12}\mathrm{C}_{9}={}_{12}\mathrm{C}_{3}=220$

후보 A가 한 표를 얻고, 나머지 3명의 후보가 총 8표를 얻는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{H}_{8}={}_{3+8-1}\mathrm{C}_{8}={}_{10}\mathrm{C}_{8}={}_{10}\mathrm{C}_{2}=45$

따라서 구하는 확률은

$\frac{45}{220}=\frac{9}{44}$ 답 ①

08 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

${}_{4}\Pi_{3}=4^3=64$

$f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_{4}\mathrm{H}_{3}={}_{4+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{6}\mathrm{C}_{3}=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$ 답 ②

09 전체 응답자 수는

$65+145+247+93+25=575$

매우 불만족한 사람의 수는 25

따라서 구하는 확률은

$\frac{25}{575}=\frac{1}{23}$ 답 ③

10 ㄱ. $(A\cap B)\subset A$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\le \mathrm{P}(A)$ (참)

ㄴ. $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$, $0\le \mathrm{P}(B)\le 1$이므로

$0\le \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le 2$ (참)

ㄷ. $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$이므로 $0\le \mathrm{P}(A\cup B)\le 1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

11 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

이때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{59}{60}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\frac{59}{60}=\frac{1}{60}\end{aligned}$$

답 ①

12 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)\ \left(\because \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)\right)\\&=\frac{5}{4}\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$이므로

$\frac{5}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$ 답 ②

13 연극을 관람한 적이 있는 학생을 택하는 사건을 A, 뮤지컬을 관람한 적이 있는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{18}{30}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{30}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{30}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{18}{30}+\frac{10}{30}-\frac{4}{30}=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

연극과 뮤지컬 중 어느 것도 관람한 적이 없는 학생을 택하는 사건은 $A^C\cap B^C$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

답 ②

14 1이 적힌 카드가 나오는 사건을 A, 15가 적힌 카드가 나오는 사건을 B라 하면 1 또는 15가 적힌 카드가 나오는 사건은 $A\cup B$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{14}\mathrm{C}_{2}}{{}_{15}\mathrm{C}_{3}}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{14}\mathrm{C}_{2}}{{}_{15}\mathrm{C}_{3}}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_{13}\mathrm{C}_{1}}{{}_{15}\mathrm{C}_{3}}=\frac{1}{35}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$ 답 ①

15 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 모두 빨간 공인 사건을 A, 꺼낸 2개의 공이 모두 파란 공인 사건을 B라 하면 2개의 공이 모두 같은 색인 사건은 $A\cup B$이고

$P(A)=\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=\frac{5}{18}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{5}{18}=\frac{4}{9}$ 답 ②

16 9명의 선수 중 4명을 선발할 때 서부 대표 선수를 더 많이 선발하려면 동부 대표 선수 1명, 서부 대표 선수 3명을 선발하거나 서부 대표 선수만 4명을 선발해야 한다.

동부 대표 선수 1명, 서부 대표 선수 3명을 선발하는 사건을 A, 서부 대표 선수만 4명을 선발하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이고

$P(A)=\frac{{}_4C_1\times{}_5C_3}{{}_9C_4}=\frac{4\times10}{126}=\frac{20}{63}$

$P(B)=\frac{{}_5C_4}{{}_9C_4}=\frac{5}{126}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{20}{63}+\frac{5}{126}=\frac{5}{14}$ 답 ②

17 bottle에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

적어도 한쪽 끝에 자음이 오는 사건을 A라 하면 A^C는 양 끝에 모음이 오는 사건이다.

양 끝에 모음이 오는 경우의 수는 양 끝에 모음 o, e를 나열하고, 가운데에 남은 4개의 문자 b, t, t, l을 나열하는 경우의 수이므로

$2!\times\frac{4!}{2!}=24$

$\therefore P(A^C)=\frac{24}{360}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$ 답 ⑤

18 3명의 학생이 축구부, 야구부, 탁구부, 배구부, 농구부 중에서 각각 하나씩 택하여 가입하는 모든 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

3명의 학생 중 적어도 2명이 같은 운동부에 가입하는 사건을 A라 하면 A^C는 3명의 학생이 모두 다른 운동부에 가입하는 사건이다.

3명의 학생이 모두 다른 운동부에 가입하는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

이므로

$P(A^C)=\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{12}{25}=\frac{13}{25}$ 답 ④

19 10개의 제품 중에서 임의로 4개의 제품을 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

불량품이 2개 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 불량품이 1개 이하 나오는 사건이다.

불량품 4개를 포함한 10개의 제품 중에서 임의로 4개를 택할 때

불량품이 0개 나오는 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$,

불량품이 1개 나오는 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_6C_3=4\times20=80$

이므로 불량품이 1개 이하 나오는 경우의 수는

$15+80=95$

$\therefore P(A^C)=\frac{95}{210}=\frac{19}{42}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{19}{42}=\frac{23}{42}$ 답 ②

20 6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

세 자리 자연수가 560 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 561 이상인 사건이므로 56□ 꼴 또는 6□□ 꼴인 사건이다.

(i) 56□ 꼴의 자연수의 개수는 6

(ii) 6□□ 꼴의 자연수의 개수는 ${}_6\Pi_2=6^2=36$

(i), (ii)에서 561 이상인 세 자리 자연수의 개수는

$6+36=42$

$\therefore P(A^C)=\frac{42}{216}=\frac{7}{36}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{7}{36}=\frac{29}{36}$ 답 ⑤

기출 Best | 2회

p.66~69

01 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로 $A^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이고

$B=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{10\}$

ㄱ. $A\cap B=\{2\}$이므로 A와 B는 배반사건이 아니다.

ㄴ. $B\cap C=\varnothing$이므로 B와 C는 배반사건이다.
ㄷ. $A^C\cap B=\{3, 5, 7\}$이므로 A^C와 B는 배반사건이 아니다.
따라서 서로 배반사건인 것은 ㄴ이다. 답 ①

02 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
이차방정식 $x^2+ax+3b=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4\times1\times3b>0$, $a^2-12b>0$
$\therefore a^2>12b$ …… ㉠
$b=1$일 때, $a^2>12$이므로 $a=4, 5, 6$
$b=2$일 때, $a^2>24$이므로 $a=5, 6$
$b\geq3$일 때, $a^2>12b\geq36$, 즉 $a^2>36$이므로 a는 존재하지 않는다.
즉 ㉠을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 2)$의 5개이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{36}$이다. 답 ②

03 6명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $6!=720$
부모 사이에 4명 중 2명의 자녀가 앉는 경우의 수가 ${}_4P_2=12$,
부모가 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!=2$
이고 부모와 부모 사이에 앉은 자녀 2명을 합하여 총 4명을 1명으로 생각할 때, 3명이 일렬로 앉는 경우의 수가 $3!=6$이므로
6명이 일렬로 앉을 때, 부모 사이에 2명의 자녀가 앉는 경우의 수는
$12\times2\times6=144$
따라서 구하는 확률은
$\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$ 답 ②

참고 $\frac{{}_4P_2\times2!\times3!}{6!}=\frac{4\times3\times2}{6\times5\times4}=\frac{1}{5}$과 같이 계산하는 것이 쉽다.

04 X에서 Y로의 함수 f의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$
$f(1)=f(2)$에서 $f(1)$의 값을 정하면 $f(2)$의 값이 정해지므로
$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수를 구하면
${}_5\Pi_2=5^2=25$
따라서 구하는 확률은 $\frac{25}{125}=\frac{1}{5}$ 답 ⑤

05 빨간 공 2개, 파란 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times3!}=10$
빨간 공 2개를 한 묶음으로 생각하고, 파란 공 3개와 합하여 4개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ 답 ③

06 주머니 속에 있는 흰 공의 개수를 n(n은 자연수)이라 하면
15개의 공 중에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_{15}C_2$
주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 경우의 수는 ${}_nC_2$
꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률이 $\frac{1}{5}$이므로
$\frac{{}_nC_2}{{}_{15}C_2}=\frac{1}{5}$, 즉 $\frac{\frac{n(n-1)}{2\times1}}{\frac{15\times14}{2\times1}}=\frac{1}{5}$
$\frac{n(n-1)}{15\times14}=\frac{1}{5}$
$n(n-1)=42$, $n^2-n-42=0$, $(n+6)(n-7)=0$
$\therefore n=7$ ($\because$ n은 자연수) 답 ②

07 장미, 국화, 튤립, 백합을 섞어서 총 12송이의 꽃으로 이루어진 꽃다발의 종류의 수는
${}_4H_{12}={}_{4+12-1}C_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455$
꽃다발에 장미는 4송이 이상, 국화는 2송이 이상 포함되어 있는 경우의 수는 장미 4송이, 국화 2송이를 꽃다발에 넣은 후 장미, 국화, 튤립, 백합 중에서 나머지 6송이를 넣는 경우의 수이므로
${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$
따라서 구하는 확률은
$\frac{84}{455}=\frac{12}{65}$ 답 ③

참고 $\frac{{}_9C_3}{{}_{15}C_3}=\frac{\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}}{\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}}=\frac{12}{65}$와 같이 계산하면 간단하다.

08 방정식 $x+y+z+w=11$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는
${}_4H_{11}={}_{4+11-1}C_{11}={}_{14}C_{11}={}_{14}C_3=364$
한편 자연수 x, y, z, w에 대하여 $x=X+1$, $y=Y+1$,
$z=Z+1$, $w=W+1$ (X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수)라 하면
$x+y+z+w=11$에서
$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)=11$
$\therefore X+Y+Z+W=7$
이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는
${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$
즉 자연수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 120
따라서 구하는 확률은
$\frac{120}{364}=\frac{30}{91}$ 답 ①

09 빨간 공이 나올 확률이 $\frac{1}{4}$이므로
$\frac{20}{20+27+n}=\frac{1}{4}$, $47+n=80$
$\therefore n=33$ 답 ①

10 ① $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로 $\mathrm{P}(S)+\mathrm{P}(\varnothing)=1$ (참)

② $A\subset(A\cup B)$이므로 $\mathrm{P}(A)\le\mathrm{P}(A\cup B)$ (참)

③ $0\le\mathrm{P}(A)\le1$, $0\le\mathrm{P}(B)\le1$이므로

$0\le\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\le1$ (참)

④ [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 2, 3, 4\}$,

$B=\{4, 5\}$이면 $A\cup B=S$이지만

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}\neq1$ (거짓)

⑤ $A\cup A^C=S$이므로 $\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(S)=1$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

11 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{2}\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{2}\mathrm{P}(B)$, $\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{2}\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\mathrm{P}(B)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{9}$

답 ②

12 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $A\cap B=\varnothing$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$

또 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{5}$에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B-A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ ($\because \mathrm{P}(A\cap B)=0$)

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{11}{30}$

답 ②

참고 $A\cap B=\varnothing$이면 $A-B=A$, $B-A=B$

13 학생 A가 문제를 맞히는 사건을 A, 학생 B가 문제를 맞히는 사건을 B라 하면 둘 중 한 명만 문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

두 명 모두 문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{10}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\mathrm{P}(A\cup B)-\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{5}$

두 명 모두 문제를 틀리는 사건은 $A^C\cap B^C$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

답 ④

14 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

나오는 두 눈의 수의 곱이 9의 배수인 사건을 A, 12의 배수인 사건을 B라 하면 나오는 두 눈의 수의 곱이 9의 배수이거나 12의 배수인 사건은 $A\cup B$이다.

두 주사위의 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\}$

$B=\{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2), (4, 6), (6, 4), (6, 6)\}$

이때 두 주사위의 눈의 수의 곱이 9의 배수이면서 12의 배수인 경우는 9와 12의 최소공배수인 36의 배수인 경우이므로

$A\cap B=\{(6, 6)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{7}{36}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{9}+\frac{7}{36}-\frac{1}{36}=\frac{5}{18}$

답 ③

15 1, 2, 3, ..., 7이 각각 하나씩 적힌 7장의 카드에서 임의로 2장의 카드를 동시에 뽑는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_2=21$

두 카드에 적힌 수의 합의 최댓값은 $6+7=13$이므로 합이 6의 배수인 경우는 합이 6 또는 12인 경우이다.

두 카드에 적힌 수의 합이 6인 사건을 A, 12인 사건을 B라 하면 두 카드에 적힌 수의 합이 6의 배수인 사건은 $A\cup B$이다.

두 카드에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1, 5), (2, 4)\}$, $B=\{(5, 7)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2}{21}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{21}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{2}{21}+\frac{1}{21}=\frac{1}{7}$

답 ①

16 다섯 개의 숫자 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

각 자리의 숫자 중 2는 세 번 나오거나 네 번 나와야 하므로 2가 세 번 나오는 사건을 A, 네 번 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

숫자 2가 세 번 나오는 네 자리 자연수의 개수는

$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$■에서 ■에 들어갈 수 있는 숫자가 3, 4, 5, 6의 4개,

$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$■를 일렬로 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{3!}=4$이므로

$4\times4=16$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{16}{625}$

숫자 2가 네 번 나오는 네 자리 자연수는 2222의 1개뿐이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{625}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{16}{625}+\dfrac{1}{625}=\dfrac{17}{625}$ 답 ④

17 소수가 적힌 카드를 적어도 한 장 뽑는 사건을 A라 하면 A^C는 3장 모두 소수가 아닌 수가 적힌 카드를 뽑는 사건이다.

이때 1부터 10까지의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개, 소수가 아닌 수는 6개이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$ 답 ⑤

18 10명 중 임원 3명을 뽑는 전체 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$

1학년 학생과 2학년 학생이 각각 적어도 한 명씩은 뽑히는 사건을 A라 하면 A^C는 1학년 학생만 뽑히거나 2학년 학생만 뽑히는 사건이다.

10명 중 임원 3명을 뽑을 때, 1학년 학생만 뽑히거나 2학년 학생만 뽑히는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_3=4+20=24$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{24}{120}=\dfrac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$ 답 ④

19 9개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_3=84$

흰 공이 2개 이하로 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 흰 공이 3개 이상 나오는 사건, 즉 흰 공이 3개 나오는 사건이다.

주머니에서 3개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 3개 나오는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{10}{84}=\dfrac{5}{42}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{5}{42}=\dfrac{37}{42}$ 답 ①

20 6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!=720$

갑과 을 사이에 적어도 2명 이상의 학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 갑과 을 사이에 1명 이하의 학생을 세우는 사건이다.

(ⅰ) 갑과 을 사이에 1명의 학생을 세우는 경우의 수

갑과 을 사이에 세울 1명의 학생을 택하는 경우의 수가 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

'갑, 갑과 을 사이의 학생, 을' 3명을 1명으로 보고, 4명을 일렬로 세우는 경우의 수가 $4!=24$

갑과 을이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!=2$이므로

$4\times24\times2=192$

(ⅱ) 갑과 을이 이웃하는 경우의 수

'갑, 을' 2명을 1명으로 보고, 5명을 일렬로 세우는 경우의 수가 $5!=120$

갑과 을이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!=2$이므로

$120\times2=240$

(ⅰ), (ⅱ)에서 갑과 을 사이에 1명 이하의 학생을 세우는 경우의 수는 $192+240=432$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{432}{720}=\dfrac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$ 답 ①

변형유형 집중공략 p.70~71

1-1 13장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{13}\mathrm{C}_2=78$

꺼낸 카드에 적힌 두 수가 연속하지 않는 자연수인 사건을 A라 하면 A^C는 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 연속하는 자연수인 사건이다.

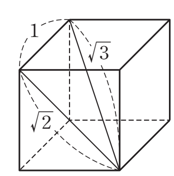
1부터 13까지의 자연수 중 2개를 택할 때, 연속하는 자연수가 나오는 경우는 1과 2, 2와 3, 3과 4, $\cdots$, 12와 13의 12개이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{12}{78}=\dfrac{2}{13}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{2}{13}=\dfrac{11}{13}$ 답 ④

1-2 한 모서리가 길이가 1인 정육면체에서 두 꼭짓점을 택하여 그을 수 있는 선분의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{3}$이다.



정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 그을 수 있는 선분의 개수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$

8개의 꼭짓점 중에서 2개의 꼭짓점을 택하여 선분을 그을 때, 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 선분의 길이가 1인 사건이다.

이때 길이가 1인 선분은 정육면체의 모서리이므로 12개이다.

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$ 답 ③

2-1 첫 번째로 1학년 학생이 발표하는 사건을 A, 마지막으로 2학년 학생이 발표하는 사건을 B라 하면

첫 번째로 1학년 학생이 발표할 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times7!}{8!}=\dfrac{3}{8}$

마지막으로 2학년 학생이 발표할 확률은

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times 7!}{8!}=\dfrac{5}{8}$

첫 번째로 1학년 학생이 발표하고 마지막으로 2학년 학생이 발표할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times {}_5\mathrm{C}_1\times 6!}{8!}=\dfrac{15}{56}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{8}-\dfrac{15}{56}=\dfrac{41}{56}$ 답 ⑤

참고 8명의 학생이 발표하는 순서를 정하는 경우의 수는 $8!$

첫 번째로 1학년 학생이 발표하는 경우의 수는

첫 번째로 발표할 1학년 학생을 택하는 경우의 수가 ${}_3\mathrm{C}_1=3$,

나머지 7명의 순서를 정하는 경우의 수가 $7!$이므로

$3\times 7!$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{3\times 7!}{8!}=\dfrac{3}{8}$

2-2 뽑힌 2명 모두 1학년 학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{28}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{28}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{28}+\dfrac{3}{28}=\dfrac{1}{7}$ 답 ②

서술형 What & How

p.72~73

1 P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 갈 때, A 지점을 지나는 사건을 A, B 지점을 지나는 사건을 B라 하자.

P지점에서 Q지점으로 가는 모든 경우의 수는

$\dfrac{7!}{4!\times 3!}=35$ …… ❶

P ⟶ A ⟶ Q로 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{2!\times 2!}=18$ $\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{18}{35}$ …… ❷

P ⟶ B ⟶ Q로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!\times 2!}\times 2=20$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{20}{35}=\dfrac{4}{7}$ …… ❸

P ⟶ A ⟶ B ⟶ Q로 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times 2\times 2=12$ $\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{12}{35}$ …… ❹

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{18}{35}+\dfrac{4}{7}-\dfrac{12}{35}=\dfrac{26}{35}$

즉 $p=35$, $q=26$이므로

$p-q=35-26=9$ …… ❺

답 9

2 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 모든 경우의 수는

$\dfrac{9!}{5!\times 4!}=126$ …… ❶

A 지점에서 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 반드시 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 A ⟶ P ⟶ Q ⟶ B와 같이 이동하는 경우의 수이므로

$\dfrac{5!}{3!\times 2!}\times 1\times\dfrac{3!}{2!}=30$ …… ❷

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{30}{126}=\dfrac{5}{21}$ …… ❸

즉 $p=21$, $q=5$이므로

$p+q=21+5=26$ …… ❹

답 26

채점기준	배점
❶ A 지점에서 B 지점까지 가는 모든 경우의 수 구하기	1
❷ $\overline{\mathrm{PQ}}$를 반드시 지나 최단 거리로 가는 경우의 수 구하기	2
❸ $\overline{\mathrm{PQ}}$를 반드시 지나 최단 거리로 갈 확률 구하기	1
❹ $p+q$의 값 구하기	1

3 9개의 점 중에서 3개의 점을 임의로 택하는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_3=84$ …… ❶

삼각형이 만들어지는 사건을 A라 하면 삼각형이 만들어지지 않는 사건은 A^C이다.

삼각형이 만들어지지 않는 경우의 수는 직선 l 위의 3개의 점을 택하거나 직선 m 위의 3개의 점을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_3=20+1=21$ …… ❷

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{21}{84}=\dfrac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ …… ❸

즉 $p=4$, $q=3$이므로

$p+q=4+3=7$ …… ❹

답 7

다른풀이 삼각형이 만들어지는 경우의 수는 직선 l 위에서 2개, 직선 m 위에서 1개의 점을 택하거나 직선 l 위에서 1개, 직선 m 위에서 2개의 점을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2=15\times 3+6\times 3=63$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{63}{84}=\dfrac{3}{4}$

4 7개의 점 중에서 3개의 점을 임의로 택하는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_3=35$ …… ❶

두 직선 l, m 사이의 거리 2가 삼각형의 높이가 되므로 삼각형의 넓이가 2 이상이려면 밑변의 길이가 2 이상이어야 한다.

(i) 직선 l 위에서 2개, 직선 m 위에서 1개의 점을 택할 때, 넓이가 2 이상인 삼각형의 개수는

$3\times{}_3\mathrm{C}_1=9$

(ii) 직선 l 위에서 1개, 직선 m 위에서 2개의 점을 택할 때 넓이가 2 이상인 삼각형의 개수는

${}_4C_1\times1=4$

(i), (ii)에서 넓이가 2 이상인 삼각형의 개수는

$9+4=13$ …… ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{13}{35}$ …… ❸

즉 $p=35$, $q=13$이므로

$p+q=35+13=48$ …… ❹

답 48

채점기준	배점
❶ 7개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수	1
❷ 넓이가 2 이상인 삼각형의 개수 구하기	3
❸ 삼각형의 넓이가 2 이상일 확률 구하기	1
❹ $p+q$의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.74~77

01 $A=\{1, 2, 4\}$

① 5의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 $B=\{1, 5\}$

$\therefore B\cap A=\{1\}\neq\varnothing$

② 소수의 눈이 나오는 사건을 C라 하면 $C=\{2, 3, 5\}$

$\therefore C\cap A=\{2\}\neq\varnothing$

③ 짝수의 눈이 나오는 사건을 D라 하면 $D=\{2, 4, 6\}$

$\therefore D\cap A=\{2, 4\}\neq\varnothing$

④ 홀수의 눈이 나오는 사건을 E라 하면 $E=\{1, 3, 5\}$

$\therefore E\cap A=\{1\}\neq\varnothing$

⑤ 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 F라 하면 $F=\{3, 6\}$

$\therefore F\cap A=\varnothing$

따라서 A와 서로 배반사건인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

02 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지나면

$0=4-2a+b$

$\therefore 2a-4=b$

이것을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(3, 2)$, $(4, 4)$, $(5, 6)$의 3개

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

답 ③

03 6명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $6!=720$

A, B가 양 끝에 앉고, 가운데에 4명의 학생이 앉는 경우의 수는

$2!\times4!=2\times24=48$

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

답 ①

04 X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

치역이 $\{1, 2\}$인 함수의 개수는 정의역이 $\{1, 2, 3, 4\}$이고 공역이 $\{1, 2\}$인 함수의 개수에서 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$인 함수의 개수를 뺀 것과 같으므로

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{81}$

답 ②

05 6개의 의자에 두 사람이 앉는 경우의 수는 ${}_6P_2=30$

1	2	3	4	5	6

두 사람 사이에 빈 의자가 하나만 있는 경우의 수는 두 사람이 1과 3 또는 2와 4 또는 3과 5 또는 4와 6 중 하나에 앉는 경우의 수이므로

$4\times2!=4\times2=8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$

답 ③

06 서로 다른 5개의 과일을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

갑이 받을 과일 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

나머지 과일 3개를 을, 병 2명에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

이므로 갑이 과일 2개를 받는 경우의 수는

$10\times8=80$

따라서 구하는 확률은 $\frac{80}{243}$

답 ②

07 6개의 문자 s, c, h, o, o, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

o, o가 이웃하지 않는 경우의 수는 s, c, h, l을 먼저 나열한 후, 양 끝과 사이사이의 5개의 자리 중 2개를 택하여 o, o를 끼워넣는 경우의 수와 같으므로

$4!\times{}_5C_2=24\times10=240$

따라서 구하는 확률은

$\frac{240}{360}=\frac{2}{3}$

답 ④

08 학생 3명이 5종류의 메뉴 중에서 각각 한 개씩 골라 주문하는 모든 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

학생 2명만 같은 메뉴를 주문하는 경우의 수는

같은 메뉴를 주문하는 학생 2명을 정하는 경우의 수가

${}_3C_2={}_3C_1=3$,

이 학생 2명이 주문할 메뉴를 고르는 경우의 수가 ${}_5C_1=5$,

나머지 한 학생이 주문할 메뉴를 고르는 경우의 수가 ${}_4C_1=4$

이므로

$3\times5\times4=60$

따라서 구하는 확률은

$\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$ 답 ③

09 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_3=4\times5^3=500$

천의 자리의 숫자는 0이 아니므로 $a\neq0$

즉 조건 (가)에서 $1\leq a<b<c$이므로

$c=3$ 또는 $c=4$

(i) $c=3$일 때

$1\leq a<b<3$이므로 $a=1$, $b=2$

이때 조건 (나)에서 d가 될 수 있는 것은 0, 1, 2의 3개

따라서 네 자리 자연수의 개수는 3

(ii) $c=4$일 때

$1\leq a<b<4$이므로 a, b는 1, 2, 3 중에서 서로 다른 2개이다. 즉 a, b의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

이때 조건 (나)에서 d가 될 수 있는 것은 0, 1, 2, 3의 4개

따라서 네 자리 자연수의 개수는

$3\times4=12$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는

$3+12=15$

따라서 구하는 확률은

$\frac{15}{500}=\frac{3}{100}$ 답 ③

10 X에서 Y로의 모든 일대일함수 f의 개수는 ${}_5P_4=120$

조건 (가)에서 $f(1)=2$ 또는 $f(1)=4$이므로

(i) $f(1)=2$일 때

조건 (나)에서 $f(3)=3$, $x\neq3$일 때 $f(x)\neq x$이고, f는 일대일함수이므로

$f(4)$가 될 수 있는 것은 1, 5의 2개

$f(2)$가 될 수 있는 것은 1, 4, 5에서 $f(4)$를 제외한 2개

따라서 함수 f의 개수는

$2\times2=4$

(ii) $f(1)=4$일 때

조건 (나)에서 $f(3)=3$, $x\neq3$일 때 $f(x)\neq x$이고, f는 일대일함수이므로

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 5의 2개

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 5에서 $f(2)$를 제외한 2개

따라서 함수 f의 개수는

$2\times2=4$

(i), (ii)에서 함수 f의 개수는

$4+4=8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$ 답 ①

11 일대일함수 f의 개수는 ${}_4P_3=24$

함수 g의 개수는 ${}_2\Pi_4=2^4=16$

이므로 합성함수 $g\circ f$의 개수는 $24\times16=384$

집합 X의 원소 1, 2, 3에 대하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

집합 Y의 원소 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에는 집합 Z의 원소 4 또는 5가 대응해야 하고, 치역이 각각 $\{4\}$, $\{5\}$인 경우는 제외해야 하므로 $g(f(1))$, $g(f(2))$, $g(f(3))$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3-2=2^3-2=6$

집합 Y에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 제외한 나머지 원소 1개에 집합 Z의 원소가 대응하는 경우의 수는 2

따라서 치역이 Z인 합성함수 $g\circ f$의 개수는

$24\times6\times2=288$

따라서 구하는 확률은

$\frac{288}{384}=\frac{3}{4}$ 답 ④

12 ㄱ. 임의의 사건 A에 대하여 $0\leq P(A)\leq1$ (거짓)

ㄴ. $P(A)+P(A^C)=1$

$P(S)+P(\varnothing)=1+0=1$

$\therefore P(A)+P(A^C)=P(S)+P(\varnothing)$ (참)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $A\cap B=\varnothing$, 즉

$A\cap B=A\cap(B^C)^C=A-B^C=\varnothing$

$\therefore A\subset B^C$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

참고 두 집합 A, B에 대하여

$A-B=\varnothing \Longleftrightarrow A\subset B$

13 $f(1)=a$인 사건을 A, $f(2)=b$인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{{}_6\Pi_3}{{}_6\Pi_4}=\frac{6^3}{6^4}=\frac{1}{6}$

$P(B)=\frac{{}_6\Pi_3}{{}_6\Pi_4}=\frac{6^3}{6^4}=\frac{1}{6}$

$A\cap B$는 $f(1)=a$, $f(2)=b$인 사건이므로

$P(A\cap B)=\frac{{}_6\Pi_2}{{}_6\Pi_4}=\frac{6^2}{6^4}=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$ 답 ②

14 꺼낸 공 4개 중에서 흰 공이 2개인 사건을 A, 검은 공이 2개인 사건을 B라 하면 꺼낸 공 4개 중에서 흰 공이 2개 또는 검은 공이 2개인 사건은 $A\cup B$이고

$P(A)=\frac{{}_3C_2\times{}_7C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{3\times21}{210}=\frac{3}{10}$

$P(B)=\frac{{}_5C_2\times{}_5C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{10\times10}{210}=\frac{10}{21}$

$A\cap B$는 임의로 꺼낸 공 4개가 흰 공 2개, 검은 공 2개인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{3\times10}{210}=\frac{1}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{10}{21}-\frac{1}{7}=\frac{19}{30}$$

답 ④

15 X에서 X로의 함수 f의 개수는 ${}_5\Pi_5=5^5$

함수 $f:X\longrightarrow X$ 중에서 임의로 하나를 택할 때,

$f(1)\times f(3)\times f(5)$의 값이 짝수인 사건을 A라 하면 A^C는

$f(1)\times f(3)\times f(5)$의 값이 홀수인 사건, 즉 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값이 모두 홀수인 사건이다.

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 홀수 1, 3, 5 중에서 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_2=5^2$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3^3\times5^2}{5^5}=\frac{27}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{27}{125}=\frac{98}{125}$$

답 ⑤

16 8명이 서로 다른 2대의 차량에 4명씩 나누어 타는 경우의 수는

$$\left({}_8\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_4\times\frac{1}{2!}\right)\times2!=70$$

갑이 을 또는 병과 같은 차량에 타는 사건을 A라 하면 A^C는 갑이 을과 병 어느 쪽과도 같은 차에 타지 않는 사건, 즉 을, 병이 한 차에 타고, 갑은 다른 차에 타는 사건이다.

을, 병이 한 차에 타고 갑은 다른 차에 타는 경우의 수는

갑, 을, 병을 제외한 나머지 5명 중 갑과 한 조가 될 3명을 고르는 경우의 수가

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

4명씩 나눈 2개의 조를 택시와 승합차에 각각 태우는 경우의 수가 $2!=2$이므로

$10\times2=20$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

답 ④

17 9개의 구슬 중 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_3=84$

두 가지 색 이상의 구슬이 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 한 가지 색의 구슬만 나오는 사건이다.

한 가지 색의 구슬 3개가 나오는 경우는 빨간 구슬 3개를 꺼내거나 노란 구슬 3개를 꺼내는 경우이므로 그 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_3=4+1=5$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{84}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{84}=\frac{79}{84}$$

답 ⑤

18 3명의 학생이 각각 적어도 공책 1권 이상을 받도록 10권을 나누어 주는 경우의 수는 3명에게 공책을 1권씩 먼저 주고, 남은 7권의 공책을 3명에게 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

이때 A가 4권의 공책을 받는 경우의 수는

A에게 4권, B에게 1권, C에게 1권을 먼저 주고, 남은 4권의 공책을 B, C 2명에게 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_4={}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{36}$

답 ①

19 사건 A와 배반인 사건은 $A^C=\{3, 4, 5, 8, 9\}$의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 $B^C=\{3, 4, 7, 8, 9\}$의 부분집합이므로 사건 C는 $A^C\cap B^C=\{3, 4, 8, 9\}$의 부분집합이어야 한다. …… ❷

그런데 $C\neq\varnothing$이므로 사건 C의 개수는

$2^4-1=15$ …… ❸

답 15

채점기준	배점
❶ $A^C\cap B^C$를 구하고 사건 C가 $A^C\cap B^C$의 부분집합임을 설명하기	3
❷ 사건 C의 개수 구하기	1

20 4장의 숫자 카드를 한 장씩 네 번 꺼내는 모든 경우의 수는

$4!=24$ …… ❶

세 번째에 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 두 번째, 네 번째에 꺼낸 카드에 적힌 숫자보다 크므로 세 번째에 꺼낸 카드에 적힌 숫자는 3 또는 4이다. …… ❷

(i) 세 번째에 꺼낸 카드에 적힌 수가 3인 경우

첫 번째에 꺼낸 카드에 적힌 숫자는 4이고, 두 번째, 네 번째에 꺼낸 카드에 각각 적힌 숫자를 정하는 경우의 수는 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$2!=2$

(ii) 세 번째에 꺼낸 카드에 적힌 수가 4인 경우

첫 번째, 두 번째, 네 번째에 꺼낸 카드에 각각 적힌 숫자를 정하는 경우의 수는 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $3!=6$

(i), (ii)에서 세 번째에 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 두 번째, 네 번째에 꺼낸 카드에 각각 적힌 숫자보다 큰 경우의 수는

$2+6=8$ …… ❸

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

즉 $p=3$, $q=1$이므로

$p+q=3+1=4$ …… ❹

답 4

채점기준	배점
❶ 모든 경우의 수 구하기	1
❷ 세 번째에 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 될 수 있는 수 찾기	1
❸ 각 경우에 대하여 경우의 수 구하기	2
❹ 확률을 구하고 $p+q$의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회 p.78~81

01 $A\cap B^C=\varnothing$이어야 하므로 $A-B=\varnothing$, 즉 $A\subset B$이어야 한다.
집합 S의 부분집합 중 집합 A의 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 집합의 개수는 $2^{7-3}=2^4=16$
따라서 사건 B의 개수는 16이다. 답 ③

02 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고
$A=\{1, 3\}$, $A^C=\{2, 4, 5, 6\}$
ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (참)
ㄴ. 사건 A와 배반사건이고 공집합이 아닌 사건의 개수는 A^C의 부분집합 중 공집합이 아닌 집합의 개수와 같으므로
$2^4-1=15$ $\quad\therefore n=15$ (거짓)
ㄷ. B_1, B_2, B_3, …, B_{15}는 사건 A와 배반인 사건이므로 A^C의 부분집합이다. 즉 $B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots\cup B_{15}=A^C$이므로
$\mathrm{P}(B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots\cup B_{15})=\mathrm{P}(A^C)$
$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

03 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는
$4!=24$
4의 배수가 되려면 마지막 두 자리 수가 4의 배수이어야 하므로 마지막 두 자리 수가 될 수 있는 것은 12, 24, 32의 3가지이고, 각 경우에 대하여 천의 자리의 숫자와 백의 자리의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $2!=2$이므로 4의 배수의 개수는
$3\times2=6$
따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ 답 ②

참고 □□12 꼴의 수의 개수는 $2!=2$
□□24 꼴의 수의 개수는 $2!=2$
□□32 꼴의 수의 개수는 $2!=2$
따라서 4의 배수의 개수는 $2+2+2=6$

04 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는
$6^3=216$
$abc=4$이고, 세 눈의 수의 곱이 4인 경우는
$1\times1\times4=1\times2\times2=4$이므로
(i) 세 눈의 수가 1, 1, 4인 경우의 수
1, 1, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 $\frac{3!}{2!}=3$
(ii) 세 눈의 수가 1, 2, 2인 경우의 수
1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 $\frac{3!}{2!}=3$
(i), (ii)에서 $abc=4$인 경우의 수는 $3+3=6$
따라서 구하는 확률은
$\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$ 답 ⑤

05 X에서 X로의 일대일함수 f의 개수는 $5!=120$
두 함숫값의 합이 12가 되는 경우는
$2+10=4+8=6+6=12$
이고, 함수 f는 일대일함수이므로 조건 (가), (나)에서
$f(2)=2$, $f(4)=10$ 또는 $f(2)=4$, $f(4)=8$
각 경우에 대하여 $f(6)$, $f(8)$, $f(10)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3!=6$이므로 함수 f의 개수는
$2\times6=12$
따라서 구하는 확률은
$\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$ 답 ②

06 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$
(i) 35□ 꼴의 홀수
351의 1개
(ii) 4□□ 꼴의 홀수의 개수
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 4와 일의 자리의 숫자를 제외한 3개이므로
$3\times3=9$
(iii) 5□□ 꼴의 홀수의 개수
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의 2개
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 5와 일의 자리의 숫자를 제외한 3개이므로
$2\times3=6$
(i), (ii), (iii)에서 350보다 큰 홀수의 개수는
$1+9+6=16$
따라서 구하는 확률은
$\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$ 답 ③

07 9장의 카드 중 임의로 3장을 동시에 뒤집는 경우의 수는
${}_9\mathrm{C}_3=84$
앞면이 보이는 4장의 카드 중 x장을 뒤집고, 뒷면이 보이는 5장의 카드 중 $(3-x)$장을 뒤집으면
앞면이 보이는 카드의 수는
$4-x+(3-x)=7-2x$
뒷면이 보이는 카드의 수는
$5-(3-x)+x=2x+2$
뒷면이 보이는 카드가 6장이 되어야 하므로
$2x+2=6$, $2x=4$ $\quad\therefore x=2$
즉 앞면이 보이는 4장의 카드 중 2장을 뒤집고, 뒷면이 보이는 5장의 카드 중 1장을 뒤집어야 하므로 이 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1=6\times5=30$
따라서 구하는 확률은
$\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$ 답 ④

08 10개의 자연수를 10개의 빈칸에 각각 한 개씩 적는 모든 경우의 수는 $10!$

1부터 10까지의 자연수의 합은

$1+2+3+\cdots+10$

$=(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)$

$=11\times5=55$

이므로 같은 행에 적힌 두 수의 합은 $\frac{55}{5}=11$이어야 한다.

$\therefore b=11$

따라서 각 행에는 1과 10, 2와 9, 3과 8, 4와 7, 5와 6이 나란히 적혀야 한다.

이와 같이 짝지은 5쌍의 수를 5개의 행에 나열하는 경우의 수는 $5!$, 각 행에서 두 수가 자리를 바꾸는 경우의 수가 $(2!)^5$이므로 같은 행에 적힌 두 수의 합이 모두 같은 경우의 수는

$5!\times(2!)^5$

따라서 같은 행에 적힌 두 수의 합이 모두 같을 확률은

$\frac{5!\times(2!)^5}{10!}=\frac{1}{945}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{945}$

$\therefore \frac{1}{a(b+16)}=\frac{1}{\frac{1}{945}\times(11+16)}=35$ 답 ③

09 8명을 4명씩 두 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=35$

2학년 학생 2명을 같은 팀으로 편성하고 나머지 1학년 학생 6명을 2명, 4명의 두 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_4=15$

따라서 구하는 확률은

$\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$ 답 ②

10 10개의 동전 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

동전 4개의 금액의 합이 300원 이상이어야 하므로

(i) 100원짜리 동전 4개를 꺼내는 경우의 수

${}_4C_4=1$

(ii) 100원짜리 동전 3개, 50원짜리 동전과 10원짜리 동전 중 1개를 꺼내는 경우의 수

${}_4C_3\times{}_6C_1=4\times6=24$

(iii) 100원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 2개를 꺼내는 경우의 수

${}_4C_2\times{}_4C_2=6\times6=36$

(i), (ii), (iii)에서 금액의 합이 300원 이상인 경우의 수는

$1+24+36=61$

따라서 구하는 확률은 $\frac{61}{210}$ 답 ②

11 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-P(A\cap B)$

$=\frac{5}{6}-P(A\cap B)$ ...... ㉠

이므로 $P(A\cup B)$가 최대인 경우는 $P(A\cap B)$가 최소일 때이고, $P(A\cup B)$가 최소인 경우는 $P(A\cap B)$가 최대일 때이다.

$P(A)+P(B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}<1$이므로 $P(A\cap B)$가 최소인 경우는 $A\cap B=\varnothing$일 때이다.

따라서 $P(A\cap B)$의 최솟값은 0이므로 $P(A\cup B)$의 최댓값은 ㉠에서

$\frac{5}{6}-0=\frac{5}{6}$ $\quad\therefore M=\frac{5}{6}$

또 $P(A)>P(B)$이므로 $P(A\cap B)$가 최대인 경우는 $B\subset A$, 즉 $A\cap B=B$일 때이다.

따라서 $P(A\cap B)$의 최댓값은 $P(B)=\frac{1}{6}$이므로 $P(A\cup B)$의 최솟값은 ㉠에서

$\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore m=\frac{2}{3}$

$\therefore M+m=\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$ 답 ⑤

참고 $0\le P(A\cup B)\le1$이므로 ㉠에서

$0\le\frac{5}{6}-P(A\cap B)\le1$, $-\frac{5}{6}\le-P(A\cap B)\le\frac{1}{6}$

$\therefore -\frac{1}{6}\le P(A\cap B)\le\frac{5}{6}$

그런데 $P(A\cap B)\ge0$이므로 $0\le P(A\cap B)\le\frac{5}{6}$

12 방정식 $x+y+z=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

$(x-y)(z-1)=0$에서 $x=y$ 또는 $z=1$

$x=y$인 사건을 A, $z=1$인 사건을 B라 하면 $x=y$ 또는 $z=1$인 사건은 $A\cup B$이다.

(i) $x=y$일 때

$x+y+z=9$에서 $2x+z=9$

이것을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, z의 순서쌍 (x, z)는

$(0, 9)$, $(1, 7)$, $(2, 5)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$의 5개

$\therefore P(A)=\frac{5}{55}$

(ii) $z=1$일 때

$x+y+z=9$에서 $x+y=8$

이것을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_2H_8={}_{2+8-1}C_8={}_9C_8={}_9C_1=9$

$\therefore P(B)=\frac{9}{55}$

(iii) $x=y$이고 $z=1$일 때

$x+y+z=9$에서 $2x+1=9$, $2x=8$ $\quad\therefore x=4$

즉 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)는 $(4, 4, 1)$의 1개이다.

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{55}$

따라서 구하는 확률은

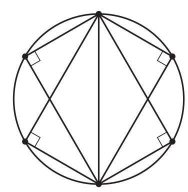
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{5}{55}+\frac{9}{55}-\frac{1}{55}=\frac{13}{55}$ 답 ③

13 6개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$

만들어진 삼각형이 직각삼각형이 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 직각삼각형이 만들어지는 사건이다.



오른쪽 그림과 같이 원의 지름을 긋고 만들 수 있는 직각삼각형이 4개, 그을 수 있는 지름은 3개이므로 만들어지는 직각삼각형의 개수는 $4\times3=12$이다.

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ 답 ③

14 a, b, c, d가 자연수이므로 $a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$, $d=D+1$ (A, B, C, D는 음이 아닌 정수)이라 하면

$a+b+c+d=16$에서

$(A+1)+(B+1)+(C+1)+(D+1)=16$

$\therefore A+B+C+D=12$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C, D의 순서쌍 (A, B, C, D)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_{12}={}_{4+12-1}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_3=455$

a, b, c, d 중 적어도 하나가 홀수인 사건을 A라 하면 A^C는 a, b, c, d 모두 짝수인 사건이다.

a, b, c, d가 짝수인 자연수이므로 $a=2x+2$, $b=2y+2$, $c=2z+2$, $d=2w+2$ (x, y, z, w는 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+c+d=16$에서

$(2x+2)+(2y+2)+(2z+2)+(2w+2)=16$

$2x+2y+2z+2w=8 \qquad \therefore x+y+z+w=4$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_4={}_{4+4-1}\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{35}{455}=\frac{1}{13}$

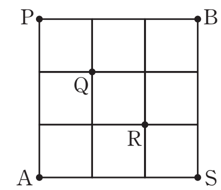
따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$ 답 ⑤

15 갑은 A 지점에서 출발하여 B 지점까지, 을은 B 지점에서 출발하여 A 지점까지 이동하는 전체 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times3!}\times\frac{6!}{3!\times3!}=400$

갑과 을이 서로 마주치지 않는 사건을 X라 하면 X^C는 갑과 을이 서로 마주치는 사건이다.



오른쪽 그림과 같이 갑과 을은 P, Q, R, S 지점에서 마주칠 수 있다.

(ⅰ) P에서 마주치는 경우의 수

갑은 A ⟶ P ⟶ B로 이동하고, 을은 B ⟶ P ⟶ A로 이동하는 경우의 수이므로

$(1\times1)\times(1\times1)=1$

(ⅱ) Q에서 마주치는 경우의 수

갑은 A ⟶ Q ⟶ B로 이동하고, 을은 B ⟶ Q ⟶ A로 이동하는 경우의 수이므로

$\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)\times\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)=81$

(ⅲ) R 지점에서 마주치는 경우의 수

갑은 A ⟶ R ⟶ B로 이동하고, 을은 B ⟶ R ⟶ A로 이동하는 경우의 수이므로

$\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)\times\left(\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\right)=81$

(ⅳ) S에서 마주치는 경우의 수

갑은 A ⟶ S ⟶ B로 이동하고, 을은 B ⟶ S ⟶ A로 이동하는 경우의 수이므로

$(1\times1)\times(1\times1)=1$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$1+81+81+1=164$

$\therefore \mathrm{P}(X^C)=\frac{164}{400}=\frac{41}{100}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}(X^C)=1-\frac{41}{100}=\frac{59}{100}$ 답 ⑤

16 숫자가 각각 하나씩 적힌 6개의 흰 공, 6개의 검은 공이 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{12}\mathrm{C}_3=220$

꺼낸 3개의 공 중 적어도 1개에는 홀수가 적혀 있는 사건을 A, 적어도 1개는 흰 공인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이고

$\mathrm{P}(A\cap B)=1-\mathrm{P}((A\cap B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A^C\cup B^C) \qquad \cdots\cdots ㉠$

이다. 이때 A^C는 꺼낸 공에 모두 짝수가 적혀 있는 사건이고, B^C는 꺼낸 공이 모두 검은 공인 사건이다.

12개의 공 중 짝수가 적힌 공은 6개이므로 꺼낸 공 3개에 모두 짝수가 적혀 있는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{20}{220}$

검은 공은 6개이므로 꺼낸 공 3개가 모두 검은 공인 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3=20$

$\therefore \mathrm{P}(B^C)=\frac{20}{220}$

꺼낸 공 3개가 모두 짝수가 적힌 검은 공인 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_3=1$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{220}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$

$=\frac{20}{220}+\frac{20}{220}-\frac{1}{220}$

$=\frac{39}{220}$

따라서 구하는 확률은 ㉠에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=1-\frac{39}{220}=\frac{181}{220}$ 답 ⑤

17 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서 각각 카드 1장씩 세 번 꺼내는 경우의 수는

$3!\times3!=6\times6=36$

갑, 을이 꺼낸 카드에 적힌 숫자를 각각 a, b라 할 때, 갑이 2번 이기고 1번 지려면 순서쌍 (a, b)는

$(3, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$

과 같아야 한다.

세 번의 게임에서 위의 결과가 나오는 경우의 수는 위의 순서쌍 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ 답 ②

참고 게임을 3번 하면 갑의 게임 결과는 2승 1패, 1승 2패, 3무, 1승 1패 1무 중 하나이다.

2승 1패인 경우의 수는 6

1승 2패인 경우의 수는 같은 방법으로 6

1승 1패 1무인 경우의 수는 승, 패, 무 순서를 결정하는 경우의 수가 $3!=6$, 비기는 게임에서 나올 숫자를 고르는 경우의 수가 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이므로 $6\times3=18$

3무인 경우의 수는 $(3, 3)$, $(2, 2)$, $(1, 1)$을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $3!=6$

18 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac>0$

$\therefore 4ac<b^2$

(i) $b=1$일 때

$4ac<1$을 만족시키는 a, c의 순서쌍 (a, c)는 존재하지 않는다.

(ii) $b=2$일 때

$4ac<4$, 즉 $ac<1$을 만족시키는 a, c의 순서쌍 (a, c)는 존재하지 않는다.

(iii) $b=3$일 때

$4ac<9$

$a=1$일 때, $4c<9$이므로 $c=1$, 2의 2개

$a=2$일 때, $8c<9$이므로 $c=1$의 1개

$a\geq3$일 때, c는 존재하지 않는다.

즉 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2+1=3$

(iv) $b=4$일 때

$4ac<16$ $\therefore ac<4$

$a=1$일 때, $c<4$이므로 $c=1$, 2, 3

$a=2$일 때, $2c<4$, 즉 $c<2$이므로 $c=1$

$a=3$일 때, $3c<4$이므로 $c=1$

$a\geq4$일 때, c는 존재하지 않는다.

즉 순서쌍 (a, c)의 개수는 $3+1+1=5$

(v) $b=5$일 때

$4ac<25$

$a=1$일 때, $4c<25$이므로 $c=1$, 2, 3, 4, 5, 6

$a=2$일 때, $8c<25$이므로 $c=1$, 2, 3

$a=3$일 때, $12c<25$이므로 $c=1$, 2

$a=4$일 때, $16c<25$이므로 $c=1$

$a=5$일 때, $20c<25$이므로 $c=1$

$a=6$일 때, $24c<25$이므로 $c=1$

즉 순서쌍 (a, c)의 개수는 $6+3+2+1+1+1=14$

(vi) $b=6$일 때

$4ac<36$ $\therefore ac<9$

$a=1$일 때, $c<9$이므로 $c=1$, 2, 3, 4, 5, 6

$a=2$일 때, $2c<9$이므로 $c=1$, 2, 3, 4

$a=3$일 때, $3c<9$, 즉 $c<3$이므로 $c=1$, 2

$a=4$일 때, $4c<9$이므로 $c=1$, 2

$a=5$일 때, $5c<9$이므로 $c=1$

$a=6$일 때, $6c<9$, 즉 $c<\frac{3}{2}$이므로 $c=1$

즉, 순서쌍 (a, c)의 개수는 $6+4+2+2+1+1=16$

(i)~(vi)에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우의 수는

$3+5+14+16=38$

따라서 구하는 확률은

$\frac{38}{216}=\frac{19}{108}$ 답 ③

19 16개의 공 중에서 임의로 동시에 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{16}\mathrm{C}_2=120$ …… ❶

16개의 공 중에서 임의로 동시에 꺼낸 두 공에 적힌 자연수를 각각 m, n $(m<n)$이라 하면

두 공의 무게가 같으므로

$m^2-14m+50=n^2-14n+50$

$m^2-n^2-14m+14n=0$

$(m+n)(m-n)-14(m-n)=0$

$(m+n-14)(m-n)=0$, $m+n-14=0$ ($\because m-n\neq0$)

$\therefore m+n=14$ …… ❷

즉 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 합이 14이어야 한다.

이것을 만족시키는 자연수 m, n의 순서쌍 $(m, n)(m<n)$은

$(1, 13)$, $(2, 12)$, $(3, 11)$, $(4, 10)$, $(5, 9)$, $(6, 8)$

의 6개이다. …… ❸

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$

즉 $p=20$, $q=1$이므로

$pq=20\times1=20$ …… ❹

답 20

채점기준	배점
❶ 전체 경우의 수 구하기	1
❷ 두 공에 적힌 자연수를 미지수로 나타내고 관계식 구하기	3
❸ 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기	2
❹ 확률을 구하고 pq의 값 구하기	1

20 집합 X에서 X로의 함수의 개수는

${}_5\Pi_5=5^5=3125$ …… ❶

조건 ㈎에서 치역의 원소가 2개이고,

$5+5+3=5+4+4=13$

이므로 조건 ㈏에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 2개는 5, 1개는 3이거나 1개는 5, 2개는 4이어야 한다. …… ❷

(i) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 2개는 5, 1개는 3인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 5, 5, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}=3$

이때 치역의 원소가 2개이므로 치역은 $\{3, 5\}$이고

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 치역의 원소 3, 5에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

따라서 함수 f의 개수는 $3\times4=12$

(ii) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 1개는 5, 2개는 4인 경우

(i)과 같은 방법으로 함수 f의 개수는 12

(i), (ii)에서 함수 f의 개수는

$12+12=24$ …… ❸

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{24}{3125}$

즉 $p=3125$, $q=24$이므로

$p+q=3125+24=3149$ …… ❹

답 3149

채점기준	배점
❶ 모든 함수의 개수 구하기	1
❷ $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 2개는 5, 1개는 3이거나 1개는 5, 2개는 4임을 설명하기	2
❸ 경우를 나누어 경우의 수 구하기	3
❹ 확률을 구하고 $p+q$의 값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.82~86

1 16명 중에서 3명을 택하는 경우의 수는 ${}_{16}C_3$

선택한 3명의 학생 중에서 적어도 한 명이 과목 B를 선택하는 사건을 B라 하면 B^C는 3명 모두 과목 A를 선택하는 사건이다.

3명 모두 과목 A를 선택하는 경우의 수는 ${}_9C_3$이므로

$\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{{}_9C_3}{{}_{16}C_3}=\dfrac{3}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\dfrac{3}{20}=\dfrac{17}{20}$

답 ③

2 9명의 학생 중에서 3명을 선택하는 경우의 수는 ${}_9C_3=84$

선택한 3명의 학생 중에 적어도 한 명은 남학생인 사건을 A라 하면 A^C는 3명 모두 여학생인 사건이다.

3명 모두 여학생인 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{4}{84}=\dfrac{1}{21}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{21}=\dfrac{20}{21}$

답 ⑤

3 9장의 손수건이 들어 있는 상자에서 4장을 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_4=126$

꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 흰색 손수건이 1장 이하인 사건이다.

꺼낸 4장의 손수건 중

(i) 흰색 손수건이 0장, 검은색 손수건이 4장인 경우의 수는

${}_5C_4=5$

(ii) 흰색 손수건이 1장, 검은색 손수건이 3장인 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_5C_3=4\times10=40$

(i), (ii)에서 흰색 손수건이 1장 이하인 경우의 수는

$5+40=45$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{45}{126}=\dfrac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{5}{14}=\dfrac{9}{14}$

답 ③

4 11개의 공이 들어 있는 상자에서 5개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_{11}C_5=462$

꺼낸 5개의 공 중에서 빨간 공이 2개 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 빨간 공이 1개 이하인 사건이다.

(i) 빨간 공 0개, 파란 공 5개가 나오는 경우의 수는

${}_6C_5={}_6C_1=6$

(ii) 빨간 공 1개, 파란 공 4개가 나오는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_6C_4=5\times15=75$

(i), (ii)에서 빨간 공이 1개 이하인 경우의 수는

$6+75=81$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{81}{462}=\frac{27}{154}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{27}{154}=\frac{127}{154}$ 답 ④

5 사건 A는 흰 공 1개와 검은 공 2개가 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{2\times6}{20}=\frac{3}{5}$

사건 B는 2가 적힌 공이 3개 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

$A\cap B$는 2가 적힌 흰 공 1개와 2가 적힌 검은 공 2개가 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1\times3}{20}=\frac{3}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$ 답 ③

6 사건 A는 흰 공 2개와 검은 공 1개가 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{6\times4}{56}=\frac{3}{7}$

사건 B는 1이 적힌 공이 3개 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$

$A\cap B$는 1이 적힌 흰 공 2개와 1이 적힌 검은 공 1개가 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3\times1}{56}=\frac{3}{56}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}-\frac{3}{56}=\frac{25}{56}$ 답 ①

7 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

문자 a가 한 개만 포함되는 사건을 A, 문자 b가 한 개만 포함되는 사건을 B라 하면 문자 a가 한 개만 포함되거나 문자 b가 한 개만 포함되는 사건은 $A\cup B$이다.

(i) 문자 a가 한 개만 포함되는 경우의 수

□□□□에서 a의 위치를 택한 후, 나머지 세 곳에 b, c, d에서 중복을 허락하여 택한 3개를 나열하는 경우의 수이므로

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\Pi_3=4\times3^3=108$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{108}{256}=\frac{27}{64}$

(ii) 문자 b가 한 개만 포함되는 경우의 수

(i)과 같은 방법으로 108

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{108}{256}=\frac{27}{64}$

(iii) 문자 a, b 둘 다 한 개씩만 포함되는 경우의 수

□□□□에서 두 곳을 택하여 a, b를 나열한 후, 나머지 두 곳에 c, d에서 중복을 허락하여 택한 2개를 나열하는 경우의 수이므로

${}_4\mathrm{P}_2\times{}_2\Pi_2=12\times2^2=48$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{48}{256}=\frac{3}{16}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 사건의 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{27}{64}+\frac{27}{64}-\frac{3}{16}=\frac{21}{32}$ 답 ③

8 문자 a, b, c, d, e 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는

${}_5\Pi_5=5^5$

문자 a, b가 각각 한 개씩만 포함되는 사건을 A, 문자 c가 한 개만 포함되는 사건을 B라 하면 문자 a, b가 각각 한 개씩만 포함되거나 문자 c가 한 개만 포함되는 사건은 $A\cup B$이다.

(i) 문자 a, b가 각각 한 개씩만 포함되는 경우의 수

□□□□□에서 두 곳을 택하여 a, b를 나열한 후, 나머지 세 곳에 c, d, e에서 중복을 허락하여 택한 3개를 나열하는 경우의 수이므로

${}_5\mathrm{P}_2\times{}_3\Pi_3=5\times4\times3^3$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{5\times4\times3^3}{5^5}=\frac{108}{625}$

(ii) 문자 c가 한 개만 포함되는 경우의 수

□□□□□에서 문자 c의 위치를 택한 후, 나머지 네 곳에 a, b, d, e에서 중복을 허락하여 택한 4개를 나열하는 경우의 수이므로

${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\Pi_4=5\times4^4$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{5\times4^4}{5^5}=\frac{256}{625}$

(iii) 문자 a, b, c가 각각 한 개씩만 포함되는 경우의 수

□□□□□에서 세 곳을 택하여 a, b, c를 나열한 후, 나머지 두 곳에 d, e에서 중복을 허락하여 택한 2개를 나열하는 경우의 수이므로

${}_5\mathrm{P}_3\times{}_2\Pi_2=5\times4\times3\times2^2$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5\times4\times3\times2^2}{5^5}=\frac{48}{625}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 사건의 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{108}{625}+\frac{256}{625}-\frac{48}{625}=\frac{316}{625}$ 답 ②

9 X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_7\mathrm{P}_4=840$

조건 (가), (나)에서 $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$, 즉 $2f(1)\times f(3)\times f(4)$가 4의 배수이므로 $f(1)\times f(3)\times f(4)$는 짝수이다. 즉, $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 중 적어도 하나는 짝수이다.

$f(2)=2$인 함수의 개수는 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값으로 공역 Y의 원소 1, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 서로 다른 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{6}\mathrm{P}_{3}=120$

$f(2)=2$이고 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$가 모두 홀수인 함수의 개수는 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값으로 공역 Y의 원소 1, 3, 5, 7 중에서 서로 다른 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{4}\mathrm{P}_{3}=24$

따라서 $f(2)=2$이고 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 중 적어도 하나가 짝수인 함수의 개수는

$120-24=96$

따라서 구하는 확률은

$\frac{96}{840}=\frac{4}{35}$ 답 ④

참고 조건을 만족시키는 함수는 $f(2)=2$이고 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 중 적어도 하나는 짝수인 함수이다.

따라서 $f(2)=2$인 사건을 A, $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 중 적어도 하나는 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.

이때 B^C는 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$가 모두 홀수인 사건이므로 $A\cap B^C$는 $f(2)=2$이고 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$가 모두 홀수인 사건이다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{6}\mathrm{P}_{3}}{{}_{7}\mathrm{P}_{4}}=\frac{120}{840}=\frac{1}{7}$, $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{{}_{4}\mathrm{P}_{3}}{{}_{7}\mathrm{P}_{4}}=\frac{24}{840}=\frac{1}{35}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A-B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\frac{1}{7}-\frac{1}{35}=\frac{4}{35}\end{aligned}$$

10 X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_{5}\mathrm{P}_{4}=120$

$f(1)=1$인 함수의 개수는 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값으로 공역 Y의 원소 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{4}\mathrm{P}_{3}=24$

$f(1)=1$이므로 $\{f(2), f(3), f(4)\}$가 될 수 있는 집합은

$\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$

이때 각 집합의 모든 원소의 곱이 6의 배수가 아닌 집합은

$\{2, 4, 5\}$뿐이다.

따라서 $f(1)=1$이고 $f(2)\times f(3)\times f(4)$의 값이 6의 배수가 아닌 함수의 개수는 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값으로 2, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$

즉 $f(1)=1$이고 $f(2)\times f(3)\times f(4)$의 값이 6의 배수인 함수의 개수는

$24-6=18$

따라서 구하는 확률은

$\frac{18}{120}=\frac{3}{20}$ 답 ④

2 조건부확률

교과서 예제 p.89

01 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5\}$

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2) $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(3) $A\cap B=\{1, 3\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(4) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

(5) $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{2}{3}$

02 전체 370명 중에서 임의로 택한 1명이 놀이공원을 선호하는 학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

전체 370명 중에서 놀이공원을 선호하는 학생이 210명, 놀이공원을 선호하는 2학년 학생이 100명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{210}{370}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{100}{370}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{100}{370}}{\frac{210}{370}}=\frac{10}{21}$ 답 $\frac{10}{21}$

다른풀이 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}$

$=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{100}{210}=\frac{10}{21}$

03 첫 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.

첫 번째에 흰 공을 꺼낼 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$

첫 번째에 흰 공을 꺼냈을 때, 두 번째에도 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{7}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$ 답 $\frac{3}{28}$

04 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{5, 6\}$

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$A\cap B=\{2\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq \mathrm{P}(A\cap B)$

즉 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(2) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$A\cap C=\{6\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A\cap C)$

즉 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

답 (1) 종속 (2) 독립

05 40명 중 여학생은 25명, 음악을 전공한 학생은 16명, 음악을 전공한 여학생은 10명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{4}=\mathrm{P}(A\cap B)$

즉 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 답 독립

06 (1) ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

(2) ${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(3) 서브를 적어도 한 번 성공시키는 사건을 A라 하면 A^C는 서브를 한 번도 성공시키지 못하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$

답 (1) $\frac{8}{81}$ (2) $\frac{16}{81}$ (3) $\frac{65}{81}$

07 과녁의 정중앙을 4번 또는 5번 맞힐 확률이므로

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{15}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{1}{64}$$

답 $\frac{1}{64}$

기출 Best | 1회

p.90~93

01 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{9}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}$

이때

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

이므로

$$\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{3}{4}$$

답 ④

02 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$에서 $\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{3}{4}}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$

답 ③

03 $a+b$의 값이 짝수인 사건을 A, ab의 값이 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$a+b$의 값이 짝수이면 a, b는 모두 홀수이거나 모두 짝수이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10+10}{45}=\frac{4}{9}$

사건 $A\cap B$는 a, b가 모두 짝수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2}$$

답 ④

04 임의로 택한 한 명이 안경을 착용한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{40}{100}=\frac{4}{10}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}}=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

05 갑이 소설책을 꺼내는 사건을 A, 을이 소설책을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{11}$

갑이 소설책을 꺼냈을 때 을도 소설책을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}=\frac{6}{55}$

답 ②

06 첫 번째에 '당첨'이 적힌 종이를 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 '당첨'이 적힌 종이를 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$

첫 번째에 '당첨'이 적힌 종이를 꺼냈을 때, 두 번째에도 '당첨'이

적힌 종이를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$ 답 ②

07 첫 번째에 검은 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 검은 공이 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이다.
첫 번째에 검은 공, 두 번째에 검은 공이 나올 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$

첫 번째에 흰 공, 두 번째에 검은 공이 나올 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$ 답 ②

08 결승전 날 비가 오는 사건을 A, 결승전에서 J팀이 경기에서 이기는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이고
$\mathrm{P}(B|A)=0.3$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.8$, $\mathrm{P}(A)=0.4$
결승전 날 비가 오고 J팀이 경기에서 이길 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.4\times0.3=0.12$
결승전 날 비가 오지 않고 J팀이 경기에서 이길 확률은
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.6\times0.8=0.48$
$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$=0.12+0.48=0.6$ 답 ③

09 갑이 파란 공을 꺼내는 사건을 A라 하면 갑이 빨간 공을 꺼내는 사건은 A^C이다. 또 을이 빨간 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{18}$

갑이 파란 공을 꺼내고 을이 빨간 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{15}{18}\times\frac{3}{17}=\frac{5}{34}$

갑이 빨간 공을 꺼내고 을도 빨간 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{18}\times\frac{2}{17}=\frac{1}{51}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{5}{34}+\frac{1}{51}=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{5}{34}}{\frac{1}{6}}=\frac{15}{17}$ 답 ④

10 기계 A에서 생산한 제품을 택하는 사건을 A, 불량품을 택하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{100}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{70}{100}$

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{100}$, $\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{5}{100}$

임의로 택한 한 개의 제품이 기계 A에서 생산한 제품이면서 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{30}{100}\times\frac{4}{100}=\frac{12}{1000}$

기계 B에서 생산한 제품이면서 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{70}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{35}{1000}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\frac{12}{1000}+\frac{35}{1000}=\frac{47}{1000}$

$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{12}{1000}}{\frac{47}{1000}}=\frac{12}{47}$ 답 ③

참고 기계 A에서 제품이 만들어지는 사건을 A라 하면 기계 B에서 제품이 만들어지는 사건은 A^C이다.

참고 구하는 확률은

$\frac{(\text{기계 A에서 생산한 제품이면서 불량품일 확률})}{(\text{불량품이 나올 확률})}$

$=\frac{\frac{30}{100}\times\frac{4}{100}}{\frac{30}{100}\times\frac{4}{100}+\frac{70}{100}\times\frac{5}{100}}=\frac{120}{120+350}=\frac{12}{47}$

와 같이 계산할 수도 있다.

11 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$이고
$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$,
$C=\{1, 2, 3, 6\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$이고

$A\cap B=\{2\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

ㄴ. $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$이고

$B\cap C=\{2, 3\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\neq\mathrm{P}(B\cap C)$

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{5}$이고

$A\cap C=\{2, 6\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A\cap C)$

따라서 두 사건이 서로 독립인 것은 ㄷ이다. 답 ②

12 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$
$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$
따라서 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다. (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$
이때 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$에서
$0<\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)<1$이므로
$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$
따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다. (거짓)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C) \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\mathrm{P}(A) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

참고 ㉠에서 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

13 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{3}$에서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{5}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{9}{10}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 B, A^C도 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{9}{10}$ 답 ⑤

14 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

에서

$\frac{2}{3}=\frac{2}{5}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{5}\mathrm{P}(B)$

$\frac{3}{5}\mathrm{P}(B)=\frac{4}{15}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}$ 답 ①

15 A 도시, B 도시에 내일 비가 오는 사건을 각각 A, B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$ 답 ②

다른풀이 여사건의 확률을 이용하여
(적어도 한 도시에 비가 올 확률)
$=1-$(A 도시, B 도시 중 어느 도시에도 비가 오지 않을 확률)
로 풀 수도 있다.

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{5}$이고 두 사건 A^C, B^C는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

16 주머니 A, 주머니 B에서 검은 공이 나오는 사건을 각각 A, B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{28}$ 답 ①

17 시험에 합격하려면 4문제 또는 5문제를 맞혀야 하므로 구하는 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0$$
$$=\frac{80}{243}+\frac{32}{243}=\frac{112}{243}$$ 답 ③

18 한 개의 주사위를 5번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 9의 배수인 사건은 3의 배수의 눈이 2번 이상 나오는 사건이다.
주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

한 개의 주사위를 5번 던질 때, 3의 배수의 눈이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 3의 배수의 눈이 1번 이하 나오는 사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C)&={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4\\&=\frac{32}{243}+\frac{80}{243}=\frac{112}{243}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{112}{243}=\frac{131}{243}$ 답 ⑤

19 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 x번 $(x=0, 1, 2, \dots, 5)$ 나온다고 하면 뒷면은 $(5-x)$번 나온다. 이때 점 P가 움직인 거리는
$2x+1\times(5-x)=x+5$
이고, 점 P가 점 A로 돌아오려면 움직인 거리가 4의 배수이어야 한다.

(i) $x+5=4$일 때, $x=-1$
그런데 $0\le x\le 5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x+5=8$일 때, $x=3$

(iii) $x+5=12$일 때, $x=7$

그런데 $0\le x\le 5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $x=3$

따라서 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나와야 하므로 그 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$ 답 ①

20 한 개의 주사위를 7번 던질 때, 6의 약수의 눈이 x번 나온다고 하면 6의 약수가 아닌 눈은 $(7-x)$번 나온다. 이때 얻은 점수는

$1\times x+(-2)\times(7-x)=3x-14$

4점을 얻어야 하므로 $3x-14=4$

$3x=18 \quad \therefore x=6$

즉 한 개의 주사위를 7번 던져서 6의 약수의 눈이 6번, 6의 약수가 아닌 눈이 1번 나와야 한다.

이때 한 개의 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로 구하는 확률은

${}_7C_6\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{448}{3^7}$

따라서 $p=448$, $n=7$이므로

$p+n=448+7=455$ 답 ③

기출 Best | 2회

p.94~97

01 $P(B^C|A)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(A)}$이고

$P(A\cap B^C)=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

이므로

$P(B^C|A)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{5}$ 답 ⑤

02 $P(A|B)+P(B|A)=\frac{5}{6}$에서

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5}{6}$

$\frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{6}}+\frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{4}}=\frac{5}{6}$

$6P(A\cap B)+4P(A\cap B)=\frac{5}{6}$

$10P(A\cap B)=\frac{5}{6}$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{12}$

$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}$ 답 ④

03 A, B, C, D의 소지품을 각각 a, b, c, d라 할 때, D가 a를 택하는 사건을 X라 하고, A, B, C 모두 다른 사람의 소지품을 택하는 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $P(Y|X)$이고

$P(X)=\frac{1}{4}$

네 사람이 소지품을 각각 하나씩 택하는 경우의 수는

$4!=24$

D가 a를 택하고, A, B, C 모두 다른 사람의 소지품을 택하는 경우의 수는 3이므로

$P(X\cap Y)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ 답 ②

참고 D가 a를 택하고, A, B, C가 모두 다른 사람의 소지품을 택하는 경우는 A, B, C가 b, c, d 중에서 하나씩 나누어 갖는 경우이므로 오른쪽 표와 같이 3가지이다.

A	B	C
b	c	d
c	d	b
d	c	b

04 참가한 회원 50명 중에서 임의로 뽑은 한 명이 중장년팀인 사건을 A, 마라톤에서 완주한 회원인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

이때 $P(A)=\frac{15}{50}$, $P(A\cap B)=\frac{10}{50}$이므로

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{10}{50}}{\frac{15}{50}}=\frac{2}{3}$ 답 ④

다른풀이 표본공간을 S라 하면

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}$

$=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

05 주머니 속에 들어 있는 흰 공은 n개, 검은 공은 $(8-n)$개이다. 갑이 검은 공을 꺼내는 사건을 A, 을이 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 $P(A\cap B)=\frac{2}{7}$이고

$P(A)=\frac{8-n}{8}$, $P(B|A)=\frac{n}{7}$

이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$에서

$\frac{2}{7}=\frac{8-n}{8}\times\frac{n}{7}$, $n(8-n)=16$, $n^2-8n+16=0$

$(n-4)^2=0 \quad \therefore n=4$ 답 ②

06 첫 번째에 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 두 번째에 당첨 제비가 아닌 제비를 뽑는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cap B)$이고

$P(A)=\frac{2}{9}$

첫 번째에 당첨 제비를 꺼냈을 때, 두 번째에 당첨 제비가 아닌 제비를 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{36}$ 답 ①

07 갑이 딸기맛 사탕을 꺼내는 사건을 A, 을이 사과맛 사탕을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}$

갑이 딸기맛 사탕을 꺼내고, 을이 사과맛 사탕을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{4}{15}$

갑이 사과맛 사탕을 꺼내고, 을도 사과맛 사탕을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$ 답 ⑤

08 주머니 A에서 흰 공 1개를 꺼내는 사건을 A, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$

(ⅰ) 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공일 때

주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있으므로 주머니 A에서 흰 공을 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{3}{4}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{40}$

(ⅱ) 주머니 A에서 꺼낸 공이 검은 공일 때

주머니 B에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있으므로 주머니 A에서 검은 공을 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{40}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{9}{40}+\frac{1}{40}=\frac{1}{4}$ 답 ②

09 주머니 A를 택하는 사건을 A라 하면 주머니 B를 택하는 사건은 A^C이다. 또 흰 공과 검은 공을 각각 한 개씩 꺼내는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$

주머니 A를 택하고 주머니 A에서 흰 공과 검은 공을 각각 한 개씩 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$

주머니 B를 택하고 주머니 B에서 흰 공과 검은 공을 각각 한 개씩 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{2}{7}+\frac{4}{15}=\frac{58}{105}$

$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{58}{105}}=\frac{15}{29}$ 답 ②

10 독감 환자들 중 임의로 택한 한 명이 인플루엔자 B형 환자인 사건을 B라 하면 인플루엔자 A형 환자인 사건은 B^C이다. 또 항생제에 내성이 있는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|E)$이고

$\mathrm{P}(B)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(E|B)=\frac{2}{100}$, $\mathrm{P}(E|B^C)=\frac{1}{100}$

인플루엔자 B형에 걸렸으면서 항생제에 내성이 있을 확률은

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{100}=\frac{3}{250}$

인플루엔자 A형에 걸렸으면서 항생제에 내성이 있을 확률은

$\mathrm{P}(B^C\cap E)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(E|B^C)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{250}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(B^C\cap E)=\frac{3}{250}+\frac{1}{250}=\frac{2}{125}$

$\therefore \mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{250}}{\frac{2}{125}}=\frac{3}{4}$ 답 ④

11 한 개의 동전을 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$2^2=4$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$A=\{\mathrm{TT}\}$, $B=\{\mathrm{HH, HT}\}$, $C=\{\mathrm{HH, TT}\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

즉 두 사건 A, B는 서로 종속이다. (참)

ㄴ. $B\cap C=\{\mathrm{HH}\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(B\cap C)$

즉 두 사건 B, C는 서로 독립이다. (거짓)

ㄷ. $A\cap C=\{\mathrm{TT}\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)\neq\mathrm{P}(A\cap C)$

즉 두 사건 A, C는 서로 종속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

12 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$P(A^C\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(B)-P(A)P(B)$$
$$=P(B)\{1-P(A)\}$$
$$=P(B)P(A^C)$$

즉 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다. (참)

ㄴ. A, B가 서로 배반사건이면 $P(A\cap B)=0$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0 \text{ (참)}$$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로

$$P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}$$
$$=\frac{P(A)-P(A)P(B)}{1-P(B)}$$
$$=\frac{P(A)\{1-P(B)\}}{1-P(B)}$$
$$=P(A)$$

이때 $P(A|B)=P(A)$이므로

$P(A|B^C)=P(A|B)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

13 $P(B^C)=\frac{1}{4}$에서 $P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A)=P(A|B)=\frac{1}{3}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$$\therefore P(A\cap B^C)=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

답 ③

14 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

에서

$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}P(B)$, $\frac{1}{2}P(B)=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore P(B)=\frac{2}{3}$

$\therefore P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ 답 ④

15 갑, 을이 연말에 공연을 관람하는 사건을 각각 A, B라 하면

$P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{5}{6}$

$P(A^C)=\frac{2}{5}$, $P(B^C)=\frac{1}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A와 B^C, A^C와 B도 각각 서로 독립이다.

연말에 갑만 공연을 관람하고 을은 공연을 관람하지 않을 확률은

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

연말에 갑은 공연을 관람하지 않고 을만 공연을 관람할 확률은

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)=\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)=\frac{1}{10}+\frac{1}{3}=\frac{13}{30}$ 답 ⑤

16 B, C 중 B가 결승에 진출하고 결승전에서 A가 이길 확률은

$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

B, C 중 C가 결승에 진출하고 결승전에서 A가 이길 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{2}+\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$ 답 ①

17 네 번째 경기에서 학생 A가 우승컵을 받으려면 A는 세 번째 경기까지 2승 1패 후 네 번째 경기를 이겨야 한다.

따라서 구하는 확률은

${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$ 답 ③

18 3자리에 5건의 예매를 받았으므로 최소 2명 이상 취소해야 모든 사람이 앉을 수 있다. 즉 좌석이 부족하게 되는 경우는 취소한 사람이 없거나 1명인 경우이다.

예매를 취소한 사람이 0명일 확률은

${}_5C_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}$

예매를 취소한 사람이 1명일 확률은

${}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{405}{1024}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{243}{1024}+\frac{405}{1024}=\frac{81}{128}$ 답 ⑤

19 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 2의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

한 개의 주사위를 6번 던질 때, 2의 약수의 눈이 x번 ($x=0, 1, 2, \dots, 6$) 나온다고 하면 2의 약수가 아닌 눈은 $(6-x)$번 나온다. 이때 점 P가 움직인 거리는

$1\times x+2(6-x)=12-x$

이고, 점 P가 꼭짓점 E의 위치에 있으려면 움직인 거리가 6으로 나누었을 때 나머지가 4인 수이어야 한다.

(i) $12-x=4$일 때, $x=8$

그런데 $0\le x\le 6$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $12-x=10$일 때, $x=2$

(iii) $12-x=16$일 때, $x=-4$

그런데 $0\le x\le 6$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $x=2$

따라서 2의 약수의 눈이 2번, 2의 약수가 아닌 눈이 4번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{15\times16}{3^6}=\frac{80}{243}$ 답 ①

20 서로 다른 2개의 동전을 동시에 던질 때, 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$

이 시행을 5번 반복할 때, 모두 앞면이 x번 나온다고 하면 그 외의 경우는 $(5-x)$번 나온다. 이때 점 P의 좌표는

$1\times x+(-1)\times(5-x)=2x-5$

점 P의 좌표가 3이어야 하므로 $2x-5=3$

$2x=8 \qquad \therefore x=4$

따라서 2개의 동전 모두 앞면이 나오는 경우가 4번, 그 외의 경우는 1번 나와야 하므로 그 확률은

${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{15}{1024}$ 답 ③

변형유형 집중공략 p.98~99

1-1 코딩 수업을 신청한 남학생 수를 n이라 하면 코딩 수업을 신청한 여학생 수는 $17-n$

(단위: 명)

	빅데이터	코딩	합계
남학생	10	n	$10+n$
여학생	6	$17-n$	$23-n$
합계	16	17	33

임의로 택한 한 명이 코딩 수업을 신청한 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{8}{17}$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{17}{33}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n}{33}$

이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{n}{33}}{\frac{17}{33}}=\frac{n}{17}=\frac{8}{17} \qquad \therefore n=8$

따라서 이 학급의 여학생 수는 $23-8=15$이다. 답 15

1-2 남학생 수는 $185+85=270$

전체 학생이 500명이므로 여학생 수는 $500-270=230$

영화반을 선택한 여학생 수를 n이라 하면 연극반을 선택한 여학생 수는 $230-n$

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
영화반	85	n	$85+n$
연극반	185	$230-n$	$415-n$
합계	270	230	500

임의로 택한 한 명이 여학생인 사건을 A, 연극반을 선택한 학생인 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{230}{500}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{230-n}{500}$

이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{230-n}{500}}{\frac{230}{500}}=\frac{230-n}{230}$

즉 $\frac{230-n}{230}=\frac{3}{10}$이므로

$230-n=69 \qquad \therefore n=161$

따라서 영화반을 선택한 여학생 수는 161이다. 답 161

2-1 갑이 당첨되지 않는 사건을 A, 을이 당첨되는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이고

18장 중 당첨 복권이 아닌 복권은 15장이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{18}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{18}$

갑이 당첨되지 않고 을은 당첨될 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{15}{18}\times\frac{3}{17}=\frac{5}{34}$$

갑이 당첨되고 을도 당첨될 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{18}\times\frac{2}{17}=\frac{1}{51}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{5}{34}+\frac{1}{51}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{5}{34}}{\frac{1}{6}}=\frac{15}{17}$ 답 ④

2-2 인터넷에서 임의로 찾은 후기가 여성이 작성한 후기인 사건을 A, '제공'이라는 단어를 포함하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이고

$\mathrm{P}(A)=0.7$, $\mathrm{P}(A^C)=0.3$

$\mathrm{P}(E|A)=0.5$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.6$

인터넷에서 임의로 찾은 후기가 여성이 작성한 후기이고 '제공'이라는 단어를 포함할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.7\times0.5=0.35$

남성이 작성한 후기이고 '제공'이라는 단어를 포함할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=0.3\times0.6=0.18$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=0.35+0.18=0.53$$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.35}{0.53}=\frac{35}{53}$ 답 ⑤

서술형 What & How

p.100~101

1 오늘 비가 올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 오늘 비가 오지 않을 확률은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이다. 또 비가 오지 않은 날의 다음 날에도 비가 오지 않을 확률이 $\frac{5}{8}$이므로 비가 오지 않은 날의 다음 날 비가 올 확률은 $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$이다.

오늘 비가 오고 내일도 비가 올 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$ …… ❶

오늘 비가 오지 않고 내일 비가 올 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$ …… ❷

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$

즉 $p=24$, $q=7$이므로

$p+q=24+7=31$ …… ❸

답 31

다른풀이 오늘 비가 오는 사건을 A, 내일 비가 오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이고

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(B|A^C)=1-\mathrm{P}(B^C|A^C)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{24}\end{aligned}$$

2 (적어도 한 번은 명중시킬 확률)

$=1-$(첫 번째도 두 번째도 명중시키지 못할 확률) …… ㉠

첫 번째 시도에 명중시키지 못할 확률은

$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ …… ❶

첫 번째 시도에 명중시키지 못하고, 두 번째 시도에서도 명중시키지 못할 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ …… ❷

따라서 구하는 확률은 ㉠에서

$1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

즉 $p=12$, $q=11$이므로

$p+q=12+11=23$ …… ❸

답 23

채점기준	배점
❶ 첫 번째 시도에 명중시키지 못할 확률 구하기	2
❷ 첫 번째 시도에 명중시키지 못하고, 두 번째 시도에서도 명중시키지 못할 확률 구하기	2
❸ 적어도 한 번은 명중시킬 확률을 구하고 $p+q$의 값 구하기	1

다른풀이 사격 선수가 첫 번째 시도에서 명중시키는 사건을 A, 두 번째 시도에서 명중시키는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)$이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}\end{aligned}$$

3 6차전에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 5차전까지 3승 2패를 하고, 6차전에서 이겨야 한다.

한 경기에서 A팀, B팀이 서로를 이길 확률은 각각 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$이므로

6차전에서 A팀이 우승할 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{160}{3^6}$ …… ❶

6차전에서 B팀이 우승할 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{40}{3^6}$ …… ❷

따라서 6차전에서 우승팀이 결정될 확률은

$\frac{160}{3^6}+\frac{40}{3^6}=\frac{200}{3^6}$ $\quad\therefore k=200$ …… ❸

답 200

4 (ⅰ) A팀이 4차전에서 우승할 확률

${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{2^8}$ …… ❶

(ⅱ) A팀이 5차전에서 우승할 확률

4차전까지 3승 1패 후 5번째 경기에서 이기면 되므로

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\frac{1}{4}=\frac{4\times3}{4^5}=\frac{3}{4^4}=\frac{3}{2^8}$ …… ❷

(ⅲ) A팀이 6차전에서 우승할 확률

5차전까지 3승 2패 후 6번째 경기에서 이기면 되므로

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{10\times9}{4^6}=\frac{10\times9}{2^{12}}=\frac{45}{2^{11}}$ …… ❸

(ⅳ) A팀이 7차전에서 우승할 확률

6차전까지 3승 3패 후 7번째 경기에서 이기면 되므로

${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\frac{1}{4}=\frac{20\times27}{4^7}=\frac{20\times27}{2^{14}}=\frac{135}{2^{12}}$ …… ❹

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^8}+\frac{3}{2^8}+\frac{45}{2^{11}}+\frac{135}{2^{12}}&=\frac{2^4}{2^{12}}+\frac{3\times2^4}{2^{12}}+\frac{45\times2}{2^{12}}+\frac{135}{2^{12}}\\&=\frac{289}{2^{12}}\end{aligned}$$ …… ❺

$\therefore k=289$

답 289

채점기준	배점
❶ A팀이 4번째 경기에서 우승할 확률 구하기	1
❷ A팀이 5번째 경기에서 우승할 확률 구하기	1
❸ A팀이 6번째 경기에서 우승할 확률 구하기	1
❹ A팀이 7번째 경기에서 우승할 확률 구하기	1
❺ A팀이 우승할 확률과 k의 값 구하기	2

실전 문제 | 1회

p.102~105

01 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{2}{3}$에서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{2}\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1}{4}$에서 $\mathrm{P}(A)=4\mathrm{P}(A\cap B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\dfrac{5}{6}=4\mathrm{P}(A\cap B)+\dfrac{3}{2}\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\dfrac{9}{2}\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{5}{6}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{5}{27}$

답 ③

02 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: %)

몸체 \ 뚜껑	파란색	노란색	합계
빨간색	a	$60-a$	60
검은색	$75-a$	$a-35$	40
합계	75	25	100

임의로 택한 1개의 물병의 뚜껑이 노란색인 사건을 A, 몸체가 빨간색인 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{3}{5}$이고

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{25}{100}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{60-a}{100}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{60-a}{100}}{\frac{25}{100}}=\dfrac{60-a}{25}$$

즉 $\dfrac{60-a}{25}=\dfrac{3}{5}$이므로 $60-a=15$

$\therefore a=45$

답 ⑤

03 ab가 6의 배수인 사건을 A, $a=3$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 전체 경우의 수는 $6\times6=36$

ab가 6의 배수인 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$ab=6$인 경우: $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$

$ab=12$인 경우: $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$

$ab=18$인 경우: $(3, 6)$, $(6, 3)$

$ab=24$인 경우: $(4, 6)$, $(6, 4)$

$ab=30$인 경우: $(5, 6)$, $(6, 5)$

$ab=36$인 경우: $(6, 6)$

의 15가지이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{15}{36}$

ab가 6의 배수이면서 $a=3$인 경우는 $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(3, 6)$의 3가지이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}}=\dfrac{1}{5}$$

답 ①

04 12개의 제비 중 임의로 2개의 제비를 뽑을 때, 당첨 제비가 1개 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 당첨 제비가 하나도 나오지 않는 사건이고, 2등 당첨 제비가 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

12개의 제비 중 임의로 2개의 제비를 뽑을 때, 당첨 제비가 하나도 나오지 않을 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\dfrac{15}{66}=\dfrac{5}{22}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{5}{22}=\dfrac{17}{22}$

당첨 제비가 1개 이상 나오고 그 당첨 제비 중 2등 당첨 제비도 있을 확률은 2등 당첨 제비 1장과 다른 제비 1장이 나오거나 2등 당첨 제비가 2장 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\dfrac{35+10}{66}=\dfrac{15}{22}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{15}{22}}{\frac{17}{22}}=\dfrac{15}{17}$$

답 ④

05 9명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $9!$

갑과 을을 이웃하게 세우는 사건을 A, 을과 병을 이웃하게 세우는 사건을 B라 하면

갑과 을을 이웃하게 일렬로 셍우는 경우의 수는

갑, 을을 1명으로 생각하여 8명을 일렬로 세우는 경우의 수가 $8!$

갑과 을이 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!=2$이므로

$8!\times2$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{8!\times2}{9!}=\dfrac{2}{9}$

갑과 을이 이웃하게, 을과 병이 이웃하게 세우는 경우는 을의 양 옆에 갑과 병을 각각 세우는 경우이다.

따라서 갑과 을이 이웃하게, 을과 병이 이웃하게 세우는 경우의 수는 갑, 을, 병을 한 명으로 생각하여 7명을 일렬로 세우는 경우의 수가 $7!$

갑과 병이 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!=2$이므로

$7!\times2$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{7!\times2}{9!}=\dfrac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{8}$$

답 ①

06 함수 $f: X\longrightarrow Y$의 개수는 ${}_6\Pi_3=6^3=216$

임의로 택한 함수 f가 $f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족시키는 사건을 A, $f(1)=3$ 또는 $f(3)=6$을 만족시키는 사건을 B라 하면

$f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_6\mathrm{H}_3={}_{6+3-1}\mathrm{C}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{56}{216}$

(i) $f(1) \le f(2) \le f(3)$이고 $f(1)=3$인 함수의 개수

$3 \le f(2) \le f(3)$이므로 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉

${}_4\mathrm{H}_2 = {}_{4+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$

(ii) $f(1) \le f(2) \le f(3)$이고 $f(3)=6$인 함수의 개수

$f(1) \le f(2) \le 6$이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉

${}_6\mathrm{H}_2 = {}_{6+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_7\mathrm{C}_2 = 21$

(iii) $f(1) \le f(2) \le f(3)$이고 $f(1)=3$, $f(3)=6$인 함수의 개수

$3 \le f(2) \le 6$이므로 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 5, 6의 4개

(i), (ii), (iii)에서 $f(1) \le f(2) \le f(3)$이고 $f(1)=3$ 또는 $f(3)=6$인 함수의 개수는

$10+21-4=27$

$\therefore \mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{27}{216}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{27}{216}}{\frac{56}{216}} = \frac{27}{56}$$

답 ④

07 꺼낸 공 중 적어도 한 개가 검은 공인 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)$이고, A^C는 꺼낸 공이 모두 흰 공인 사건이다. 또 한 개의 주사위를 한 번 던져서 2의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 B^C는 2의 약수가 아닌 눈이 나오는 사건이다.

(i) 한 개의 주사위를 한 번 던져서 2의 약수의 눈이 나올 확률은

$\mathrm{P}(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

공 2개를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률은

$\mathrm{P}(A^C|B) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

따라서 2의 약수의 눈이 나오고 모두 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C|B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{36}$

(ii) 한 개의 주사위를 한 번 던져서 2의 약수가 아닌 눈이 나올 확률은

$\mathrm{P}(B^C) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

공 3개를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률은

$\mathrm{P}(A^C|B^C) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{20}{84} = \dfrac{5}{21}$

따라서 2의 약수가 아닌 눈이 나오고 모두 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C \cap B^C) = \mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A^C|B^C) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{21} = \dfrac{10}{63}$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C) &= \mathrm{P}(A^C \cap B) + \mathrm{P}(A^C \cap B^C) \\ &= \frac{5}{36} + \frac{10}{63} = \frac{25}{84}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \dfrac{25}{84} = \dfrac{59}{84}$

답 ②

참고 (적어도 한 개가 검은 공일 확률)

$=1-$(모두 흰 공이 나올 확률)

$= 1 - \left(\dfrac{1}{3} \times \dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} \right)$

$= 1 - \dfrac{25}{84} = \dfrac{59}{84}$

와 같이 계산할 수 있다.

08 7번째 시행 후 시행을 멈추려면 6번째 시행까지 홀수가 적힌 공 3개, 짝수가 적힌 공 3개를 꺼내고, 7번째 시행에서 짝수가 적힌 공을 꺼내야 한다.

6번째 시행까지 홀수가 적힌 공 3개, 짝수가 적힌 공 3개를 꺼내는 사건을 A, 7번째 시행에서 짝수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A \cap B)$이다.

6번째 시행까지 홀수가 적힌 공 3개, 짝수가 적힌 공 3개가 나오는 순서를 정하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3! \times 3!} = 20$

홀수가 적힌 공, 짝수가 적힌 공이 나오는 순서가 정해졌을 때, 홀수가 적힌 공을 3번, 짝수가 적힌 공을 3번 꺼낼 확률은

$\dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} \times \dfrac{3}{7} \times \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{42}$

$\therefore \mathrm{P}(A) = 20 \times \dfrac{1}{42} = \dfrac{10}{21}$

이때 남은 공은 홀수가 적힌 공 2개, 짝수가 적힌 공 1개이므로 6번째 시행까지 홀수가 적힌 공 3개, 짝수가 적힌 공 3개를 꺼냈을 때, 7번째 시행에서 짝수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{10}{21} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{63}$

답 ④

09 보석이 가품인 사건을 A, 보석을 진품으로 감별하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이고

보석이 진품인 사건은 A^C, 보석을 가품으로 감별하는 사건은 E^C이므로

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A^C) = \dfrac{7}{10}$

$\mathrm{P}(E^C|A^C) = \dfrac{2}{100}$, $\mathrm{P}(E|A) = \dfrac{3}{100}$

따라서 보석이 진품일 때, 그 보석을 진품으로 감별할 확률은

$\mathrm{P}(E|A^C) = 1 - \mathrm{P}(E^C|A^C) = 1 - \dfrac{2}{100} = \dfrac{98}{100}$

보석이 가품이고, 그 보석을 진품으로 감별할 확률은

$\mathrm{P}(A \cap E) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{3}{100} = \dfrac{9}{1000}$

보석이 진품이고, 그 보석을 진품으로 감별할 확률은

$\mathrm{P}(A^C \cap E) = \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{98}{100} = \dfrac{686}{1000}$

이므로 보석을 진품으로 감별할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E) &= \mathrm{P}(A \cap E) + \mathrm{P}(A^C \cap E) \\ &= \frac{9}{1000} + \frac{686}{1000} = \frac{695}{1000}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{9}{1000}}{\frac{695}{1000}}=\frac{9}{695}$$ 답 ③

10 갑이 가위를 내는 사건을 A, 바위를 내는 사건을 B, 보를 내는 사건을 C, 갑이 이기는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|E)$이다.

갑이 가위를 내고 이길 확률은 갑이 가위, 을이 보를 낼 확률이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=0.2\times 0.4=0.08$

갑이 바위를 내고 이길 확률은 갑이 바위, 을이 가위를 낼 확률이므로

$\mathrm{P}(B\cap E)=0.5\times 0.3=0.15$

갑이 보를 내고 이길 확률은 갑이 보, 을이 바위를 낼 확률이므로

$\mathrm{P}(C\cap E)=0.3\times 0.3=0.09$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$

$=0.08+0.15+0.09=0.32$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.15}{0.32}=\frac{15}{32}$$ 답 ③

11 두 사건 A, B가 독립이면 A^C와 B^C, A와 B^C도 각각 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}$ ······㉠

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{5}$ ······㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{\mathrm{P}(A^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{5}{2}$, $\frac{1-\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{5}{2}$

$1-\mathrm{P}(A)=\frac{5}{2}\mathrm{P}(A)$, $-\frac{7}{2}\mathrm{P}(A)=-1$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2}{7}$

이것을 ㉡에 대입하면

$\frac{2}{7}\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{10}$

$1-\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{7}+\frac{3}{10}=\frac{41}{70}$ 답 ④

12 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \dots, 12\}$

ㄱ. $A_2=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $A_4=\{4, 8, 12\}$,

$A_2\cap A_4=\{4, 8, 12\}$이므로

$\mathrm{P}(A_4)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A_2\cap A_4)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$$\therefore \mathrm{P}(A_2|A_4)=\frac{\mathrm{P}(A_2\cap A_4)}{\mathrm{P}(A_4)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=1 \text{ (참)}$$

ㄴ. $A_4=\{4, 8, 12\}$, $A_{10}=\{10\}$이므로 $A_4\cap A_{10}=\varnothing$

즉 두 사건 A_4, A_{10}은 서로 배반사건이다. (참)

ㄷ. $A_2=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $A_3=\{3, 6, 9, 12\}$,

$A_2\cap A_3=\{6, 12\}$이므로

$\mathrm{P}(A_2)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A_3)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(A_2\cap A_3)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A_2\cap A_3)=\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3)$이므로 두 사건 A_2, A_3은 서로 독립이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

다른풀이 ㄱ. 4의 배수는 2의 배수이므로 $A_4\subset A_2$

즉 $A_4\cap A_2=A_4$이므로

$\mathrm{P}(A_2|A_4)=\frac{\mathrm{P}(A_2\cap A_4)}{\mathrm{P}(A_4)}=\frac{\mathrm{P}(A_4)}{\mathrm{P}(A_4)}=1$ (참)

참고 ㄷ에서 집합 $A_2\cap A_3$은 2와 3의 공배수, 즉 6의 배수의 집합이므로 $A_2\cap A_3=A_6$

13 1, 2, 3차전 결과 A팀이 2승 1패로 앞서다가 4, 5, 6차전에서 1승 2패를 하고, 7차전에서 B팀이 이겨야 하므로

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{2^4\times3^5}{5^7}$$

따라서 $a=4$, $b=5$이므로

$ab=4\times5=20$ 답 ⑤

14 1개의 동전을 한 번 던져서 앞면과 뒷면이 나오는 확률은 각각 $\frac{1}{2}$로 같다. 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되어야 하므로 5번째 시행 후에는 7, 4번째 시행 후에는 6이어야 한다.

이때 4번째 시행 후에 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6이 되기 위해서는 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나와야 하고, 6번째 시행 후 처음으로 8이 되어야 하므로 첫 번째와 두 번째 모두 연달아서 앞면이 나오는 경우를 제외해야 한다. 또 5번째, 6번째 시행에서는 모두 앞면이 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\left\{({}_4\mathrm{C}_2-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{64}$$ 답 ③

15 동전 1개를 7번 던져서 앞면이 n ($n=0, 1, 2, \dots, 7$)번, 뒷면이 $(7-n)$번 나왔을 때, 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(1\times n+1\times(7-n), 1\times(7-n))$, 즉 $\mathrm{P}(7, 7-n)$

$\therefore a=7, b=7-n$

이때 $a+b=7+(7-n)=-n+14$가 4의 배수이어야 하므로

$n=2$ 또는 $n=6$

즉 동전 1개를 7번 던져서 앞면이 2번 또는 6번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_7\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{21}{128}+\frac{7}{128}=\frac{7}{32}$$ 답 ②

16 연필 2자루를 가져갈 확률은 1개의 주사위를 한 번 던질 때 2 이하의 눈이 나올 확률이므로

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

즉 연필 1자루를 가져갈 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

병이 연필 2자루를 가져가려면 갑, 을이 가져가는 연필의 수의 합이 3 이하이어야 한다.

(ⅰ) 갑이 1자루, 을이 1자루, 병이 2자루를 가져갈 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

(ⅱ) 갑이 2자루, 을이 1자루, 병이 2자루를 가져갈 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

(ⅲ) 갑이 1자루, 을이 2자루, 병이 2자루를 가져갈 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{4}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}=\frac{8}{27}$

답 ⑤

17 주머니에서 공 1개를 꺼낼 때, 빨간 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$

공을 꺼내는 시행을 6번 반복할 때, 빨간 공이 n번 나온다고 하면 파란 공은 $(6-n)$번 나오므로 점수는

$1\times n+3\times(6-n)=-2n+18$

이때 14점을 얻어야 하므로

$-2n+18=14,\ -2n=-4 \qquad \therefore n=2$

즉 6번의 시행을 반복할 때 빨간 공이 2번, 파란공이 4번 나와야 하므로

${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{15\times2^2\times3^4}{5^6}=\frac{2^2\times3^5}{5^5}$

따라서 $p=2,\ q=5,\ r=5$이므로

$p+q+r=2+5+5=12$

답 ④

18 (1) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{1}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{5} \qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{20}$

$\therefore m=20$ …… ❶

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

에서

$\frac{1}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{P}(A)$

$\frac{4}{5}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{20} \qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{16}$

$\therefore n=16$ …… ❷

답 (1) 20 (2) 16

채점기준	배점
❶ m의 값 구하기	3
❷ n의 값 구하기	3

19 임의로 꺼낸 모자가 검은색 모자인 사건을 A, 검은색 모자라고 대답하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이다.

A^C는 임의로 꺼낸 모자가 흰색 모자인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

모자의 색에 대해 거짓말을 할 확률은

$\mathrm{P}(E|A^C)=\mathrm{P}(E^C|A)=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$

모자의 색에 대해 참을 말할 확률은

$\mathrm{P}(E|A)=\mathrm{P}(E^C|A^C)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$

꺼낸 모자가 검은색 모자이고 검은색 모자라고 참을 말할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{5}$ …… ❶

꺼낸 모자가 흰색 모자이고 검은색 모자라고 거짓말을 할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{30}$ …… ❷

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\frac{1}{5}+\frac{7}{30}=\frac{13}{30}$ …… ❸

$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{13}{30}}=\frac{6}{13}$

따라서 $p=13,\ q=6$이므로

$p+q=13+6=19$ …… ❹

답 19

채점기준	배점
❶ 임의로 꺼낸 모자가 검은색 모자인 사건을 A, 검은색 모자라고 대답하는 사건을 E라 할 때, $\mathrm{P}(A\cap E)$의 값 구하기	2
❷ $\mathrm{P}(A^C\cap E)$의 값 구하기	2
❸ $\mathrm{P}(E)$의 값 구하기	2
❹ $\mathrm{P}(A\|E)$의 값과 $p+q$의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.106~109

01 임의로 택한 한 명이 단체 줄넘기 경기에 참가하는 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{15}$

단체 줄넘기에 참가하는 학생 수는

$(b-5)+(3a+5)=3a+b$

이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3a+b}{28}$

또 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{b-5}{28}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{b-5}{28}}{\frac{3a+b}{28}}=\frac{b-5}{3a+b}$

즉 $\frac{b-5}{3a+b}=\frac{7}{15}$이므로 $15b-75=21a+7b$

$\therefore 21a-8b=-75$ …… ㉠

학급 학생이 총 28명이므로

$b-5+(3a+5)+(2b-15)+4a=28$

$\therefore 7a+3b=43$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=12$

$\therefore a+b=1+12=13$ 답 ③

02 전체 학생 수는 $50+70=120$

축구를 선택한 학생 수는 $120\times\frac{2}{3}=80$

야구를 선택한 학생 수는 $120-80=40$

전체 학생 중 임의로 뽑은 1명이 축구를 선택한 남학생일 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 축구를 선택한 남학생 수는

$120\times\frac{1}{2}=60$

따라서 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	여학생	남학생	합계
축구	20	60	80
야구	30	10	40
합계	50	70	120

임의로 뽑은 1명이 야구를 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{40}{120}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{30}{120}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{30}{120}}{\frac{40}{120}}=\frac{3}{4}$$ 답 ③

03 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

한 개의 주사위를 두 번 던져서 주사위의 눈의 수 4가 한 번도 나오지 않는 사건을 A, 나온 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}{36}=\frac{25}{36}$

주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례대로 a, b라 할 때, $a\neq4$, $b\neq4$이고 $a+b$가 4의 배수인 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$a+b=4$일 때

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

$a+b=8$일 때

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$의 4개

$a+b=12$일 때

$(6, 6)$의 1개

이므로 $3+4+1=8$(개)

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{8}{36}}{\frac{25}{36}}=\frac{8}{25}$$ 답 ⑤

04 X에서 X로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_5=5^5$

함수 $f: X\longrightarrow X$ 중에서 임의로 택한 함수가 $f(1)=3$을 만족시키는 사건을 A, $f(2)+f(3)=6$을 만족시키는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$f(1)=3$인 함수의 개수는 ${}_5\Pi_4=5^4$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{5^4}{5^5}=\frac{1}{5}$

한편 $f(1)=3$이고 $f(2)+f(3)=6$인 함수의 개수는

$f(2)$, $f(3)$의 순서쌍 $(f(2), f(3))$이

$(1, 5)$, $(5, 1)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(3, 3)$의 5개

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수가 ${}_5\Pi_2=5^2=25$이므로

$5\times25=125$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{125}{5^5}=\frac{1}{25}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}$$ 답 ②

05 세 번째 검사에서 검사가 끝날 확률은 두 번째 검사까지 불량품이 1개만 나오고, 세 번째에 불량품이 나올 확률이므로

(i) 첫 번째에 불량품, 두 번째에 불량품이 아닌 제품, 세 번째에 불량품이 나올 확률은

$\frac{2}{20}\times\frac{18}{19}\times\frac{1}{18}=\frac{1}{190}$

(ii) 첫 번째에 불량품이 아닌 제품, 두 번째에 불량품, 세 번째에 불량품이 나올 확률은

$\frac{18}{20}\times\frac{2}{19}\times\frac{1}{18}=\frac{1}{190}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{190}+\frac{1}{190}=\frac{1}{95}$ 답 ①

다른풀이 첫 번째, 두 번째 검사에서 불량품을 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하고, 두 번째 검사까지 1개의 불량품만 꺼내는 사건을 C, 세 번째 검사에서 불량품을 꺼내는 사건을 D라 하면 세 번째 검사에서 검사가 끝날 확률은 $\mathrm{P}(C\cap D)$이고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C)&=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{2}{20}\times\frac{18}{19}+\frac{18}{20}\times\frac{2}{19}=\frac{18}{95}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(D|C)=\frac{1}{18}$

$\therefore \mathrm{P}(C\cap D)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D|C)=\frac{18}{95}\times\frac{1}{18}=\frac{1}{95}$

06 갑이 당첨 복권이 아닌 것을 뽑는 사건을 A, 을이 당첨 복권을 뽑는 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{30}$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{10-n}{10}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{10-n}{10}\times\frac{n}{9}=\frac{n(10-n)}{90}$

즉 $\frac{n(10-n)}{90}=\frac{7}{30}$이므로 $n(10-n)=21$

$n^2-10n+21=0$, $(n-3)(n-7)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=7$

따라서 모든 자연수 n의 값의 곱은

$3\times7=21$ 답 ②

07 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10개의 공에서 임의로 한 개의 공을 꺼냈을 때 3의 배수, 즉 3, 6, 9가 적힌 공이 나오는 사건을 A, 동전의 앞면이 3번 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{7}{10}$

$\mathrm{P}(B|A)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

$\mathrm{P}(B|A^C)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\frac{3}{10}\times\frac{5}{16}+\frac{7}{10}\times\frac{1}{8}=\frac{29}{160}$ 답 ②

다른풀이 상자에서 3의 배수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 5번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$\frac{3}{10}\times{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{10}\times\frac{10}{32}=\frac{3}{32}$

상자에서 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 3번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$\frac{7}{10}\times{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{7}{80}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{32}+\frac{7}{80}=\frac{29}{160}$

08 갑과 을이 꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건은 네 장의 카드에 적힌 수 중 적어도 하나가 짝수인 사건이다. 따라서 A^C은 네 장의 카드에 적힌 수가 모두 홀수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{5}{126}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{126}=\frac{121}{126}$

꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수이면서 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 홀수일 확률은

갑이 홀수와 짝수가 적힌 카드를 한 장씩 꺼내고, 을은 두 장 모두 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률이

$\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{10}{63}$

갑이 두 장 모두 짝수가 적힌 카드를 꺼내고, 을은 두 장 모두 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률이

$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{5}{63}$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{63}+\frac{5}{63}=\frac{5}{21}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{21}}{\frac{121}{126}}=\frac{30}{121}$ 답 ⑤

09 용의자의 진술이 진실인 사건을 A, 프로파일러가 거짓으로 판단하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이다.

A^C는 용의자의 진술이 거짓인 사건, E^C는 프로파일러가 진실로 판단하는 사건이므로

$\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{9}{10}$, $\mathrm{P}(E^C|A)=\frac{19}{20}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$ $\leftarrow \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

따라서 프로파일러가 진실을 거짓으로 판단할 확률은

$\mathrm{P}(E|A)=1-\mathrm{P}(E^C|A)=1-\frac{19}{20}=\frac{1}{20}$

용의자가 진실을 진술하고, 프로파일러가 거짓으로 판단할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{60}$

용의자가 거짓을 진술하고, 프로파일러가 거짓으로 판단할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}=\frac{3}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{1}{60}+\frac{3}{5}=\frac{37}{60}$

$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{60}}{\frac{37}{60}}=\frac{1}{37}$ 답 ④

10 A, B만 10점을 쏠 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{12}$

A, C만 10점을 쏠 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{36}$

B, C만 10점을 쏠 확률은

$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{24}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{12}+\frac{5}{36}+\frac{5}{24}=\frac{31}{72}$ 답 ③

11 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내서 색을 확인할 때, 2개의 공의 색이 같을 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{3}{7}$

이므로 2개의 공의 색이 서로 다를 확률은

$1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

이 시행을 반복할 때, 시행이 4회에서 끝나려면 3회, 4회에 같은 색의 공이 나와야 하고, 2회에는 서로 다른 색의 공이 나와야 한다. 또 1회에는 무엇이 나와도 상관없다.

따라서 구하는 확률은

$1\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{36}{7^3}$ $\therefore k=36$

답 ⑤

12 전체 학생 600명 중 임의로 택한 한 명이 1학년 학생인 사건을 A, 체험 학습 실시에 찬성하는 학생인 사건을 B라 하고, 1학년 학생 중 체험 학습 실시에 찬성하는 학생을 x명이라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{280}{600}=\frac{7}{15}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{450}{600}=\frac{3}{4}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{x}{600}=\frac{7}{15}\times\frac{3}{4}$ $\therefore x=210$

(단위: 명)

	찬성	반대	합계
1학년	210	a	280
2학년	b		320
합계	450	150	600

1학년 학생이 280명이므로

$210+a=280$ $\therefore a=70$

체험 학습 실시에 찬성하는 학생이 450명이므로

$210+b=450$ $\therefore b=240$

$\therefore a+b=70+240=310$

답 ①

13 한 개의 주사위를 1번 던져서 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

주사위를 7번 던졌을 때 홀수가 n $(n=0, 1, 2, \dots, 7)$번 나온다고 하면 짝수는 $(7-n)$번 나오고, 이때 받을 수 있는 금액은

$200n+(-100)\times(7-n)=300n-700$(원)

이 금액이 1100원 이상이어야 하므로

$300n-700\geq1100$

$300n\geq1800$ $\therefore n\geq6$

즉 주사위를 7번 던졌을 때 홀수가 6번 이상 나와야 하므로 홀수가 6번 또는 7번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

${}_7\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_7\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{7}{128}+\frac{1}{128}=\frac{1}{16}$

답 ②

14 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 5의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

주사위를 6번 던질 때, 5의 약수의 눈이 n $(n=0, 1, 2, \dots, 5)$번 나온다고 하면 5의 약수가 아닌 눈은 $(6-n)$번 나오고 이때 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(1\times n+(-2)\times(6-n),\ 2\times n+(-1)\times(6-n))$

$\therefore \mathrm{P}(3n-12,\ 3n-6)$

점 P가 직선 $y=12-x$ 위에 있어야 하므로

$3n-6=12-(3n-12)$, $3n-6=12-3n+12$

$6n=30$ $\therefore n=5$

즉 5의 약수의 눈이 5번, 5의 약수가 아닌 눈이 1번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

${}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{6\times2}{3^6}=\frac{4}{243}$

답 ③

15 앞면에 3, 뒷면에 4가 적힌 동전을 세 번 던질 때, 나올 수 있는 3개의 수의 합은

$3+3+3=9$, $3+3+4=10$, $3+4+4=11$, $4+4+4=12$

앞면에 5, 뒷면에 6이 적힌 동전을 세 번 던질 때, 나올 수 있는 3개의 수의 합은

$5+5+5=15$, $5+5+6=16$, $5+6+6=17$, $6+6+6=18$

이때 6개의 수의 합이 29가 되는 경우는

$11+18=29$, $12+17=29$

인 경우이다.

(i) 각 동전을 세 번씩 던져 나온 수의 합이 각각 11, 18인 경우

앞면에 3, 뒷면에 4가 적힌 동전을 세 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 $3+4+4=11$일 확률은 동전을 세 번 던져서 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나올 확률과 같으므로

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

앞면에 5, 뒷면에 6이 적힌 동전을 세 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 $6+6+6=18$일 확률은 동전을 세 번 던져서 앞면이 0번, 뒷면이 3번 나올 확률과 같으므로

${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

즉 각 동전을 세 번씩 던질 때 나온 수의 합이 각각 11, 18일 확률은

$\frac{3}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{64}$

(ii) 각 동전을 세 번씩 던져 나온 수의 합이 각각 12, 17인 경우

앞면에 3, 뒷면에 4가 적힌 동전을 세 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 $4+4+4=12$일 확률은 동전을 세 번 던져서 앞면이 0번, 뒷면이 3번 나올 확률과 같으므로

${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

앞면에 5, 뒷면에 6이 적힌 동전을 세 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 $5+6+6=17$일 확률은 동전을 세 번 던져서 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나올 확률과 같으므로

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

즉 각 동전을 세 번씩 던질 때 나온 수의 합이 각각 12, 17일 확률은

$\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{64}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{3}{32}$

답 ①

16 비가 온 날의 다음 날 비가 올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 비가 온 날의 다음 날 비가 오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$

또 비가 오지 않은 날의 다음 날 비가 오지 않을 확률이 $\frac{7}{10}$이므로 비가 오지 않은 날의 다음 날 비가 올 확률은 $\frac{3}{10}$

목요일에 비가 왔을 때, 금요일에 비가 오고 토요일에 비가 올 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

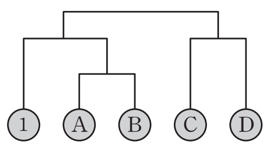
목요일에 비가 왔을 때, 금요일에 비가 오지 않고 토요일에 비가 올 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{9}+\frac{1}{5}=\frac{14}{45}$ 답 ③

17



4반과 5반이 결승전에서 만날 확률은

(i) 4반이 A 또는 B에, 5반이 C 또는 D에 배정될 때

4반은 4개의 자리 중 A 또는 B에 배정되고, 5반은 남은 3개의 자리 중 C 또는 D에 배정된다. 이때 4반은 1차전, 2차전을 모두 이겨야 하고, 5반은 1차전만 이기면 결승에 진출하므로

$\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$

(ii) 5반이 A 또는 B에, 4반이 C 또는 D에 배정될 때

(i)과 같은 방법으로 $\frac{1}{24}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$ 답 ④

참고 1반과 2반이 결승전에서 만날 확률

2반은 4개의 자리 중 C 또는 D에 배정되어야 하고, 1차전을 이기면 결승에 진출한다. 또 1반도 1차전을 이겨야 결승에 진출하므로

$\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

18 $\mathrm{P}(A)$는 첫 번째 던진 한 개의 동전이 앞면이 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)$는 한 개의 동전을 18번 던졌을 때 앞면이 k번 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(B)={}_{18}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{18-k}={}_{18}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{18}$ …… ❶

$\mathrm{P}(A\cap B)$는 첫 번째 던진 동전이 앞면이 나오고, 남은 17번 중 앞면이 $(k-1)$번 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\times{}_{17}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{17-(k-1)}$

$=\frac{1}{2}\times{}_{17}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{17}={}_{17}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{18}$ …… ❷

두 사건 A, B가 서로 독립이려면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이어야 하므로

${}_{17}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{18}=\frac{1}{2}\times{}_{18}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{18}$ …… ❸

${}_{17}\mathrm{C}_{k-1}=\frac{1}{2}\times{}_{18}\mathrm{C}_k$

$\frac{17!}{(k-1)!\{17-(k-1)\}!}=\frac{1}{2}\times\frac{18!}{k!(18-k)!}$

$\frac{17!}{(k-1)!(18-k)!}=\frac{1}{2}\times\frac{18!}{k!(18-k)!}$

$1=\frac{1}{2}\times\frac{18}{k}$ $\quad\therefore k=9$ …… ❹

답 9

채점기준	배점
❶ $\mathrm{P}(A)$를 구하고 $\mathrm{P}(B)$를 k에 대한 식으로 나타내기	1
❷ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 k에 대한 식으로 나타내기	2
❸ A, B가 서로 독립임을 이용하여 등식 세우기	1
❹ k의 값 구하기	2

19 19세 이하인 회원 수는 $a+(b+15)$이고 이것은 도서관 전체 회원 300명의 25 %이므로

$a+b+15=300\times\frac{25}{100}$

$\therefore a+b=60$ …… ㉠ …… ❶

도서관 전체 회원 300명 중에서 임의로 택한 1명이 남성인 사건을 A, 19세 이하인 사건을 B, 40세 이상인 사건을 C라 하면 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(C|A^C)$이고

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{a}{300}}{\frac{200}{300}}=\frac{a}{200}$

$\mathrm{P}(C|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{b}{300}}{\frac{100}{300}}=\frac{b}{100}$

이므로

$\frac{a}{200}=\frac{b}{100}$ $\quad\therefore a=2b$ ……㉡ …… ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=40$, $b=20$

$\therefore a-b=40-20=20$ …… ❸

답 20

채점기준	배점
❶ 도서관 전체 회원 중 19세 이하가 차지하는 비율이 25 %임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	2
❷ 두 조건부확률이 같음을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	3
❸ $a-b$의 값 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.110~114

1 $\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$에서 $1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A)$

$3\mathrm{P}(A)=1$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$ 답 ④

2 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{3}$에서 $\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$ …… ㉠

이때 $\mathrm{P}(B^C)=\frac{12}{25}\mathrm{P}(A^C)$를 ㉠에 대입하면

$\mathrm{P}(A^C)\times\frac{12}{25}\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{3}$, $\{\mathrm{P}(A^C)\}^2=\frac{25}{36}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{6}$ ($\because 0<\mathrm{P}(A^C)<1$)

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ 답 ①

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
한 개의 주사위를 두 번 던질 때 $a\times b$가 4의 배수인 사건을 A, $a+b\le7$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
$a\times b$가 4의 배수인 사건은 a, b가 모두 짝수이거나 a, b 중 하나는 4의 배수, 다른 하나는 홀수인 사건이다.
a, b가 모두 짝수인 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$
a, b 중 하나가 4의 배수, 다른 하나가 홀수인 경우의 수는
${}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times2=6$
따라서 $a\times b$가 4의 배수인 경우의 수는
$9+6=15$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{15}{36}$

한편 a, b가 모두 짝수일 때, $a+b\le7$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$의 3개
a, b 중 하나는 4의 배수, 다른 하나는 홀수일 때, $a+b\le7$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(4, 1)$, $(4, 3)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$의 4개
따라서 $a\times b$가 4의 배수이면서 $a+b\le7$인 경우의 수는
$3+4=7$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{15}{36}}=\frac{7}{15}$$ 답 ②

4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
한 개의 주사위를 두 번 던질 때 $a\times b$가 3의 배수인 사건을 A, $a+b\ge8$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
$a\times b$가 3의 배수인 사건, 즉 사건 A는 3 또는 6이 적어도 하나 나오는 사건이므로 A^C는 3과 6 중 어느 것도 나오지 않는 사건이고

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{36}=\frac{4}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

한편 $a\times b$가 3의 배수이면서 $a+b\ge8$인 순서쌍 (a, b)는
a만 3의 배수일 때 $(3, 5)$, $(6, 2)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$
b만 3의 배수일 때 $(5, 3)$, $(2, 6)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$
a, b 모두 3의 배수일 때 $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(6, 6)$
의 11개이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{11}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{11}{36}}{\frac{5}{9}}=\frac{11}{20}$$ 답 ⑤

5 한 개의 동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은 $\frac{1}{4}$,

앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률은 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

앞면이 나온 횟수가 2일 때만 카드를 뒤집으므로 문자 B가 보이도록 카드가 놓이려면 카드를 뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다.
즉 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행을 5번 할 때, 앞면이 나온 횟수가 2인 경우가 1번 또는 3번 또는 5번 나와야 한다.
따라서 구하는 확률은

$${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{31}{64}$$

$\therefore p=\frac{31}{64}$

$\therefore 128\times p=128\times\frac{31}{64}=62$ 답 62

6 한 개의 주사위를 한 번 던져 2의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$,

2의 약수가 아닌 눈이 나올 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

2의 약수의 눈이 나올 때에만 카드를 뒤집으므로 한 개의 주사위를 7번 던질 때, 문자 A가 그대로 보이도록 카드가 놓이려면 뒤집는 횟수가 짝수이어야 한다. 즉 2의 약수의 눈이 나오는 횟수가 0 또는 2 또는 4 또는 6이어야 한다.
따라서 구하는 확률은

$${}_7\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^7+{}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^5+{}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_7\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$=\frac{128}{3^7}+\frac{672}{3^7}+\frac{280}{3^7}+\frac{14}{3^7}=\frac{1094}{3^7}$$

$\therefore k=1094$ 답 1094

7 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 6의 약수의 눈이
n $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$번 나온다고 하면 6의 약수가 아닌 눈은 $(4-n)$번 나온다. 이때 점 P의 좌표는

$1 \times n = n$
이고, 점 P의 좌표가 2 이상이어야 하므로 $n \geq 2$에서 $n=2,\ 3,\ 4$이어야 한다.
즉 한 개의 주사위를 4번 던져 6의 약수의 눈이 2번 또는 3번 또는 4번 나와야 한다.
따라서 구하는 확률은
$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0$$
$$=\frac{24}{81}+\frac{32}{81}+\frac{16}{81}=\frac{8}{9}$$
답 ④

다른풀이 한 개의 주사위를 4번 던져 6의 약수의 눈이 2번 또는 3번 또는 4번 나오는 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)$이고, A^C는 6의 약수가 0번 또는 1번 나오는 사건이므로
$$\mathrm{P}(A^C)={}_4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{81}+\frac{8}{81}=\frac{1}{9}$$
$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

8 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 짝수일 확률은 $\frac{1}{2}$
한 개의 주사위를 6번 던질 때, 짝수의 눈이 n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 6)$번 나온다고 하면 홀수는 $(6-n)$번 나온다. 이때 점 P의 좌표는
$1 \times n+(-2)\times(6-n)=3n-12$
이고, 점 P의 좌표가 -6 이상이어야 하므로
$3n-12 \geq -6,\ 3n \geq 6 \qquad \therefore n \geq 2$
즉 한 개의 주사위를 6번 던져 짝수의 눈이 2번 이상 나와야 한다.
한 개의 주사위를 6번 던져 짝수의 눈이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 짝수의 눈이 1번 이하, 즉 0번 또는 1번 나오는 사건이므로
$$\mathrm{P}(A^C)={}_6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}=\frac{7}{64}$$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}$$
답 ①

9 전체 경우의 수는 4^5
4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 사건을 E, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이다.

위의 4개의 동전을 왼쪽부터 차례로 ①, ②, ③, ④번이라 하면
(i) 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는 $\leftarrow n(A\cap E)$
④번 동전만 5번 뒤집는 경우의 수가 1
④번 동전을 3번 뒤집고, ①, ②, ③번 동전 중에서 1개를 택하여 2번 뒤집는 경우의 수가
$${}_3C_1 \times \frac{5!}{3!\times 2!}=30$$
④번 동전을 1번 뒤집고, ①, ②, ③번 동전 중에서 1개를 택하여 4번 뒤집는 경우의 수가
$${}_3C_1 \times \frac{5!}{4!}=15$$
④번 동전을 1번 뒤집고, ①, ②, ③번 동전 중에서 서로 다른 2개를 택하여 각각 2번씩 뒤집는 경우의 수가
$${}_3C_2 \times \frac{5!}{2!\times 2!}=90$$
이므로 $1+30+15+90=136$
$$\therefore \mathrm{P}(A\cap E)=\frac{136}{4^5}$$
(ii) 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는 $\leftarrow n(A^C\cap E)$
①, ②, ③번 동전 중에서 1개를 택하여 3번, 나머지 2개를 각각 1번씩 뒤집는 경우의 수가
$${}_3C_1 \times \frac{5!}{3!}=60$$
①, ②, ③번 동전을 각각 1번씩 뒤집고 ④번 동전을 2번 뒤집는 경우의 수가
$$\frac{5!}{2!}=60$$
이므로 $60+60=120$
$$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{120}{4^5}$$
(i), (ii)에서
$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{136}{4^5}+\frac{120}{4^5}=\frac{256}{4^5}$$
$$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{136}{4^5}}{\frac{256}{4^5}}=\frac{17}{32}$$
답 ①

참고 (1) $A\subset E$이므로 $A\cap E=A$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)$
(2) 5번의 시행 후 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 사건은 $A^C\cap E$이다.
(3) (i), (ii)에서 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는
$n(E)=n(A\cap E)+n(A^C\cap E)=136+120=256$

10 전체 경우의 수는 4^3
4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는 시행을 3번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 사건을 E, 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이다.

위의 4개의 동전을 왼쪽부터 차례로 ①, ②, ③, ④번이라 하면

(i) 시행을 3번 반복한 후 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는 $\leftarrow n(A\cap E)$

①, ②, ③번 동전을 각각 1번씩 뒤집는 경우의 수이므로

$3!=6$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap E)=\frac{6}{4^3}$

(ii) 시행을 3번 반복한 후 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는 $\leftarrow n(A^C\cap E)$

④번 동전만 3번 뒤집는 경우의 수가 1

④번 동전을 1번, ①, ②, ③번 동전 중에서 1개를 택하여 2번 뒤집는 경우의 수가

${}_3\mathrm{C}_1\times\frac{3!}{2!}=9$

이므로 $1+9=10$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{10}{4^3}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{6}{4^3}+\frac{10}{4^3}=\frac{16}{4^3}$

$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{6}{4^3}}{\frac{16}{4^3}}=\frac{3}{8}$ 답 ⑤

참고 3번의 시행 후 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건은 $A^C\cap E$이다.

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.116~119

01 ${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

${}_3\Pi_2=3^2=9$

$\therefore {}_3\mathrm{H}_2+{}_3\Pi_2=6+9=15$ 답 ②

02 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5의 3개

백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 세 자리 홀수의 개수는

$3\times25=75$ 답 ③

03 A, B, C를 한 문자 X로 생각하면

X, X, X, D, E, F

를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!}=120$

양 끝의 X에 B, C가 오고, 가운데 X에 A가 오는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$ 답 ③

04 $(x^2-2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}(-2)^r={}_5\mathrm{C}_r(-2)^r x^{10-2r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 5)$

x^4항은 $10-2r=4$일 때이므로 $-2r=-6$ $\therefore r=3$

따라서 x^4의 계수는

${}_5\mathrm{C}_3\times(-2)^3=10\times(-8)=-80$ 답 ①

05 야구팀 전체 선수가 27명이므로

$(a+6)+4a+b+2b-1=27$

$\therefore 5a+3b=22$ ……㉠

임의로 택한 한 명이 투수인 사건을 A, 왼손을 쓰는 선수인 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}$이고

투수의 수는 $(a+6)+b=a+b+6$

왼손 투수의 수는 b이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{a+b+6}{27}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{b}{27}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서

$\frac{1}{3}=\frac{\frac{b}{27}}{\frac{a+b+6}{27}}$, $\frac{1}{3}=\frac{b}{a+b+6}$,

$3b=a+b+6$ $\therefore a-2b=-6$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=4$

$\therefore ab=2\times4=8$ 답 ③

06 success에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times2!}=420$

s끼리 이웃하지 않는 경우의 수는 먼저 4개의 문자 u, c, c, e를 일렬로 나열한 후 4개의 문자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 세 자리를 선택하여 s를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!}\times{}_5C_3=12\times10=120$

따라서 구하는 확률은

$\frac{120}{420}=\frac{2}{7}$ 답 ③

07 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $P(A\cup B)=4P(A)$에서

$P(A)+P(B)=4P(A)$

$-3P(A)=-P(B)$ $\quad\therefore P(A)=\frac{1}{3}P(B)$

이때 $P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이므로

$P(A)=\frac{1}{3}P(B)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ 답 ④

08 구하는 경우의 수는 A → P → B로 가는 경우의 수에서 A → P → Q → B로 가는 경우의 수를 빼면 된다.

A → P → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{8!}{5!\times3!}=6\times56=336$

A → P → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=6\times10\times3=180$

따라서 구하는 경우의 수는

$336-180=156$ 답 ②

09 커피, 녹차, 주스를 파는 카페에서 음료 m잔을 주문하는 경우의 수가 66이므로

${}_3H_m=66$

${}_{3+m-1}C_m=66$, ${}_{m+2}C_m=66$, ${}_{m+2}C_2=66$

$\frac{(m+2)(m+1)}{2\times1}=66$, $m^2+3m+2=132$

$m^2+3m-130=0$, $(m+13)(m-10)=0$

$\therefore m=10$ ($\because m$은 자연수)

따라서 커피, 녹차, 주스를 적어도 한 잔씩 포함하여 10잔을 주문하는 경우의 수는 커피, 녹차, 주스를 각각 한 잔씩 주문하고, 커피, 녹차, 주스 중에서 중복을 허용하여 남은 7잔을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$ 답 ③

10 ${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8=2^8$이므로

${}_8C_1+{}_8C_2+{}_8C_3+\cdots+{}_8C_8=2^8-{}_8C_0=2^8-1=255$

$\therefore a=255$

${}_{16}C_0+{}_{16}C_2+{}_{16}C_4+\cdots+{}_{16}C_{16}=2^{16-1}=2^{15}$

이므로 $b=15$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{255}{15}=17$ 답 ④

11 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 4, 6\}$, $C=\{1, 2\}$이므로

$A\cap B=\{4, 6\}$, $B\cap C=\{1\}$, $C\cap A=\{2\}$

ㄱ. $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$, $P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

즉 $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$이므로 독립이 아니다.

ㄴ. $P(B\cap C)=\frac{1}{6}$, $P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

즉 $P(B\cap C)=P(B)P(C)$이므로 서로 독립이다.

ㄷ. $P(C\cap A)=\frac{1}{6}$, $P(C)P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

즉 $P(C\cap A)=P(C)P(A)$이므로 서로 독립이다.

따라서 서로 독립인 사건은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

12 조건 (가)에서 $f(1)f(3)=1$ 또는 $f(1)f(3)=3$이므로

(i) $f(1)=f(3)=1$일 때

함수 f의 치역의 원소의 개수가 3이려면 정의역의 원소 2, 4에는 공역의 원소 2, 3, 4 중 서로 다른 2개가 각각 하나씩 대응해야 하므로 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 함수 f의 개수는 6

(ii) $f(1)=f(3)=3$일 때

(i)과 같은 방법으로 함수 f의 개수는 6

(iii) $f(1)=1$, $f(3)=3$일 때

공역의 원소 2, 4 중 치역의 원소가 될 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$ ……㉠

㉠에서 택한 원소를 a라 하면 치역이 $\{1, 3, a\}$이어야 하므로

$f(2)=f(4)=a$ 또는

$f(2)=a$, $f(4)=1$ 또는

$f(2)=a$, $f(4)=3$ 또는

$f(4)=a$, $f(2)=1$ 또는

$f(4)=a$, $f(2)=3$

이어야 한다.

따라서 함수 f의 개수는 $2\times5=10$

(iv) $f(1)=3$, $f(3)=1$일 때

(iii)과 같은 방법으로 함수 f의 개수는 10

(i)~(iv)에서 함수 f의 개수는

$6+6+10+10=32$ 답 ⑤

13 조건 (가), (나)에서 $(x_1, x_5)=(1, 6), (2, 5), (3, 4)$이므로

(i) $(x_1, x_5)=(1, 6)$일 때

$1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\leq 6$이므로 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$의 개

수는

$_6H_3 = {}_{6+3-1}C_3 = {}_8C_3 = 56$

(ii) $(x_1,\ x_5) = (2,\ 5)$일 때

$2 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le 5$이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는

$_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$

(iii) $(x_1,\ x_5) = (3,\ 4)$일 때

$3 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le 4$이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는

$_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$56 + 20 + 4 = 80$ 답 ①

14 4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 4개를 택해 만들 수 있는 문자열의 개수는 $_4\Pi_4 = 4^4 = 256$

(i) a가 한 개만 포함된 문자열의 개수는

$_4C_1 \times {}_3\Pi_3 = 4 \times 3^3 = 108$

(ii) b가 한 개만 포함된 문자열의 개수는

$_4C_1 \times {}_3\Pi_3 = 4 \times 3^3 = 108$

(iii) a, b가 각각 한 개씩 포함된 문자열의 개수는

$_4P_2 \times {}_2\Pi_2 = 12 \times 2^2 = 48$

(i), (ii), (iii)에서 a가 한 개만 포함되거나 b가 한 개만 포함된 문자열의 개수는

$108 + 108 - 48 = 168$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{168}{256} = \dfrac{21}{32}$ 답 ②

15 $x+y+z=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$

$x+y+z=8$일 때, $x+y \ge 3$인 사건을 A라 하면 A^C은 $x+y \le 2$인 사건이고

(i) $x+y=0$일 때

$z=8$이고, x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(0,\ 0)$의 1개

(ii) $x+y=1$일 때

$z=7$이고, x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$의 2개

(iii) $x+y=2$일 때

$z=6$이고, x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(0,\ 2)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 0)$의 3개

(i), (ii), (iii)에서 $x+y \le 2$인 경우의 수는

$1+2+3=6$

$\therefore\ P(A^C) = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \dfrac{2}{15} = \dfrac{13}{15}$ 답 ①

16 (i) 첫 번째 자유투를 성공시킨 후 두 번째 자유투도 성공시키고, 세 번째 자유투도 성공시킬 확률은

$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

(ii) 첫 번째 자유투를 성공시킨 후 두 번째 자유투는 실패하고, 세 번째 자유투는 성공시킬 확률은

$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{19}{36}$ 답 ④

17 (i) □24□ 꼴의 자연수의 개수

천의 자리, 일의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는

$_4\Pi_2 = 4^2 = 16$

이므로 16 …… ❶

(ii) □28□ 꼴의 자연수의 개수

(i)과 같은 방법으로 16 …… ❷

(iii) □48□ 꼴의 자연수의 개수

(i)과 같은 방법으로 16 …… ❸

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$16+16+16=48$ …… ❹

답 48

채점기준	배점
❶ 백의 자리의 숫자가 2, 십의 자리의 숫자가 4인 네 자리 자연수의 개수 구하기	2
❷ 백의 자리의 숫자가 2, 십의 자리의 숫자가 8인 네 자리 자연수의 개수 구하기	1
❸ 백의 자리의 숫자가 4, 십의 자리의 숫자가 8인 네 자리 자연수의 개수 구하기	1
❹ 네 자리 자연수의 개수 구하기	2

18 $21^{11} = (20+1)^{11}$

$= {}_{11}C_0 \times 20^{11} + {}_{11}C_1 \times 20^{10} \times 1^1 + {}_{11}C_2 \times 20^9 \times 1^2 + \cdots + {}_{11}C_{10} \times 20^1 \times 1^{10} + {}_{11}C_{11} \times 1^{11}$

…… ❶

이때 $_{11}C_0 \times 20^{11} + {}_{11}C_1 \times 20^{10} \times 1^1 + \cdots + {}_{11}C_9 \times 20^2 \times 1^9$은 40으로 나누어떨어지므로 21^{11}을 40으로 나누었을 때의 나머지는

$_{11}C_{10} \times 20^1 \times 1^{10} + {}_{11}C_{11} \times 1^{11} = 11 \times 20 + 1 = 221$

을 40으로 나누었을 때의 나머지와 같고, $221 = 40 \times 5 + 21$이므로 구하는 나머지는 21이다. …… ❷

답 21

채점기준	배점
❶ 이항정리를 이용하여 21^{11} 나타내기	2
❷ 조건을 만족시키는 나머지 구하기	3

19 A팀이 2승 무패로 앞서고 있으므로 B팀은 6차전 또는 7차전에서 우승할 수 있다.

한 경기에서 A팀, B팀이 서로를 이길 확률은 각각 $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{3}$이므로

(i) B팀이 6차전에서 우승할 확률

B팀이 3, 4, 5, 6차전을 모두 이겨야 하므로

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{81}$ …… ❶

(ii) B팀이 7차전에서 우승할 확률

B팀은 3, 4, 5, 6차전에서 3승 1패를 하고, 7차전에서 이겨야 하므로

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{8}{243} \quad \cdots\cdots ❷$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{81}+\frac{8}{243}=\frac{11}{243}$

따라서 $p=243$, $q=11$이므로

$p+q=243+11=254$ ⋯⋯ ❸

답 254

채점기준	배점
❶ B팀이 6차전에서 우승할 확률 구하기	2
❷ B팀이 7차전에서 우승할 확률 구하기	2
❸ 조건을 만족시키는 확률 구하기	1

20 주사위 한 개를 던져서 3의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ⋯⋯ ❶

주사위 한 개를 4번 던질 때, 3의 약수의 눈이 $n(n=0, 1, 2, 3, 4)$번 나왔다고 하면 3의 약수가 아닌 눈은 $4-n$번 나온다. 이때 점 P의 좌표는

$3\times n+(-1)(4-n)=4n-4$

이고, 점 P의 좌표가 4이어야 하므로

$4n-4=4$, $4n=8$ $\quad\therefore n=2$

즉 주사위 한 개를 4번 던져 3의 약수의 눈이 2번 나와야 하므로

⋯⋯ ❷

구하는 확률은 ${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$ ⋯⋯ ❸

따라서 $p=27$, $q=8$이므로

$p+q=27+8=35$

답 35

채점기준	배점
❶ 주사위를 한 번 던질 때 3의 약수의 눈이 나올 확률 구하기	2
❷ 주사위를 4번 던져 3의 약수의 눈이 몇 번 나와야 하는지 구하기	3
❸ 조건을 만족시키는 확률과 $p+q$의 값 구하기	2

실전 모의고사 2회

p.120~123

01 숫자 2를 3개 택한 후, 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 나머지 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5H_4={}_{5+4-1}C_4={}_8C_4=70$

답 ③

02 A에게 2개의 빵을 나누어 주는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

남은 3개의 빵을 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 경우의 수는 $10\times27=270$

답 ③

03 카드 6장 중 임의로 2장을 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

(i) 숫자 1이 적힌 카드를 뽑는 경우

모든 자연수는 1과 서로소이므로 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)의 5가지

(ii) 숫자 1이 적힌 카드를 뽑지 않는 경우

두 수가 서로소인 경우는

(2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6)

의 6가지

(i), (ii)에서 카드에 적힌 두 수가 서로소인 경우의 수는

$5+6=11$

따라서 구하는 확률은 $\frac{11}{15}$

답 ④

04 임의로 택한 한 명이 남학생인 사건을 A, 바나나를 선호하는 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이고

$P(A)=\frac{28}{80}=\frac{7}{20}$, $P(A\cap B)=\frac{16}{80}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{20}}=\frac{4}{7}$$

답 ④

05 A와 B^C이 서로 배반사건, 즉 $A\cap B^C=\varnothing$이면 $A\subset B$이므로

$P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{6}$

이때 $P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$P(B\cap A^C)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

답 ④

06 A 선수가 10점 영역을 맞히는 사건을 A, B 선수가 10점 영역을 맞히는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이고

$P(A)=\frac{4}{5}$, $P(B)=\frac{9}{10}$

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{4}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{18}{25}$

따라서 A 선수 또는 B 선수가 10점 영역을 맞힐 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{4}{5}+\frac{9}{10}-\frac{18}{25}=\frac{49}{50}$$

답 ⑤

07 1, 2, a, b에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 비밀번호의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

숫자 1, 2로만 이루어진 비밀번호의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

문자 a, b로만 이루어진 비밀번호의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

따라서 조건을 만족시키는 비밀번호의 개수는

$256-(16+16)=224$

답 ④

08 3명 모두 1학년 학생을 택할 확률은 $\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{10}{84}$

3명 모두 2학년 학생을 택할 확률은 $\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{4}{84}$

따라서 9명 중에서 3명을 택할 때, 1학년, 2학년 학생이 각각 적어도 1명씩 선택될 확률은

$1-\left(\frac{10}{84}+\frac{4}{84}\right)=\frac{5}{6}$

답 ③

09 ㄱ. $0\le P(A)\le 1$, $0\le P(B)\le 1$이므로

$0\le P(A)P(B)\le 1$ (참)

ㄴ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 2, 3\}$,

$B=\{1, 2, 3\}$이면 $A\cap B=\{1, 2, 3\}$,

$A\cup B=\{1, 2, 3\}$이므로

$P(A\cap B)=P(A\cup B)$ (거짓)

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 2, 3\}$,

$B=\{2, 3\}$이면 $P(A)+P(B)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$이지만

$A\cap B=\{2, 3\}$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

10 A ⟶ P ⟶ B로 이동하는 경우의 수

$\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{6!}{4!\times 2!}=6\times 15=90$

A ⟶ Q ⟶ B로 이동하는 경우의 수

$\frac{7!}{4!\times 3!}\times\frac{3!}{2!}=35\times 3=105$

A ⟶ P ⟶ Q ⟶ B로 이동하는 경우의 수

$\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=6\times 3\times 3=54$

따라서 구하는 경우의 수는

$90+105-54=141$

답 ③

11 조건 (가)를 만족시키는 세 자연수의 순서쌍은

$(1, 1, 6)$, $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 3, 3)$

이 중에서 조건 (나)를 만족시키는 경우는

$(1, 1, 6)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 3, 3)$

1, 1, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

1, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $3+6+3=12$

답 ①

12 $(1+x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r 1^{4-r}x^r={}_4C_r x^r$ $(r=0, 1, 2, 3, 4)$

$(-1+2x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s(-1)^{5-s}(2x)^s={}_5C_s 2^s(-1)^{5-s}x^s$ $(s=0, 1, 2, \cdots, 5)$

따라서 $(1+x)^4(-1+2x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^r\times{}_5C_s 2^s(-1)^{5-s}x^s={}_4C_r\times{}_5C_s 2^s(-1)^{5-s}x^{r+s}$

x^7 항은 $r+s=7$일 때이므로 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$

$r=2$, $s=5$일 때, ${}_4C_2\times{}_5C_5\times 2^5\times(-1)^0=192$

$r=3$, $s=4$일 때, ${}_4C_3\times{}_5C_4\times 2^4\times(-1)^1=-320$

$r=4$, $s=3$일 때, ${}_4C_4\times{}_5C_3\times 2^3\times(-1)^2=80$

따라서 $(1+x)^4(-1+2x)^5$의 전개식에서 x^7의 계수는

$192+(-320)+80=-48$

답 ⑤

13 함수 f의 치역의 원소의 개수가 4이므로 집합 X의 원소 6개 중에서 치역의 원소가 될 4개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$ ……㉠

위에서 택한 원소 4개에서 중복을 허용하여 6개를 택하면 조건 (가)에 의하여 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(5)$의 값이 정해진다. 이때 치역의 원소 4개를 각각 한 번씩 택한 후, 나머지 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$15\times 10=150$

답 ③

14 파란색 공을 나누어 주는 경우의 수는 먼저 학생 C와 학생 D에게 파란색 공을 1개씩 나누어 준 후 남은 3개의 공을 4명에게 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

(i) 학생 A와 학생 B가 빨간색 공을 각각 0개씩 받는 경우의 수

빨간색 공 5개를 학생 C와 학생 D에게 나누어 주면 되므로

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5=6$

(ii) 학생 A와 학생 B가 빨간색 공을 각각 1개씩 받는 경우의 수

빨간색 공 3개를 학생 C와 학생 D에게 나누어 주면 되므로

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3=4$

(iii) 학생 A와 학생 B가 빨간색 공을 각각 2개씩 받는 경우의 수

빨간색 공 1개를 학생 C와 학생 D에게 나누어 주면 되므로

${}_2H_1={}_{2+1-1}C_1={}_2C_1=2$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$20\times(6+4+2)=240$

답 ④

15 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$\therefore P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}$$
$$=\frac{P(A)-P(A)P(B)}{1-P(B)}$$
$$=\frac{P(A)\{1-P(B)\}}{1-P(B)}$$
$$=P(A)$$

즉 두 사건 A, B^C은 서로 독립이다. (참)

ㄴ. $P(A)P(B)+P(A)P(B^C)$

$=P(A)\{P(B)+P(B^C)\}$

$=\mathrm{P}(A)\times 1$

$=\mathrm{P}(A)$ (거짓)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$

이고

$$1-\mathrm{P}(A^C|B)=1-\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$
$$=1-\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$
$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$$

$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=1-\mathrm{P}(A^C|B)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

16 A 공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, B 공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 B, 불량품을 택하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{100}$,

$\mathrm{P}(E|B)=\frac{p}{100}$, $\mathrm{P}(E)=\frac{17}{500}$

이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{7}{10}\times\frac{4}{100}=\frac{28}{1000}$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{3}{10}\times\frac{p}{100}=\frac{3p}{1000}$

따라서 $\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$에서

$\frac{17}{500}=\frac{28}{1000}+\frac{3p}{1000}$, $28+3p=34$, $3p=6$

$\therefore p=2$

답 ③

17 (i) □□□□□0 꼴의 짝수의 개수

0을 십만의 자리를 제외한 4개 자리 중 하나에 나열하고, 1, 1, 2, 2를 남은 4개의 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

${}_4\mathrm{C}_1\times\frac{4!}{2!\times 2!}=24$ …… ❶

(ii) □□□□□2 꼴의 짝수의 개수

0, 0을 십만의 자리를 제외한 4개 자리 중 2개를 택하여 나열하고, 1, 1, 2를 남은 3개 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수이므로,

${}_4\mathrm{C}_2\times\frac{3!}{2!}=18$ …… ❷

(i), (ii)에서 구하는 여섯 자리 짝수의 개수는

$24+18=42$ …… ❸

답 42

채점기준	배점
❶ 일의 자리의 숫자가 0인 짝수의 개수 구하기	2
❷ 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수 구하기	2
❸ 조건을 만족시키는 짝수의 개수 구하기	2

18 조건 (가)에서 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기순으로 대응시키면 된다. 따라서 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{H}_3={}_{6+3-1}\mathrm{C}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$ …… ❶

한편 조건 (나)에서 $f(1)+f(3)+f(5)=15$이고

$15=6+6+3=6+5+4=5+5+5$

따라서 세 수 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 6, 3 또는 6, 5, 4 또는 5, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}+3!+1=10$ …… ❷

따라서 구하는 함수의 개수는

$56\times 10=560$ …… ❸

답 560

채점기준	배점
❶ 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수 구하기	3
❷ 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수 구하기	3
❸ 조건을 만족시키는 함수의 개수 구하기	1

19 1학년 학생 수를 x라 하면 2학년 학생 수는 $10-x$

(단, $2\le x\le 8$)

동아리 회원 10명 중에서 대표 2명을 뽑을 때, 같은 학년 학생이 뽑힐 확률이 $\frac{8}{15}$이므로

$\frac{{}_x\mathrm{C}_2+{}_{10-x}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$ …… ❶

$$\frac{\frac{x(x-1)}{2}+\frac{(10-x)(9-x)}{2}}{\frac{10\times 9}{2}}=\frac{8}{15}$$

$x^2-x+x^2-19x+90=48$, $2x^2-20x+42=0$

$x^2-10x+21=0$, $(x-3)(x-7)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=7$ …… ❷

1학년 학생이 3명일 때, 2학년 학생은 $10-3=7$(명)

1학년 학생이 7명일 때, 2학년 학생은 $10-7=3$(명)

따라서 1학년 학생 수와 2학년 학생 수의 차는 4이다. …… ❸

답 4

채점기준	배점
❶ 1학년 학생 수를 x로 놓고 주어진 조건을 x에 대한 방정식으로 나타내기	3
❷ x의 값 구하기	2
❸ 조건을 만족시키는 학생 수의 차 구하기	2

20 주사위 한 개를 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(i) 동전의 앞면이 3개 나왔을 때

3개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 3개 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

주사위를 3번 던져서 6의 약수의 눈이 2번 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$

이므로 $\frac{1}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$ …… ❶

(ii) 동전의 앞면이 2개 나왔을 때

3개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 2개 나올 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

주사위를 2번 던져서 6의 약수의 눈이 2번 나올 확률은

$${}_2C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

이므로 $\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{6}$ …… ❷

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{18}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$ …… ❸

따라서 $p=9$, $q=2$이므로

$p+q=9+2=11$ 답 11

채점기준	배점
❶ 동전의 앞면이 3개 나온 경우의 확률 구하기	3
❷ 동전의 앞면이 2개 나온 경우의 확률 구하기	3
❸ 조건을 만족시키는 확률과 $p+q$의 값 구하기	1

실전 모의고사 3회

p.124~127

01 t를 양 끝에 나열한 후, 가운데 4개 자리에 p, o, a, o를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$\frac{4!}{2!}=12$ 답 ①

02 $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 $P(B)=P(B|A)=\frac{1}{2}$이고

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ 답 ④

03 A, B, C 세 명의 학생이 앉는 3개의 의자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

먼저 세 학생의 사이사이에 각각 2개씩 빈 의자를 놓고, 세 학생의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리 중 2개를 택하여 남은 의자 2개를 놓는 경우의 수는

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times10=60$ 답 ④

04 9개의 펜 중에서 임의로 4개를 택할 때, 선물 세트에 파란색 펜이 2개 이상 들어가는 사건을 A라 하면 A^C은 파란색 펜이 1개 이하 들어가는 사건이다.

즉 A^C은 파란색 펜 0개, 빨간색 펜 4개 또는 파란색 펜 1개, 빨간색 펜 3개가 들어가는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_5C_0\times{}_4C_4+{}_5C_1\times{}_4C_3}{{}_9C_4}=\frac{1\times1+5\times4}{126}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ 답 ④

05 $(2x-a)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8C_r(2x)^{8-r}(-a)^r={}_8C_r\,2^{8-r}(-a)^rx^{8-r}$ $(r=0, 1, 2, \dots, 8)$

x^5 항은 $8-r=5$일 때이므로 $r=3$

따라서 x^5의 계수는

${}_8C_3\times2^5\times(-a)^3=-56\times2^5\times a^3$

x^6 항은 $8-r=6$일 때이므로 $r=2$

따라서 x^6의 계수는

${}_8C_2\times2^6\times(-a)^2=28\times2^6\times a^2$

x^5의 계수와 x^6의 계수의 합이 0이므로

$-56\times2^5\times a^3+28\times2^6\times a^2=0$

$a^3-a^2=0$, $a-1=0$ $(\because a\neq0)$

$\therefore a=1$ 답 ④

06 $f(n)={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$,

$g(n)={}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+\cdots+{}_{2n+1}C_n$

$=\frac{1}{2}({}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2$

$+\cdots+{}_{2n+1}C_n+{}_{2n+1}C_{n+1}+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n+1})$

$=\frac{1}{2}\times2^{2n+1}=2^{2n}$

이므로

$\frac{g(k)}{f(k)}=\frac{2^{2k}}{2^k}=2^k$

$\frac{g(k)}{f(k)}<200$, 즉 $2^k<200$을 만족시키는 자연수 k는

$2^7=128<200$, $2^8=256>200$이므로

1, 2, 3, ⋯, 7

의 7개이다. 답 ②

07 7개의 공 중에서 임의로 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 A, 검은 공인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이고

$P(A)=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$, $P(B)=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$ 답 ③

08 8장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $8!$

모음 A, E의 양 옆에 숫자 1, 2, 3이 놓여야 하므로

숫자 | 모음 | 숫자 | 모음 | 숫자 …… ㉠

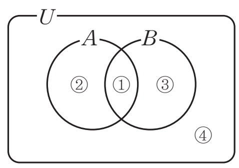
와 같이 나열하는 경우의 수는 $3!\times2!$

㉠을 한 문자 X로 생각하여 X, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$

따라서 알파벳 모음이 적힌 카드의 양 옆에는 숫자가 적힌 카드가 놓이는 경우의 수는 $3!\times2!\times4!$이므로

구하는 확률은 $\dfrac{3!\times2!\times4!}{8!}=\dfrac{1}{140}$ 답 ⑤

09 전체집합 U의 두 부분집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$n(A\cap B)=2$이므로 ①에 들어갈 원소 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2=15$

$n(A\cup B)=4$이므로 ④에 원소 2개, ② 또는 ③에 원소 2개가 들어가야 한다.

④에 들어갈 원소 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

남은 2개의 원소가 ② 또는 ③에 들어가는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$15\times6\times4=360$ 답 ①

10 $A_1=\{1\}$, $A_2=\{1, 2\}$, $A_3=\{1, 3\}$,
$A_4=\{1, 2, 4\}$, $A_5=\{1, 5\}$, $A_6=\{1, 2, 3, 6\}$

ㄱ. $A_1\cap A_3=\{1\}$이므로 A_1과 A_3은 서로 배반사건이 아니다. (거짓)

ㄴ. $A_2\cap A_5=\{1\}$이므로 $\mathrm{P}(A_2\cap A_5)=\dfrac{1}{6}$이고

$\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_5)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_5)\neq\mathrm{P}(A_2\cap A_5)$

즉 A_2와 A_5는 서로 종속이다. (참)

ㄷ. $A_4\cap A_6=\{1, 2\}$이므로 $\mathrm{P}(A_4\cap A_6)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$이고

$\mathrm{P}(A_4)\mathrm{P}(A_6)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A_4)\mathrm{P}(A_6)=\mathrm{P}(A_4\cap A_6)$

즉 A_4와 A_6은 서로 독립이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

11 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

각 자리의 숫자의 합이 7 미만인 경우는 각 자리의 수의 합이 4, 5, 6인 경우이다.

(i) 각 자리의 숫자의 합이 4인 자연수의 개수

1111의 1

(ii) 각 자리의 숫자의 합이 5인 자연수의 개수

1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

이므로 4

(iii) 각 자리의 숫자의 합이 6인 자연수의 개수

1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

이므로 $4+6=10$

(i), (ii), (iii)에서 각 자리의 숫자의 합이 7 미만인 자연수의 개수는 $1+4+10=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$625-15=610$ 답 ⑤

12 전체 관람객을 x명이라 하면 관람권을 예약 구매한 관람객은 $\dfrac{75}{100}x$명이므로 현장 구매한 관람객은 $\dfrac{25}{100}x$명

여성 관람객은 $\dfrac{40}{100}x$명이므로 남성 관람객은 $\dfrac{60}{100}x$명

따라서 현장에서 관람권을 구매한 남성 관람객의 수는

$\dfrac{60}{100}x\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{10}{100}x$

이것을 표로 나타내면 다음과 같다.

	여성	남성	합계
예약 구매	$\dfrac{25}{100}x$	$\dfrac{50}{100}x$	$\dfrac{75}{100}x$
현장 구매	$\dfrac{15}{100}x$	$\dfrac{10}{100}x$	$\dfrac{25}{100}x$
합계	$\dfrac{40}{100}x$	$\dfrac{60}{100}x$	x

관람객 중 임의로 택한 한 명이 관람권을 예약 구매한 사람인 사건을 A, 남자인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이고

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{\frac{75}{100}x}{x}=\dfrac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{\frac{50}{100}x}{x}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{2}{3}$ 답 ④

13 n^{13}을 13으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로

$n^{13}=13M+3$ (M은 자연수)이라 하면

$(n+1)^{13}$

$={}_{13}\mathrm{C}_0\times n^{13}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times n^{12}\times1^1+{}_{13}\mathrm{C}_2\times n^{11}\times1^2$
$+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{11}\times n^2\times1^{11}+{}_{13}\mathrm{C}_{12}\times n^1\times1^{12}+{}_{13}\mathrm{C}_{13}\times1^{13}$

$={}_{13}\mathrm{C}_0\times n^{13}+{}_{13}\mathrm{C}_1\times n^{12}+{}_{13}\mathrm{C}_2\times n^{11}+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{12}\times n+{}_{13}\mathrm{C}_{13}$

에서 ${}_{13}\mathrm{C}_r$ $(1\le r\le12)$가 13의 배수이므로

${}_{13}\mathrm{C}_1\times n^{12}+{}_{13}\mathrm{C}_2\times n^{11}+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{12}\times n=13K$ (K는 자연수)

라 하면

$(n+1)^{13}$

$={}_{13}C_0\times n^{13}+{}_{13}C_1\times n^{12}+{}_{13}C_2\times n^{11}+\cdots+{}_{13}C_{12}\times n+{}_{13}C_{13}$

$={}_{13}C_0\times n^{13}+13K+{}_{13}C_{13}$

$=13K+n^{13}+1$

$=13K+(13M+3)+1$

$=13(K+M)+4$

따라서 $(n+1)^{13}$을 13으로 나누었을 때의 나머지는 4이다.

답 ③

14 x, y, z, w 중 짝수인 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

x, y를 짝수, z, w를 홀수라 하면

$x=2X+2$, $y=2Y+2$, $z=2Z+1$, $w=2W+1$ (X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수)

이고 $x+y+z+w=12$에서

$(2X+2)+(2Y+2)+(2Z+1)+(2W+1)=16$

$2X+2Y+2Z+2W=10$

$\therefore X+Y+Z+W=5$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는

${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$6\times56=336$

답 ⑤

15 20개의 점 중에서 임의로 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{20}C_2=190$

두 점 사이의 거리가 무리수인 사건을 X라 하면 X^C은 두 점 사이의 거리가 유리수인 사건이다.

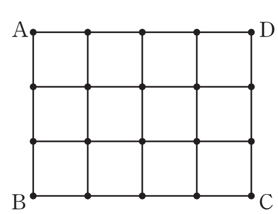
길이가 유리수인 선분의 개수는

(i) 한 가로 선분에 있는 5개의 점 중 2개를 택하는 경우

$4\times{}_5C_2=40$

(ii) 한 세로 선분에 있는 4개의 점 중 2개를 택하는 경우

$5\times{}_4C_2=30$



(iii) $\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 2개

(i), (ii), (iii)에서 선분의 길이가 유리수인 선분의 개수는

$40+30+2=72$

이므로 $P(X^C)=\dfrac{72}{190}=\dfrac{36}{95}$

따라서 구하는 확률은

$P(X)=1-P(X^C)=1-\dfrac{36}{95}=\dfrac{59}{95}$

답 ⑤

16 조건 (가)에서 $f(0)=0$이고 X의 원소 a에 대하여 $f(a)$의 값이 정해지면 $f(-a)$의 값이 정해진다.

즉 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 값이 정해지면 $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-3)$의 값도 각각 한 가지로 정해진다.

0이 반드시 치역의 원소가 되어야 하므로 치역은 $\{-m, 0, m\}$의 꼴이고, 이때 $m=1, 2, 3$이다.

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 $-m$, 0, m의 값 중 하나를 택하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=27$

이때 함숫값이 모두 0에 대응되면 치역의 원소의 개수가 1이 되므로 치역의 원소의 개수가 3인 함수의 개수는

$27-1=26$

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\times26=78$

답 ③

17 1이 3보다 앞에 오는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!}=360$ ······ ❶

1이 3보다 앞에 오고 짝수끼리는 이웃하지 않는 경우의 수는

먼저 홀수를 나열하는 경우의 수가 $\dfrac{3!}{2!}=3$

홀수의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리 중 3개를 택하여 짝수를 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$이므로

$3\times24=72$ ······ ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$360-72=288$ ······ ❸

답 288

채점기준	배점
❶ 1이 3보다 앞에 오는 경우의 수 구하기	2
❷ 1이 3보다 앞에 오고, 짝수끼리는 이웃하지 않는 경우의 수 구하기	3
❸ 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기	1

18 두 주사위를 던져서 나오는 전체 경우의 수는

$6\times8=48$

두 주사위 눈의 수의 합이 12 이상인 사건을 A, 6의 배수인 사건을 B라 하면

$A=\{(4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 6), (6, 7), (6, 8)\}$

$\therefore P(A)=\dfrac{6}{48}=\dfrac{1}{8}$ ······ ❶

$B=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 8), (5, 1), (5, 7), (6, 6)\}$

$\therefore P(B)=\dfrac{8}{48}=\dfrac{1}{6}$ ······ ❷

$A\cap B=\{(4, 8), (5, 7), (6, 6)\}$

$\therefore P(A\cap B)=\dfrac{3}{48}=\dfrac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{11}{48}$

이므로 $p=48$, $q=11$

$\therefore p+q=48+11=59$ ······ ❸

답 59

채점기준	배점
❶ 두 주사위 눈의 수의 합이 12 이상일 확률 구하기	2
❷ 두 주사위 눈의 수의 합이 6의 배수일 확률 구하기	2
❸ 조건을 만족시키는 확률과 $p+q$의 값 구하기	2

19 A 주머니를 택하는 사건을 A, B 주머니를 택하는 사건을 B, 서로 다른 색의 공을 꺼내는 사건을 E라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)$이고

A 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나올 확률은

$$\mathrm{P}(E|A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$ …… ❶

B 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나올 확률은

$$\mathrm{P}(E|B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

이므로

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$ …… ❷

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$ …… ❸

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

이므로 $p=2$, $q=1$

$\therefore p+q=2+1=3$ …… ❹

답 3

채점기준	배점
❶ A 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색일 확률 구하기	2
❷ B 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색일 확률 구하기	2
❸ 서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률 구하기	2
❹ 조건을 만족시키는 확률과 $p+q$의 값 구하기	1

20 주사위 한 개를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 x번 나온다고 하면 짝수의 눈은 $5-x$번 나온다. 이때 시계 반대 방향으로 이동하는 것을 +, 시계 방향으로 이동하는 것을 −로 나타내면 점 P의 위치는

$1\times x+(-2)(5-x)=3x-10$ ($x=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

이고, $3x-10=4k+1$ (k는 정수) 꼴일 때 점 P는 점 B에 도착한다. …… ❶

이때 $3x-10=-10, -7, -4, -1, 2, 5$이고

$-7=4\times(-2)+1$, $5=4\times1+1$

이므로 $3x-10=-7$ 또는 $3x-10=5$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

즉 주사위를 5번 던져 홀수의 눈이 1번 또는 5번 나와야 한다. …… ❷

따라서 구하는 확률은

$${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$$

이므로 $p=16$, $q=3$

$\therefore p+q=16+3=19$ …… ❸

답 19

채점기준	배점
❶ 점 P가 꼭짓점 B에 도착할 조건 구하기	3
❷ 홀수의 눈이 나와야 할 횟수 구하기	3
❸ 조건을 만족시키는 확률과 $p+q$의 값 구하기	1

실전 모의고사 4회

p.128~131

01 ${}_3\Pi_6=3^6=729$

답 ⑤

02 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$

답 ②

03 주사위 한 개를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

${}_6\Pi_2=6^2=36$

$a+2b=14$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 6)$, $(4, 5)$, $(6, 4)$의 3개

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

답 ③

04 (i) 서로 같은 종류의 사탕 5개를 나누어 주는 경우의 수

먼저 3명의 학생에게 사탕을 1개씩 나누어 준 후, 남은 2개의 사탕을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

(ii) 서로 다른 종류의 초콜릿 4개를 나누어 주는 경우의 수

서로 다른 종류의 초콜릿 4개를 2개, 1개, 1개씩 3개 조로 나누는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=6\times2\times1\times\frac{1}{2}=6$$

3개 조로 나눈 초콜릿을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$

이므로 $6\times6=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6\times36=216$

답 ③

05 (i) a□□□□□o와 같이 나열하는 경우의 수

b, l, l, o, n을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$\frac{5!}{2!}=60$

(ii) o□□□□□a와 같이 나열하는 경우의 수

(ⅰ)과 같은 방법으로 60

(ⅲ) o□□□□□o와 같이 나열하는 경우의 수

b, a, l, l, n을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$\frac{5!}{2!}=60$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$60+60+60=180$

답 ⑤

06 한 자리 자연수의 개수는 4

두 자리 자연수의 개수는 $4\times5=20$

세 자리 자연수의 개수는 $4\times{}_5\Pi_2=4\times5^2=100$

네 자리 자연수 중

천의 자리의 숫자가 1인 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

천의 자리의 숫자가 2인 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

천의 자리의 숫자가 3인 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

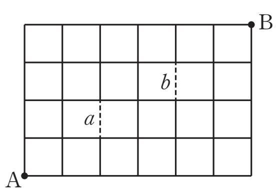
한 자리 자연수부터 천의 자리의 숫자가 3인 네 자리 자연수까지의 개수의 합은

$4+20+100+125+125+125=499$

따라서 500번째 자연수는 4000이다.

답 ②

07 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 전체 경우의 수는



$\frac{10!}{6!\times4!}=210$

(ⅰ) A 지점에서 도로 a를 거쳐 B 지점까지 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times1\times\frac{6!}{4!\times2!}=45$

(ⅱ) A 지점에서 도로 b를 거쳐 B 지점까지 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\times2!}\times1\times\frac{3!}{2!}=45$

(ⅲ) A 지점에서 도로 a, b를 모두 거쳐 B 지점까지 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times1\times1\times1\times\frac{3!}{2!}=9$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$210-(45+45-9)=129$

답 ③

08 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$이므로 $2\times{}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{n-r}$

$$\begin{aligned}\therefore\ & 2\times{}_{10}\mathrm{C}_0+4\times{}_{10}\mathrm{C}_1+2\times{}_{10}\mathrm{C}_2+4\times{}_{10}\mathrm{C}_3+2\times{}_{10}\mathrm{C}_4+2\times{}_{10}\mathrm{C}_5\\ &=(2\times{}_{10}\mathrm{C}_0+2\times{}_{10}\mathrm{C}_1+2\times{}_{10}\mathrm{C}_2+2\times{}_{10}\mathrm{C}_3+2\times{}_{10}\mathrm{C}_4+{}_{10}\mathrm{C}_5)\\ &\qquad+(2\times{}_{10}\mathrm{C}_1+2\times{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_5)\\ &=({}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_8+{}_{10}\mathrm{C}_9+{}_{10}\mathrm{C}_{10})\\ &\quad+({}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_5+{}_{10}\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_9)\\ &=2^{10}+2^{10-1}=2^9(2+1)=3\times2^9\end{aligned}$$

답 ②

09 홀수 a에 대하여 $af(a)$가 홀수이므로 $f(a)$가 홀수이어야 한다. 즉 정의역의 원소 1, 3, 5에는 공역의 원소 1, 3, 5가 대응해야 하므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$27\times25=675$

답 ③

10 8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_3=56$

1개의 지름에 대하여 만들 수 있는 직각삼각형이 6개, 그을 수 있는 지름이 4개이므로 직각삼각형의 개수는

$6\times4=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

답 ③

11 (ⅰ) $a\le b<c$인 순서쌍 (a, b, c)의 개수

$a\le b\le c$를 만족시키는 10 이하의 자연수의 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_{10}\mathrm{H}_3={}_{10+3-1}\mathrm{C}_3={}_{12}\mathrm{C}_3=220$

$a\le b=c$를 만족시키는 10 이하의 자연수의 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_{10}\mathrm{H}_2={}_{10+2-1}\mathrm{C}_2={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

따라서 $a\le b<c$인 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$220-55=165$

(ⅱ) $a\le b<c$이면서 a, b, c가 모두 홀수인 순서쌍 (a, b, c)의 개수

10 이하의 자연수 중 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이고

$a\le b\le c$를 만족시키는 10 이하의 홀수인 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

$a\le b=c$를 만족시키는 10 이하의 홀수인 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_2={}_{5+2-1}\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

따라서 $a\le b<c$인 홀수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$35-15=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$165-20=145$

답 ⑤

12 첫 번째에 흰 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 검은 공이 나오는 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{14}{55}$

흰 공의 개수를 n이라 하면 검은 공의 개수는 $11-n$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{11}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{11-n}{10}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$에서

$\frac{14}{55}=\frac{n}{11}\times\frac{11-n}{10}$

$\frac{14}{55}=\frac{n(11-n)}{110}$, $28=n(11-n)$

$n^2-11n+28=0$, $(n-4)(n-7)=0$

$\therefore n=4$ 또는 $n=7$

그런데 흰 공의 개수가 검은 공의 개수보다 많으므로 흰 공의 개수는 7이다.

답 ②

13 8장의 카드 중에서 4장의 카드를 임의로 꺼내는 경우의 수는

${}_8C_4=70$

4장의 카드에 적힌 숫자의 합이 6 이상인 사건을 A라 하면

A^C은 6 미만인 사건이다.

(i) 4장의 카드에 적힌 숫자의 합이 4인 경우의 수

1이 적힌 카드 4장이 나오는 경우이므로 1

(ii) 4장의 카드에 적힌 숫자의 합이 5인 경우의 수

1이 적힌 카드 3장, 2가 적힌 카드 1장이 나오는 경우이므로

${}_4C_3\times{}_4C_1=4\times4=16$

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{1+16}{70}=\frac{17}{70}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-\frac{17}{70}=\frac{53}{70}$

답 ⑤

14 임의로 택한 한 명이 감염자인 사건을 A, 자가검사키트 검사 결과 양성 반응이 나오는 사건을 E라 하면

$P(A)=\frac{40}{100}$, $P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{40}{100}=\frac{60}{100}$

$P(E|A)=\frac{90}{100}$, $P(E|A^C)=\frac{20}{100}$

이므로

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{40}{100}\times\frac{90}{100}=\frac{36}{100}$

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=\frac{60}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{12}{100}$

따라서 구하는 확률은

$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$

$=\frac{36}{100}+\frac{12}{100}=\frac{12}{25}$

답 ④

15 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

공역 Y의 원소 1, 3, 5, 7은 모두 홀수이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$의 값이 될 수 있는 9의 배수는 짝수인 18뿐이다.

1, 3, 5, 7에서 중복을 허용하여 택한 네 수의 합이 18인 경우는

$1+3+7+7=1+5+5+7=3+3+5+7=3+5+5+5=18$

이고

1, 3, 7, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

1, 5, 5, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

3, 3, 5, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

3, 5, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

이므로 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=18$인 함수 f의 개수는

$12+12+12+4=40$

따라서 구하는 확률은

$\frac{40}{256}=\frac{5}{32}$

답 ②

16 서로 다른 네 개의 바구니에 담는 사탕의 개수를 각각 x, y, z, w라 하면 $x+y+z+w=10$이고, 조건 (가), (나)에서 $1\le x\le5$, $1\le y\le5$, $1\le z\le5$, $1\le w\le5$

x, y, z, w는 자연수이므로 $x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$ (X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수)이라 하면

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)=10$

$\therefore X+Y+Z+W=6$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는

${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

즉 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 84이다.

한편 6보다 크거나 같은 자연수를 포함하여 네 자연수의 합이 10인 경우는

$6+2+1+1=7+1+1+1=10$

뿐이므로 자연수 x, y, z, w 중 6보다 크거나 같은 것이 있을 때, 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

6, 2, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{2!}=12$

7, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{3!}=4$이므로

$12+4=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-16=68$

답 ④

17 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

두 직선 $ax+4y+6=0$, $x+by+3=0$이 서로 평행하려면

$\frac{a}{1}=\frac{4}{b}\neq\frac{6}{3}$, 즉 $ab=4$, $a\neq2$, $b\neq2$ …… ❶

이어야 하므로 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 4)$, $(4, 1)$

의 2개이다. …… ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$이므로

$p=18$, $q=1$

$\therefore p+q=18+1=19$ …… ❸

답 19

채점기준	배점
❶ 두 직선이 서로 평행할 조건 구하기	2
❷ 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	2
❸ 조건을 만족시키는 확률과 $p+q$의 값 구하기	1

18 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r x^{3-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_3C_r\frac{x^{3-r}}{x^r}$ $(r=0, 1, 2, 3)$

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s x^{4-s}\left(\frac{2}{x}\right)^s={}_4C_s x^{4-s}\times\frac{2^s}{x^s}={}_4C_s 2^s\times\frac{x^{4-s}}{x^s}$ $(s=0, 1, 2, 3, 4)$

따라서 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\left(x+\frac{2}{x}\right)^4$ 전개식의 일반항은

$${}_3C_r\frac{x^{3-r}}{x^r}\times{}_4C_s2^s\times\frac{x^{4-s}}{x^s}={}_3C_r\times{}_4C_s\times2^s\times\frac{x^{7-r-s}}{x^{r+s}} \quad \cdots\cdots ❶$$

x^5항은 $\frac{x^{7-r-s}}{x^{r+s}}=x^5$일 때이므로 $7-r-s-(r+s)=5$

$-2r-2s=-2 \quad \therefore r+s=1$

이것을 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 1)$, $(1, 0)$의 2개 ⋯⋯ ❷

따라서 x^5의 계수는

$r=0$, $s=1$일 때

${}_3C_0\times{}_4C_1\times2^1=1\times4\times2=8$

$r=1$, $s=0$일 때

${}_3C_1\times{}_4C_0\times2^0=3\times1\times1=3$

이므로 $8+3=11$ ⋯⋯ ❸

답 11

채점기준	배점
❶ 전개식의 일반항을 r, s에 대하여 나타내기	2
❷ 순서쌍 (r, s) 구하기	1
❸ x^5의 계수 구하기	2

19 $a+b=7$에서 $b=7-a$이므로

$|a-b|>1$에서 $|a-(7-a)|>1$

$\therefore |2a-7|>1$

$|2a-7|>1$인 사건을 A라 하면 A^C은 $|2a-7|\le1$인 사건이다. 이때 $|2a-7|\le1$에서

$-1\le2a-7\le1$, $6\le2a\le8$

$3\le a\le4 \quad \therefore a=3$ 또는 $a=4$ ⋯⋯ ❶

즉 $|2a-7|\le1$이려면 동전 한 개를 7번 던져 앞면이 3번 또는 4번 나와야 하므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{35}{128}+\frac{35}{128}=\frac{35}{64} \quad \cdots\cdots ❷$$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{35}{64}=\frac{29}{64}$

이므로 $p=64$, $q=29$

$\therefore p+q=64+29=93$ ⋯⋯ ❸

답 93

채점기준	배점
❶ $\|2a-7\|\le1$을 만족시키는 a의 값 구하기	2
❷ 여사건의 확률 구하기	2
❸ 확률을 구하고 $p+q$의 값 구하기	2

20 감별기에 넣은 지폐가 진짜 지폐인 사건을 A, 감별기가 지폐를 위조 지폐로 감별하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이고, A^C은 감별기에 넣은 지폐가 위조 지폐인 사건이다. 따라서

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{60}{100}$, $\mathrm{P}(A)=\frac{40}{100}$,

$\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{98}{100}$, $\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{100}$,

이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{60}{100}\times\frac{98}{100}=\frac{588}{1000}$$

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{40}{100}\times\frac{1}{100}=\frac{4}{1000} \quad \cdots\cdots ❶$$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A^C\cap E)+\mathrm{P}(A\cap E)$

$$=\frac{588}{1000}+\frac{4}{1000}=\frac{592}{1000} \quad \cdots\cdots ❷$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{4}{1000}}{\frac{592}{1000}}=\frac{1}{148} \quad \cdots\cdots ❸$$

이므로 $p=148$, $q=1$

$\therefore p+q=148+1=149$

답 149

채점기준	배점
❶ 주어진 조건을 두 사건 A, E에 대한 확률로 나타내고 $\mathrm{P}(A^C\cap E)$, $\mathrm{P}(A\cap E)$ 각각 구하기	2
❷ $\mathrm{P}(E)$ 구하기	2
❸ $\mathrm{P}(A\|E)$와 $p+q$의 값 구하기	2

실전 모의고사 5회

p.132~135

01 맨 앞에 오는 모음을 택하는 경우의 수는 a, e의 2가지

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times{}_6\Pi_2=2\times36=72$

답 ④

02 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4일 때 짝수가 된다.

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3개

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4개

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$3\times4\times25=300$

답 ⑤

03 먼저 4개의 문자 a, a, b, b를 일렬로 나열하고, 4개의 문자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리를 택하여 c, d, e를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times{}_5P_3=6\times60=360$

답 ①

04 먼저 철수에게 탁구공 1개를 주고, 남은 탁구공 3개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3=10$

먼저 영희에게 야구공 1개를 주고, 남은 야구공 4개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4=15$

따라서 구하는 경우의 수는 $10\times15=150$

답 ⑤

05 $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$
두 사건 A, E^C이 배반사건이므로 $A\cap E^C=\varnothing$, 즉 $A-E=\varnothing$
$\therefore A\subset E\subset S$
두 사건 B, E^C이 배반사건이므로 $B\cap E^C=\varnothing$, 즉 $B-E=\varnothing$
$\therefore B\subset E\subset S$
따라서 $(A\cup B)\subset E\subset S$, 즉
$\{1, 2, 3, 5, 7\}\subset E\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$이므로 사건 E의 개수는
$2^{7-5}=2^2=4$ 답 ③

06 5개의 문자 A, B, C, D, E를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$
(i) A가 B, C보다 왼쪽에 있는 경우의 수
A, B, C를 모두 X로 생각하여 X, X, X, D, E를 일렬로 나열한 후 맨 앞의 X를 A로 바꾸고, 나머지 두 개의 X에 B와 C를 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{3!}\times 2!=40$
(ii) A가 D, E보다 왼쪽에 있는 경우의 수
(i)과 같은 방법으로
$\frac{5!}{3!}\times 2!=40$
(iii) A가 B, C, D, E보다 왼쪽에 있는 경우의 수
A를 맨 앞에 두고 나머지 4개의 자리에 B, C, D, E를 나열하는 경우의 수이므로
$4!=24$
(i), (ii), (iii)에서 A가 B, C보다 왼쪽에 있거나 D, E보다 왼쪽에 있는 경우의 수는
$40+40-24=56$
따라서 구하는 확률은
$\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$ 답 ③

07 주머니에서 임의로 꺼낸 2개의 바둑돌 중 적어도 1개는 흰 바둑돌인 사건을 A라 하면 A^C은 2개 모두 검은 바둑돌인 사건이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{7}$,
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}=\frac{3}{\frac{(n+3)(n+2)}{2\times 1}}=\frac{6}{(n+3)(n+2)}$
따라서 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$에서
$\frac{6}{(n+3)(n+2)}=1-\frac{6}{7}$, $\frac{6}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{7}$
$(n+3)(n+2)=42$, $n^2+5n-36=0$
$(n+9)(n-4)=0$ $\quad\therefore n=4$ ($\because n$은 자연수) 답 ②

08 2가지 색의 공을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우와 3가지 색의 공을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우가 있다.
(i) 2가지 색의 공을 나누어 주는 경우의 수
2가지 색을 택하는 경우는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$이고, 4개의 공을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$이므로
$3\times 6=18$
(ii) 3가지 색의 공을 나누어 주는 경우의 수
어느 색의 공을 2개 택할지 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이고, 4개의 공을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$이므로
$3\times 12=36$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$18+36=54$ 답 ④

09 $1<x_1\le x_2<6$을 만족시키는 x_1, x_2를 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$
$6\le x_3\le x_4<11$을 만족시키는 x_3, x_4를 정하는 경우의 수는 6, 7, 8, 9, 10에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5\mathrm{H}_2={}_{5+2-1}\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times 15=150$ 답 ③

10 회사 전체 직원 수는 $12+18+x+6=x+36$
남성의 수는 $x+6$, 건강검진을 받은 사람의 수는 $x+12$, 건강검진을 받은 남성의 수는 x
따라서 회사 직원 중 임의로 택한 한 명이 남성인 사건을 A, 건강검진을 받은 사람인 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{x+6}{x+36}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{x+12}{x+36}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{x+36}$
두 사건 A, B가 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서
$\frac{x}{x+36}=\frac{x+6}{x+36}\times\frac{x+12}{x+36}$
$x(x+36)=(x+6)(x+12)$, $x^2+36x=x^2+18x+72$
$18x=72$ $\quad\therefore x=4$ 답 ①

11 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
이때
$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$
에서 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$이므로
㉠에서 $\frac{9}{10}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{45}$ 답 ①

12 조건 ㈎에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)$이고, 조건 ㈎, ㈏에서 $f(2)=1$, $f(3)=6$ 또는 $f(2)=2$, $f(3)=3$이다.

(i) $f(2)=1$, $f(3)=6$일 때

$f(1)\le f(2)=1$이므로 $f(1)=1$

$6=f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)$이므로

$f(4)=f(5)=f(6)=6$

따라서 함수 f의 개수는 1이다.

(ii) $f(2)=2$, $f(3)=3$일 때

$f(1)\le f(2)=2$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2의 2개

$3=f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)$이므로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6에서 3개를 택하는 중복조합의 수

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

따라서 함수 f의 개수는

$2\times20=40$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$1+40=41$ 답 ①

13 ${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9$

$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9$ ($\because {}_1C_0={}_2C_0$)

$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9$

$={}_4C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_9$

$\vdots$

$={}_{10}C_8+{}_{10}C_9$

$={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

${}_1C_1+{}_2C_2+{}_3C_3+{}_4C_4+\cdots+{}_{10}C_{10}$

$=\underbrace{1+1+1+1+1+\cdots+1}_{10\text{개}}=10$

따라서 파스칼의 삼각형에서 색칠한 부분의 모든 수의 합은

$55+10=65$ 답 ①

14 → 방향으로 1번 이동하는 것을 a, ↑방향으로 1번 이동하는 것을 b라 하면

a, a, a, a, a, b, b, b

를 일렬로 나열할 때, a, a, a와 a가 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수와 같다.

(i) a, a, a가 맨 앞에 오는 경우의 수

a, a, a, b, ×, ×, ×, ×에서 × 자리에 a, a, b, b를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

(ii) a, a, a가 중간에 오는 경우의 수

b, a, a, a, b를 c로 생각하여 c, a, a, b를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!}=12$

(iii) a, a, a가 맨 뒤에 오는 경우의 수

(i)과 같은 방법으로 6

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+12+6=24$ 답 ⑤

15 (i) 상자 A에서 꺼낸 공이 빨간 공 1개, 흰 공 2개일 때

$\dfrac{{}_2C_1\times{}_4C_2}{{}_6C_3}\times\dfrac{{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_3C_2}=\dfrac{2\times6}{20}\times\dfrac{1\times2}{3}=\dfrac{2}{5}$

(ii) 상자 A에서 꺼낸 공이 빨간 공 2개, 흰 공 1개일 때

$\dfrac{{}_2C_2\times{}_4C_1}{{}_6C_3}\times\dfrac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}=\dfrac{1\times4}{20}\times\dfrac{2\times1}{3}=\dfrac{2}{15}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{8}{15}$ 답 ④

16 방정식 $x+y+z=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

$(x-y)(y-z)(z-x)\ne0$인 사건을 A라 하면 A^C은

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$인 사건이다.

이때 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$에서

$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$

$x=y$일 때, $x+y+z=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)는

$(0, 0, 8)$, $(1, 1, 6)$, $(2, 2, 4)$, $(3, 3, 2)$, $(4, 4, 0)$

의 5개이고, $y=z$, $z=x$일 때의 순서쌍도 각각 5개씩이다. 이때 $x=y=z$인 순서쌍 (x, y, z)는 존재하지 않으므로

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$5+5+5=15$

따라서 $P(A^C)=\dfrac{15}{45}=\dfrac{1}{3}$이므로 구하는 확률은

$P(A)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ 답 ④

17 $(1+x)^5$의 전개식에서 x^5의 계수는 ${}_5C_5$

$(1+x)^6$의 전개식에서 x^5의 계수는 ${}_6C_5$

$(1+x)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는 ${}_7C_5$

$\vdots$

$(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^5의 계수는 ${}_{10}C_5$ …… ❶

따라서 $(1+x)^5+(1+x)^6+(1+x)^7+\cdots+(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^5의 계수는

${}_5C_5+{}_6C_5+{}_7C_5+{}_8C_5+{}_9C_5+{}_{10}C_5$

$={}_6C_6+{}_6C_5+{}_7C_5+{}_8C_5+{}_9C_5+{}_{10}C_5$ ($\because {}_5C_5={}_6C_6=1$)

$={}_7C_6+{}_7C_5+{}_8C_5+{}_9C_5+{}_{10}C_5$

$={}_8C_6+{}_8C_5+{}_9C_5+{}_{10}C_5$

$={}_9C_6+{}_9C_5+{}_{10}C_5$

$={}_{10}C_6+{}_{10}C_5$

$={}_{11}C_6={}_{11}C_5=462$ …… ❷

답 462

채점기준	배점
❶ $(1+x)^n$ $(n=5, 6, 7, \cdots, 10)$의 전개식에서 x^5의 계수 구하기	3
❷ $(1+x)^5+(1+x)^6+(1+x)^7+\cdots+(1+x)^{10}$ 식의 전개식에서 x^5의 계수 구하기	3

18 주사위 한 개를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차방정식 $x^2+ax+4b=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-16b\geq0$

$a^2\geq16b \quad \therefore b\leq\frac{1}{16}a^2$ …… ❶

$a=1, 2, 3$일 때, b는 존재하지 않는다.

$a=4$일 때, $b=1$

$a=5$일 때, $b=1$

$a=6$일 때, $b=1, 2$

즉 이차방정식 $x^2+ax+4b=0$이 실근을 갖도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+1+2=4$ …… ❷

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$\therefore p=9, q=1$

$\therefore p+q=9+1=10$ …… ❸

답 10

채점기준	배점
❶ 이차방정식이 실근을 가질 조건을 이용하여 a, b에 대한 부등식 세우기	2
❷ 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	3
❸ 조건을 만족시키는 확률과 $p+q$의 값 구하기	1

19 3개의 동전을 한 번 던져서 모두 같은 면이 나올 확률은

${}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ …… ❶

3개의 동전을 던지는 시행을 4번 할 때, 모두 같은 면이 나오는 횟수를 x $(x=0, 1, 2, 3, 4)$라 하면 그렇지 않은 횟수는 $4-x$이고, 점 P의 좌표는

$3x+(-2)(4-x)=5x-8$

점 P의 좌표가 7 이상이어야 하므로

$5x-8\geq7, 5x\geq15 \quad \therefore x\geq3$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

즉 모두 같은 면이 나오는 횟수가 3번 또는 4번이어야 한다.

…… ❷

따라서 구하는 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{12}{256}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$

이므로 $p=256, q=13$

$\therefore p+q=256+13=269$ …… ❸

답 269

채점기준	배점
❶ 3개의 동전을 던져 모두 같은 면이 나올 확률 구하기	2
❷ 점 P의 좌표가 7 이상일 조건 구하기	2
❸ 확률을 구하고 $p+q$의 값 구하기	2

20 전체 경우의 수는 $6\times6\times6=216$ …… ❶

서로 다른 주사위 3개를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 최댓값이 4인 경우의 수는

(세 눈 중 5, 6은 나오지 않고, 적어도 하나는 4가 나오는 경우의 수)

=(1, 2, 3, 4에서 3개를 택하는 중복순열의 수)

−(1, 2, 3에서 3개를 택하는 중복순열의 수)

$={}_4\Pi_3-{}_3\Pi_3$

$=4^3-3^3$

$=37$

나오는 눈의 수의 최솟값이 3인 경우의 수는

(세 눈 중 1, 2는 나오지 않고, 적어도 하나는 3이 나오는 경우의 수)

=(3, 4, 5, 6에서 3개를 택하는 중복순열의 수)

−(4, 5, 6에서 3개를 택하는 중복순열의 수)

$={}_4\Pi_3-{}_3\Pi_3$

$=4^3-3^3$

$=37$

나오는 눈의 최댓값이 4, 최솟값이 3인 경우의 수는

(3, 4에서 3개를 택하는 중복순열의 수)−{(세 눈 모두 3만 나오는 경우의 수)+(세 눈 모두 4만 나오는 경우의 수)}

$={}_2\Pi_3-(1+1)$

$=2^3-2$

$=6$

따라서 나오는 눈의 수의 최댓값이 4이거나 최솟값이 3인 경우의 수는

$37+37-6=68$ …… ❷

이므로 구하는 확률은

$\frac{68}{216}=\frac{17}{54}$

$\therefore p=54, q=17$

$\therefore p+q=54+17=71$ …… ❸

답 71

채점기준	배점
❶ 전체 경우의 수 구하기	2
❷ 눈의 수의 최댓값이 4이거나 최솟값이 3인 경우의 수 구하기	3
❸ 확률과 $p+q$의 값 구하기	2

MEMO

MEMO

MEMO