정답 및 해설

고등 내신 1등급을 위한 기출문제집

100발100중

고등 기출문제집

확률과 통계 하

Ⅱ 확률

2 조건부확률

교과서 예제 p.7

01 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{2}{3}$

02 $\frac{10}{21}$

03 $\frac{3}{28}$

04 (1) 종속 (2) 독립

05 독립

06 (1) $\frac{8}{81}$ (2) $\frac{16}{81}$ (3) $\frac{65}{81}$

07 $\frac{1}{64}$

기출 Best | 1회 p.8~11

01 ①	02 ④	03 ②	04 ④	05 ①
06 ②	07 ②	08 ③	09 ⑤	10 ③
11 ②	12 ④	13 ④	14 ④	15 ③
16 ①	17 ②	18 ⑤	19 ⑤	20 ③

기출 Best | 2회 p.12~15

01 ⑤	02 ②	03 ①	04 ④	05 ②
06 ③	07 ②	08 ③	09 ⑤	10 ⑤
11 ④	12 ③	13 ④	14 ②	15 ③
16 ②	17 ①	18 ⑤	19 ①	20 ③

변형유형 집중공략 p.16~17

1-1 15　1-2 156　2-1 ⑤　2-2 ⑤

서술형 What & How p.18~19

1 48　2 29　3 225　4 379

실전 문제 | 1회 p.20~23

01 ①	02 ④	03 ④	04 ③	05 ①
06 ④	07 ②	08 ③	09 ①	10 ④
11 ①	12 ③	13 ③	14 ④	15 ③
16 ⑤	17 ②	18 (1) 42 (2) 36		19 22

실전 문제 | 2회 p.24~27

01 ①	02 ④	03 ②	04 ④	05 ④
06 ②	07 ①	08 ④	09 ②	10 ⑤
11 ①	12 ③	13 ⑤	14 ①	15 ②
16 ④	17 ②	18 12	19 20	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.28~32

1 ④	2 ②	3 ②	4 ③	5 62
6 365	7 ④	8 ⑤	9 ①	10 ⑤

Ⅲ 통계

1 확률분포(1)

교과서 예제 p.35, 37

01 (1) 연속확률변수 (2) 연속확률변수
(3) 이산확률변수 (4) 이산확률변수

02 (1) 2, 3, 4, ..., 12 (2) 0, 1 (3) 0, 1, 2, 3, 4

03 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$

04 $\frac{1}{4}$

05 (1)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{11}{32}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	1

(2) $\frac{15}{32}$

06 (1)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

(2) $\frac{5}{7}$

07 $\frac{2}{3}$

08 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{5}{16}$

09 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{\sqrt{15}}{6}$

10 (1) $\frac{18}{7}$ (2) $\frac{19}{49}$ (3) $\frac{\sqrt{19}}{7}$

11 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{11}{12}$

12 $\frac{6}{7}$

13 (1) -39 (2) 4 (3) 12

14 (1) 평균: -45, 분산: 36, 표준편차: 6
(2) 평균: 18, 분산: 4, 표준편차: 2
(3) 평균: -19, 분산: 9, 표준편차: 3

15 (1) 1 (2) 45 (3) $\sqrt{5}$

기출 Best | 1회 p.38~40

01 ⑤	02 ⑤	03 ⑤	04 ④	05 ⑤
06 ①	07 ①	08 ④	09 ③	10 ③
11 ②	12 ④	13 ⑤	14 ①	15 ①

기출 Best | 2회 p.41~43

01 ②	02 ③	03 ①	04 ①	05 ⑤
06 ④	07 ③	08 ③	09 ④	10 ①
11 ②	12 ③	13 ①	14 ③	15 ②

변형유형 집중공략 p.44~45

1-1 ① 1-2 ⑤ 2-1 ⑤ 2-2 ②

서술형 What & How p.46~47

1 16 2 70 3 1 4 160

실전 문제 | 1회 p.48~51

01 ④	02 ③	03 ⑤	04 ①	05 ④
06 ①	07 ⑤	08 ①	09 ③	10 ③
11 ②	12 ②	13 ⑤	14 ⑤	15 ⑤
16 ③	17 ②	18 5	19 15	

실전 문제 | 2회 p.52~55

01 ③	02 ⑤	03 ③	04 ②	05 ④
06 ②	07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ⑤
11 ③	12 ②	13 ①	14 ③	15 ④
16 ①	17 ⑤	18 5	19 10	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.56~60

1 ⑤	2 ①	3 ④	4 ③	5 ②
6 ⑤	7 ④	8 ⑤	9 ④	10 ③

2 확률분포 (2)

교과서 예제 p.63

01 (1) $P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}$ $(x=0, 1, 2, \dots, 5)$
(2) $\frac{80}{243}$

02 (1) $P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}$ $(x=0, 1, 2, 3, 4)$
(2) $\frac{96}{625}$

03 (1) $E(X)=12$, $V(X)=9$, $\sigma(X)=3$
(2) $E(X)=200$, $V(X)=100$, $\sigma(X)=10$

04 (1) $N(50, 6^2)$ (2) $N(40, 3^2)$

05 ㄱ, ㄴ

06 (1) 0.9772 (2) 0.0668 (3) 0.1498

07 0.6826

08 (1) $N(50, 5^2)$ (2) $N(600, 20^2)$

09 0.3085

기출 Best | 1회 p.64~67

01 ⑤ 02 ② 03 ③ 04 ④ 05 ③
06 ① 07 ① 08 ② 09 ④ 10 ④
11 ③ 12 ② 13 ⑤ 14 ③ 15 ①
16 ② 17 ⑤ 18 ③ 19 ② 20 ④
21 ①

기출 Best | 2회 p.68~71

01 ③ 02 ⑤ 03 ② 04 ① 05 ④
06 ② 07 ③ 08 ① 09 ① 10 ④
11 ② 12 ③ 13 ① 14 ⑤ 15 ②
16 ③ 17 ④ 18 ③ 19 ③ 20 ①
21 ⑤

변형유형 집중공략 p.72~73

1-1 ② 1-2 3 2-1 ③ 2-2 ④

서술형 What & How p.74~75

1 96 2 42 3 25 4 39

실전 문제 | 1회 p.76~79

01 ⑤ 02 ② 03 ① 04 ④ 05 ③
06 ⑤ 07 ① 08 ① 09 ② 10 ③
11 ② 12 ③ 13 ③ 14 ③ 15 ①
16 ② 17 ① 18 (1) 14 (2) 48 19 994

실전 문제 | 2회 p.80~83

01 ③ 02 ① 03 ① 04 ② 05 ④
06 ④ 07 ④ 08 ④ 09 ③ 10 ④
11 ② 12 ⑤ 13 ⑤ 14 ② 15 ③
16 ④ 17 ③ 18 194 19 851

수능형 기출문제 & 변형문제 p.84~88

1 16 2 ⑤ 3 25 4 20 5 ②
6 ③ 7 ④ 8 ④ 9 994 10 ③

3 통계적 추정

교과서 예제 p.91, 93

01 (1) 전수조사 (2) 표본조사 (3) 표본조사
(4) 표본조사 (5) 전수조사 (6) 표본조사
02 (1) 9 (2) 6
03 (1) $m=3$, $\sigma^2=5$ (2) $\overline{X}=3$, $S^2=4$
04 (1) $\overline{X}=0$, $S^2=4$, $S=2$ (2) $\overline{X}=1$, $S^2=3$, $S=\sqrt{3}$
05 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{9}$
06 (1) 100 (2) 4 (3) 2
07 (1) 40 (2) 16 (3) 4
08 (1) 0.1587 (2) 0.9710 (3) 0.9332
09 (1) $76.08 \le m \le 83.92$ (2) 7.84
10 (1) $112.26 \le m \le 127.74$ (2) 15.48
11 (1) 0.1 (2) 0.105
12 (1) 0.4 (2) 0.0004 (3) 0.02
13 (1) 0.2 (2) 0.0016 (3) 0.04
14 (1) $\mathrm{N}(0.1,\ 0.01^2)$ (2) $\mathrm{N}\left(\frac{1}{3},\ \left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$
15 (1) 0.0228 (2) 0.2417
16 (1) $0.042 \le p \le 0.558$ (2) 0.516
17 $0.402 \le p \le 0.598$

기출 Best | 1회 p.94~97

01 ① 02 ④ 03 ⑤ 04 ③ 05 ②
06 ④ 07 ④ 08 ② 09 ⑤ 10 ①
11 ③ 12 ⑤ 13 ④ 14 ② 15 ③
16 ④ 17 ④ 18 ④ 19 ② 20 ③

기출 Best | 2회

p.98~101

01 ③	02 ①	03 ④	04 ⑤	05 ④
06 ②	07 ①	08 ②	09 ⑤	10 ③
11 ④	12 ⑤	13 ②	14 ④	15 ④
16 ②	17 ③	18 ②	19 ①	20 ③

변형유형 집중공략

p.102~103

1-1 ②	1-2 ①	2-1 ①	2-2 7

서술형 What & How

p.104~105

1 20	2 59	3 2	4 4

실전 문제 | 1회

p.106~110

01 ③	02 ④	03 ⑤	04 ①	05 ②
06 ③	07 ①	08 ②	09 ⑤	10 ③
11 ③	12 ④	13 ④	14 ②	15 ④
16 ③	17 ③	18 ④	19 ②	20 ④
21 145	22 11			

실전 문제 | 2회

p.111~115

01 ④	02 ④	03 ①	04 ①	05 ④
06 ④	07 ③	08 ③	09 ②	10 ①
11 ④	12 ③	13 ③	14 ⑤	15 ④
16 ③	17 ⑤	18 ③	19 ④	20 ①
21 ②	22 5	23 167		

수능형 기출문제 & 변형문제

p.116~120

1 ③	2 ②	3 ③	4 ②	5 ⑤
6 ③	7 ②	8 ④	9 400	10 ④

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.122~125

01 ⑤	02 ④	03 ③	04 ①	05 ②
06 ⑤	07 ⑤	08 ③	09 ①	10 ②
11 ③	12 ②	13 ⑤	14 ③	15 ④
16 ④	17 85	18 128	19 5	20 5

실전 모의고사 2회

p.126~129

01 ③	02 ③	03 ④	04 ⑤	05 ⑤
06 ②	07 ④	08 ①	09 ⑤	10 ①
11 ①	12 ②	13 ②	14 ③	15 ④
16 ④	17 189	18 34	19 40	20 32

실전 모의고사 3회

p.130~133

01 ②	02 ④	03 ②	04 ①	05 ①
06 ③	07 ④	08 ⑤	09 ③	10 ③
11 ①	12 ④	13 ③	14 ①	15 ②
16 ③	17 900	18 63	19 -5	20 33

실전 모의고사 4회

p.134~137

01 ⑤	02 ①	03 ④	04 ③	05 ①
06 ④	07 ⑤	08 ②	09 ①	10 ②
11 ⑤	12 ①	13 ④	14 ①	15 ①
16 ④	17 42	18 2	19 5328	20 144

실전 모의고사 5회

p.138~141

01 ②	02 ③	03 ①	04 ①	05 ③
06 ②	07 ①	08 ⑤	09 ①	10 ③
11 ③	12 ⑤	13 ④	14 ④	15 ②
16 ③	17 15	18 400	19 18	20 23

Ⅱ 확률

2 조건부확률

교과서 예제 p.7

01 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5\}$

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2) $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(3) $A\cap B=\{1, 3\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(4) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

(5) $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{2}{3}$

02 전체 370명 중에서 임의로 택한 1명이 놀이공원을 선호하는 학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

전체 370명 중에서 놀이공원을 선호하는 학생이 210명, 놀이공원을 선호하는 2학년 학생이 100명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{210}{370}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{100}{370}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{100}{370}}{\frac{210}{370}}=\frac{10}{21}$ 답 $\frac{10}{21}$

다른풀이 표본공간을 S라 하면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{100}{210}=\frac{10}{21}$$

03 첫 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.

첫 번째에 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$

첫 번째에 흰 공을 꺼냈을 때, 두 번째에도 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{7}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$ 답 $\frac{3}{28}$

04 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{5, 6\}$

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$A\cap B=\{2\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

즉 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(2) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$A\cap C=\{6\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A\cap C)$

즉 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

답 (1) 종속 (2) 독립

05 40명 중 여학생은 25명, 음악을 전공한 학생은 16명, 음악을 전공한 여학생은 10명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{4}=\mathrm{P}(A\cap B)$

즉 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 답 독립

06 (1) ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

(2) ${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(3) 서브를 적어도 한 번 성공시키는 사건을 A라 하면 A^C는 서브를 한 번도 성공시키지 못하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$

답 (1) $\frac{8}{81}$ (2) $\frac{16}{81}$ (3) $\frac{65}{81}$

07 과녁의 정중앙을 4번 또는 5번 맞힐 확률이므로

${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{15}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{1}{64}$

답 $\frac{1}{64}$

기출 Best | 1회 p.8~11

01 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{5}{12}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{6}$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

이때

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

이므로

$$\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$ 답 ①

02 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$에서 $\frac{1}{3}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{2}{3}}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$ 답 ④

03 $a+b$의 값이 짝수인 사건을 A, ab의 값이 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$a+b$의 값이 짝수이면 a, b는 모두 홀수이거나 모두 짝수이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{6+3}{21}=\frac{3}{7}$

사건 $A\cap B$는 a, b가 모두 짝수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{3}$$ 답 ②

04 임의로 택한 한 명이 안경을 착용한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$$ 답 ④

05 갑이 소설책을 꺼내는 사건을 A, 을이 소설책을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{12}$

갑이 소설책을 꺼냈을 때, 을도 소설책을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{11}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{5}{33}$ 답 ①

06 첫 번째에 '당첨'이 적힌 종이를 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 '당첨'이 적힌 종이를 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}$

첫 번째에 '당첨'이 적힌 종이를 꺼냈을 때, 두 번째에도 '당첨'이 적힌 종이를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$ 답 ②

07 첫 번째에 검은 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 검은 공이 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이다.

첫 번째에 검은 공, 두 번째에 검은 공이 나올 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$

첫 번째에 흰 공, 두 번째에 검은 공이 나올 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{6}{56}+\frac{15}{56}=\frac{3}{8}$ 답 ②

08 결승전 날 비가 오는 사건을 A, 결승전에서 J팀이 이기는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이고

$\mathrm{P}(B|A)=0.2$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.7$, $\mathrm{P}(A)=0.3$

결승전 날 비가 오고 J팀이 경기에서 이길 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.3\times0.2=0.06$

결승전 날 비가 오지 않고 J팀이 경기에서 이길 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.7\times0.7=0.49$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=0.06+0.49=0.55$ 답 ③

09 갑이 파란 펜을 꺼내는 사건을 A라 하면 갑이 빨간 펜을 꺼내는 사건은 A^C이다. 또 을이 빨간 펜을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{9}{12}$

갑이 파란 펜을 꺼내고 을이 빨간 펜을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{9}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{9}{44}$

갑이 빨간 펜을 꺼내고 을도 빨간 펜을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}=\frac{1}{22}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{9}{44}+\frac{1}{22}=\frac{1}{4}$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{9}{44}}{\frac{1}{4}}=\frac{9}{11}$$ 답 ⑤

10 기계 A에서 생산한 제품을 택하는 사건을 A, 불량품을 택하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{25}{100}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{75}{100}$

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{2}{100}$, $\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{4}{100}$

임의로 택한 한 개의 제품이 기계 A에서 생산한 제품이면서 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{25}{100}\times\frac{2}{100}=\frac{1}{200}$

기계 B에서 생산한 제품이면서 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{75}{100}\times\frac{4}{100}=\frac{3}{100}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\frac{1}{200}+\frac{3}{100}=\frac{7}{200}$

$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{200}}{\frac{7}{200}}=\frac{1}{7}$ 답 ③

참고 기계 A에서 제품이 만들어지는 사건을 A라 하면 기계 B에서 제품이 만들어지는 사건은 A^C이다.

참고 구하는 확률은

$\frac{(\text{기계 A에서 생산한 제품이면서 불량품일 확률})}{(\text{불량품이 나올 확률})}$

$=\frac{\frac{25}{100}\times\frac{2}{100}}{\frac{25}{100}\times\frac{2}{100}+\frac{75}{100}\times\frac{4}{100}}=\frac{50}{50+300}=\frac{1}{7}$

과 같이 계산할 수도 있다.

11 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$이고

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$,

$C=\{1, 2, 5, 10\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$이고

$A\cap B=\{3, 5, 7\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

ㄴ. $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$이고

$B\cap C=\{2, 5\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\neq\mathrm{P}(B\cap C)$

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{5}$이고

$A\cap C=\{1, 5\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A\cap C)$

따라서 두 사건이 서로 독립인 것은 ㄷ이다. 답 ②

12 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$

$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다. (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq 0$

즉 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다. (거짓)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$

$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}$

$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$ ······ ㉠

$\therefore \mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$

$=\frac{\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$

$=\mathrm{P}(A^C)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

참고 ㉠에서 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

13 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4}$에서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{8}{9}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{8}{9}$ 답 ④

14 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{5}$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

에서

$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$ 답 ④

15 A 도시, B 도시에 내일 눈이 오는 사건을 각각 A, B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{5}-\frac{3}{20}=\frac{7}{10}$$

답 ③

다른풀이 여사건의 확률을 이용하여
(적어도 한 도시에 눈이 올 확률)
=1−(A 도시, B 도시 중 어느 도시에도 눈이 오지 않을 확률)
로 풀 수도 있다.

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{5}$이고 두 사건 A^C, B^C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$$
$$=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

16 주머니 A, 주머니 B에서 검은 바둑돌이 나오는 사건을 각각 A, B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

답 ①

17 시험에 합격하려면 4문제 또는 5문제를 맞혀야 하므로 구하는 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0$$
$$=\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\frac{81}{128}$$

답 ②

18 한 개의 주사위를 4번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 25의 배수인 사건은 5의 배수의 눈이 2번 이상 나오는 사건이다.

주사위를 한 번 던질 때 5의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$
5뿐이다.

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 5의 배수의 눈이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 5의 배수의 눈이 1번 이하 나오는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5^4}{6^4}+\frac{4\times5^3}{6^4}=\frac{125}{144}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{125}{144}=\frac{19}{144}$$

답 ⑤

19 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 x ($x=0, 1, 2, \dots, 5$)번 나온다고 하면 뒷면은 $(5-x)$번 나온다. 이때 점 P가 움직인 거리는

$2x+1\times(5-x)=x+5$

이고, 점 P가 꼭짓점 C에 도착하려면 움직인 거리가 4로 나누었을 때의 나머지가 2인 수이어야 한다.

(i) $x+5=2$일 때, $x=-3$
그런데 $0\le x\le5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x+5=6$일 때, $x=1$

(iii) $x+5=10$일 때, $x=5$

(iv) $x+5=14$일 때, $x=9$
그런데 $0\le x\le5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 동전의 앞면이 1번 또는 5번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$$

답 ⑤

20 한 개의 주사위를 8번 던질 때, 3의 약수의 눈이 x ($x=0, 1, 2, \dots, 8$)번 나온다고 하면 3의 약수가 아닌 눈은 $(8-x)$번 나온다. 이때 얻은 점수는

$1\times x+(-2)\times(8-x)=3x-16$

5점을 얻어야 하므로 $3x-16=5$

$3x=21$ $\quad\therefore x=7$

즉 점수의 합이 5점이려면 한 개의 주사위를 8번 던져서 3의 약수의 눈이 7번, 3의 약수가 아닌 눈이 1번 나와야 한다.

이때 한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 약수의 눈이 나올 확률은
1, 3

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 구하는 확률은

$${}_8\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{16}{3^8}$$

따라서 $p=16$, $n=8$이므로

$p+n=16+8=24$

답 ③

기출 Best 2회

p.12~15

01 $\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}$이고

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

이므로

$$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

02 $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}$에서

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}+\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{5}}+\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

$$5\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}$$

$$8\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3} \qquad \therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{12}$$

답 ②

03 A, B, C, D의 소지품을 각각 a, b, c, d라 할 때, D가 a를 택하는 사건을 X라 하고, 넷 중 한 사람만 본인의 소지품을 택하는 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.
이때 네 사람이 소지품을 각각 하나씩 택하는 경우의 수는
$4!=24$
이고, D가 a를 택하는 경우의 수는
$3!=6$
이므로
$\mathrm{P}(X)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$
D가 a를 택하고, 넷 중 한 사람만 본인의 소지품을 택하는 경우의 수는 2이므로
$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$ 답 ①

참고 D가 a를 택했을 때, 넷 중 한 사람만 본인의 소지품을 택하는 경우는 오른쪽 표와 같이 2가지이다.

A	B	C
c	b	d
b	d	c

04 참가한 회원 50명 중에서 임의로 뽑은 한 명이 마라톤에서 완주한 회원인 사건을 A, 청년팀 회원인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{35}{50}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{28}{50}$이므로
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{28}{50}}{\frac{35}{50}}=\frac{4}{5}$$ 답 ④

다른풀이 표본공간을 S라 하면
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}$$
$$=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{28}{35}=\frac{4}{5}$$

05 주머니 속에 들어 있는 흰 공은 n개, 검은 공은 $(12-n)$개이다.
갑이 검은 공을 꺼내는 사건을 A, 을이 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{33}$이고
$\mathrm{P}(A)=\frac{12-n}{12}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{11}$
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$이므로
$\frac{8}{33}=\frac{12-n}{12}\times\frac{n}{11}$, $n(12-n)=32$, $n^2-12n+32=0$
$(n-4)(n-8)=0$ $\quad\therefore n=8\ (\because n\ge 7)$ 답 ②

06 첫 번째에 당첨권을 뽑는 사건을 A, 두 번째에 당첨권이 아닌 행운권을 뽑는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이고
$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$
첫 번째에 당첨권을 뽑았을 때, 두 번째에 당첨권이 아닌 행운권을 뽑을 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{9}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$ 답 ③

07 갑이 딸기맛 젤리를 꺼내는 사건을 A, 을이 딸기맛 젤리를 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이고
$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{9}$
갑이 딸기맛 젤리를 꺼내고, 을도 딸기맛 젤리를 꺼낼 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{12}{72}$
갑이 사과맛 젤리를 꺼내고, 을은 딸기맛 젤리를 꺼낼 확률은
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{20}{72}$
$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$=\frac{12}{72}+\frac{20}{72}=\frac{4}{9}$ 답 ②

08 상자 A에서 빨간색 깃발 1개를 꺼내는 사건을 A, 상자 B에서 파란색 깃발 2개를 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이고
$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$
(i) 상자 A에서 꺼낸 깃발이 빨간색 깃발일 때
상자 B에는 빨간색 깃발 3개, 파란색 깃발 3개가 들어 있으므로 상자 A에서 빨간색 깃발을 꺼내고, 상자 B에서 파란색 깃발 2개를 꺼낼 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$
$=\frac{3}{5}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{15}=\frac{9}{75}$
(ii) 상자 A에서 꺼낸 깃발이 파란색 깃발일 때
상자 B에는 빨간색 깃발 2개, 파란색 깃발 4개가 들어 있으므로 상자 A에서 파란색 깃발을 꺼내고, 상자 B에서 파란색 깃발 2개를 꺼낼 확률은
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$
$=\frac{2}{5}\times\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}\times\frac{6}{15}=\frac{12}{75}$
(i), (ii)에서
$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$=\frac{9}{75}+\frac{12}{75}=\frac{7}{25}$ 답 ③

09 주머니 A를 택하는 사건을 A라 하면 주머니 B를 택하는 사건은 A^C이다. 또 흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 각각 한 개씩 꺼내는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이고
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$

주머니 A를 택하고 주머니 A에서 흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 각각 한 개씩 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

주머니 B를 택하고 주머니 B에서 흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 각각 한 개씩 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{17}{30}$

$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{17}{30}}=\frac{9}{17}$ 답 ⑤

10 독감 환자들 중 임의로 택한 한 명이 인플루엔자 B형 환자인 사건을 B라 하면 인플루엔자 A형 환자인 사건은 B^C이다. 또 항생제에 내성이 있는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|E)$이고

$\mathrm{P}(B)=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(E|B)=\frac{3}{100}$, $\mathrm{P}(E|B^C)=\frac{2}{100}$

인플루엔자 B형에 걸렸으면서 항생제에 내성이 있을 확률은

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{100}=\frac{21}{1000}$

인플루엔자 A형에 걸렸으면서 항생제에 내성이 있을 확률은

$\mathrm{P}(B^C\cap E)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(E|B^C)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{100}=\frac{6}{1000}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(B^C\cap E)=\frac{21}{1000}+\frac{6}{1000}=\frac{27}{1000}$

$\therefore \mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{21}{1000}}{\frac{27}{1000}}=\frac{7}{9}$ 답 ⑤

11 한 개의 동전을 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$2^2=4$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$A=\{\mathrm{HH}\}$, $B=\{\mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$, $C=\{\mathrm{HH}, \mathrm{TT}\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

즉 두 사건 A, B는 서로 종속이다. (거짓)

ㄴ. $B\cap C=\{\mathrm{TT}\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(B\cap C)$

즉 두 사건 B, C는 서로 독립이다. (참)

ㄷ. $A\cap C=\{\mathrm{HH}\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)\neq\mathrm{P}(A\cap C)$

즉 두 사건 A, C는 서로 종속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

12 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

즉 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다. (참)

ㄴ. A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$A^C\cap B=B-A=B$

$\therefore \mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}=1$ (참)

ㄷ. A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(B|A)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

13 $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$에서 $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 답 ④

다른풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

14 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\times\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=6\times\mathrm{P}(A\cap B)=6\times\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$ 답 ②

15 갑, 을이 연말에 공연을 관람하는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A와 B^C, A^C와 B도 각각 서로 독립이다.

연말에 갑은 공연을 관람하고 을은 공연을 관람하지 않을 확률은

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{12}$

연말에 갔은 공연을 관람하지 않고 을은 공연을 관람할 확률은

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{12}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$ 답 ③

16 B, C 중 B가 결승에 진출하고 결승전에서 A가 이길 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$

B, C 중 C가 결승에 진출하고 결승전에서 A가 이길 확률은

$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{20}+\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$ 답 ②

17 다섯 번째 경기에서 학생 A가 우승컵을 받으려면 학생 A는 네 번째 경기까지 2승 2패 후 다섯 번째 경기를 이겨야 한다.

따라서 구하는 확률은

${}_4C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{81}{512}$ 답 ①

18 4개의 좌석에 대하여 6건의 예약을 받았으므로 2명 이상이 취소해야 모든 사람이 앉을 수 있다. 즉 좌석이 부족하게 되는 경우는 취소한 사람이 없거나 1명인 경우이다.

6명 중 예약을 취소한 사람이 0명일 확률은

${}_6C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$

6명 중 예약을 취소한 사람이 1명일 확률은

${}_6C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{192}{729}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{64}{729}+\frac{192}{729}=\frac{256}{729}$ 답 ⑤

19 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 5의 약수의 눈이 나올 확률은

1, 5

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

한 개의 주사위를 5번 던질 때, 5의 약수의 눈이 x ($x=0, 1, 2, \dots, 5$)번 나온다고 하면 5의 약수가 아닌 눈은 $(5-x)$번 나온다. 이때 점 P가 움직인 거리는

$1\times x+2\times(5-x)=10-x$

이고, 점 P가 꼭짓점 D에 도착하려면 움직인 거리가 6으로 나누었을 때의 나머지가 3인 수이어야 한다.

(i) $10-x=3$일 때, $x=7$

그런데 $0\le x\le 5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $10-x=9$일 때, $x=1$

(iii) $10-x=15$일 때, $x=-5$

그런데 $0\le x\le 5$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $x=1$

따라서 5의 약수의 눈이 1번, 5의 약수가 아닌 눈이 4번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$ 답 ①

20 서로 다른 2개의 동전을 동시에 던질 때, 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$

이 시행을 4번 반복할 때, 모두 앞면이 x ($x=0, 1, 2, 3, 4$)번 나온다고 하면 그 외의 경우는 $(4-x)$번 나온다. 이때 점 P의 좌표는

$1\times x+(-1)\times(4-x)=2x-4$

점 P의 좌표가 2이어야 하므로 $2x-4=2$

$2x=6 \quad \therefore x=3$

따라서 2개의 동전 모두 앞면이 나오는 경우가 3번, 그 외의 경우가 1번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{64}$ 답 ③

변형유형 집중공략

p.16~17

1-1 학생 35명 중 빅데이터 수업을 신청한 학생은 12+4=16(명)이므로 코딩 수업을 신청한 남학생 수를 n이라 하면 코딩 수업을 신청한 여학생 수는 $19-n$

(단위: 명)

	빅데이터	코딩	합계
남학생	12	n	$12+n$
여학생	4	$19-n$	$23-n$
합계	16	19	35

임의로 택한 한 명이 코딩 수업을 신청한 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면 $P(B|A)=\frac{8}{19}$이고

$P(A)=\frac{19}{35}$, $P(A\cap B)=\frac{n}{35}$

이므로

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{n}{35}}{\frac{19}{35}}=\frac{n}{19}=\frac{8}{19} \qquad \therefore n=8$

따라서 이 학급의 여학생 수는 $23-8=15$이다. 답 15

1-2 남학생 수는 $150+90=240$

전체 학생이 500명이므로 여학생 수는 $500-240=260$

영화반을 선택한 여학생 수를 n이라 하면 연극반을 선택한 여학생 수는 $260-n$

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
영화반	150	n	$150+n$
연극반	90	$260-n$	$350-n$
합계	240	260	500

임의로 택한 한 명이 여학생인 사건을 A, 연극반을 선택한 학생인 사건을 B라 하면 $P(B|A)=\frac{2}{5}$이고

$P(A)=\frac{260}{500}$, $P(A\cap B)=\frac{260-n}{500}$

이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{260-n}{500}}{\frac{260}{500}}=\frac{260-n}{260}$$

즉 $\frac{260-n}{260}=\frac{2}{5}$이므로

$260-n=104 \qquad \therefore n=156$

따라서 영화반을 선택한 여학생 수는 156이다. 답 156

2-1 갑이 당첨되지 않는 사건을 A, 을이 당첨되는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$이고

20장 중 당첨 복권이 아닌 복권은 18장이므로

$P(A)=\frac{18}{20}$, $P(A^C)=\frac{2}{20}$

갑이 당첨되지 않고 을은 당첨될 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{18}{20}\times\frac{2}{19}=\frac{9}{95}$$

갑이 당첨되고 을도 당첨될 확률은

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{2}{20}\times\frac{1}{19}=\frac{1}{190}$$

$$\therefore P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=\frac{9}{95}+\frac{1}{190}=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{9}{95}}{\frac{1}{10}}=\frac{18}{19}$$

답 ⑤

2-2 임의로 택한 후기가 여성이 작성한 후기인 사건을 A, '제공'이라는 단어를 포함하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $P(A|E)$이고

$P(A)=0.8$, $P(A^C)=0.2$

$P(E|A)=0.6$, $P(E|A^C)=0.75$

임의로 택한 후기가 여성이 작성한 후기이고 '제공'이라는 단어를 포함할 확률은

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.8\times0.6=0.48$

남성이 작성한 후기이고 '제공'이라는 단어를 포함할 확률은

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=0.2\times0.75=0.15$

$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)=0.48+0.15=0.63$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{0.48}{0.63}=\frac{16}{21}$$

답 ⑤

서술형 What & How

p.18~19

1 오늘 비가 올 확률이 $\frac{3}{5}$이므로 오늘 비가 오지 않을 확률은 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$이다. 또 비가 오지 않은 날의 다음 날에도 비가 오지 않을 확률이 $\frac{4}{7}$이므로 비가 오지 않은 날의 다음 날 비가 올 확률은 $1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$이다.

오늘 비가 오고 내일도 비가 올 확률은

$\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$ …… ❶

오늘 비가 오지 않고 내일 비가 올 확률은

$\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{35}$ …… ❷

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{5}+\frac{6}{35}=\frac{13}{35}$

즉 $p=35$, $q=13$이므로

$p+q=35+13=48$ …… ❸

답 48

다른풀이 오늘 비가 오는 사건을 A, 내일 비가 오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B)$이고

$P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(B^C|A^C)=\frac{4}{7}$, $P(A)=\frac{3}{5}$

이므로

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$P(B|A^C)=1-P(B^C|A^C)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

$$\begin{aligned}\therefore P(B)&=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)\\&=P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)\\&=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\\&=\frac{13}{35}\end{aligned}$$

2 (적어도 한 번은 명중시킬 확률)

=1−(첫 번째도 두 번째도 명중시키지 못할 확률) …… ㉠

첫 번째 시도에 명중시키지 못할 확률은

$1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ …… ❶

첫 번째 시도에 명중시키지 못하고, 두 번째 시도에서도 명중시키지 못할 확률은

$\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$ …… ❷

따라서 구하는 확률은 ㉠에서

$1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

즉 $p=15$, $q=14$이므로

$p+q=15+14=29$ …… ❸

답 29

채점기준	배점
❶ 첫 번째 시도에 명중시키지 못할 확률 구하기	2
❷ 첫 번째 시도에 명중시키지 못하고, 두 번째 시도에서도 명중시키지 못할 확률 구하기	2
❸ 적어도 한 번은 명중시킬 확률을 구하고 $p+q$의 값 구하기	1

다른풀이 양궁 선수가 첫 번째 시도에서 명중시키는 사건을 A, 두 번째 시도에서 명중시키는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)$이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}\end{aligned}$$

3 6차전에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 5차전까지 3승 2패를 하고, 6차전에서 이겨야 한다.

한 경기에서 A팀, B팀이 서로를 이길 확률은 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$이므로

6차전에서 A팀이 우승할 확률은

$_5\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{810}{4^6}$ …… ❶

6차전에서 B팀이 우승할 확률은

$_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{90}{4^6}$ …… ❷

따라서 6차전에서 우승팀이 결정될 확률은

$\frac{810}{4^6}+\frac{90}{4^6}=\frac{900}{4^6}=\frac{225}{4^5}$ $\quad\therefore k=225$ …… ❸

답 225

4 (i) A팀이 4차전에서 우승할 확률

$_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{3^4}$ …… ❶

(ii) A팀이 5차전에서 우승할 확률

4차전까지 3승 1패 후 5번째 경기에서 이기면 되므로

$_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{4\times 2}{3^5}=\frac{8}{3^5}$ …… ❷

(iii) A팀이 6차전에서 우승할 확률

5차전까지 3승 2패 후 6번째 경기에서 이기면 되므로

$_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{10\times 4}{3^6}=\frac{40}{3^6}$ …… ❸

(iv) A팀이 7차전에서 우승할 확률

6차전까지 3승 3패 후 7번째 경기에서 이기면 되므로

$_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{20\times 8}{3^7}=\frac{160}{3^7}$ …… ❹

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\frac{1}{3^4}+\frac{8}{3^5}+\frac{40}{3^6}+\frac{160}{3^7}&=\frac{3^3}{3^7}+\frac{8\times 3^2}{3^7}+\frac{40\times 3}{3^7}+\frac{160}{3^7}\\&=\frac{379}{3^7}\end{aligned}$$ …… ❺

$\therefore k=379$

답 379

채점기준	배점
❶ A팀이 4차전에서 우승할 확률 구하기	1
❷ A팀이 5차전에서 우승할 확률 구하기	1
❸ A팀이 6차전에서 우승할 확률 구하기	1
❹ A팀이 7차전에서 우승할 확률 구하기	1
❺ A팀이 우승할 확률과 k의 값 구하기	2

실전 문제 | 1회

p.20~23

01 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{3}$에서 $\mathrm{P}(B)=3\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{3}{4}$에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{3}\mathrm{P}(A\cap B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{11}{12}=\frac{4}{3}\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{10}{3}\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{11}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{11}{40}$

답 ①

02 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: %)

몸체 \ 뚜껑	파란색	노란색	합계
빨간색	a	$80-a$	80
검은색	$55-a$	$a-35$	20
합계	55	45	100

임의로 택한 1개의 물병의 뚜껑이 노란색인 사건을 A, 몸체가 빨간색인 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{45}{100}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{80-a}{100}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{80-a}{100}}{\frac{45}{100}}=\frac{80-a}{45}$$

즉 $\frac{80-a}{45}=\frac{2}{3}$이므로 $80-a=30$

$\therefore a=50$

답 ④

03 ab가 4의 배수인 사건을 A, $a=2$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 전체 경우의 수는 $6\times 6=36$

ab가 4의 배수인 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$ab=4$인 경우: $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$

$ab=8$인 경우: $(2, 4)$, $(4, 2)$

$ab=12$인 경우: $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$

$ab=16$인 경우: $(4, 4)$

$ab=20$인 경우: $(4, 5)$, $(5, 4)$

$ab=24$인 경우: $(4, 6)$, $(6, 4)$

$ab=36$인 경우: $(6, 6)$

의 15가지이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{15}{36}$

ab가 4의 배수이면서 $a=2$인 경우는 $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$의 3가지이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}}=\frac{1}{5}$$ 답 ④

04 10개의 제비 중 임의로 2개의 제비를 뽑을 때, 당첨 제비가 1개 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 당첨 제비가 하나도 나오지 않는 사건이고, 2등 당첨 제비가 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

10개의 제비 중 임의로 2개의 제비를 뽑을 때, 당첨 제비가 하나도 나오지 않을 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

당첨 제비가 1개 이상 나오고 그 당첨 제비 중 2등 당첨 제비도 있을 확률은 2등 당첨 제비 1장과 다른 제비 1장이 나오거나 2등 당첨 제비가 2장 나올 확률이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{24+6}{45}=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}}=\frac{6}{7}$$ 답 ③

05 10명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $10!$

갑과 을을 이웃하게 세우는 사건을 A, 을과 병을 이웃하게 세우는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

갑과 을을 이웃하게 일렬로 세우는 경우의 수는

갑과 을을 한 명으로 생각하여 9명을 일렬로 세우는 경우의 수가 $9!$, 갑과 을이 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!=2$이므로

$9!\times 2$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{9!\times 2}{10!}=\frac{1}{5}$$

갑과 을을 이웃하게, 을과 병을 이웃하게 세우는 경우는 을의 양 옆에 갑과 병을 각각 세우는 경우이다.

따라서 갑과 을을 이웃하게, 을과 병을 이웃하게 세우는 경우의 수는

갑, 을, 병을 한 명으로 생각하여 8명을 일렬로 세우는 경우의 수가 $8!$, 갑과 병이 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!=2$이므로

$8!\times 2$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8!\times 2}{10!}=\frac{1}{45}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{9}$$ 답 ①

06 함수 $f: X\longrightarrow Y$의 개수는 ${}_8\Pi_3=8^3=512$

임의로 택한 함수 f가 $f(3)\leq f(2)\leq f(1)$을 만족시키는 사건을 A, $f(3)=2$ 또는 $f(1)=7$을 만족시키는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$f(3)\leq f(2)\leq f(1)$을 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_8\mathrm{H}_3={}_{8+3-1}\mathrm{C}_3={}_{10}\mathrm{C}_3=120$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{120}{512}$$

(i) $f(3)\leq f(2)\leq f(1)$이고 $f(3)=2$인 함수의 개수

$2\leq f(2)\leq f(1)$이므로 $f(2)$, $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

즉

${}_7\mathrm{H}_2={}_{7+2-1}\mathrm{C}_2={}_8\mathrm{C}_2=28$

(ii) $f(3)\leq f(2)\leq f(1)$이고 $f(1)=7$인 함수의 개수

$f(3)\leq f(2)\leq 7$이므로 $f(3)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

즉

${}_7\mathrm{H}_2={}_{7+2-1}\mathrm{C}_2={}_8\mathrm{C}_2=28$

(iii) $f(3)\leq f(2)\leq f(1)$이고 $f(3)=2$, $f(1)=7$인 함수의 개수

$2\leq f(2)\leq 7$이므로 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개

(i), (ii), (iii)에서 $f(3)\leq f(2)\leq f(1)$이고 $f(3)=2$ 또는 $f(1)=7$인 함수의 개수는

$28+28-6=50$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{50}{512}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{50}{512}}{\frac{120}{512}}=\frac{5}{12}$$ 답 ④

07 꺼낸 공 중 적어도 한 개가 검은 공인 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)$이고, A^C는 꺼낸 공이 모두 흰 공인 사건이다. 또 한 개의 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 B^C는 6의 약수가 아닌 눈이 나오는 사건이다.

(i) 한 개의 주사위를 한 번 던져서 $\underbrace{\text{6의 약수의 눈}}_{1,\ 2,\ 3,\ 6}$이 나올 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률은

$$\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$$

따라서 6의 약수의 눈이 나오고 모두 흰 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{28}=\frac{5}{42}$$

(ii) 한 개의 주사위를 한 번 던져서 6의 약수가 아닌 눈이 나올 확률은

$P(B^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률은

$P(A^C|B^C)=\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$

따라서 6의 약수가 아닌 눈이 나오고 모두 흰 공을 꺼낼 확률은

$P(A^C\cap B^C)=P(B^C)P(A^C|B^C)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{14}=\frac{5}{42}$

(i), (ii)에서

$P(A^C)=P(A^C\cap B)+P(A^C\cap B^C)=\frac{5}{42}+\frac{5}{42}=\frac{5}{21}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$ 답 ②

참고 (적어도 한 개가 검은 공일 확률)

$=1-$(모두 흰 공이 나올 확률)

$=1-\left(\frac{2}{3}\times\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}+\frac{1}{3}\times\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}\right)$

$=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$

과 같이 계산할 수 있다.

08 8번째 시행을 끝으로 시행을 멈추려면 7번째 시행까지 홀수가 적힌 카드 3장, 짝수가 적힌 카드 4장을 꺼내고, 8번째 시행에서 짝수가 적힌 카드를 꺼내야 한다.

7번째 시행까지 홀수가 적힌 카드 3장, 짝수가 적힌 카드 4장을 꺼내는 사건을 A, 8번째 시행에서 짝수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cap B)$이다.

7번째 시행까지 홀수가 적힌 카드 3장, 짝수가 적힌 카드 4장이 나오는 순서를 정하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times4!}=35$

홀수가 적힌 카드, 짝수가 적힌 카드가 나오는 순서가 정해졌을 때, 홀수가 적힌 카드를 3번, 짝수가 적힌 카드를 4번 꺼낼 확률은

$\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{84}$

$\therefore P(A)=35\times\frac{1}{84}=\frac{5}{12}$

이때 남은 카드는 홀수가 적힌 카드 2장, 짝수가 적힌 카드 1장이므로 7번째 시행까지 홀수가 적힌 카드 3장, 짝수가 적힌 카드 4장을 꺼냈을 때, 8번째 시행에서 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$P(B|A)=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{5}{12}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$ 답 ③

다른풀이 $P(A)=\frac{{}_5C_3\times{}_5C_4}{{}_{10}C_7}=\frac{5}{12}$

09 보석이 가품인 사건을 A, 보석을 진품으로 감별하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $P(A|E)$이고

보석이 진품인 사건은 A^C, 보석을 가품으로 감별하는 사건은 E^C이므로

$P(A)=\frac{2}{10}$, $P(A^C)=\frac{8}{10}$

$P(E^C|A^C)=\frac{4}{100}$, $P(E|A)=\frac{6}{100}$

따라서 보석이 진품일 때, 그 보석을 진품으로 감별할 확률은

$P(E|A^C)=1-P(E^C|A^C)=1-\frac{4}{100}=\frac{96}{100}$

보석이 가품이고, 그 보석을 진품으로 감별할 확률은

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{2}{10}\times\frac{6}{100}=\frac{12}{1000}$

보석이 진품이고, 그 보석을 진품으로 감별할 확률은

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=\frac{8}{10}\times\frac{96}{100}=\frac{768}{1000}$

이므로 보석을 진품으로 감별할 확률은

$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$

$=\frac{12}{1000}+\frac{768}{1000}=\frac{780}{1000}$

따라서 구하는 확률은

$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{12}{1000}}{\frac{780}{1000}}=\frac{1}{65}$ 답 ①

10 갑이 가위를 내는 사건을 A, 바위를 내는 사건을 B, 보를 내는 사건을 C, 갑이 이기는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $P(B|E)$이다.

갑이 가위를 내고 이길 확률은 갑이 가위, 을이 보를 낼 확률이므로

$P(A\cap E)=0.4\times0.3=0.12$

갑이 바위를 내고 이길 확률은 갑이 바위, 을이 가위를 낼 확률이므로

$P(B\cap E)=0.4\times0.2=0.08$

갑이 보를 내고 이길 확률은 갑이 보, 을이 바위를 낼 확률이므로

$P(C\cap E)=0.2\times0.5=0.1$

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)$

$=0.12+0.08+0.1=0.3$

따라서 구하는 확률은

$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{0.08}{0.3}=\frac{4}{15}$ 답 ④

11 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C와 B^C, A와 B^C도 각각 서로 독립이므로

$P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C)=\frac{1}{3}$ ...... ㉠

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=\frac{1}{4}$ ...... ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\frac{P(A^C)}{P(A)}=\frac{4}{3}$, $\frac{1-P(A)}{P(A)}=\frac{4}{3}$

$1-P(A)=\frac{4}{3}P(A)$, $\frac{7}{3}P(A)=1$ $\therefore P(A)=\frac{3}{7}$

이것을 ㉡에 대입하면

$\frac{3}{7}\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{12}$

즉 $1-\mathrm{P}(B)=\frac{7}{12}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}+\frac{5}{12}=\frac{71}{84}$ 답 ①

12 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$

ㄱ. $A_3=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $A_6=\{6, 12, 18\}$,

$A_3\cap A_6=\{6, 12, 18\}$이므로

$\mathrm{P}(A_6)=\frac{3}{20}$, $\mathrm{P}(A_3\cap A_6)=\frac{3}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(A_3|A_6)=\frac{\mathrm{P}(A_3\cap A_6)}{\mathrm{P}(A_6)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{20}}=1$ (참)

ㄴ. $A_5=\{5, 10, 15, 20\}$, $A_8=\{8, 16\}$이므로 $A_5\cap A_8=\varnothing$

즉 두 사건 A_5, A_8은 서로 배반사건이다. (참)

ㄷ. $A_4=\{4, 8, 12, 16, 20\}$, $A_5=\{5, 10, 15, 20\}$,

$A_4\cap A_5=\{20\}$이므로

$\mathrm{P}(A_4)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A_5)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{P}(A_4\cap A_5)=\frac{1}{20}$

따라서 $\mathrm{P}(A_4\cap A_5)=\mathrm{P}(A_4)\mathrm{P}(A_5)$이므로 두 사건 A_4, A_5는 서로 독립이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른풀이 ㄱ. 6의 배수는 3의 배수이므로 $A_6\subset A_3$

즉 $A_6\cap A_3=A_6$이므로

$\mathrm{P}(A_3|A_6)=\frac{\mathrm{P}(A_3\cap A_6)}{\mathrm{P}(A_6)}=\frac{\mathrm{P}(A_6)}{\mathrm{P}(A_6)}=1$ (참)

참고 ㄷ에서 집합 $A_4\cap A_5$는 4와 5의 공배수, 즉 20의 배수의 집합이므로 $A_4\cap A_5=A_{20}$

13 한 경기에서 A팀이 B팀을 이길 확률이 $\frac{4}{7}$이므로 B팀이 A팀을 이길 확률은 $1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

1, 2, 3차전 결과 A팀이 2승 1패로 앞서다가 4, 5, 6차전에서 1승 2패를 하고, 7차전에서 B팀이 이겨야 하므로

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{4}{7}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right)^1\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{4}{7}\right)^1\left(\frac{3}{7}\right)^2\times\frac{3}{7}=\frac{3^6\times4^3}{7^7}$

따라서 $a=6$, $b=3$이므로

$ab=6\times3=18$ 답 ③

14 1개의 동전을 한 번 던져서 앞면과 뒷면이 나오는 확률은 각각 $\frac{1}{2}$로 같다. 상자 B에 들어 있는 구슬의 개수가 7번째 시행 후 처음으로 10이 되어야 하므로 6번째 시행 후에는 9, 5번째 시행 후에는 8이어야 한다.

이때 5번째 시행 후에 상자 B에 들어 있는 구슬의 개수가 8이 되기 위해서는 앞면과 뒷면이 각각 3번, 2번씩 나와야 하고, 7번째 시행 후 처음으로 10이 되어야 하므로 첫 번째와 두 번째, 세 번째 모두 연달아서 앞면이 나오는 경우는 제외해야 한다. 또 6번째, 7번째 시행에서는 모두 앞면이 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

$\left\{({}_5\mathrm{C}_3-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{128}$ 답 ④

15 동전 1개를 8번 던져서 앞면이 n $(n=0, 1, 2, \ldots, 8)$번, 뒷면이 $(8-n)$번 나왔을 때, 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(1\times n+1\times(8-n), 2\times(8-n))$, 즉 $\mathrm{P}(8, 16-2n)$

$\therefore a=8$, $b=16-2n$

이때 $a+b=8+(16-2n)=24-2n$이 5의 배수이어야 하므로

$n=2$ 또는 $n=7$

즉 동전 1개를 8번 던져서 앞면이 2번 또는 7번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

${}_8\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_8\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{28}{256}+\frac{8}{256}=\frac{9}{64}$ 답 ③

16 연필 1자루를 가져갈 확률은 1개의 주사위를 한 번 던질 때 나온 눈의 수가 4 이하의 눈이 나올 확률이므로

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

즉 연필 3자루를 가져갈 확률은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

병이 연필 3자루를 가져가려면 갑, 을이 가져가는 연필의 수의 합이 4 이하이어야 한다.

(i) 갑이 1자루, 을이 3자루, 병이 3자루를 가져갈 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

(ii) 갑이 3자루, 을이 1자루, 병이 3자루를 가져갈 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

(iii) 갑이 1자루, 을이 1자루, 병이 3자루를 가져갈 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{4}{27}=\frac{8}{27}$ 답 ⑤

17 주머니에서 공 1개를 꺼낼 때, 빨간 공이 나올 확률은 $\frac{4}{7}$

공을 꺼내는 시행을 7번 반복할 때, 빨간 공이 n번 나온다고 하면 파란 공은 $(7-n)$번 나오므로 얻을 수 있는 점수는

$3\times n+2\times(7-n)=n+14$

이때 16점을 얻어야 하므로

$n+14=16$ $\quad\therefore n=2$

즉 7번의 시행을 반복할 때 빨간 공이 2번, 파란 공이 5번 나와야 하므로

${}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{4}{7}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right)^5=\frac{21\times4^2\times3^5}{7^7}=\frac{3^6\times4^2}{7^6}$

따라서 $p=6$, $q=2$, $r=6$이므로

$p+q+r=6+2+6=14$ 답 ②

18 (1) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{1}{6}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{7}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{42}$

$\therefore m=42$ …… ❶

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

에서

$\frac{1}{6}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\mathrm{P}(A)$

$\frac{6}{7}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{42}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{36}$

$\therefore n=36$ …… ❷

답 (1) 42 (2) 36

채점기준	배점
❶ m의 값 구하기	3
❷ n의 값 구하기	3

19 검은 모자를 꺼내는 사건을 A, 검은 모자를 꺼냈다고 대답하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이다.

A^C는 흰 모자를 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{8}$

모자의 색에 대해 거짓말을 할 확률은

$\mathrm{P}(E|A^C)=\mathrm{P}(E^C|A)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

모자의 색에 대해 참을 말할 확률은

$\mathrm{P}(E|A)=\mathrm{P}(E^C|A^C)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

검은 모자를 꺼내고 검은 모자를 꺼냈다고 참을 말할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{5}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{5}{40}$ …… ❶

흰 모자를 꺼내고 검은 모자를 꺼냈다고 거짓말을 할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{3}{8}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{40}$ …… ❷

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\frac{5}{40}+\frac{12}{40}=\frac{17}{40}$ …… ❸

$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{5}{40}}{\frac{17}{40}}=\frac{5}{17}$

따라서 $p=17$, $q=5$이므로

$p+q=17+5=22$ …… ❹

답 22

채점기준	배점
❶ 검은 모자를 꺼내는 사건을 A, 검은 모자를 꺼냈다고 대답하는 사건을 E라 할 때, $\mathrm{P}(A\cap E)$의 값 구하기	2
❷ $\mathrm{P}(A^C\cap E)$의 값 구하기	2
❸ $\mathrm{P}(E)$의 값 구하기	2
❹ $\mathrm{P}(A|E)$의 값과 $p+q$의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.24~27

01 임의로 택한 한 명이 단체 줄넘기 경기에 참가하는 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{9}{17}$

단체 줄넘기에 참가하는 학생 수는

$(b+4)+(3a-4)=3a+b$

이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3a+b}{30}$

또 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{b+4}{30}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{b+4}{30}}{\frac{3a+b}{30}}=\frac{b+4}{3a+b}$

즉 $\frac{b+4}{3a+b}=\frac{9}{17}$이므로 $17b+68=27a+9b$

$\therefore 27a-8b=68$ …… ㉠

학급 학생이 총 30명이므로

$(b+4)+(3a-4)+(2b-5)+2a=30$

$\therefore 5a+3b=35$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=5$

$\therefore a+b=4+5=9$

답 ①

02 전체 학생 수는 $70+80=150$

축구를 선택한 학생 수는 $150\times\frac{2}{5}=60$

야구를 선택한 학생 수는 $150-60=90$

전체 학생 중 임의로 뽑은 1명이 축구를 선택한 남학생일 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 축구를 선택한 남학생 수는 $150\times\frac{1}{3}=50$

따라서 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	여학생	남학생	합계
축구	10	50	60
야구	60	30	90
합계	70	80	150

임의로 뽑은 1명이 야구를 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{90}{150}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{60}{150}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{60}{150}}{\frac{90}{150}}=\frac{2}{3}$

답 ④

03 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

한 개의 주사위를 두 번 던져서 5의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건을 A, 나온 두 눈의 수의 합이 5의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}{36}=\frac{25}{36}$

주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $a\neq5$, $b\neq5$이고 $a+b$가 5의 배수인 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$a+b=5$일 때

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4개

$a+b=10$일 때

$(4, 6)$, $(6, 4)$의 2개

이므로 $4+2=6$(개)

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{6}{36}}{\frac{25}{36}}=\frac{6}{25}$$

답 ②

04 X에서 X로의 함수의 개수는 ${}_6\Pi_6=6^6$

함수 $f: X \longrightarrow X$ 중에서 임의로 택한 함수가 $f(1)=1$을 만족시키는 사건을 A, $f(2)+f(3)=7$을 만족시키는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$f(1)=1$인 함수의 개수는 ${}_6\Pi_5=6^5$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{6^5}{6^6}=\frac{1}{6}$

한편 $f(1)=1$이고 $f(2)+f(3)=7$인 함수의 개수는

$f(2)$, $f(3)$의 순서쌍 $(f(2), f(3))$이

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 6개

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수가 ${}_6\Pi_3=6^3$이므로

$6\times6^3=6^4$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6^4}{6^6}=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$$

답 ④

05 세 번째 검사에서 검사가 끝날 확률은 두 번째 검사까지 불량품이 1개만 나오고, 세 번째에 불량품이 나올 확률이므로

(i) 첫 번째에 불량품, 두 번째에 불량품이 아닌 제품, 세 번째에 불량품이 나올 확률은

$\frac{2}{16}\times\frac{14}{15}\times\frac{1}{14}=\frac{1}{120}$

(ii) 첫 번째에 불량품이 아닌 제품, 두 번째에 불량품, 세 번째에 불량품이 나올 확률은

$\frac{14}{16}\times\frac{2}{15}\times\frac{1}{14}=\frac{1}{120}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{120}+\frac{1}{120}=\frac{1}{60}$

답 ④

다른풀이 첫 번째, 두 번째 검사에서 불량품을 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하고, 두 번째 검사까지 1개의 불량품만 꺼내는 사건을 C, 세 번째 검사에서 불량품을 꺼내는 사건을 D라 하면 세 번째 검사에서 검사가 끝날 확률은 $\mathrm{P}(C\cap D)$이고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C)&=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{2}{16}\times\frac{14}{15}+\frac{14}{16}\times\frac{2}{15}=\frac{7}{30}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(D|C)=\frac{1}{14}$

$\therefore \mathrm{P}(C\cap D)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D|C)=\frac{7}{30}\times\frac{1}{14}=\frac{1}{60}$

06 n장의 당첨 복권을 포함한 12장의 복권에서 당첨 복권이 아닌 것은 $(12-n)$장이다.

갑이 당첨 복권이 아닌 것을 뽑는 사건을 A, 을이 당첨 복권을 뽑는 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{33}$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{12-n}{12}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{11}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{12-n}{12}\times\frac{n}{11}=\frac{n(12-n)}{132}$

즉 $\frac{n(12-n)}{132}=\frac{8}{33}$이므로 $n(12-n)=32$

$n^2-12n+32=0$, $(n-4)(n-8)=0$

$\therefore n=4$ 또는 $n=8$

따라서 모든 자연수 n의 값의 곱은

$4\times8=32$

답 ②

07 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 12개의 공 중에서 임의로 한 개의 공을 꺼냈을 때 4의 배수, 즉 4, 8, 12가 적힌 공이 나오는 사건을 A, 동전의 앞면이 4번 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(B|A)={}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$

$\mathrm{P}(B|A^C)={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{15}{64}+\frac{3}{4}\times\frac{5}{32}=\frac{45}{256}\end{aligned}$$

답 ①

다른풀이 상자에서 4의 배수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 6번 던져서 앞면이 4번 나올 확률은

$\frac{1}{4}\times{}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{256}$

상자에서 4의 배수가 아닌 수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 5번 던져서 앞면이 4번 나올 확률은

$\frac{3}{4}\times{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{15}{128}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{15}{256}+\frac{15}{128}=\frac{45}{256}$

08 갑과 을이 꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 홀수인 사건을 B

라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건은 네 장의 카드에 적힌 수 중 적어도 하나가 짝수인 사건이다. 따라서 A^C는 네 장의 카드에 적힌 수가 모두 홀수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{42}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{42}=\frac{41}{42}$$

갑과 을이 꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수이면서 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 홀수일 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.
갑이 홀수와 짝수가 적힌 카드를 한 장씩 꺼내고, 을은 두 장 모두 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률이

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{42}$$

갑이 두 장 모두 짝수가 적힌 카드를 꺼내고, 을은 두 장 모두 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률이

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{63}$$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{42}+\frac{5}{63}=\frac{25}{126}$
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{25}{126}}{\frac{41}{42}}=\frac{25}{123}$$

답 ④

09 용의자의 진술이 진실인 사건을 A, 프로파일러가 거짓으로 판단하는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이다.
A^C는 용의자의 진술이 거짓인 사건, E^C는 프로파일러가 진실로 판단하는 사건이므로

$$\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{14}{15},\ \mathrm{P}(E^C|A)=\frac{9}{10},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$$

따라서 프로파일러가 진실을 거짓으로 판단할 확률은

$$\mathrm{P}(E|A)=1-\mathrm{P}(E^C|A)=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$$

용의자가 진실을 진술하고, 프로파일러가 거짓으로 판단할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{40}$$

용의자가 거짓을 진술하고, 프로파일러가 거짓으로 판단할 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{3}{4}\times\frac{14}{15}=\frac{7}{10}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{1}{40}+\frac{7}{10}=\frac{29}{40}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{29}{40}}=\frac{1}{29}$$

답 ②

10 A, B만 10점을 쏠 확률은

$$\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{30}$$

A, C만 10점을 쏠 확률은

$$\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{7}{8}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{15}$$

B, C만 10점을 쏠 확률은

$$\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{7}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{60}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{7}{30}+\frac{1}{15}+\frac{7}{60}=\frac{5}{12}$$

답 ⑤

11 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 색을 확인할 때, 2개의 공의 색이 같을 확률은

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\frac{5}{11}$$

이므로 2개의 공의 색이 서로 다를 확률은

$$1-\frac{5}{11}=\frac{6}{11}$$

이 시행을 반복할 때, 시행이 4회째에 끝나려면 3회, 4회에 같은 색의 공이 나와야 하고, 2회에는 서로 다른 색의 공이 나와야 한다. 또 1회에는 무엇이 나와도 상관없다.
따라서 이 시행이 4회째에 끝날 확률은

$$1\times\frac{6}{11}\times\frac{5}{11}\times\frac{5}{11}=\frac{150}{11^3}\qquad\therefore k=150$$

답 ①

12 전체 학생 800명 중 임의로 택한 한 명이 1학년 학생인 사건을 A, 체험 학습 실시에 찬성하는 학생인 사건을 B라 하고, 1학년 학생 중 체험 학습 실시에 찬성하는 학생을 x명이라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{380}{800}=\frac{19}{40},\ \mathrm{P}(B)=\frac{600}{800}=\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{800}$$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\frac{x}{800}=\frac{19}{40}\times\frac{3}{4}\qquad\therefore x=285$$

(단위: 명)

	찬성	반대	합계
1학년	285	a	380
2학년	b		420
합계	600	200	800

1학년 학생이 380명이므로
$285+a=380\qquad\therefore a=95$
체험 학습 실시에 찬성하는 학생이 600명이므로
$285+b=600\qquad\therefore b=315$
$\therefore a+b=95+315=410$

답 ③

13 한 개의 주사위를 1번 던져서 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$
주사위를 8번 던졌을 때 홀수의 눈이 n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 8)$번 나온다고 하면 짝수의 눈은 $(8-n)$번 나오고, 이때 받을 수 있는 금액은
$300\times n+(-200)\times(8-n)=500n-1600$(원)
이 금액이 1900원 이상이어야 하므로
$500n-1600\geq 1900,\ 500n\geq 3500\qquad\therefore n\geq 7$
즉 주사위를 8번 던졌을 때 홀수의 눈이 7번 이상 나와야 하므로 홀수의 눈이 7번 또는 8번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{8}{256}+\frac{1}{256}=\frac{9}{256}$$ 답 ⑤

14 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은
1, 2, 3, 6

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

주사위를 5번 던질 때, 6의 약수의 눈이 n ($n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 5$)번 나온다고 하면 6의 약수가 아닌 눈은 $(5-n)$번 나오고, 이때 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(2\times n+(-3)\times(5-n),\ 3\times n+(-2)\times(5-n))$

$\therefore \mathrm{P}(5n-15,\ 5n-10)$

점 P가 직선 $y=-x+15$ 위에 있어야 하므로

$5n-10=-(5n-15)+15,\ 5n-10=-5n+15+15$

$10n=40 \qquad \therefore n=4$

즉 6의 약수의 눈이 4번, 6의 약수가 아닌 눈이 1번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_5C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{5\times16}{3^5}=\frac{80}{243}$$ 답 ①

15 앞면에 1, 뒷면에 2가 적힌 동전을 세 번 던질 때, 나올 수 있는 3개의 수의 합은

$1+1+1=3,\ 1+1+2=4,\ 1+2+2=5,\ 2+2+2=6$

앞면에 7, 뒷면에 8이 적힌 동전을 세 번 던질 때, 나올 수 있는 3개의 수의 합은

$7+7+7=21,\ 7+7+8=22,\ 7+8+8=23,\ 8+8+8=24$

이때 6개의 수의 총합이 25가 되는 경우는

$3+22=25,\ 4+21=25$

인 경우이다.

(i) 각 동전을 세 번씩 던져 나온 수의 합이 각각 3, 22인 경우

앞면에 1, 뒷면에 2가 적힌 동전을 세 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 $1+1+1=3$일 확률은 동전을 세 번 던져서 앞면이 3번, 뒷면이 0번 나올 확률과 같으므로

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$$

앞면에 7, 뒷면에 8이 적힌 동전을 세 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 $7+7+8=22$일 확률은 동전을 세 번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 1번 나올 확률과 같으므로

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

즉 각 동전을 세 번씩 던져 나온 수의 합이 각각 3, 22일 확률은

$$\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{64}$$

(ii) 각 동전을 세 번씩 던져 나온 수의 합이 각각 4, 21인 경우

앞면에 1, 뒷면에 2가 적힌 동전을 세 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 $1+1+2=4$일 확률은 동전을 세 번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 1번 나올 확률과 같으므로

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

앞면에 7, 뒷면에 8이 적힌 동전을 세 번 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 $7+7+7=21$일 확률은 동전을 세 번 던져서 앞면이 3번, 뒷면이 0번 나올 확률과 같으므로

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$$

즉 각 동전을 세 번씩 던져 나온 수의 합이 각각 4, 21일 확률은

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{64}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{3}{32}$$ 답 ②

16 비가 온 날의 다음 날 비가 올 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 비가 온 날의 다음 날 비가 오지 않을 확률은 $\frac{3}{4}$

또 비가 오지 않은 날의 다음 날 비가 오지 않을 확률이 $\frac{5}{7}$이므로 비가 오지 않은 날의 다음 날 비가 올 확률은 $\frac{2}{7}$

목요일에 비가 왔을 때, 금요일에 비가 오고 토요일에 비가 올 확률은

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

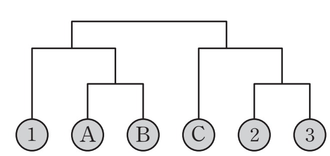
목요일에 비가 왔을 때, 금요일에 비가 오지 않고 토요일에 비가 올 확률은

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{16}+\frac{3}{14}=\frac{31}{112}$$ 답 ④

17



4반과 5반이 결승전에서 만날 확률은

(i) 4반이 A 또는 B에, 5반이 C에 배정될 때

4반은 3개의 자리 중 A 또는 B에 배정되고, 5반은 남은 2개의 자리 중 C에 배정된다. 이때 4반은 1차전, 2차전을 모두 이겨야 하고, 5반은 1차전만 이기면 결승에 진출하므로

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

(ii) 5반이 A 또는 B에, 4반이 C에 배정될 때

(i)과 같은 방법으로 $\frac{1}{24}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$$ 답 ②

참고 1반과 4반이 결승전에서 만날 확률

4반은 3개의 자리 중 C에 배정되어야 하고, 1차전을 이기면 결승에 진출한다. 또 1반도 1차전을 이겨야 결승에 진출하므로

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

18 $\mathrm{P}(A)$는 첫 번째 던진 한 개의 동전이 앞면이 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)$는 한 개의 동전을 24번 던졌을 때 앞면이 k번 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(B)={}_{24}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{24-k}={}_{24}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$ …… ❶

$\mathrm{P}(A\cap B)$는 첫 번째 던진 동전이 앞면이 나오고, 남은 23번 중 앞면이 $(k-1)$번 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\times{}_{23}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{23-(k-1)}$

$=\frac{1}{2}\times{}_{23}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{23}={}_{23}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$ …… ❷

두 사건 A, B가 서로 독립이려면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이어야 하므로

${}_{23}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{24}=\frac{1}{2}\times{}_{24}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$ …… ❸

${}_{23}\mathrm{C}_{k-1}=\frac{1}{2}\times{}_{24}\mathrm{C}_k$

$\frac{23!}{(k-1)!\{23-(k-1)\}!}=\frac{1}{2}\times\frac{24!}{k!(24-k)!}$

$\frac{23!}{(k-1)!(24-k)!}=\frac{1}{2}\times\frac{24!}{k!(24-k)!}$

$1=\frac{1}{2}\times\frac{24}{k}$ $\quad\therefore k=12$ …… ❹

답 12

채점기준	배점
❶ $\mathrm{P}(A)$를 구하고 $\mathrm{P}(B)$를 k에 대한 식으로 나타내기	1
❷ $\mathrm{P}(A\cap B)$를 k에 대한 식으로 나타내기	2
❸ A, B가 서로 독립임을 이용하여 등식 세우기	1
❹ k의 값 구하기	2

19 19세 이하인 회원 수는 $a+(b+50)$이고 이것은 도서관 전체 회원 500명의 30 %이므로

$a+b+50=500\times\frac{30}{100}$

$\therefore a+b=100$ …… ㉠ …… ❶

도서관 전체 회원 500명 중 임의로 택한 1명이 남성인 사건을 A, 19세 이하인 사건을 B, 40세 이상인 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(C|A^C)$이고

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{a}{500}}{\frac{300}{500}}=\frac{a}{300}$

$\mathrm{P}(C|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{b}{500}}{\frac{200}{500}}=\frac{b}{200}$

이므로

$\frac{a}{300}=\frac{b}{200}$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}b$ …… ㉡ …… ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=60$, $b=40$

$\therefore a-b=60-40=20$ …… ❸

답 20

채점기준	배점
❶ 도서관 전체 회원 중 19세 이하가 차지하는 비율이 30 %임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	2
❷ 두 조건부확률이 같음을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	3
❸ $a-b$의 값 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.28~32

1 $\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$에서 $1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A)$

$3\mathrm{P}(A)=1$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

답 ④

2 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{5}$에서 $\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{5}$ …… ㉠

이때 $\mathrm{P}(B^C)=\frac{9}{20}\mathrm{P}(A^C)$를 ㉠에 대입하면

$\mathrm{P}(A^C)\times\frac{9}{20}\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{5}$, $\{\mathrm{P}(A^C)\}^2=\frac{4}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$ $(\because 0<\mathrm{P}(A^C)<1)$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

답 ②

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 $a\times b$가 4의 배수인 사건을 A, $a+b\le7$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$a\times b$가 4의 배수인 사건은 a, b가 모두 짝수이거나 a, b 중 하나는 4의 배수, 다른 하나는 홀수인 사건이다.

a, b가 모두 짝수인 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$

a, b 중 하나가 4의 배수, 다른 하나가 홀수인 경우의 수는

${}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times2=6$

따라서 $a\times b$가 4의 배수인 경우의 수는

$9+6=15$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{15}{36}$

한편 a, b가 모두 짝수일 때, $a+b\le7$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$의 3개

a, b 중 하나는 4의 배수, 다른 하나는 홀수일 때, $a+b\le7$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(4, 1)$, $(4, 3)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$의 4개

따라서 $a\times b$가 4의 배수이면서 $a+b\le7$인 경우의 수는

$3+4=7$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{15}{36}}=\frac{7}{15}$$

답 ②

4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 $a\times b$가 6의 배수인 사건을 A, $a+b\geq10$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$a\times b$가 6의 배수인 사건, 즉 사건 A는 a, b 중 하나는 2 또는 4이고 다른 하나는 3이거나 a, b 중 적어도 하나는 6인 사건이다.

a, b 중 하나는 2 또는 4이고 다른 하나는 3인 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times2=4$

a, b 중 적어도 하나는 6인 경우의 수는

$36-{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=11$

따라서 $a\times b$가 6의 배수인 경우의 수는

$4+11=15$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{15}{36}$

한편 $a\times b$가 6의 배수이면서 $a+b\geq10$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$a\times b=24$일 때 $(4, 6)$, $(6, 4)$의 2개

$a\times b=30$일 때 $(5, 6)$, $(6, 5)$의 2개

$a\times b=36$일 때 $(6, 6)$의 1개

이므로 $2+2+1=5$(개)

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{15}{36}}=\frac{1}{3}$$

답 ③

5 한 개의 동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은 $\frac{1}{4}$, 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률은 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

앞면이 나온 횟수가 2일 때만 카드를 뒤집으므로 문자 B가 보이도록 카드가 놓이려면 카드를 뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다.

즉 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행을 5번 할 때, 앞면이 나온 횟수가 2인 경우가 1번 또는 3번 또는 5번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{31}{64}$$

$\therefore\ p=\frac{31}{64}$

$\therefore\ 128\times p=128\times\frac{31}{64}=62$

답 62

6 한 개의 주사위를 한 번 던져 $\underbrace{\text{6의 약수}}_{1,\ 2,\ 3,\ 6}$의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 6의 약수가 아닌 눈이 나올 확률은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

6의 약수의 눈이 나올 때에만 카드를 뒤집으므로 한 개의 주사위를 6번 던질 때, 문자 A가 그대로 보이도록 카드가 놓이려면 뒤집는 횟수가 짝수이어야 한다. 즉 6의 약수의 눈이 나오는 횟수가 0 또는 2 또는 4 또는 6이어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$=\frac{1}{3^6}+\frac{60}{3^6}+\frac{240}{3^6}+\frac{64}{3^6}=\frac{365}{3^6}$$

$\therefore\ k=365$

답 365

7 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 $\underbrace{\text{눈의 수가 6의 약수}}_{1,\ 2,\ 3,\ 6}$일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 6의 약수의 눈이 $n\,(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$번 나온다고 하면 6의 약수가 아닌 눈은 $(4-n)$번 나온다. 이때 점 P의 좌표는

$1\times n=n$

이고, 점 P의 좌표가 2 이상이어야 하므로 $n\geq2$에서 $n=2,\ 3,\ 4$이어야 한다.

즉 한 개의 주사위를 4번 던져 6의 약수의 눈이 2번 또는 3번 또는 4번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$=\frac{24}{81}+\frac{32}{81}+\frac{16}{81}=\frac{8}{9}$$

답 ④

다른풀이 한 개의 주사위를 4번 던져 6의 약수의 눈이 2번 또는 3번 또는 4번 나오는 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)$이고, A^C는 6의 약수의 눈이 0번 또는 1번 나오는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{81}+\frac{8}{81}=\frac{1}{9}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

8 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 짝수일 확률은 $\frac{1}{2}$

한 개의 주사위를 7번 던질 때, 짝수의 눈이 $n\,(n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 7)$번 나온다고 하면 홀수의 눈은 $(7-n)$번 나온다. 이때 점 P의 좌표는

$4\times n+(-2)\times(7-n)=6n-14$

이고, 점 P의 좌표가 -2 이상이어야 하므로

$6n-14\geq-2$, $6n\geq12$ $\quad\therefore\ n\geq2$

즉 한 개의 주사위를 7번 던져 짝수의 눈이 2번 이상 나와야 한다.

한 개의 주사위를 7번 던져 짝수의 눈이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 짝수의 눈이 1번 이하, 즉 0번 또는 1번 나오는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_7\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_7\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=\frac{1}{128}+\frac{7}{128}=\frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

답 ⑤

9 전체 경우의 수는 4^5

4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 사건을 E, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이다.

① ② ③ ④

앞면 앞면 앞면 뒷면

위의 4개의 동전을 왼쪽부터 차례로 ①, ②, ③, ④번이라 하면

(i) 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는 $\leftarrow n(A\cap E)$

④번 동전만 5번 뒤집는 경우의 수가 1

④번 동전을 3번 뒤집고, ①, ②, ③번 동전 중에서 1개를 택하여 2번 뒤집는 경우의 수가

$${}_3\mathrm{C}_1\times\frac{5!}{3!\times2!}=30$$

④번 동전을 1번 뒤집고, ①, ②, ③번 동전 중에서 1개를 택하여 4번 뒤집는 경우의 수가

$${}_3\mathrm{C}_1\times\frac{5!}{4!}=15$$

④번 동전을 1번 뒤집고, ①, ②, ③번 동전 중에서 서로 다른 2개를 택하여 각각 2번씩 뒤집는 경우의 수가

$${}_3\mathrm{C}_2\times\frac{5!}{2!\times2!}=90$$

이므로 $1+30+15+90=136$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap E)=\frac{136}{4^5}$$

(ii) 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는 $\leftarrow n(A^C\cap E)$

①, ②, ③번 동전 중에서 1개를 택하여 3번, 나머지 2개를 각각 1번씩 뒤집는 경우의 수가

$${}_3\mathrm{C}_1\times\frac{5!}{3!}=60$$

①, ②, ③번 동전을 각각 1번씩 뒤집고 ④번 동전을 2번 뒤집는 경우의 수가

$$\frac{5!}{2!}=60$$

이므로 $60+60=120$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{120}{4^5}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{136}{4^5}+\frac{120}{4^5}=\frac{256}{4^5}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{136}{4^5}}{\frac{256}{4^5}}=\frac{17}{32}$$

답 ①

참고 (1) $A\subset E$이므로 $A\cap E=A$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)$

(2) 5번의 시행 후 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 사건은 $A^C\cap E$이다.

(3) (i), (ii)에서 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는

$n(E)=n(A\cap E)+n(A^C\cap E)=136+120=256$

10 전체 경우의 수는 4^3

4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는 시행을 3번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 사건을 E, 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|E)$이다.

① ② ③ ④

앞면 앞면 앞면 뒷면

위의 4개의 동전을 왼쪽부터 차례로 ①, ②, ③, ④번이라 하면

(i) 시행을 3번 반복한 후 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는 $\leftarrow n(A\cap E)$

①, ②, ③번 동전을 각각 1번씩 뒤집는 경우의 수이므로

$3!=6$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap E)=\frac{6}{4^3}$$

(ii) 시행을 3번 반복한 후 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는 $\leftarrow n(A^C\cap E)$

④번 동전만 3번 뒤집는 경우의 수가 1

④번 동전을 1번, ①, ②, ③번 동전 중에서 1개를 택하여 2번 뒤집는 경우의 수가

$${}_3\mathrm{C}_1\times\frac{3!}{2!}=9$$

이므로 $1+9=10$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{10}{4^3}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{6}{4^3}+\frac{10}{4^3}=\frac{16}{4^3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{6}{4^3}}{\frac{16}{4^3}}=\frac{3}{8}$$

답 ⑤

참고 3번의 시행 후 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건은 $A^C\cap E$이다.

Ⅲ 통계

1 확률분포 (1)

교과서 예제 p.35, 37

01 답 (1) 연속확률변수 (2) 연속확률변수
(3) 이산확률변수 (4) 이산확률변수

02 (1) 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합은 2, 3, 4, ..., 12 중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, ..., 12이다.
(2) 빨간 공 3개, 파란 공 1개 중 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나오는 파란 공의 개수는 0, 1 중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1이다.
(3) 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수는 0, 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.
답 (1) 2, 3, 4, ..., 12 (2) 0, 1 (3) 0, 1, 2, 3, 4

03 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면 표본공간 S는
$S=\{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$
(1) $\mathrm{P}(X=0)$은 앞면이 나오는 동전의 개수가 0일 확률이므로
$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$
(2) $\mathrm{P}(X=1)$은 앞면이 나오는 동전의 개수가 1일 확률이므로
$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
(3) $\mathrm{P}(X=2)$는 앞면이 나오는 동전의 개수가 2일 확률이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$
답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$

04 확률의 총합은 1이므로
$\frac{1}{6}+\frac{5}{24}+a+\frac{3}{8}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$
답 $\frac{1}{4}$

05 (1) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{11}{32}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{11}{32}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$,
$\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{16}$이므로

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{11}{32}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	1

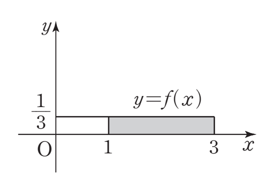
(2) $\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$
$=\frac{11}{32}+\frac{1}{8}=\frac{15}{32}$
답 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{15}{32}$

06 (1) 1학년 학생 4명, 2학년 학생 3명 중 임의로 2명을 뽑을 때, 뽑힌 1학년 학생의 수는 0, 1, 2 중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고
$\mathrm{P}(X=0)$은 1학년 학생 0명, 2학년 학생 2명을 뽑을 확률이므로
$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1\times 3}{21}=\frac{1}{7}$
$\mathrm{P}(X=1)$은 1학년 학생 1명, 2학년 학생 1명을 뽑을 확률이므로
$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4\times 3}{21}=\frac{4}{7}$
$\mathrm{P}(X=2)$는 1학년 학생 2명, 2학년 학생 0명을 뽑을 확률이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{6\times 1}{21}=\frac{2}{7}$
따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

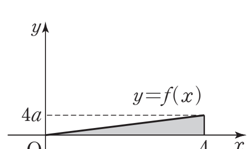
(2) $\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$
$=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{5}{7}$
답 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{5}{7}$

07 $\mathrm{P}(1\le X\le 3)$은 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로
$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

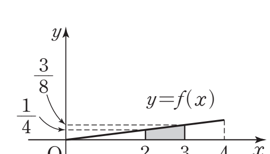


답 $\frac{2}{3}$

08 $0\le x\le 4$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $a>0$
(1) $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4, 4a)$를 지나고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times 4\times 4a=1$
$\therefore a=\frac{1}{8}$
(2) $f(x)=\frac{1}{8}x$이고 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(2, \frac{1}{4}\right)$, $\left(3, \frac{3}{8}\right)$을 지나므로



$\mathrm{P}(2\le X\le 3)$
$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)\times 1=\frac{5}{16}$
답 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{5}{16}$

09 (1) $\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{12}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{7}{12}=\frac{1}{2}$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{12}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{7}{12}=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{12}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{12}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{\sqrt{15}}{6}$

10 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{14}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{2^2}{14}=\frac{4}{14}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{3^2}{14}=\frac{9}{14}$

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{9}{14}$	1

(1) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{14}+2\times\frac{4}{14}+3\times\frac{9}{14}=\frac{18}{7}$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{14}+2^2\times\frac{4}{14}+3^2\times\frac{9}{14}=7$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=7-\left(\frac{18}{7}\right)^2=\frac{19}{49}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{19}{49}}=\frac{\sqrt{19}}{7}$

답 (1) $\frac{18}{7}$ (2) $\frac{19}{49}$ (3) $\frac{\sqrt{19}}{7}$

11 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(1) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{2}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{2}{6}+3^2\times\frac{2}{6}+4^2\times\frac{1}{6}=\frac{43}{6}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{43}{6}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{11}{12}$

12 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1\times10}{35}=\frac{2}{7}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{2\times10}{35}=\frac{4}{7}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1\times5}{35}=\frac{1}{7}$

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

답 $\frac{6}{7}$

13 $\mathrm{E}(X)=10$, $\mathrm{V}(X)=16$, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{16}=4$
이므로

(1) $\mathrm{E}(-4X+1)=-4\mathrm{E}(X)+1=-4\times10+1=-39$

(2) $\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+3\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}\times16=4$

(3) $\sigma(-3X+6)=|-3|\sigma(X)=3\times4=12$

답 (1) -39 (2) 4 (3) 12

14 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{36}=6$이므로

(1) $\mathrm{E}(-X+3)=-\mathrm{E}(X)+3=-48+3=-45$

$\mathrm{V}(-X+3)=(-1)^2\mathrm{V}(X)=36$

$\sigma(-X+3)=|-1|\sigma(X)=1\times6=6$

즉 확률변수 $-X+3$의 평균은 -45, 분산은 36, 표준편차는 6이다.

(2) $\mathrm{E}\left(\frac{1}{3}X+2\right)=\frac{1}{3}\mathrm{E}(X)+2=\frac{1}{3}\times48+2=18$

$\mathrm{V}\left(\frac{1}{3}X+2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{9}\times36=4$

$\sigma\left(\frac{1}{3}X+2\right)=\left|\frac{1}{3}\right|\sigma(X)=\frac{1}{3}\times6=2$

즉 확률변수 $\frac{1}{3}X+2$의 평균은 18, 분산은 4, 표준편차는 2이다.

(3) $\mathrm{E}\left(-\frac{1}{2}X+5\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+5=-\frac{1}{2}\times48+5=-19$

$\mathrm{V}\left(-\frac{1}{2}X+5\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}\times36=9$

$\sigma\left(-\frac{1}{2}X+5\right)=\left|-\frac{1}{2}\right|\sigma(X)=\frac{1}{2}\times6=3$

즉 확률변수 $-\frac{1}{2}X+5$의 평균은 -19, 분산은 9, 표준편차는 3이다.

답 (1) 평균: -45, 분산: 36, 표준편차: 6
(2) 평균: 18, 분산: 4, 표준편차: 2
(3) 평균: -19, 분산: 9, 표준편차: 3

15 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{3}{10}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{1}{10}+3^2\times\frac{3}{10}=\frac{7}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{7}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(1) $\mathrm{E}(4X-5)=4\mathrm{E}(X)-5=4\times\frac{3}{2}-5=1$

(2) $\mathrm{V}(6X+2)=6^2\mathrm{V}(X)=36\times\frac{5}{4}=45$

(3) $\sigma(-2X-7)=|-2|\sigma(X)=2\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

답 (1) 1 (2) 45 (3) $\sqrt{5}$

01 $\mathrm{P}(X=-2)=\dfrac{a}{(-2)^2+1}=\dfrac{a}{5}$

$\mathrm{P}(X=-1)=\dfrac{a}{(-1)^2+1}=\dfrac{a}{2}$

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{a}{0^2+1}=a$

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{a}{1^2+1}=\dfrac{a}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{a}{2^2+1}=\dfrac{a}{5}$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\dfrac{a}{5}+\dfrac{a}{2}+a+\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{5}$

$=\dfrac{12}{5}a=1$

$\therefore a=\dfrac{5}{12}$ 답 ⑤

02 확률의 총합은 1이므로

$a+3a+\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{3}=1$

$4a=\dfrac{4}{9}$ $\therefore a=\dfrac{1}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(3\le X\le 5)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=5)$

$=3a+\dfrac{2}{9}$

$=\dfrac{3}{9}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{5}{9}$ 답 ⑤

03 $\mathrm{P}(X=1)$은 남학생 2명, 여학생 1명을 뽑을 확률이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{1\times 3}{10}=\dfrac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=2)$는 남학생 1명, 여학생 2명을 뽑을 확률이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{2\times 3}{10}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(X=1)\times\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{50}$ 답 ⑤

참고 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

04 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\}$

이때 $\mathrm{P}(X=0)$은 흰 공 0개, 빨간 공 4개가 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_4}{{}_8\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{70}$

$\mathrm{P}(X=1)$은 흰 공 1개, 빨간 공 3개가 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_4}=\dfrac{4\times 4}{70}=\dfrac{16}{70}$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 2)=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\}$

$=1-\left(\dfrac{1}{70}+\dfrac{16}{70}\right)=\dfrac{53}{70}$ 답 ④

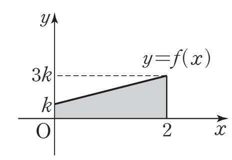
다른풀이 $\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_4}+\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_4}+\dfrac{{}_4\mathrm{C}_4}{{}_8\mathrm{C}_4}$

$=\dfrac{36}{70}+\dfrac{16}{70}+\dfrac{1}{70}=\dfrac{53}{70}$

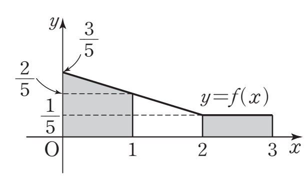
05 $0\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $k>0$

$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0,\ k)$, $(2,\ 3k)$를 지나고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로



$\dfrac{1}{2}\times(k+3k)\times 2=1$, $4k=1$ $\therefore k=\dfrac{1}{4}$ 답 ⑤

06 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고 세 점 $\left(0,\ \dfrac{3}{5}\right)$, $\left(1,\ \dfrac{2}{5}\right)$, $\left(2,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 지난다.



$\mathrm{P}(X\le 1)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\right)\times 1=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X\ge 2)=1\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 1)+\mathrm{P}(X\ge 2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{7}{10}$ 답 ①

07 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times 2\times k+\dfrac{1}{2}\times 1\times k=1$

$k+\dfrac{k}{2}=1$, $\dfrac{3}{2}k=1$ $\therefore k=\dfrac{2}{3}$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x & (0\le x<1)\\[2mm] -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3} & (1\le x<2)\\[2mm] \dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3} & (2\le x<3)\end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{3}\right)$을 지나므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2}k\le X\le\dfrac{15}{4}k\right)=\mathrm{P}\left(1\le X\le\dfrac{5}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(1\le X\le 2)+\mathrm{P}\left(2\le X\le\dfrac{5}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{12}$ 답 ①

08 확률의 총합은 1이므로

$k+k+2k+2k=6k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{6}$

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ 답 ④

09 확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a=6a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{6}$

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

따라서

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{7}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$ 답 ③

10 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1\times20}{120}=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{4\times15}{120}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{6\times6}{120}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{4\times1}{120}=\frac{1}{30}$

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{30}=2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{14}{25}}=\frac{\sqrt{14}}{5}$ 답 ③

11 정팔면체 모양의 상자를 던졌을 때 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 구하는 기댓값은

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{2}{8}+3\times\frac{2}{8}+4\times\frac{1}{8}=\frac{17}{8}$ 답 ②

12 $\mathrm{E}(X)=15$, $\mathrm{V}(X)=9$, $\mathrm{E}(Y)=0$, $\mathrm{V}(Y)=1$이므로

$\mathrm{E}(Y)=0$에서 $\mathrm{E}(aX+b)=0$, $a\mathrm{E}(X)+b=0$

$\therefore 15a+b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{V}(Y)=1$에서 $\mathrm{V}(aX+b)=1$, $a^2\mathrm{V}(X)=1$

$9a^2=1$, $a^2=\frac{1}{9} \qquad \therefore a=\frac{1}{3}\ (\because a>0) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$5+b=0 \qquad \therefore b=-5$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-5}{\frac{1}{3}}=-15$ 답 ④

13 $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=4$, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{4}=2$이므로

$\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1=2\times5-1=9$

$\mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times4=16$

$\sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)=2\times2=4$

$\therefore \mathrm{E}(2X-1)+\mathrm{V}(2X-1)+\sigma(2X-1)$

$=9+16+4=29$ 답 ⑤

14 확률의 총합은 1이므로

$2a+a+2a=1$, $5a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{5}$

X	-1	1	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{2}{5}+1\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}=\frac{21}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{21}{5}-1^2=\frac{16}{5}$

$\therefore \mathrm{V}(5X+2)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times\frac{16}{5}=80$ 답 ①

15 1의 양의 약수의 개수는 1

소수 2, 3, 5의 양의 약수의 개수는 각각 2

4의 양의 약수의 개수는 3 → 1, 2, 4의 3개

6의 양의 약수의 개수는 4 → 1, 2, 3, 6의 4개

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{3}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{3}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}=\frac{19}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{19}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sigma(3X+9)=|3|\sigma(X)=3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$ 답 ①

기출 Best | 2회

p.41~43

01 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=8)$

$=a(\sqrt{2}-\sqrt{1})+a(\sqrt{3}-\sqrt{2})+a(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+a(\sqrt{9}-\sqrt{8})$

$=a\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}$

$=a\{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{9})-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{8})\}$

$=a(\sqrt{9}-\sqrt{1})=2a=1$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$

답 ②

02 $\mathrm{P}(X=0)=a$, $\mathrm{P}(X=1)=a+a=2a$,

$\mathrm{P}(X=2)=2a+a=3a$, $\mathrm{P}(X=3)=3a+a=4a$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=a+2a+3a+4a$

$=10a=1$

$\therefore a=\dfrac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(X>1)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=3a+4a=7a$

$=7\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{7}{10}$

답 ③

03 꺼낸 2개의 동전의 금액의 합은

$10+10=20$(원), $10+50=60$(원), $10+100=110$(원),

$50+100=150$(원), $100+100=200$(원)

중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 20, 60, 110, 150, 200이고

$\mathrm{P}(X\le 100)=\mathrm{P}(X=20)+\mathrm{P}(X=60)$

$\mathrm{P}(X=20)$은 10원짜리 동전 2개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=20)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=60)$은 10원짜리 동전 1개, 50원짜리 동전 1개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=60)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{2\times1}{10}=\dfrac{2}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 100)=\mathrm{P}(X=20)+\mathrm{P}(X=60)$

$=\dfrac{1}{10}+\dfrac{2}{10}=\dfrac{3}{10}$

답 ①

참고 $\mathrm{P}(X=110)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

$\mathrm{P}(X=150)=\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=200)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{10}$

04 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X<4)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=1-\{\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)\}$

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 전체 경우의 수는 $6\times6=36$

나오는 두 눈의 수를 차례로 a, b라 하면

$X=4$, 즉 $|a-b|=4$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 5)$, $(2, 6)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$의 4개

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=\dfrac{4}{36}$

$X=5$, 즉 $|a-b|=5$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6)$, $(6, 1)$의 2개

$\therefore \mathrm{P}(X=5)=\dfrac{2}{36}$

$\therefore \mathrm{P}(X<4)=1-\{\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)\}$

$=1-\left(\dfrac{4}{36}+\dfrac{2}{36}\right)=\dfrac{5}{6}$

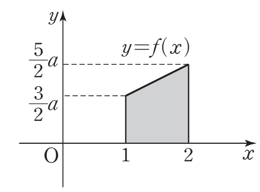
답 ①

05 $1\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $a>0$

$y=f(x)$의 그래프는 두 점

$\left(1, \dfrac{3}{2}a\right)$, $\left(2, \dfrac{5}{2}a\right)$를 지나고,

$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로



$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{2}a+\dfrac{5}{2}a\right)\times1=1$

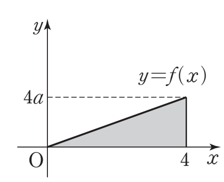
$2a=1$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}$

답 ⑤

참고 $f(x)=ax+\dfrac{1}{2}a=a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$이므로 정의역이 실수 전체의 집합일 때, $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$을 반드시 지나는 직선이다.

06 $0\le x\le 4$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $a>0$

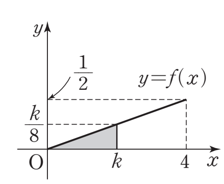
$y=f(x)$의 그래프는 점 $(4, 4a)$를 지나고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로



$\dfrac{1}{2}\times4\times4a=1$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{8}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{8}x\ (0\le x\le 4)$

$y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(k, \dfrac{k}{8}\right)$를 지나므로 $\mathrm{P}(X\le k)=\dfrac{1}{4}$에서



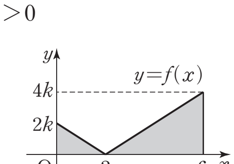
$\dfrac{1}{2}\times k\times\dfrac{k}{8}=\dfrac{1}{4}$

$k^2=4$ $\quad\therefore k=2\ (\because 0\le k\le 4)$

답 ④

07 $0\le x\le 6$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $k>0$

$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0, 2k)$, $(6, 4k)$를 지나고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

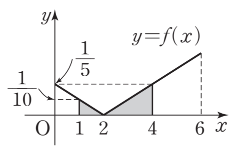


$\frac{1}{2}\times2\times2k+\frac{1}{2}\times4\times4k=1$

$2k+8k=1,\ 10k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{10}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{10}|x-2|$

$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(1, \frac{1}{10}\right)$, $\left(4, \frac{1}{5}\right)$을 지나므로



$P(1\le X\le 4)$

$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{5}$

$=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

답 ③

08 확률의 총합은 1이므로

$a+b+a=2a+b=1 \qquad \therefore b=1-2a$

따라서

$E(X)=0\times a+1\times(1-2a)+2\times a=1$

$E(X^2)=0^2\times a+1^2\times(1-2a)+2^2\times a=2a+1$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=(2a+1)-1^2=2a$

이때 $V(X)=\frac{2}{3}$이므로

$2a=\frac{2}{3} \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $b=1-2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$이므로

$ab=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

답 ③

09 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{4}{9}$ ······ ㉠

$E(X)=(-2)\times\frac{1}{9}+(-1)\times\frac{2}{9}+0\times\frac{2}{9}+1\times a+2\times b$

$\quad =a+2b-\frac{4}{9}$

이때 $E(X)=\frac{1}{3}$이므로 $a+2b-\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$

$\therefore a+2b=\frac{7}{9}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{9}$, $b=\frac{1}{3}$

X	-2	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1

$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{9}+(-1)^2\times\frac{2}{9}+0^2\times\frac{2}{9}+1^2\times\frac{1}{9}+2^2\times\frac{1}{3}$

$\quad =\frac{19}{9}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{19}{9}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=2$

답 ④

10 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고

$P(X=1)$은 1이 적힌 카드를 꺼내고, 2, 3, 4, 5가 적힌 카드 중 한 장을 꺼낼 확률이므로

$P(X=1)=\frac{{}_1C_1\times{}_4C_1}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$P(X=2)$는 2가 적힌 카드를 꺼내고, 3, 4, 5가 적힌 카드 중 한 장을 꺼낼 확률이므로

$P(X=2)=\frac{{}_1C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)$은 3이 적힌 카드를 꺼내고, 4, 5가 적힌 카드 중 한 장을 꺼낼 확률이므로

$P(X=3)=\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$P(X=4)$는 4, 5가 적힌 카드 2장을 꺼낼 확률이므로

$P(X=4)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=2$

$E(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{10}=5$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$

답 ①

11 이 게임을 한 번 해서 받을 수 있는 금액을 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 50, 100, 500이고

한 개의 주사위를 던질 때

$P(X=50)$은 1이 나올 확률이므로

$P(X=50)=\frac{1}{6}$

$P(X=100)$은 소수 2, 3, 5 중 하나가 나올 확률이므로

$P(X=100)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$P(X=500)$은 1도 소수도 아닌 수, 즉 4, 6 중 하나가 나올 확률이므로

$P(X=500)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

X	50	100	500	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

$\therefore E(X)=50\times\frac{1}{6}+100\times\frac{1}{2}+500\times\frac{1}{3}=225$

따라서 구하는 기댓값은 225원이다.

답 ②

12 $E(4X+3)=15$에서 $4E(X)+3=15$

$4E(X)=12 \qquad \therefore E(X)=3$

$V(5X+2)=50$에서 $5^2V(X)=50 \qquad \therefore V(X)=2$

$\therefore E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=2+3^2=11$

답 ③

13 $E(X)=3,\ V(X)=9$이므로

$E(aX+b)=10$에서 $aE(X)+b=10$

$\therefore 3a+b=10$ ······ ㉠

$V\left(\frac{b}{a}X+\frac{b}{a}\right)=1$에서 $\frac{b^2}{a^2}V(X)=1$

$\dfrac{b^2}{a^2}\times 9=1,\ a^2=9b^2$

$\therefore a=3b\ (\because a>0,\ b>0)$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$ 답 ①

14 $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{a}{12},\ \mathrm{P}(X=1)=\dfrac{1+a}{12},\ \mathrm{P}(X=2)=\dfrac{2+a}{12}$

확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{a}{12}+\frac{1+a}{12}+\frac{2+a}{12}=\frac{3a+3}{12}=1$$

$3a+3=12,\ 3a=9 \quad \therefore a=3$

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{7}{6}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\dfrac{1}{4}+1^2\times\dfrac{1}{3}+2^2\times\dfrac{5}{12}=2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2-\left(\dfrac{7}{6}\right)^2=\dfrac{23}{36}$

$\therefore \mathrm{V}(6X-7)=6^2\mathrm{V}(X)=36\times\dfrac{23}{36}=23$ 답 ③

15 1부터 10까지의 자연수 중 5의 배수는 5, 10의 2개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고

$\mathrm{P}(X=0)$은 5의 배수가 아닌 수가 적힌 공 3개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{56}{120}=\dfrac{7}{15}$

$\mathrm{P}(X=1)$은 5의 배수가 적힌 공 1개, 5의 배수가 아닌 수가 적힌 공 2개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{2\times 28}{120}=\dfrac{7}{15}$

$\mathrm{P}(X=2)$는 5의 배수가 적힌 공 2개, 5의 배수가 아닌 수가 적힌 공 1개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1\times 8}{120}=\dfrac{1}{15}$

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{7}{15}+1\times\dfrac{7}{15}+2\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\dfrac{7}{15}+1^2\times\dfrac{7}{15}+2^2\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{11}{15}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{11}{15}-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{28}{75}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\dfrac{28}{75}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{15}$

$\therefore \sigma(15X+3)=|15|\sigma(X)=15\times\dfrac{2\sqrt{21}}{15}=2\sqrt{21}$ 답 ②

변형유형 집중공략

p.44~45

1-1 $\mathrm{P}(X=k+1)=\mathrm{P}(X=k)-\dfrac{1}{15}$에 $k=-2,\ -1,\ 0,\ 1$을 차례로 대입하면

$\mathrm{P}(X=-1)=\mathrm{P}(X=-2)-\dfrac{1}{15}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=0)&=\mathrm{P}(X=-1)-\frac{1}{15}\\&=\left\{\mathrm{P}(X=-2)-\frac{1}{15}\right\}-\frac{1}{15}\\&=\mathrm{P}(X=-2)-\frac{2}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=1)&=\mathrm{P}(X=0)-\frac{1}{15}\\&=\left\{\mathrm{P}(X=-2)-\frac{2}{15}\right\}-\frac{1}{15}\\&=\mathrm{P}(X=-2)-\frac{3}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=2)&=\mathrm{P}(X=1)-\frac{1}{15}\\&=\left\{\mathrm{P}(X=-2)-\frac{3}{15}\right\}-\frac{1}{15}\\&=\mathrm{P}(X=-2)-\frac{4}{15}\end{aligned}$$

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이고 확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&=\mathrm{P}(X=-2)+\left\{\mathrm{P}(X=-2)-\frac{1}{15}\right\}+\left\{\mathrm{P}(X=-2)-\frac{2}{15}\right\}\\&\quad+\left\{\mathrm{P}(X=-2)-\frac{3}{15}\right\}+\left\{\mathrm{P}(X=-2)-\frac{4}{15}\right\}\\&=5\mathrm{P}(X=-2)-\frac{10}{15}=1\end{aligned}$$

$5\mathrm{P}(X=-2)=\dfrac{5}{3} \qquad \therefore \mathrm{P}(X=-2)=\dfrac{1}{3}$

X	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X^2>1)&=\mathrm{P}(X^2-1>0)=\mathrm{P}((X+1)(X-1)>0)\\&=\mathrm{P}(X<-1 \text{ 또는 } X>1)\\&=\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=2)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

답 ①

1-2 $\mathrm{P}(X=k+2)=2\mathrm{P}(X=k)+\mathrm{P}(X=0)$에 $k=0,\ 2,\ 4$를 차례로 대입하면

$\mathrm{P}(X=2)=2\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=0)=3\mathrm{P}(X=0)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=4)&=2\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=0)\\&=2\times 3\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=0)\\&=7\mathrm{P}(X=0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=6)&=2\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=0)\\&=2\times 7\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=0)\\&=15\mathrm{P}(X=0)\end{aligned}$$

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 0, 2, 4, 6이고 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=6)$
$=\mathrm{P}(X=0)+3\mathrm{P}(X=0)+7\mathrm{P}(X=0)+15\mathrm{P}(X=0)$
$=26\mathrm{P}(X=0)=1$

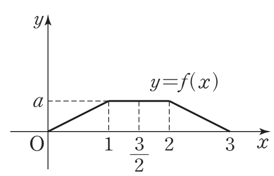
$\therefore \mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{26}$

X	0	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{26}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{15}{26}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X^2-7X+10\le 0)=\mathrm{P}((X-2)(X-5)\le 0)$
$=\mathrm{P}(2\le X\le 5)$
$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)$
$=\frac{3}{26}+\frac{7}{26}=\frac{5}{13}$

답 ⑤

2-1 $a>0$이고 조건 ㈏에서 확률밀도 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

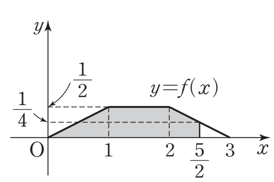


함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times(1+3)\times a=1$

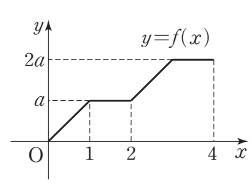
$2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}\left(X\le\frac{5}{2}\right)$
$=1-\mathrm{P}\left(\frac{5}{2}\le X\le 3\right)$
$=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$
$=\frac{15}{16}$



답 ⑤

2-2 조건 ㈏에서 $y=f(x)$ $(2\le x\le 4)$의 그래프는 $y=f(x)$ $(0\le x\le 2)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a $(a>0)$만큼 평행이동한 것이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

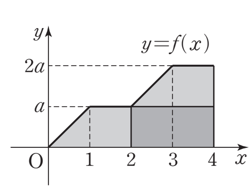
$2\left\{\frac{1}{2}\times(1+2)\times a\right\}+2a=1$

$5a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 1)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

답 ②

참고 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 나누어 구할 수 있다.



서술형 What & How

p.46~47

1 확률의 총합은 1이므로

$a+b+a=2a+b=1 \qquad \therefore b=1-2a$ …… ㉠ …… ❶

X	-3	0	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$1-2a$	a	1

한편 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$에서 $\{\sigma(X)\}^2=\mathrm{V}(X)$이므로
$\mathrm{V}(X)=\sigma(X)$에서 $\{\sigma(X)\}^2=\sigma(X)$
$\{\sigma(X)\}^2-\sigma(X)=0,\ \sigma(X)\{\sigma(X)-1\}=0$
$\therefore \sigma(X)=1\ (\because \mathrm{V}(X)\ne 0)$
즉 $\mathrm{V}(X)=\{\sigma(X)\}^2=1^2=1$이고
$\mathrm{E}(X)=(-3)\times a+0\times(1-2a)+3\times a=0$
$\mathrm{E}(X^2)=(-3)^2\times a+0^2\times(1-2a)+3^2\times a=18a$
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=18a-0=18a$ …… ❷

$18a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{18}$

따라서 ㉠에서 $b=1-2\times\frac{1}{18}=\frac{8}{9}$ …… ❸

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{18}}=16$ …… ❹

답 16

2 확률의 총합은 1이므로

$a+2a+b+2b=3a+3b=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}$ …… ㉠ …… ❶

한편 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(X^2)$에서
$\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(X^2)$
$\{\mathrm{E}(X)\}^2+\mathrm{E}(X)=0,\ \mathrm{E}(X)\{\mathrm{E}(X)+1\}=0$
$\therefore \mathrm{E}(X)=-1\ (\because \mathrm{E}(X)\ne 0)$
이때
$\mathrm{E}(X)=(-2)\times a+(-1)\times 2a+0\times b+1\times 2b=-4a+2b$
이므로
$-4a+2b=-1$ …… ㉡ …… ❷
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{5}{18},\ b=\frac{1}{18}$ …… ❸

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{5}{18}+(-1)^2\times\frac{5}{9}+0^2\times\frac{1}{18}+1^2\times\frac{1}{9}=\frac{16}{9}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{16}{9}-(-1)^2=\frac{7}{9}$

$\therefore 90\mathrm{V}(X)=90\times\frac{7}{9}=70$ …… ❹

답 70

채점기준	배점
❶ 확률의 총합이 1임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	1
❷ $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하고 이를 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	2
❸ a, b의 값 구하기	1
❹ X의 확률분포를 구하고 $90\mathrm{V}(X)$의 값 구하기	2

3 집합 A의 부분집합의 원소의 개수는 0, 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다. …… ❶

집합 A의 모든 부분집합의 개수는 $2^4=16$이고

$\mathrm{P}(X=k)$는 원소의 개수가 k인 부분집합을 택할 확률이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{16}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{16}$

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

…… ❷

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{16}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{16}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{16}=5$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-2^2=1$ …… ❸

답 1

4 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이다. …… ❶

집합 A의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$2^5-1=31$

집합 A의 공집합이 아닌 부분집합 중 가장 큰 원소가 k인 집합은 집합 $\{1, 2, 3, \dots, k-1\}$의 모든 부분집합에 k를 끼워넣어 만들 수 있으므로 가장 큰 원소가 k인 부분집합의 개수는 2^{k-1}이다. 즉

가장 큰 원소가 1인 집합의 개수는 $2^0=1$

가장 큰 원소가 2인 집합의 개수는 $2^1=2$

가장 큰 원소가 3인 집합의 개수는 $2^2=4$

가장 큰 원소가 4인 집합의 개수는 $2^3=8$

가장 큰 원소가 5인 집합의 개수는 $2^4=16$

$\mathrm{P}(X=k)$는 가장 큰 원소가 k인 부분집합을 택할 확률이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{31}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{31}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{31}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{8}{31}$, $\mathrm{P}(X=5)=\frac{16}{31}$

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{16}{31}$	1

…… ❷

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{31}+2\times\frac{2}{31}+3\times\frac{4}{31}+4\times\frac{8}{31}+5\times\frac{16}{31}$

$=\frac{129}{31}$

따라서 $p=31$, $q=129$이므로

$p+q=31+129=160$ …… ❸

답 160

채점기준	배점
❶ 확률변수 X가 가질 수 있는 값 구하기	1
❷ X의 확률분포 구하기	3
❸ $\mathrm{E}(X)$와 $p+q$의 값 구하기	2

실전 문제 | 1회

p.48~51

01 ①, ②, ③, ⑤ 연속확률변수이다.

따라서 이산확률변수인 것은 ④이다.

답 ④

02 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=10)$

$=k\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+k\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+k\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+k\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$

$=k\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=k\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{20}{21}k=1$

$\therefore k=\frac{21}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(1\le X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{21}{20}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{21}{20}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

$=\frac{21}{20}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right\}$

$=\frac{21}{20}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{21}{25}$

답 ③

03 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{a}{2}>0$에서 $a>0$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{16}+a^2+\frac{a}{2}+\frac{5}{8}=1$, $a^2+\frac{a}{2}-\frac{3}{16}=0$

$16a^2+8a-3=0$, $(4a+3)(4a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}$ ($\because a>0$)

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X^2-3X+2\le 0)=\mathrm{P}((X-1)(X-2)\le 0)$

$=\mathrm{P}(1\le X\le 2)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{3}{4}$

답 ⑤

04 확률변수 X가 가질 수 있는 값이 0, 1, 2, 3이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$\mathrm{P}(X\le2)+\mathrm{P}(X\ge2)=\frac{7}{6}$에서

$\mathrm{P}(X\le2)+\mathrm{P}(X\ge2)$

$=\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}$

$\qquad+\{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\}$

$=\underbrace{\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\}}_{(\text{확률의 총합})=1}+\mathrm{P}(X=2)$

$=1+\mathrm{P}(X=2)=\frac{7}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X\le2)+\mathrm{P}(X\le3)=\frac{7}{4}$에서

$\mathrm{P}(X\le2)+\underbrace{\mathrm{P}(X\le3)}_{=1}=\{1-\mathrm{P}(X=3)\}+1$

$\qquad=2-\mathrm{P}(X=3)=\frac{7}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(X<2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=1-\{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\}$

$=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{12}$

답 ①

05 직선과 원의 교점의 개수는 0, 1, 2 중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, $\mathrm{P}(X=2)$는 직선 $y=mx$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 6)$와 원 $(x-1)^2+(y-7)^2=5$가 서로 다른 두 점에서 만날 확률이다.

직선 $mx-y=0$과 원 $(x-1)^2+(y-7)^2=5$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작아야 하므로

$\frac{|m-7|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}<\sqrt{5},\ |m-7|<\sqrt{5(m^2+1)}$

$(m-7)^2<5(m^2+1),\ m^2-14m+49<5m^2+5$

$4m^2+14m-44>0,\ 2m^2+7m-22>0$

$(2m+11)(m-2)>0,\ m-2>0\ (\because 2m+11>0)$

$\therefore m>2$

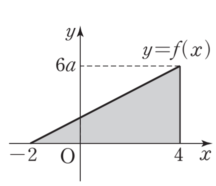
$\therefore m=3,\ 4,\ 5,\ 6\ (\because m=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 6)$

즉 $\mathrm{P}(X=2)$는 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수 m이 3, 4, 5, 6 중 하나일 확률이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

답 ④

06 $-2\le x\le4$에서 $f(x)\ge0$이므로 $a>0$



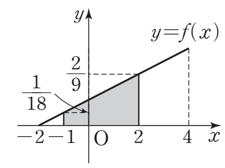
$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-2,\ 0)$, $(4,\ 6a)$를 지나고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times6\times6a=1$

$18a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{18}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{18}(x+2)$

$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(-1,\ \frac{1}{18}\right)$, $\left(2,\ \frac{2}{9}\right)$를 지나므로



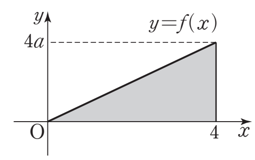
$\mathrm{P}(-1\le X\le2)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{18}+\frac{2}{9}\right)\times3=\frac{5}{12}$

답 ①

참고 함수 $f(x)=a(x+2)$의 정의역이 실수 전체의 집합일 때, $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-2,\ 0)$을 반드시 지나는 직선이다.

07 $0\le x\le4$에서 $f(x)\ge0$이므로 $a>0$



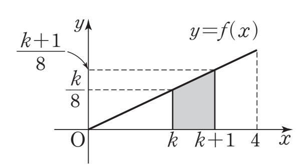
$y=f(x)$의 그래프는 점 $(4,\ 4a)$를 지나고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times4\times4a=1$

$\therefore a=\frac{1}{8}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{8}x$

$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(k,\ \frac{k}{8}\right)$, $\left(k+1,\ \frac{k+1}{8}\right)$을 지나므로



$\mathrm{P}(k\le X\le k+1)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{k}{8}+\frac{k+1}{8}\right)\times1$

$=\frac{2k+1}{16}$

이때 $\mathrm{P}(k\le X\le k+1)=\frac{5}{16}$이므로

$\frac{2k+1}{16}=\frac{5}{16},\ 2k+1=5$

$2k=4 \qquad \therefore k=2$

답 ⑤

08 확률밀도함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x|0\le x\le6\}$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{P}(0\le X\le3)=\mathrm{P}(3\le X\le6)=\frac{1}{2}$,

$\mathrm{P}(0\le X\le2)=\mathrm{P}(4\le X\le6)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(2\le X\le3)=\mathrm{P}(0\le X\le3)-\mathrm{P}(0\le X\le2)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(3\le X\le6)\times\mathrm{P}(2\le X\le3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

답 ①

09 확률의 총합은 1이므로

$a+b+\frac{3}{20}+\left(\frac{1}{2}-a\right)+\frac{1}{4}=1,\ b+\frac{9}{10}=1$

$\therefore b=\frac{1}{10}$

X	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{2}-a$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{P}(-2\le X\le 0)=\frac{3}{10}$이므로

$\mathrm{P}(-2\le X\le 0)=\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)$

$=a+\frac{1}{10}+\frac{3}{20}=\frac{3}{10}$

$\therefore a=\frac{1}{20}$

X	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)$

$=(-2)\times\frac{1}{20}+(-1)\times\frac{1}{10}+0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)$

$=(-2)^2\times\frac{1}{20}+(-1)^2\times\frac{1}{10}+0^2\times\frac{3}{20}+1^2\times\frac{9}{20}+2^2\times\frac{1}{4}$

$=\frac{7}{4}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{7}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{19}{16}$ 답 ③

10 $\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)=11$에서

$\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(2X-1)$

$=\mathrm{E}(X)+\{2\mathrm{E}(X)-1\}$

$=3\mathrm{E}(X)-1$

즉 $3\mathrm{E}(X)-1=11$이므로

$3\mathrm{E}(X)=12 \qquad \therefore \mathrm{E}(X)=4$

$\therefore \mathrm{E}(Y)=11-\mathrm{E}(X)=11-4=7$

또 $\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)=5$에서

$\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(2X-1)$

$=\mathrm{V}(X)+2^2\mathrm{V}(X)$

$=5\mathrm{V}(X)$

즉 $5\mathrm{V}(X)=5$이므로 $\mathrm{V}(X)=1$

$\therefore \mathrm{V}(Y)=5-\mathrm{V}(X)=5-1=4$

따라서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=1+4^2=17$

$\mathrm{E}(Y^2)=\mathrm{V}(Y)+\{\mathrm{E}(Y)\}^2=4+7^2=53$

이므로

$\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(Y^2)=17+53=70$ 답 ③

11 6개의 숫자 2, 3, 4, 5, 6, 7 중 소수는 2, 3, 5, 7의 4개, 소수가 아닌 수는 2개이므로 3장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 나올 수 있는 소수의 개수는 1, 2, 3 중 하나이다.

즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{4\times1}{20}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{6\times2}{20}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{4\times1}{20}=\frac{1}{5}$

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$ 답 ②

12 꺼낸 3장의 카드 중 빨간색 카드의 개수를 확률변수 X라 하면 파란색 카드의 개수는 $3-X$이고, 이때 상금 액수는

$100X+50(3-X)=50X+150$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1\times4}{35}=\frac{4}{35}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{3\times6}{35}=\frac{18}{35}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{3\times4}{35}=\frac{12}{35}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1\times1}{35}=\frac{1}{35}$

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{9}{7}$

따라서 상금 액수의 기댓값은

$\mathrm{E}(50X+150)=50\mathrm{E}(X)+150$

$=50\times\frac{9}{7}+150=\frac{1500}{7}$ (원) 답 ②

다른풀이 받을 수 있는 상금 액수를 확률변수 X라 하면

(i) 빨간색 카드 0장, 파란색 카드 3장을 꺼낸 경우

받을 수 있는 상금은 $3\times50=150$(원)이므로 $X=150$이고

$\mathrm{P}(X=150)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1\times4}{35}=\frac{4}{35}$

(ii) 빨간색 카드 1장, 파란색 카드 2장을 꺼낸 경우

받을 수 있는 상금은 $1\times100+2\times50=200$(원)이므로 $X=200$이고

$\mathrm{P}(X=200)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{3\times6}{35}=\frac{18}{35}$

(iii) 빨간색 카드 2장, 파란색 카드 1장을 꺼낸 경우

받을 수 있는 상금은 $2\times100+1\times50=250$(원)이므로 $X=250$이고

$\mathrm{P}(X=250)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{3\times4}{35}=\frac{12}{35}$

(iv) 빨간색 카드 3장, 파란색 카드 0장을 꺼낸 경우

받을 수 있는 상금은 $3\times100=300$(원)이므로 $X=300$이고

$\mathrm{P}(X=300)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1\times1}{35}=\frac{1}{35}$

X	150	200	250	300	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

따라서 상금 액수의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=150\times\frac{4}{35}+200\times\frac{18}{35}+250\times\frac{12}{35}+300\times\frac{1}{35}$$
$$=\frac{1500}{7}\text{ (원)}$$

13 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고

$\mathrm{P}(X=2)$는 검은 공, 검은 공을 차례로 꺼낼 확률이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

$\mathrm{P}(X=3)$은 두 번째 시행까지 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내고, 세 번째에 검은 공을 꺼낼 확률이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=2!\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

$\mathrm{P}(X=4)$는 세 번째 시행까지 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내고, 네 번째에 검은 공을 꺼낼 확률이므로

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

$\mathrm{P}(X=5)$는 네 번째 시행까지 흰 공 3개, 검은 공 1개를 꺼내고, 다섯 번째에 검은 공을 꺼낼 확률이므로

$$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}\right)\times\frac{1}{1}=\frac{2}{5}$$

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{2}{5}=4$$

$\therefore \mathrm{E}(5X+2)=5\mathrm{E}(X)+2=5\times4+2=22$ 답 ⑤

14 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=(4a+12)-a^2$

$=-a^2+4a+12=-(a-2)^2+16\ (-2\le a\le 6)$

이므로

$\mathrm{V}(4X-3)=4^2\mathrm{V}(X)$

$=16\{-(a-2)^2+16\}$

$=-16(a-2)^2+256\ (-2\le a\le 6)$

따라서 $\mathrm{V}(4X-3)$은 $a=2$에서 최댓값 256을 갖는다. 답 ⑤

참고 $\mathrm{E}(X^2)\ge0$이고 $\mathrm{E}(X)=m$이라 하면

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)\ge0$

따라서

$\mathrm{E}(X^2)=4a+12\ge0,\ \mathrm{V}(X)=(4a+12)-a^2\ge0$

이어야 하므로

$-2\le a\le6$

15 한 모서리의 길이가 1인 정육면체의 꼭짓점 중에서 임의로 택한 두 점 사이의 거리는 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 중 하나이고, 그 제곱은 각각 1, 2, 3이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 2개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2=28$

(i) 두 점 사이의 거리가 1인 경우의 수

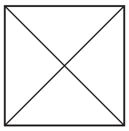
정육면체의 모서리의 개수와 같으므로 12

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$

(ii) 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$인 경우의 수

오른쪽 그림과 같이 정육면체의 면 1개당 2개가 존재하고 면의 개수가 6이므로

$2\times6=12$

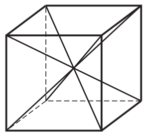


$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$

(iii) 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{3}$인 경우의 수

정육면체의 대각선의 개수와 같으므로 4

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$



X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{1}{7}=\frac{12}{7}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{7}+2^2\times\frac{3}{7}+3^2\times\frac{1}{7}=\frac{24}{7}$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{24}{7}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{24}{49}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$\therefore \sigma(-14X+5)=|-14|\sigma(X)=14\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=4\sqrt{6}$ 답 ⑤

16 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times6\times a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

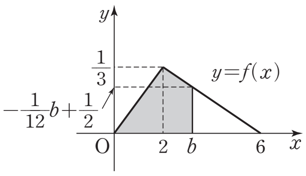
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 세 점 $(0, 0)$, $\left(2, \frac{1}{3}\right)$, $(6, 0)$을 지나므로

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x & (0\le x<2)\\ -\frac{1}{12}x+\frac{1}{2} & (2\le x<6)\end{cases}$$

이때 $\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{5}{8}$이고

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<\frac{5}{8}$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le2)<\mathrm{P}(0\le X\le b) \qquad \therefore b>2$



$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le b)=\mathrm{P}(0\le X\le2)+\mathrm{P}(2\le X\le b)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{12}b+\frac{1}{2}\right)\right\}\times(b-2)$$
$$=-\frac{1}{24}b^2+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$$

즉 $-\frac{1}{24}b^2+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$이므로

$b^2-12b+12=-15$, $b^2-12b+27=0$

$(b-3)(b-9)=0$ $\quad\therefore b=3$ ($\because 2<b\le 6$)

$\therefore ab=\frac{1}{3}\times 3=1$ 답 ③

참고 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(2, \frac{1}{3}\right)$, $(6, 0)$을 지나므로

$2\le x\le 6$일 때,

$f(x)=\frac{0-\frac{1}{3}}{6-2}(x-6)+0$ $\quad\therefore f(x)=-\frac{1}{12}x+\frac{1}{2}$

17 게임 참가자 한 명이 도전하는 횟수를 확률변수 X라 하면 참가자 한 명이 내는 참가비 총액은 $900X$이고, 최대 4번까지 도전 가능하므로 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

$P(X=1)$은 첫 번째 게임에서 이기고 끝날 확률이므로

$P(X=1)=\frac{1}{3}$

$P(X=2)$는 첫 번째 게임에서 지고, 두 번째 게임에서 이기고 끝날 확률이므로

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

$P(X=3)$은 첫 번째, 두 번째 게임에서 지고, 세 번째 게임에서 이기고 끝날 확률이므로

$P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

$P(X=4)$는 첫 번째, 두 번째, 세 번째 게임에서 지고, 네 번째 게임에서는 이기거나 질 확률이므로

$P(X=4)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{8}{27}$

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{4}{27}+4\times\frac{8}{27}=\frac{65}{27}$

따라서 게임 참가자 한 명이 내는 참가비의 총액의 기댓값은

$E(900X)=900E(X)=900\times\frac{65}{27}=\frac{6500}{3}$ (원) 답 ②

18 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다. ...... ❶

$P(X=0)$은 숫자 1, 2가 각각 적힌 두 카드 사이에 카드 0장이 있을 확률, 즉 1, 2가 적힌 카드가 이웃할 확률이므로

$P(X=0)=\frac{3!\times 2!}{4!}=\frac{1}{2}$

$P(X=1)$은 숫자 1, 2가 각각 적힌 두 카드 사이에 카드 1장이 올 확률이므로

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times 2!\times 2!}{4!}=\frac{1}{3}$

$P(X=2)$는 두 숫자 1, 2가 각각 적힌 두 카드 사이에 카드 2장이 올 확률, 즉 1, 2가 적힌 두 카드가 양 끝에 올 확률이므로

$P(X=2)=\frac{2!\times 2!}{4!}=\frac{1}{6}$

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

...... ❷

$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{6}=1$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$ ...... ❸

$\therefore V(-3X+6)=(-3)^2V(X)=9\times\frac{5}{9}=5$ ...... ❹

답 5

채점기준	배점
❶ 확률변수 X가 가질 수 있는 값 구하기	1
❷ X의 확률분포 구하기	2
❸ $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$의 값 각각 구하기	2
❹ $V(-3X+6)$의 값 구하기	1

19 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고

$P(X=1)$은 주머니 A를 택한 후 1이 적힌 공을 꺼내거나, 주머니 C를 택한 후 1이 적힌 공을 꺼낼 확률이므로

$P(X=1)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{18}$

$P(X=2)$는 주머니 A를 택한 후 2가 적힌 공을 꺼내거나, 주머니 B를 택한 후 2가 적힌 공을 꺼내거나, 주머니 C를 택한 후 2가 적힌 공을 꺼낼 확률이므로

$P(X=2)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$

$P(X=3)$은 주머니 B를 택한 후 3이 적힌 공을 꺼낼 확률이므로

$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$P(X=4)$는 주머니 C를 택한 후 4가 적힌 공을 꺼낼 확률이므로

$P(X=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	1

...... ❶

$E(X^2)=1^2\times\frac{5}{18}+2^2\times\frac{4}{9}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{9}=\frac{16}{3}$ ...... ❷

$\therefore E(3X^2-1)=3E(X^2)-1=3\times\frac{16}{3}-1=15$ ...... ❸

답 15

채점기준	배점
❶ X의 확률분포 구하기	4
❷ $E(X^2)$의 값 구하기	1
❸ $E(3X^2-1)$의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.52~55

01 ①, ②, ④, ⑤ 이산확률변수이다.

따라서 연속확률변수인 것은 ③이다. 답 ③

02 $\mathrm{P}(X=x)\ge 0$이므로 $\frac{a-1}{10}\ge 0$, $\frac{a^2-4}{10}\ge 0$, $\frac{a}{30}\ge 0$

$\frac{a-1}{10}\ge 0$에서 $a-1\ge 0$ $\quad\therefore a\ge 1$ ······ ㉠

$\frac{a^2-4}{10}\ge 0$에서 $a^2-4\ge 0$, $(a+2)(a-2)\ge 0$

$\therefore a\le -2$ 또는 $a\ge 2$ ······ ㉡

$\frac{a}{30}\ge 0$에서 $a\ge 0$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $a\ge 2$ ······ ㉣

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{15}+\frac{a-1}{10}+\frac{a^2-4}{10}+\frac{a}{30}+\frac{2}{15}=1$

$2+3(a-1)+3(a^2-4)+a+4=30$

$3a^2+4a-39=0$, $(3a+13)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because$ ㉣)

X	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	1

$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$

답 ⑤

03 조건 ㈎에서 $\mathrm{P}(X=2)=2\mathrm{P}(X=1)$

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=2\mathrm{P}(X=2)=2\times 2\mathrm{P}(X=1)=4\mathrm{P}(X=1)$

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 1, 2, 3, 4이고, 확률의 총합은 1이므로 조건 ㈏에서

$\mathrm{P}(X\ge 3)=1-\mathrm{P}(X\le 2)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(X\le 2)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X=1)+2\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}$

$3\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{9}$

따라서

$\mathrm{P}(X=2)=2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$, $\mathrm{P}(X=4)=4\times\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$

이므로 $\mathrm{P}(X\ge 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{3}$에서

$\mathrm{P}(X=3)+\frac{4}{9}=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{9}$

따라서 X의 값이 소수일 확률은

$\mathrm{P}(X=2$ 또는 $X=3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

답 ③

04 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -2, -1, 0, 1, 2이고, 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\left(4a+\frac{1}{10}\right)+\left(a+\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{10}+\left(a+\frac{1}{10}\right)+\left(4a+\frac{1}{10}\right)$

$=10a+\frac{1}{2}=1$

$10a=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{20}$

X	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	1

$Y=X^2+1$이므로

$X=0$일 때, $Y=1$

$X=-1$ 또는 $X=1$일 때, $Y=2$

$X=-2$ 또는 $X=2$일 때, $Y=5$

따라서

$\mathrm{P}(Y=1)=\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(Y=2)=\mathrm{P}(X=-1$ 또는 $X=1)$

$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{3}{20}+\frac{3}{20}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(Y=5)=\mathrm{P}(X=-2$ 또는 $X=2)$

$=\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$

이므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	5	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	1

$\therefore b=5$, $c=\frac{1}{10}$, $d=\frac{3}{10}$, $e=\frac{3}{5}$

$\therefore \frac{abc}{de}=\dfrac{\frac{1}{20}\times 5\times\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}}=\frac{5}{36}$

답 ②

05 1부터 20까지의 자연수가 하나씩 적힌 공 20개 중 임의로 4개를 동시에 꺼낼 때 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 최솟값, 즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, …, 17이고

$\mathrm{P}(X=x)$는 x가 적힌 공 1개와 $x+1$, $x+2$, $x+3$, …, 20이 적힌 공 $(20-x)$개 중 3개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_{20-x}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4}$ $(x=1, 2, 3, \dots, 17)$

$\therefore \mathrm{P}(10\le X\le 17)$

$=\mathrm{P}(X=10)+\mathrm{P}(X=11)+\mathrm{P}(X=12)+\cdots+\mathrm{P}(X=17)$

$=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4}+\frac{{}_{9}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4}+\frac{{}_{8}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4}+\cdots+\frac{{}_{3}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4}$

$=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_3+{}_{8}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{3}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4}$

이때

${}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_3+{}_{8}\mathrm{C}_3+{}_{7}\mathrm{C}_3+{}_{6}\mathrm{C}_3+{}_{5}\mathrm{C}_3+{}_{4}\mathrm{C}_3+{}_{3}\mathrm{C}_3$

$={}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_3+{}_{8}\mathrm{C}_3+{}_{7}\mathrm{C}_3+{}_{6}\mathrm{C}_3+{}_{5}\mathrm{C}_3+{}_{4}\mathrm{C}_3+{}_{4}\mathrm{C}_4$

$(\because {}_{3}\mathrm{C}_3={}_{4}\mathrm{C}_4=1)$

$={}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_3+{}_{8}\mathrm{C}_3+{}_{7}\mathrm{C}_3+{}_{6}\mathrm{C}_3+{}_{5}\mathrm{C}_3+{}_{5}\mathrm{C}_4$

$={}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_3+{}_{8}\mathrm{C}_3+{}_{7}\mathrm{C}_3+{}_{6}\mathrm{C}_3+{}_{6}\mathrm{C}_4$

$={}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_3+{}_{8}\mathrm{C}_3+{}_{7}\mathrm{C}_3+{}_{7}\mathrm{C}_4$

$={}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_3+{}_{8}\mathrm{C}_3+{}_{8}\mathrm{C}_4$

$={}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_4={}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_4={}_{11}\mathrm{C}_4$

이므로

$P(10\le X\le 17)=\dfrac{{}_{11}C_4}{{}_{20}C_4}$ 답 ④

06 ㄱ. 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가

$\pi\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{8}$이므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

ㄴ. 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가

$\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$이므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

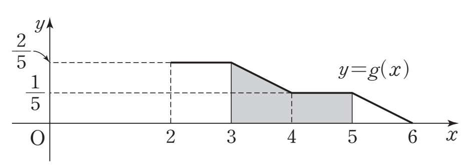
ㄷ. $1<x<2$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

ㄹ. $-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이고, 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가

$\left(\dfrac{1}{2}\times1\times1\right)\times2=1$이므로 확률밀도함수의 그래프이다.

따라서 확률밀도함수의 그래프인 것은 ㄹ이다. 답 ②

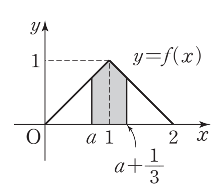
07 $g(x)=f(6-x)=f(-(x-6))$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore P(3\le X\le 5)=P(3\le X_2\le 4)+P(4\le X_2\le 5)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\right)\times1+1\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{2}$ 답 ①

08 $P\left(a\le X\le a+\dfrac{1}{3}\right)$의 값은 오른쪽 그림과 같이 x축 위의 두 점 $(a, 0)$, $\left(a+\dfrac{1}{3}, 0\right)$을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(1, 0)$이 될 때 최대가 되므로



$\dfrac{a+\left(a+\dfrac{1}{3}\right)}{2}=1$, $2a+\dfrac{1}{3}=2$

$2a=\dfrac{5}{3}$ $\therefore a=\dfrac{5}{6}$ 답 ④

09 확률밀도함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le 12\}$이므로

$P(0\le X\le 12)=1$

$f(6+x)=f(6-x)$이므로 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=6$에 대하여 대칭이다.

$P(0\le X\le 6)=P(6\le X\le 12)=\dfrac{1}{2}$이고

$P(4\le X\le 6)=P(6\le X\le 8)$이므로

$P(0\le X\le 4)=\dfrac{3}{7}P(4\le X\le 6)$ ...... ㉠

이고

$P(0\le X\le 4)+P(4\le X\le 6)=P(0\le X\le 6)$

$=\dfrac{1}{2}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{3}{7}P(4\le X\le 6)+P(4\le X\le 6)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{10}{7}P(4\le X\le 6)=\dfrac{1}{2}$ $\therefore P(4\le X\le 6)=\dfrac{7}{20}$

따라서

$P(4\le X\le 5)=P(4\le X\le 6)-P(5\le X\le 6)$

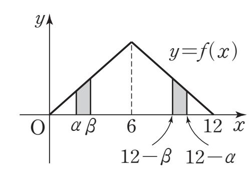
$=\dfrac{7}{20}-\dfrac{1}{5}$

$=\dfrac{3}{20}$

이고 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=6$에 대하여 대칭이므로

$P(7\le X\le 8)=P(4\le X\le 5)=\dfrac{3}{20}$ 답 ⑤

참고 $0\le x\le 12$에서 정의된 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=6$에 대하여 대칭이므로 $0\le \alpha\le \beta\le 6$일 때



$P(\alpha\le X\le \beta)=P(12-\beta\le X\le 12-\alpha)$

10 주머니 속 10개의 공 중 흰 공의 개수를 n $(n\le 4)$이라 하면 검은 공의 개수는 $10-n$

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나오는 흰 공의 개수는 0, 1, 2 중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고

$P(X=1)$은 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률이므로

$P(X=1)=\dfrac{{}_nC_1\times{}_{10-n}C_1}{{}_{10}C_2}=\dfrac{n(10-n)}{45}$

이때 $P(X=1)=\dfrac{8}{15}$이므로

$\dfrac{n(10-n)}{45}=\dfrac{8}{15}$, $n(10-n)=24$

$10n-n^2=24$, $n^2-10n+24=0$

$(n-4)(n-6)=0$ $\therefore n=4$ $(\because n\le 4)$

따라서 주머니에는 흰 공 4개, 검은 공 6개가 들어 있다.

$P(X=0)$은 흰 공 0개, 검은 공 2개를 꺼낼 확률이므로

$P(X=0)=\dfrac{{}_4C_0\times{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{15}{45}=\dfrac{1}{3}$

$P(X=2)$는 흰 공 2개, 검은 공 0개를 꺼낼 확률이므로

$P(X=2)=\dfrac{{}_4C_2\times{}_6C_0}{{}_{10}C_2}=\dfrac{6}{45}=\dfrac{2}{15}$

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	1

$\therefore E(X)=0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{8}{15}+2\times\dfrac{2}{15}=\dfrac{4}{5}$ 답 ⑤

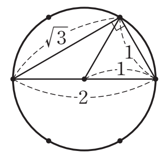
참고 주머니에 흰 공이 1개뿐이면 검은 공은 9개이고

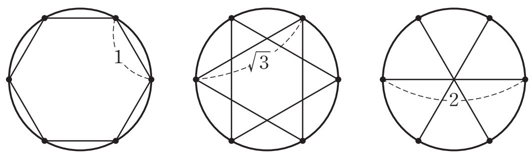
$P(X=1)$은 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률이므로

$P(X=1)=\dfrac{{}_1C_1\times{}_9C_1}{{}_{10}C_2}=\dfrac{1\times9}{45}=\dfrac{1}{5}$

즉 $P(X=1)=\dfrac{8}{15}$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

11 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 6등분하는 6개의 점 중 임의로 택한 2개의 점을 잇는 선분의 길이는 오른쪽 그림과 같이 1, $\sqrt{3}$, 2 중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, $\sqrt{3}$, 2이다.





위의 그림과 같이 6개의 점 중 2개를 택할 때, 길이가 1인 선분은 6개, 길이가 $\sqrt{3}$인 선분은 6개, 길이가 2인 선분은 3개가 만들어지므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{6}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(X=\sqrt{3})=\frac{6}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

X	1	$\sqrt{3}$	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+(\sqrt{3})^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{1}{5}=\frac{12}{5}$

$\therefore \mathrm{E}(5X^2)=5\mathrm{E}(X^2)=5\times\frac{12}{5}=12$ 답 ③

12 방정식 $f(x)=a$ ($a=1, 2, 3, 4, 5, 6$)의 서로 다른 실근의 개수는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수이므로
방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2
방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 4
방정식 $f(x)=3$의 서로 다른 실근의 개수는 4
방정식 $f(x)=4$의 서로 다른 실근의 개수는 6
방정식 $f(x)=5$의 서로 다른 실근의 개수는 2
방정식 $f(x)=6$의 서로 다른 실근의 개수는 2
따라서 방정식 $f(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 2, 4, 6 중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6이고
$\mathrm{P}(X=2)$는 $a=1$ 또는 $a=5$ 또는 $a=6$, 즉 주사위를 한 번 던져서 나온 수가 1, 5, 6 중 하나일 확률이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=4)$는 $a=2$ 또는 $a=3$일 확률, 즉 주사위를 한 번 던져서 나온 수가 2, 3 중 하나일 확률이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=6)$은 $a=4$일 확률, 즉 주사위를 한 번 던져서 나온 수가 4일 확률이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{6}$

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{40}{3}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{40}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$ 답 ②

13 숫자 1, 1, 2, 2, 3이 적힌 5개의 공 중 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 숫자의 합은
$1+1=2$, $1+2=3$, $1+3=2+2=4$, $2+3=5$
중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고
$\mathrm{P}(X=2)$는 1이 적힌 공 2개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)$은 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 1개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2\times2}{10}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(X=4)$는 1이 적힌 공 1개, 3이 적힌 공 1개를 꺼내거나 2가 적힌 공 2개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2\times1+1}{10}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=5)$는 2가 적힌 공 1개, 3이 적힌 공 1개를 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2\times1}{10}=\frac{1}{5}$

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}=\frac{18}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{10}+3^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{3}{10}+5^2\times\frac{1}{5}=\frac{69}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{69}{5}-\left(\frac{18}{5}\right)^2=\frac{21}{25}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{21}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$

$\therefore \sigma(-5X+1)=|-5|\sigma(X)=5\times\frac{\sqrt{21}}{5}=\sqrt{21}$ 답 ①

14 1의 양의 약수의 개수는 1
2, 3, 5는 소수이므로 양의 약수의 개수는 각각 2
4의 양의 약수의 개수는 3 → 1, 2, 4의 3개
6의 양의 약수의 개수는 4 → 1, 2, 3, 6의 4개
따라서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수, 즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{6}$

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}=\frac{19}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{19}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

따라서 방정식 $\mathrm{V}(3tX-1)+\mathrm{E}(3tX-1)=0$에서

$(3t)^2\mathrm{V}(X)+3t\mathrm{E}(X)-1=0,\ 9t^2\times\frac{8}{9}+3t\times\frac{7}{3}-1=0$

$8t^2+7t-1=0,\ (t+1)(8t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$-1+\frac{1}{8}=-\frac{7}{8}$ 답 ③

15 조건 (가)에서 $\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$이므로

$\mathrm{P}(X=1)=p\ (0\le p\le 1)$라 하면 $\mathrm{P}(X=2)=1-p$이고

$\mathrm{E}(X)=1\times p+2\times(1-p)=-p+2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times p+2^2\times(1-p)=-3p+4$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=(-3p+4)-(-p+2)^2$

$=-p^2+p$

따라서

$\mathrm{E}(4X^2)=4\mathrm{E}(X^2)=4(-3p+4)=-12p+16$

$\mathrm{V}(4X)=4^2\mathrm{V}(X)=16(-p^2+p)=-16p^2+16p$

이므로 조건 (나)에서

$-12p+16=(-16p^2+16p)+10$

$16p^2-28p+6=0,\ 8p^2-14p+3=0$

$(4p-1)(2p-3)=0 \qquad \therefore p=\frac{1}{4}\ (\because 0\le p\le 1)$

따라서 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{4}$이므로

$\mathrm{P}(X=1)\times\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$ 답 ④

16 $\mathrm{E}(2X-1)=39$에서 $2\mathrm{E}(X)-1=39$

$2\mathrm{E}(X)=40 \qquad \therefore \mathrm{E}(X)=20$

$\mathrm{V}(2X-1)=36$에서 $2^2\mathrm{V}(X)=36 \qquad \therefore \mathrm{V}(X)=9$

한편 $Y=aX+a$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+a)=a\mathrm{E}(X)+a=20a+a=21a$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(aX+a)=a^2\mathrm{V}(X)=9a^2$

따라서 $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)=8$에서 $21a+9a^2=8$

$9a^2+21a-8=0,\ (3a+8)(3a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because a>0)$ 답 ①

17 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 10, 20이고

$\mathrm{P}(X=10)$은 $(n+4)$개의 공 중 흰 공을 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=10)=\frac{n}{n+4}$

$\mathrm{P}(X=20)$은 $(n+4)$개의 공 중 검은 공을 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=20)=\frac{4}{n+4}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=10\times\frac{n}{n+4}+20\times\frac{4}{n+4}=\frac{10n+80}{n+4}$

이때 $\mathrm{E}(X)=14$이므로 $\frac{10n+80}{n+4}=14$

$10n+80=14n+56,\ -4n=-24 \qquad \therefore n=6$

따라서 $\mathrm{P}(X=10)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(X=20)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=10^2\times\frac{3}{5}+20^2\times\frac{2}{5}=220$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=220-14^2=24$ 답 ⑤

참고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

X	10	20	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

18 확률의 총합은 1이므로

$p+2p+3p+3p^2+4p^2=7p^2+6p=1$

$7p^2+6p-1=0,\ (p+1)(7p-1)=0$

$\therefore p=\frac{1}{7}\ (\because 0<p<1)$

X	-3	-1	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{49}$	$\frac{4}{49}$	1

…… ❶

$\mathrm{P}(X^2<n)=\mathrm{P}(X^2-n<0)=\mathrm{P}((X+\sqrt{n})(X-\sqrt{n})<0)$

$=\mathrm{P}(-\sqrt{n}<X<\sqrt{n})$

이므로

$n=1$일 때 $\mathrm{P}(-1<X<1)=\mathrm{P}(X=0)=\frac{3}{7}<\frac{5}{7}$

$2\le n\le 4$일 때

$\mathrm{P}(-\sqrt{n}<X<\sqrt{n})=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$

$5\le n\le 9$일 때

$\mathrm{P}(-\sqrt{n}<X<\sqrt{n})=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{49}=\frac{38}{49}>\frac{5}{7}$ …… ❷

따라서 $\mathrm{P}(X^2<n)>\frac{5}{7}$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 5이다. …… ❸

답 5

채점기준	배점
❶ p의 값을 구하고 X의 확률분포 구하기	2
❷ n의 값에 따른 $\mathrm{P}(X^2<n)$, 즉 $\mathrm{P}(-\sqrt{n}<X<\sqrt{n})$의 값 구하기	3
❸ 자연수 n의 최솟값 구하기	1

참고 $10\le n\le 16$일 때

$\mathrm{P}(-\sqrt{n}<X<\sqrt{n})$

$=\mathrm{P}(X=-3)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{49}=\frac{45}{49}$

$n\ge 17$일 때

$\mathrm{P}(-\sqrt{n}<X<\sqrt{n})$

$=\mathrm{P}(X=-3)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{49}+\frac{4}{49}=1$

19 8명의 학생을 2명씩 묶어 총 4개의 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{4!}=105$ …… ❶

(i) $X=0$인 경우

1학년 3명이 각각 2학년 중 2명, 3학년 중 1명과 팀을 이루고, 남은 2학년 1명과 3학년 1명이 팀을 이루는 경우이므로 그 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_1\times3!=36$

$\therefore \mathrm{P}(X=0)=\frac{36}{105}=\frac{12}{35}$ …… ❷

(ii) $X=1$인 경우

(ㄱ) 1학년 팀이 만들어지고, 2학년 3명이 각각 남은 1학년 1명, 3학년 2명과 팀을 이루는 경우의 수는

${}_3C_2\times3!=18$

(ㄴ) 2학년 팀이 만들어지고, 1학년 3명이 각각 남은 2학년 1명, 3학년 2명과 팀을 이루는 경우의 수는

${}_3C_2\times3!==18$

(ㄷ) 3학년 팀이 만들어지고, 1학년 3명이 각각 2학년 3명과 팀을 이루는 경우의 수는 $3!=6$

(ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)에서 $X=1$인 경우의 수는

$18+18+6=42$

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{42}{105}=\frac{14}{35}$ …… ❸

(iii) $X=2$인 경우

1학년 팀 1개, 2학년 팀 1개가 만들어지고, 3학년 2명이 각각 남은 1학년 1명, 2학년 1명과 팀을 이루는 경우이므로 그 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_3C_2\times2!=18$

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{18}{105}=\frac{6}{35}$ …… ❹

(iv) $X=3$인 경우

1학년 팀, 2학년 팀, 3학년 팀이 각각 1개씩 만들어지고, 남은 1학년 1명과 2학년 1명이 팀을 이루는 경우이므로 그 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_3C_2\times{}_2C_2=9$

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{9}{105}=\frac{3}{35}$ …… ❺

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{12}{35}$	$\frac{14}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{12}{35}+1\times\frac{14}{35}+2\times\frac{6}{35}+3\times\frac{3}{35}=1$

$\therefore \mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)=10\times1=10$ …… ❻

답 10

채점기준	배점
❶ 전체 경우의 수 구하기	1
❷ $\mathrm{P}(X=0)$의 값 구하기	1
❸ $\mathrm{P}(X=1)$의 값 구하기	2
❹ $\mathrm{P}(X=2)$의 값 구하기	1
❺ $\mathrm{P}(X=3)$의 값 구하기	1
❻ $\mathrm{E}(X)$의 값과 $\mathrm{E}(10X)$의 값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.56~60

1 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{2}{3}$

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{18}$이므로

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{3}+a\times a+b\times b=a^2+b^2=\frac{5}{18}$

이때 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{18}+2ab,\ 2ab=\frac{1}{6} \qquad \therefore ab=\frac{1}{12}$

답 ⑤

2 확률의 총합은 1이므로

$a+a+2b=2a+2b=1$

$a+b=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{1}{2}-b$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{16}$이므로

$\mathrm{E}(X)=0\times a+2a\times a+b\times2b=2a^2+2b^2=\frac{5}{16}$

$\therefore a^2+b^2=\frac{5}{32}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{1}{2}-b\right)^2+b^2=\frac{5}{32}$

$\frac{1}{4}-b+b^2+b^2=\frac{5}{32},\ 2b^2-b+\frac{3}{32}=0$

$64b^2-32b+3=0,\ (8b-1)(8b-3)=0$

$\therefore b=\frac{1}{8}$ 또는 $b=\frac{3}{8}$

이것을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{1}{8}$일 때, $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

$b=\frac{3}{8}$일 때, $a=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$

그런데 $0<a<\frac{b}{2}$이므로 $a=\frac{1}{8},\ b=\frac{3}{8}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}}=3$

답 ①

3 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=k+2)\ (k=0,\ 1,\ 2)$에서

$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=4)$

$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=3)$

이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=4)=a\ (0<a<1)$,

$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=3)=b\ (0<b<1)$

라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률의 총합은 1이므로

$a+b+a+b+a=3a+2b=1$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{35}{6}$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times a+1^2\times b+2^2\times a+3^2\times b+4^2\times a$

$=20a+10b=\frac{35}{6}$

$\therefore 24a+12b=7$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(X=0)=a=\frac{1}{6}$ 답 ④

4 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -2, -1, 0, 1, 2이고

$\mathrm{P}(X=k)=2\mathrm{P}(X=-k)(k=1, 2)$에서

$\mathrm{P}(X=1)=2\mathrm{P}(X=-1)$, $\mathrm{P}(X=2)=2\mathrm{P}(X=-2)$

이때 $\mathrm{P}(X=-1)=a$, $\mathrm{P}(X=-2)=b$

$(0<a<1, 0<b<1)$라 하면

$\mathrm{P}(X=1)=2a$, $\mathrm{P}(X=2)=2b$이므로

X	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	b	a	$\frac{1}{8}$	$2a$	$2b$	1

확률의 총합은 1이므로

$b+a+\frac{1}{8}+2a+2b=1$, $3a+3b=\frac{7}{8}$

$\therefore 24a+24b=7$ ...... ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{3}{8}$이므로

$\mathrm{E}(X)=(-2)\times b+(-1)\times a+0\times\frac{1}{8}+1\times 2a+2\times 2b$

$=a+2b=\frac{3}{8}$

$\therefore 8a+16b=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{24}$, $b=\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=2a=2\times\frac{5}{24}=\frac{5}{12}$ 답 ③

5 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고

$\mathrm{P}(X=x)$는 4개의 동전을 동시에 던질 때 앞면이 나오는 동전이 x개일 확률이므로

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x}{2^4}=\frac{{}_4\mathrm{C}_x}{16}$ $(x=0, 1, 2, 3, 4)$

즉 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$Y=\begin{cases} X & (X=0 \text{ 또는 } X=1) \\ 2 & (X\geq 2) \end{cases}$에서

X의 값이 0, 1일 때, Y의 값은 각각 0, 1

X의 값이 2, 3, 4일 때, Y의 값은 모두 2

즉 확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고

$\mathrm{P}(Y=0)=\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{16}$

$\mathrm{P}(Y=1)=\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{16}$

$\mathrm{P}(Y=2)=\mathrm{P}(X\geq 2)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$

Y	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{11}{16}$	1

$\therefore \mathrm{E}(Y)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{4}{16}+2\times\frac{11}{16}=\frac{13}{8}$ 답 ②

다른풀이 $\mathrm{P}(Y=2)=1-\{\mathrm{P}(Y=0)+\mathrm{P}(Y=1)\}$

$=1-\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}\right)=\frac{11}{16}$

6 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고

$\mathrm{P}(X=x)$는 5개의 동전을 던져서 뒷면이 나오는 동전이 x개일 확률이므로

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_5\mathrm{C}_x}{2^5}=\frac{{}_5\mathrm{C}_x}{32}$ $(x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

즉 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

$Y=\begin{cases} X-1 & (X\text{가 홀수인 경우}) \\ X & (X\text{가 홀수가 아닌 경우}) \end{cases}$에서

X의 값이 1, 3, 5일 때, Y의 값은 각각 0, 2, 4

X의 값이 0, 2, 4일 때, Y의 값은 각각 0, 2, 4

즉 확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 0, 2, 4이고

$\mathrm{P}(Y=0)=\mathrm{P}(X=0 \text{ 또는 } X=1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}=\frac{3}{16}$

$\mathrm{P}(Y=2)=\mathrm{P}(X=2 \text{ 또는 } X=3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{10}{32}+\frac{10}{32}=\frac{10}{16}$

$\mathrm{P}(Y=4)=\mathrm{P}(X=4 \text{ 또는 } X=5)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$

$=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

Y	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{3}{16}$	1

$\therefore \mathrm{E}(Y)=0\times\frac{3}{16}+2\times\frac{10}{16}+4\times\frac{3}{16}=2$ 답 ⑤

7 각 면에 숫자 1, 2, 2, 3이 하나씩 적힌 정사면체 모양의 서로 다른 상자 2개를 동시에 던질 때, 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 두 수의 차는

$3-3=2-2=1-1=0$, $3-2=2-1=1$, $3-1=2$

중 하나이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고

$\mathrm{P}(X=0)$은 바닥에 닿은 두 정사면체의 면에 적혀 있는 두 숫자가 서로 같을 확률이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

$P(X=1)$은 바닥에 닿은 두 정사면체의 면에 적혀 있는 두 숫자가 각각 2, 3이거나 1, 2일 확률이므로

$P(X=1)=\left(2\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}\right)+\left(2\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\right)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

$P(X=2)$는 바닥에 닿은 두 정사면체에 적혀 있는 두 숫자가 각각 1, 3일 확률이므로

$P(X=2)=2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X)=0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{8}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{8}=1$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$ 답 ④

8 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5개의 공 중 3개를 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합의 최솟값은 $1+3=4$, 최댓값은 $3+5=8$이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 4, 5, 6, 7, 8이다.

$P(X=4)$는 1, 2, 3이 하나씩 적힌 3개의 공을 꺼낼 확률이므로

$P(X=4)=\frac{1}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$

$P(X=5)$는 1, 2, 4 또는 1, 3, 4가 하나씩 적힌 3개의 공을 꺼낼 확률이므로

$P(X=5)=\frac{2}{{}_5C_3}=\frac{2}{10}$

$P(X=6)$은 1, 2, 5 또는 1, 3, 5 또는 1, 4, 5 또는 2, 3, 4가 하나씩 적힌 3개의 공을 꺼낼 확률이므로

$P(X=6)=\frac{4}{{}_5C_3}=\frac{4}{10}$

$P(X=7)$은 2, 3, 5 또는 2, 4, 5가 하나씩 적힌 3개의 공을 꺼낼 확률이므로

$P(X=7)=\frac{2}{{}_5C_3}=\frac{2}{10}$

$P(X=8)$은 3, 4, 5가 하나씩 적힌 3개의 공을 꺼낼 확률이므로

$P(X=8)=\frac{1}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$

X	4	5	6	7	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=4\times\frac{1}{10}+5\times\frac{2}{10}+6\times\frac{4}{10}+7\times\frac{2}{10}+8\times\frac{1}{10}=6$

$E(X^2)=4^2\times\frac{1}{10}+5^2\times\frac{2}{10}+6^2\times\frac{4}{10}+7^2\times\frac{2}{10}+8^2\times\frac{1}{10}$

$=\frac{186}{5}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{186}{5}-6^2=\frac{6}{5}$

$\therefore V(2-5X)=(-5)^2V(X)=25\times\frac{6}{5}=30$ 답 ⑤

9 연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}ac=1 \quad \therefore ac=2$ …… ㉠

$P(X\le b)+P(X\ge b)=1$ …… ㉡

$P(X\le b)-P(X\ge b)=\frac{1}{4}$ …… ㉢

이므로 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $P(X\le b)=\frac{5}{8}$, $P(X\ge b)=\frac{3}{8}$

이때 $y=f(x)$의 그래프에서 $P(X\le b)=\frac{1}{2}bc$이므로

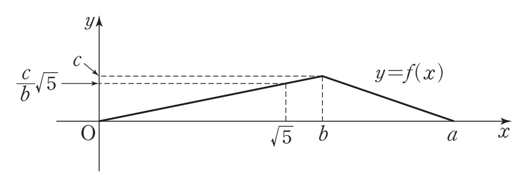
$\frac{1}{2}bc=\frac{5}{8} \quad \therefore bc=\frac{5}{4}$ …… ㉣

이때 $P(X\le\sqrt{5})=\frac{1}{2}$이고 $P(X\le b)=\frac{5}{8}$, 즉

$P(X\le\sqrt{5})<P(X\le b)$이므로 $\sqrt{5}<b$이고

$0\le x\le b$에서 $f(x)=\frac{c}{b}x$이므로 $y=f(x)$의 그래프는

점 $\left(\sqrt{5}, \frac{c}{b}\sqrt{5}\right)$를 지난다.



$\therefore P(X\le\sqrt{5})=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{c}{b}\sqrt{5}=\frac{5c}{2b}$

즉 $\frac{5c}{2b}=\frac{1}{2}$이므로 $b=5c$ …… ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면

$5c\times c=\frac{5}{4}$, $c^2=\frac{1}{4} \quad \therefore c=\frac{1}{2}$ ($\because c>0$)

$c=\frac{1}{2}$을 ㉤에 대입하면 $b=\frac{5}{2}$

$c=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}a=2 \quad \therefore a=4$

$\therefore a+b+c=4+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=7$ 답 ④

10 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}ac=1 \quad \therefore ac=2$ …… ㉠

$P(X\ge b)+P(X\le b)=1$ …… ㉡

$P(X\ge b)-P(X\le b)=\frac{3}{5}$ …… ㉢

이므로 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $P(X\ge b)=\frac{4}{5}$, $P(X\le b)=\frac{1}{5}$

이때 $y=f(x)$의 그래프에서 $P(X\le b)=\frac{1}{2}bc$이므로

$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{5} \quad \therefore bc=\frac{2}{5}$ …… ㉣

㉠÷㉣을 하면 $\frac{a}{b}=5$

$\therefore a\left(c+\frac{1}{b}\right)=ac+\frac{a}{b}=2+5=7$ 답 ③

2 확률분포 (2)

교과서 예제 p.63

01 (2) $P(X=1)={}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{5\times2^4}{3^5}=\frac{80}{243}$

답 (1) $P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 5)$

(2) $\frac{80}{243}$

02 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

(1) $P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

(2) $P(X=2)={}_4C_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{6\times4^2}{5^4}=\frac{96}{625}$

답 (1) $P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

(2) $\frac{96}{625}$

03 (1) $E(X)=48\times\frac{1}{4}=12,\ V(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9,$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{9}=3$

(2) $E(X)=400\times\frac{1}{2}=200,\ V(X)=400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=100,$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{100}=10$

답 (1) $E(X)=12,\ V(X)=9,\ \sigma(X)=3$

(2) $E(X)=200,\ V(X)=100,\ \sigma(X)=10$

04 답 (1) $N(50,\ 6^2)$ (2) $N(40,\ 3^2)$

05 ㄷ. m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커지면 곡선의 중앙 부분의 높이가 낮아지면서 양쪽으로 넓게 퍼진다.

ㄹ. σ의 값이 일정할 때, m의 값이 커지면 곡선의 대칭축의 위치는 오른쪽으로 이동하지만 곡선의 모양은 변하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

06 (1) $P(Z\le2)=P(Z\le0)+P(0\le Z\le2)$

$=0.5+P(0\le Z\le2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

(2) $P(Z\le-1.5)=P(Z\ge1.5)=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

(3) $P(0.5\le Z\le1)=P(0\le Z\le1)-P(0\le Z\le0.5)$

$=0.3413-0.1915=0.1498$

답 (1) 0.9772 (2) 0.0668 (3) 0.1498

07 $Z=\frac{X-35}{7}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(28\le X\le42)=P\left(\frac{28-35}{7}\le\frac{X-35}{7}\le\frac{42-35}{7}\right)$

$=P(-1\le Z\le1)$

$=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le1)$

$=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le1)$

$=2P(0\le Z\le1)$

$=2\times0.3413=0.6826$

답 0.6826

08 (1) $E(X)=100\times\frac{1}{2}=50,\ V(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따른다.

(2) $E(X)=1800\times\frac{1}{3}=600,\ V(X)=1800\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=400$

이때 1800은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(600,\ 20^2)$을 따른다.

답 (1) $N(50,\ 5^2)$ (2) $N(600,\ 20^2)$

09 $E(X)=7200\times\frac{1}{3}=2400,\ V(X)=7200\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=1600$

이때 7200은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(2400,\ 40^2)$을 따른다.

$\therefore P(X\le2380)=P\left(\frac{X-2400}{40}\le\frac{2380-2400}{40}\right)$

$=P(Z\le-0.5)$

$=P(Z\ge0.5)$

$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

답 0.3085

기출 Best | 1회 p.64~67

01 확률변수 X가 이항분포 $B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$\therefore P(X\le1)=P(X=0)+P(X=1)$

$={}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$=\frac{16}{81}+\frac{32}{81}=\frac{16}{27}$ 답 ⑤

02 확률변수 X는 이항분포 $B(5,\ 0.2)$, 즉 $B\left(5,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

$\therefore P(X=2)={}_5C_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{10\times4^3}{5^5}=\frac{128}{625}$ 답 ②

03 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{4}=\frac{n}{4}$, $\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$

이때 $\mathrm{E}(X^2)=19$이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\frac{3}{16}n=19-\left(\frac{n}{4}\right)^2$, $3n=19\times16-n^2$

$n^2+3n-19\times16=0$, $(n+19)(n-16)=0$

$\therefore n=16$ ($\because n$은 자연수)

답 ③

04 $\mathrm{P}(X=x)={}_{180}\mathrm{C}_x\times\frac{2^x}{3^{180}}={}_{180}\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{180-x}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르고

$\mathrm{E}(X)=180\times\frac{2}{3}=120$, $\mathrm{V}(X)=180\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=40$

$\therefore \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=120+40=160$

답 ④

05 2개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 10 이상인 경우를 순서쌍으로 나타내면

$(4,\ 6)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 4)$, $(5,\ 6)$, $(6,\ 5)$, $(6,\ 6)$

의 6가지이므로 이 사건이 일어날 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르고

$\mathrm{E}(X)=6$이므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{6}=6 \qquad \therefore n=36$

$\therefore \mathrm{V}(X)=36\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=5$

답 ③

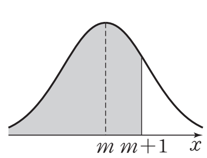
06 ㄱ. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\mathrm{P}(X\le m)=0.5$

이때 $\mathrm{P}(X\le m)<\mathrm{P}(X\le m+1)$

이므로

$\mathrm{P}(X\le m+1)>0.5$ (참)



ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\mathrm{P}(X\le a)+\mathrm{P}(X\ge a)=1$

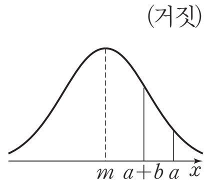
이때 $\mathrm{P}(X\ge a+1)<\mathrm{P}(X\ge a)$이므로

$\mathrm{P}(X\le a)+\mathrm{P}(X\ge a+1)<\mathrm{P}(X\le a)+\mathrm{P}(X\ge a)=1$

(거짓)

ㄷ. [반례] $b<0$이면 $a+b<a$이므로

$\mathrm{P}(X\le a+b)\le\mathrm{P}(X\le a)$ (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

07 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=a$에서

$\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=\frac{a}{2}$

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=b$에서

$\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=\frac{b}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m-\sigma)$

$=\mathrm{P}(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}=\frac{b-a}{2}$

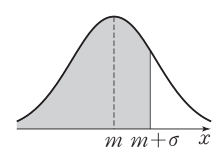
답 ①

08 $\mathrm{P}(X\le m)=\mathrm{P}(X\ge m)=0.5$이므로

$\mathrm{P}(X\le m+\sigma)$

$=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$=0.5+0.3413=0.8413$



$\mathrm{P}(X\le m-2\sigma)$

$=\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)$

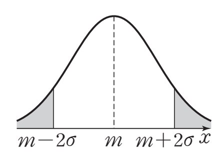
$=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

$\therefore \mathrm{P}(X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(X\le m-2\sigma)$

$=0.8413+0.0228$

$=0.8641$



답 ②

09 $\mathrm{P}(240-k\le X\le 240+k)=0.9544$에서

$\mathrm{P}(240-k\le X\le 240+k)$

$=\mathrm{P}(m-k\le X\le m+k)$

$=\mathrm{P}(m-k\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+k)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+k)+\mathrm{P}(m\le X\le m+k)$

$=2\mathrm{P}(m\le X\le m+k)=0.9544$

$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+k)=0.4772$

이때 주어진 표에서 $\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=0.4772$이므로

$m+k=m+2\sigma$

$\therefore k=2\sigma=2\times4=8$

답 ④

10 $Z_X=\frac{X-35}{6}$, $Z_Y=\frac{Y-45}{3}$로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(29\le X\le k)=\mathrm{P}\left(\frac{29-35}{6}\le\frac{X-35}{6}\le\frac{k-35}{6}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-1\le Z_X\le\frac{k-35}{6}\right)$

$\mathrm{P}(39\le Y\le 48)=\mathrm{P}\left(\frac{39-45}{3}\le\frac{Y-45}{3}\le\frac{48-45}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z_Y\le 1)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z_Y\le 2)$

이때 $\mathrm{P}(29\le X\le k)=\mathrm{P}(39\le Y\le 48)$이므로

$\frac{k-35}{6}=2$, $k-35=12 \qquad \therefore k=47$

답 ④

11 $Z=\dfrac{X-30}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(|X-34|\le 8)=\mathrm{P}(-8\le X-34\le 8)$
$=\mathrm{P}(26\le X\le 42)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{26-30}{8}\le\dfrac{X-30}{8}\le\dfrac{42-30}{8}\right)$
$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1.5)$
$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.1915+0.4332=0.6247$

답 ③

12 $Z=\dfrac{X-40}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le a)=0.8413$에서

$\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-40}{5}\le\dfrac{a-40}{5}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a-40}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-40}{5}\right)$
$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-40}{5}\right)$
$=0.8413$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-40}{5}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{a-40}{5}=1,\ a-40=5\qquad\therefore\ a=45$

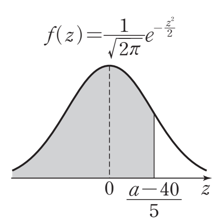
답 ②

참고 $\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a-40}{5}\right)=\mathrm{P}(X\le a)$
$=0.8413>0.5$

즉

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a-40}{5}\right)>\mathrm{P}(Z\le 0)$

이므로 $\dfrac{a-40}{5}>0$



13 $Z_W=\dfrac{W-50}{6},\ Z_X=\dfrac{X-56}{4},\ Z_Y=\dfrac{Y-60}{2}$으로 놓으면 Z_W, Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$a=\mathrm{P}(W\le 56)=\mathrm{P}\left(\dfrac{W-50}{6}\le\dfrac{56-50}{6}\right)=\mathrm{P}(Z_W\le 1)$

$b=\mathrm{P}(X\le 56)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-56}{4}\le\dfrac{56-56}{4}\right)=\mathrm{P}(Z_X\le 0)$

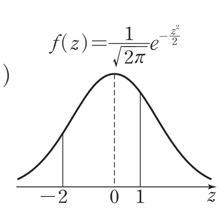
$c=\mathrm{P}(Y\le 56)=\mathrm{P}\left(\dfrac{Y-60}{2}\le\dfrac{56-60}{2}\right)=\mathrm{P}(Z_Y\le -2)$

이때

$\mathrm{P}(Z_Y\le -2)<\mathrm{P}(Z_X\le 0)<\mathrm{P}(Z_W\le 1)$

이므로

$c<b<a$



답 ⑤

14 공장에서 생산한 음료수 한 병의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-300}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(294\le X\le 312)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{294-300}{6}\le\dfrac{X-300}{6}\le\dfrac{312-300}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.3413+0.4772=0.8185$

답 ③

15 고등학생 한 명의 하루 동안의 스마트폰 사용 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-50}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

따라서 500명 중 임의로 택한 학생 한 명의 하루 동안의 스마트폰 사용 시간이 $\underbrace{\text{1시간}}_{\text{60분}}$ 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 60)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-50}{4}\ge\dfrac{60-50}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$
$=0.5-0.49=0.01$

따라서 500명 중 하루 동안의 스마트폰 사용 시간이 1시간 이상인 학생 수는

$500\times 0.01=5$

답 ①

16 직원 한 명이 출근하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-60}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

회사 직원 중 임의로 택한 한 명이 출근하는 데 걸리는 시간이 a분 이상일 확률이 0.3085이므로 $\mathrm{P}(X\ge a)=0.3085$에서

$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-60}{10}\ge\dfrac{a-60}{10}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{a-60}{10}\right)$
$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-60}{10}\right)$
$=0.3085$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-60}{10}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{a-60}{10}=0.5,\ a-60=5\qquad\therefore\ a=65$

답 ②

17 수험생 한 명의 논술 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-72}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

논술 점수가 상위 10 %에 속하는 수험생의 최저 점수를 k점이라

하면 $\mathrm{P}(X \ge k)=0.1$이므로

$$\mathrm{P}(X \ge k)=\mathrm{P}\left(\frac{X-72}{5} \ge \frac{k-72}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k-72}{5}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-72}{5}\right)=0.1$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-72}{5}\right)=0.4$$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28)=0.4$이므로

$\frac{k-72}{5}=1.28$, $k-72=6.4$ $\quad\therefore k=78.4$

따라서 구하는 최저 점수는 78.4점이다. 답 ⑤

참고 $\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k-72}{5}\right)=\mathrm{P}(X \ge k)$

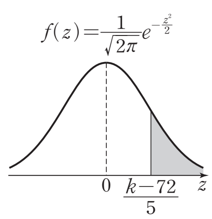
$=0.1<0.5$

즉

$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k-72}{5}\right)<\mathrm{P}(Z \ge 0)$

이므로

$\frac{k-72}{5}>0$



18 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400 \times \frac{1}{2}=200$, $\mathrm{V}(X)=400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}=100$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-200}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(195 \le X \le 215)$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{195-200}{10} \le \frac{X-200}{10} \le \frac{215-200}{10}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 1.5)$$
$$=\mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$$
$$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$$
$$=0.1915+0.4332=0.6247$$
답 ③

19 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2500, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=2500 \times \frac{4}{5}=2000$, $\mathrm{V}(X)=2500 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}=400$

이때 2500은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(2000, 20^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-2000}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(1960 \le X \le 2010)$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{1960-2000}{20} \le \frac{X-2000}{20} \le \frac{2010-2000}{20}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2 \le Z \le 0.5)$$
$$=\mathrm{P}(-2 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$$
$$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$$
$$=0.4772+0.1915$$
$$=0.6687$$
답 ②

참고 이산확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \dots, n)$

일 때, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따른다.

(단, n은 자연수이고, $0<p<1$이다.)

20 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 4 이하의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

한 개의 주사위를 450번 던져서 4 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=450 \times \frac{2}{3}=300$, $\mathrm{V}(X)=450 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}=100$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X \ge 280)=\mathrm{P}\left(\frac{X-300}{10} \ge \frac{280-300}{10}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z \ge -2)$$
$$=\mathrm{P}(Z \le 2)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$$
$$=0.5+0.4772=0.9772$$
답 ④

21 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(7600, \frac{1}{20}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=7600 \times \frac{1}{20}=380$, $\mathrm{V}(X)=7600 \times \frac{1}{20} \times \frac{19}{20}=19^2$

이때 7600은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(380, 19^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-380}{19}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X \ge k)=0.9987$에서

$$\mathrm{P}(X \ge k)=\mathrm{P}\left(\frac{X-380}{19} \ge \frac{k-380}{19}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k-380}{19}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{k-380}{19} \le Z \le 0\right)+\mathrm{P}(Z \ge 0)$$
$$=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le -\frac{k-380}{19}\right)+0.5$$
$$=0.9987$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le -\frac{k-380}{19}\right)=0.4987$$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 3)=0.4987$이므로

$-\frac{k-380}{19}=3$, $k-380=-57$ $\quad\therefore k=323$ 답 ①

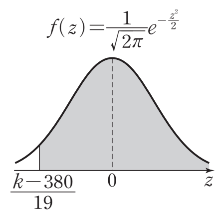
참고 $\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{k-380}{19}\right) = \mathrm{P}(X \geq k)$

$= 0.9987 > 0.5$

즉

$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{k-380}{19}\right) > \mathrm{P}(Z \geq 0)$

이므로 $\frac{k-380}{19} < 0$



기출 Best | 2회

p.68~71

01 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x) = {}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{6-x}$ $(x=0, 1, 2, \dots, 6)$

이므로

$$\frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=3)} = \frac{{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^4}{{}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{15\times\frac{3}{4}}{20\times\frac{1}{4}} = \frac{9}{4}$$

답 ③

02 양궁 선수가 화살 10발을 쏠 때, 화살을 정중앙에 맞히는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10, 0.8)$, 즉 $\mathrm{B}\left(10, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X=x) = {}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{10-x}$ $(x=0, 1, 2, \dots, 10)$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \leq 9) = 1 - \mathrm{P}(X=10)$

$= 1 - {}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^0$

$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$

답 ⑤

03 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X) = np$, $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$

이때 $\mathrm{E}(5X-5) = 55$에서

$\mathrm{E}(5X-5) = 5\mathrm{E}(X) - 5 = 55$

$5\mathrm{E}(X) = 60$ $\quad \therefore \mathrm{E}(X) = 12$

$\therefore np = 12$ ...... ㉠

또 $\sigma(5X-5) = 15$에서

$\sigma(5X-5) = |5|\sigma(X) = 15$ $\quad \therefore \sigma(X) = 3$

$\therefore \mathrm{V}(X) = \{\sigma(X)\}^2 = 3^2 = 9$

$\therefore np(1-p) = 9$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12(1-p) = 9$, $1-p = \frac{3}{4}$ $\quad \therefore p = \frac{1}{4}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4}n = 12$ $\quad \therefore n = 48$

$\therefore \frac{n}{p} = \frac{48}{\frac{1}{4}} = 192$

답 ②

04 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X) = 10p$, $\mathrm{V}(X) = 10p(1-p)$

이때 $\frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{V}(X)} = 5$이므로

$\frac{10p}{10p(1-p)} = 5$, $\frac{1}{1-p} = 5$

$1-p = \frac{1}{5}$ $\quad \therefore p = \frac{4}{5}$

따라서

$\mathrm{E}(X) = 10\times\frac{4}{5} = 8$, $\mathrm{V}(X) = 10\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{8}{5}$

이므로

$\mathrm{E}(5X) = 5\mathrm{E}(X) = 5\times 8 = 40$

$\mathrm{V}(5X) = 5^2\mathrm{V}(X) = 25\times\frac{8}{5} = 40$

$\therefore \mathrm{E}(5X) + \mathrm{V}(5X) = 40 + 40 = 80$

답 ①

05 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적힌 6개의 공 중에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 곱이 3인 경우는 1이 적힌 공 1개, 3이 적힌 공을 1개 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2} = \frac{2\times 1}{15} = \frac{2}{15}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(225, \frac{2}{15}\right)$를 따르므로

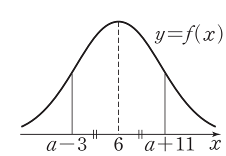
$\mathrm{E}(X) = 225\times\frac{2}{15} = 30$, $\mathrm{V}(X) = 225\times\frac{2}{15}\times\frac{13}{15} = 26$

$\therefore \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2$

$= 26 + 30^2 = 926$

답 ④

06 확률변수 X가 평균이 6인 정규분포를 따르므로 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 $f(x)$는 $x=6$에서 최댓값을 갖고, $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=6$에 대하여 대칭이다.



따라서 $\mathrm{P}(a-3 \leq X \leq a+11)$의 값이 최대가 되려면

$\frac{(a-3)+(a+11)}{2} = 6$

$2a+8 = 12$, $2a = 4$ $\quad \therefore a = 2$

답 ②

07 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X \leq m+\sigma) = a$에서

$\mathrm{P}(X \leq m+\sigma) = \mathrm{P}(X \leq m) + \mathrm{P}(m \leq X \leq m+\sigma)$

$= 0.5 + \mathrm{P}(m \leq X \leq m+\sigma) = a$

$\therefore \mathrm{P}(m \leq X \leq m+\sigma) = a - 0.5$

$\mathrm{P}(X \geq m-2\sigma) = b$에서

$\mathrm{P}(X \geq m-2\sigma) = \mathrm{P}(m-2\sigma \leq X \leq m) + \mathrm{P}(X \geq m)$

$= \mathrm{P}(m-2\sigma \leq X \leq m) + 0.5 = b$

$\therefore \mathrm{P}(m-2\sigma \leq X \leq m) = b - 0.5$

$\therefore \mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m)+\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)+\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m)$
$=(a-0.5)+(b-0.5)$
$=a+b-1$ 답 ③

다른풀이 $\mathrm{P}(X \ge m-2\sigma)=\mathrm{P}(X \le m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(X \le m)+\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)$
$=0.5+\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)=b$
$\therefore \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)=b-0.5$

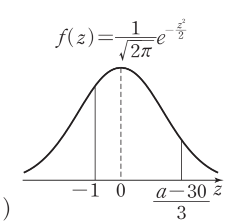
08 $\mathrm{P}(91 \le X \le 106)$
$=\mathrm{P}(100-9 \le X \le 100+6)$
$=\mathrm{P}(100-1.5\times 6 \le X \le 100+6)$
$=\mathrm{P}(m-1.5\sigma \le X \le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-1.5\sigma \le X \le m)+\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m \le X \le m+1.5\sigma)+\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$
$=0.4332+0.3413=0.7745$ 답 ①

09 $\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+\sigma)=0.6826$에서
$\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m)+\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)+\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$
$=2\mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$
$=0.6826$
$\therefore \mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)=0.3413$ …… ㉠
이때 $\mathrm{P}(X \le k)=0.8413$에서
$\mathrm{P}(X \le k)=\mathrm{P}(X \le m)+\mathrm{P}(m \le X \le k)$
$=0.5+\mathrm{P}(m \le X \le k)$
$=0.8413$
$\therefore \mathrm{P}(m \le X \le k)=0.3413$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $k=m+\sigma=180+5=185$ 답 ①
참고 $m=\mathrm{E}(X)=180,\ \sigma=\sigma(X)=5$

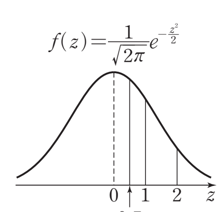
10 $Z_X=\dfrac{X-20}{4},\ Z_Y=\dfrac{Y-30}{6}$으로 놓으면 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(X \ge 12)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-20}{4} \ge \dfrac{12-20}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(Z_X \ge -2)$
$=\mathrm{P}(Z_X \le 2)$
$\mathrm{P}(Y \le k)=\mathrm{P}\left(\dfrac{Y-30}{6} \le \dfrac{k-30}{6}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z_Y \le \dfrac{k-30}{6}\right)$
이때 $\mathrm{P}(X \ge 12)=\mathrm{P}(Y \le k)$이므로
$2=\dfrac{k-30}{6}$
$k-30=12 \qquad \therefore k=42$ 답 ④

11 $Z=\dfrac{X-10}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(X \le 8)-\mathrm{P}(X \le 7)$
$=\mathrm{P}(7 \le X \le 8)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{7-10}{2} \le \dfrac{X-10}{2} \le \dfrac{8-10}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(-1.5 \le Z \le -1)$
$=\mathrm{P}(1 \le Z \le 1.5)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$=0.4332-0.3413=0.0919$ 답 ②

12 $Z=\dfrac{X-30}{3}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(27 \le X \le a)=0.8185$에서
$\mathrm{P}(27 \le X \le a)=\mathrm{P}\left(\dfrac{27-30}{3} \le \dfrac{X-30}{3} \le \dfrac{a-30}{3}\right)$
$=\mathrm{P}\left(-1 \le Z \le \dfrac{a-30}{3}\right)$
$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)+\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{a-30}{3}\right)$
$=0.3413+\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{a-30}{3}\right)=0.8185$
$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{a-30}{3}\right)=0.4772$
이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$이므로
$\dfrac{a-30}{3}=2,\ a-30=6 \qquad \therefore a=36$ 답 ③
참고 $\mathrm{P}\left(-1 \le Z \le \dfrac{a-30}{3}\right)$
$=\mathrm{P}(27 \le X \le a)$
$=0.8185>0.3413$
즉
$\mathrm{P}\left(-1 \le Z \le \dfrac{a-30}{3}\right)>\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)$
이므로 $\dfrac{a-30}{3}>0$



13 $Z_W=\dfrac{W-33}{4},\ Z_X=\dfrac{X-34}{2},\ Z_Y=\dfrac{Y-35}{3}$라 하면 $Z_W,\ Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$a=\mathrm{P}(W \ge 31)=\mathrm{P}\left(\dfrac{W-33}{4} \ge \dfrac{31-33}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(Z_W \ge -0.5)=\mathrm{P}(Z_W \le 0.5)$
$b=\mathrm{P}(X \ge 32)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-34}{2} \ge \dfrac{32-34}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z_X \ge -1)=\mathrm{P}(Z_X \le 1)$
$c=\mathrm{P}(Y \ge 29)=\mathrm{P}\left(\dfrac{Y-35}{3} \ge \dfrac{29-35}{3}\right)$
$=\mathrm{P}(Z_Y \ge -2)=\mathrm{P}(Z_Y \le 2)$
이때
$\mathrm{P}(Z_W \le 0.5)<\mathrm{P}(Z_X \le 1)<\mathrm{P}(Z_Y \le 2)$
이므로
$a<b<c$ 답 ①



14 이 공장에서 생산한 감자칩 한 봉지의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(340,\ 0.4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-340}{0.4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 341)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-340}{0.4}\le\frac{341-340}{0.4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5+0.4938=0.9938\end{aligned}$$

답 ⑤

15 남학생의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(171,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-171}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
전체 600명 중 임의로 택한 남학생 한 명의 키가 180 cm 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 180)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-171}{6}\ge\frac{180-171}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43=0.07\end{aligned}$$

따라서 600명 중 키가 180 cm 이상인 학생 수는
$600\times 0.07=42$

답 ②

16 제과점에서 만든 막대빵 100개의 각 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 0.5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-30}{0.5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
전체 막대빵 100개 중 길이가 k cm 이상인 막대빵이 7개이므로
$\mathrm{P}(X\ge k)=\dfrac{7}{100}=0.07$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge k)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-30}{0.5}\ge\frac{k-30}{0.5}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-30}{0.5}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-30}{0.5}\right)\\&=0.07\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-30}{0.5}\right)=0.43$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로
$\dfrac{k-30}{0.5}=1.5,\ k-30=0.75$
$\therefore\ k=30.75$

답 ③

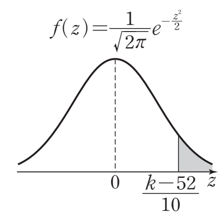
17 1학년 학생의 수학 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(52,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-52}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
수학 심화반에 들어갈 수 있는 학생의 최저 점수를 k점이라 하면
$\mathrm{P}(X\ge k)=\dfrac{30}{400}=0.075$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge k)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-52}{10}\ge\frac{k-52}{10}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-52}{10}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-52}{10}\right)=0.075\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-52}{10}\right)=0.425$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.44)=0.425$이므로
$\dfrac{k-52}{10}=1.44,\ k-52=14.4\quad\therefore\ k=66.4$
따라서 구하는 최저 점수는 66.4점이다.

답 ④

참고 $\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{k-52}{10}\right)=\mathrm{P}(X\ge k)$
$=0.075<0.5$
즉
$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{k-52}{10}\right)<\mathrm{P}(Z\ge 0)$
이므로
$\dfrac{k-52}{10}>0$



18 $\mathrm{E}(X)=225p=45$이므로 $p=\dfrac{1}{5}$
$\therefore\ \mathrm{V}(X)=225\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=36$
이때 225는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 6^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{X-45}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le 42)+\mathrm{P}(X\ge 48)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{X-45}{6}\le\frac{42-45}{6}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{X-45}{6}\ge\frac{48-45}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -0.5)+\mathrm{P}(Z\ge 0.5)\\&=1-\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0.5)\\&=1-2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=1-2\times 0.1915=0.6170\end{aligned}$$

답 ③

19 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{9}{10}\right)$를 따르므로
$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{9}{10}=90,\ \mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{10}=9$
이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 3^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\dfrac{X-90}{3}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&{}_{100}\mathrm{C}_{84}\left(\frac{9}{10}\right)^{84}\left(\frac{1}{10}\right)^{16}+{}_{100}\mathrm{C}_{85}\left(\frac{9}{10}\right)^{85}\left(\frac{1}{10}\right)^{15}\\&+{}_{100}\mathrm{C}_{86}\left(\frac{9}{10}\right)^{86}\left(\frac{1}{10}\right)^{14}+\cdots+{}_{100}\mathrm{C}_{93}\left(\frac{9}{10}\right)^{93}\left(\frac{1}{10}\right)^{7}\\&=\mathrm{P}(X=84)+\mathrm{P}(X=85)+\mathrm{P}(X=86)+\cdots+\mathrm{P}(X=93)\\&=\mathrm{P}(84\le X\le 93)\end{aligned}$$

$=\mathrm{P}\left(\frac{84-90}{3}\le\frac{X-90}{3}\le\frac{93-90}{3}\right)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.4772+0.3413=0.8185$ 답 ③

20 3개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 적어도 하나는 짝수의 눈이 나올 확률은
$1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$
3개의 주사위를 448번 던질 때 3개의 주사위 중 적어도 하나는 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(448, \frac{7}{8}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=448\times\frac{7}{8}=392$, $\mathrm{V}(X)=448\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{8}=49$
이때 448은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(392, 7^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-392}{7}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(X\le 378)=\mathrm{P}\left(\frac{X-392}{7}\le\frac{378-392}{7}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le -2)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$ 답 ①

21 3750개의 전구 중 불량품의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3750, \frac{1}{25}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=3750\times\frac{1}{25}=150$, $\mathrm{V}(X)=3750\times\frac{1}{25}\times\frac{24}{25}=144$
이때 3750은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150, 12^2)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{X-150}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le a)=0.3085$에서
$\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}\left(\frac{X-150}{12}\le\frac{a-150}{12}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-150}{12}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{a-150}{12}\right)$
$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le-\frac{a-150}{12}\right)$
$=0.3085$
$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le-\frac{a-150}{12}\right)=0.1915$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로
$-\frac{a-150}{12}=0.5$, $a-150=-6$
$\therefore a=144$ 답 ⑤

변형유형 집중공략 p.72~73

1-1 주사위를 한 번 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은
1, 2, 3, 6
$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
주사위를 36번 던질 때 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로
$\mathrm{V}(Y)=36\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=8$
또 6의 약수의 눈이 Y번 나오면 6의 약수가 아닌 눈은 $(36-Y)$번 나오므로 이때의 점 P의 좌표 X는
$X=2\times Y+(-1)\times(36-Y)=3Y-36$
$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(3Y-36)=3^2\mathrm{V}(Y)=9\times 8=72$ 답 ②

1-2 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 같은 색의 공이 나올 확률은
$\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1+3}{10}=\frac{2}{5}$
이 시행을 25번 반복할 때 같은 색의 공이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로
$\mathrm{E}(Y)=25\times\frac{2}{5}=10$
또 같은 색의 공이 Y번 나오면 다른 색의 공은 $(25-Y)$번 나오므로 이때 얻은 점수 X는
$X=a\times Y+2a\times(25-Y)=-aY+50a$
$\therefore \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(-aY+50a)=-a\mathrm{E}(Y)+50a$
$=-a\times 10+50a=40a$
이때 $\mathrm{E}(X)=120$이므로
$40a=120$ $\therefore a=3$ 답 3

2-1 확률분포 X가 평균이 m인 정규분포를 따르므로 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고
$f(36)<f(28)$에서 $m<\frac{28+36}{2}$
$\therefore m<32$ …… ㉠
$f(28)<f(31)$에서 $m>\frac{28+31}{2}$
$\therefore m>\frac{59}{2}$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{59}{2}<m<32$
$\therefore m=30$ ($\because$ m은 짝수)
따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30, 6^2)$을 따르고,
$Z=\frac{X-30}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(24\le X\le 45)=\mathrm{P}\left(\frac{24-30}{6}\le\frac{X-30}{6}\le\frac{45-30}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2.5)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=0.3413+0.4938=0.8351$

답 ③

2-2 확률분포 X가 평균이 m인 정규분포를 따르므로 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $f(n)\le f(n+2)$를 만족시키는 자연수 n의 최댓값이 20이므로

$f(1)\le f(3)$, $f(2)\le f(4)$, $\cdots$, $f(20)\le f(22)$,

$f(21)>f(23)$, $f(22)>f(24)$, $f(23)>f(25)$, $\cdots$

$f(20)\le f(22)$에서 $m\ge\dfrac{20+22}{2}$ $\quad\therefore m\ge 21$ ⋯⋯ ㉠

$f(21)>f(23)$에서 $m<\dfrac{21+23}{2}$ $\quad\therefore m<22$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $21\le m<22$

$\therefore m=21$ ($\because$ m은 자연수)

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(21,\ 4^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-21}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 27)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-21}{4}\le\dfrac{27-21}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1.5)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5+0.4332=0.9332$

답 ④

서술형 What & How

p.74~75

1 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{12}\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{12-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$

이므로 $\mathrm{P}(X=10)=\dfrac{11}{4}\mathrm{P}(X=11)$에서

${}_{12}\mathrm{C}_{10}p^{10}(1-p)^2=\dfrac{11}{4}\times{}_{12}\mathrm{C}_{11}p^{11}(1-p)$

$66\times p^{10}(1-p)^2=\dfrac{11}{4}\times 12\times p^{11}(1-p)$

$66(1-p)=33p$, $2(1-p)=p$, $2-2p=p$

$-3p=-2$ $\quad\therefore p=\dfrac{2}{3}$ ⋯⋯ ❶

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=12\times\dfrac{2}{3}=8$ ⋯⋯ ❷

$\therefore \mathrm{E}(12X)=12\mathrm{E}(X)=12\times 8=96$ ⋯⋯ ❸

답 96

2 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{8}\right)^x\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

이므로 $\mathrm{P}(X=2)=49\mathrm{P}(X=4)$에서

${}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n-2}=49\times{}_n\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{8}\right)^4\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n-4}$

$\dfrac{n(n-1)}{2}\times\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n-2}$

$=49\times\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}\times\left(\dfrac{1}{8}\right)^4\left(\dfrac{7}{8}\right)^{n-4}$

$\left(\dfrac{7}{8}\right)^2=49\times\dfrac{(n-2)(n-3)}{4\times3}\times\left(\dfrac{1}{8}\right)^2$

$1=\dfrac{(n-2)(n-3)}{12}$, $12=(n-2)(n-3)$

$n^2-5n-6=0$, $(n+1)(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because$ n은 자연수) ⋯⋯ ❶

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \dfrac{1}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=6\times\dfrac{1}{8}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{21}{32}$ ⋯⋯ ❷

$\therefore \mathrm{V}(8X)=8^2\mathrm{V}(X)=64\times\dfrac{21}{32}=42$ ⋯⋯ ❸

답 42

채점기준	배점
❶ n의 값 구하기	4
❷ $\mathrm{V}(X)$의 값 구하기	1
❸ $\mathrm{V}(8X)$의 값 구하기	1

3 모든 실수 k에 대하여

$\mathrm{P}(X\ge k)+\mathrm{P}(X\le k)=1$

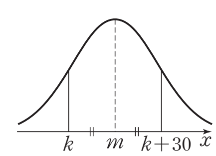
이고, 조건 (가)에서

$\mathrm{P}(X\ge k)+\mathrm{P}(X\ge k+30)=1$

이므로

$\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}(X\ge k+30)$

따라서 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르는 연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 할 때, 조건 (가)를 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$m=\dfrac{k+(k+30)}{2}$, $2m=2k+30$

$m=k+15$ $\quad\therefore k=m-15$ ⋯⋯ ㉠ ⋯⋯ ❶

한편 $Z=\dfrac{X-m}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 조건 (나)에서

$\mathrm{P}(X\ge 3k)=\mathrm{P}(X\ge 3m-45)$ ($\because$ ㉠)

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-m}{10}\ge\dfrac{(3m-45)-m}{10}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{2m-45}{10}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{2m-45}{10}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le-\dfrac{2m-45}{10}\right)$

$=0.6915$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le-\dfrac{2m-45}{10}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$-\dfrac{2m-45}{10}=0.5$, $2m-45=-5$

$2m=40 \qquad \therefore m=20$ ······ ❷

따라서 ㉠에서 $k=20-15=5$이므로

$m+k=20+5=25$ ······ ❸

답 25

4 모든 실수 k에 대하여

$P(X \geq k+20)+P(X \leq k+20)=1$

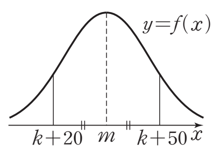
이고, 조건 ㈎에서

$P(X \geq k+20)+P(X \geq k+50)=1$

이므로

$P(X \leq k+20)=P(X \geq k+50)$

따라서 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 할 때, 조건 ㈎를 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$m=\dfrac{(k+20)+(k+50)}{2}$, $2m=2k+70$

$\therefore m=k+35$ ······ ㉠ ······ ❶

한편 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 조건 ㈏에서

$$P(|X-m| \geq k\sigma)=P\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| \geq k\right)$$
$$=P(|Z| \geq k)$$
$$=P(Z \leq -k \text{ 또는 } Z \geq k)$$
$$=P(Z \leq -k)+P(Z \geq k)$$
$$=2P(Z \geq k)$$
$$=2\{0.5-P(0 \leq Z \leq k)\}$$
$$=1-2P(0 \leq Z \leq k)$$
$$=0.0456$$

$2P(0 \leq Z \leq k)=0.9544$

$\therefore P(0 \leq Z \leq k)=0.4772$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2)=0.4772$이므로 $k=2$ ······ ❷

따라서 ㉠에서 $m=2+35=37$이므로

$m+k=37+2=39$ ······ ❸

답 39

채점기준	배점
❶ 조건 ㈎를 이용하여 k, m에 대한 관계식 세우기	3
❷ k의 값 구하기	2
❸ m의 값과 $m+k$의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.76~79

01 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{64}C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{64-x}$ $(x=0, 1, 2, \ldots, 64)$

이므로

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$$
$$={}_{64}C_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^{64}+{}_{64}C_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^{63}$$
$$=\frac{1}{4^{64}}+\frac{64\times3}{4^{64}}=\frac{193}{4^{64}}$$

$\therefore 2^{128}\times P(X<2)=2^{128}\times\dfrac{193}{4^{64}}=193$

답 ⑤

02 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{9}\right)$을 따르므로

$E(X)=n\times\frac{1}{9}=\frac{1}{9}n$

한편 $E(3X+1)=7$에서

$E(3X+1)=3E(X)+1=7$

$3E(X)=6 \qquad \therefore E(X)=2$

즉 $\frac{1}{9}n=2$이므로 $n=18$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{9}\right)$을 따르므로

$V(X)=18\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$

$\therefore \sigma(-3X+2)=|-3|\sigma(X)=3\times\frac{4}{3}=4$

답 ②

03 2개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때 나오는 전체 경우의 수는 $6\times6=36$이고, 두 눈의 수의 차가 3인 경우를 순서쌍으로 나타내면

$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$

의 6가지이므로 두 눈의 수의 차가 3일 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(360, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(X)=360\times\frac{1}{6}=60$

$V(X)=360\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=50$

$\therefore E(X)-V(X)=60-50=10$

답 ①

04 $0, 1, 2, \ldots, 30$을 값으로 갖는 확률변수 Y에 대하여 $X=3Y-1$이라 하면

$P(Y=k)=P(X=3k-1)={}_{30}C_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{30-k}$

$(k=0, 1, 2, \ldots, 30)$

즉 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{3}\right)$을 따르고

$E(Y)=30\times\frac{1}{3}=10$, $V(Y)=30\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$

이므로

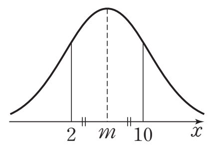
$E(X)=E(3Y-1)=3E(Y)-1=3\times10-1=29$

$V(X)=V(3Y-1)=3^2V(Y)=9\times\frac{20}{3}=60$

$\therefore E(X)+V(X)=29+60=89$

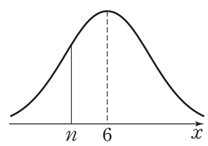
답 ④

05 $P(X\ge 2)+P(X\le 2)=1$이고
$P(X\ge 2)+P(X\ge 10)=1$이므로
$P(X\le 2)=P(X\ge 10)$
따라서 확률변수 X의 평균을 m이라 하면



$m=\frac{2+10}{2}=6$

$P(X\le n)<0.5$, 즉
$P(X\le n)<P(X\le 6)$에서
$n<6$
따라서 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5이므로
모든 자연수 n의 값의 합은
$1+2+3+4+5=15$



답 ③

06 확률변수 X가 정규분포 $N(4,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-4}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르고
$P(|X-4|\le 3)=0.6826$에서

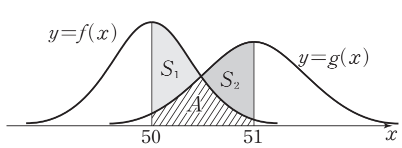
$$P(|X-4|\le 3)=P\left(\left|\frac{X-4}{3}\right|\le 1\right)=P(|Z|\le 1)$$
$$=P(-1\le Z\le 1)$$
$$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$$
$$=2P(0\le Z\le 1)=0.6826$$

$\therefore P(0\le Z\le 1)=0.3413$

$$\therefore P(Y\le 30)=P(4X+2\le 30)$$
$$=P(4X\le 28)=P(X\le 7)$$
$$=P\left(\frac{X-4}{3}\le\frac{7-4}{3}\right)$$
$$=P(Z\le 1)$$
$$=0.5+P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5+0.3413=0.8413$$

답 ⑤

07



위의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이를 A라 하면
$S_1+A=P(50\le X\le 51)$ …… ㉠
$S_2+A=P(50\le Y\le 51)$ …… ㉡
㉠－㉡을 하면
$S_1-S_2=P(50\le X\le 51)-P(50\le Y\le 51)$
이때 $Z_X=\frac{X-50}{0.4}$, $Z_Y=\frac{Y-51}{0.5}$로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(50\le X\le 51)=P\left(\frac{50-50}{0.4}\le\frac{X-50}{0.4}\le\frac{51-50}{0.4}\right)$$
$$=P(0\le Z_X\le 2.5)$$
$$=0.4938$$
$$P(50\le Y\le 51)=P\left(\frac{50-51}{0.5}\le\frac{Y-51}{0.5}\le\frac{51-51}{0.5}\right)$$
$$=P(-2\le Z_Y\le 0)$$
$$=P(0\le Z_Y\le 2)$$
$$=0.4772$$
$$\therefore S_1-S_2=P(50\le X\le 51)-P(50\le Y\le 51)$$
$$=0.4938-0.4772=0.0166$$

답 ①

08 $Z_X=\frac{X-m}{\sigma_1}$, $Z_Y=\frac{Y-(m+4)}{\sigma_2}$로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 조건 ㈎에서

$$P(m\le X\le m+2)=P\left(\frac{m-m}{\sigma_1}\le\frac{X-m}{\sigma_1}\le\frac{(m+2)-m}{\sigma_1}\right)$$
$$=P\left(0\le Z_X\le\frac{2}{\sigma_1}\right)$$
$$=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로
$\frac{2}{\sigma_1}=1$ $\quad\therefore \sigma_1=2$
한편 임의의 실수 m에 대하여
$P(X\le m+2)+P(X\ge m+2)=1$
이고, 조건 ㈏에서
$P(X\le m+2)+P(Y\le m+2)=1$
이므로
$P(X\ge m+2)=P(Y\le m+2)$

$$P\left(\frac{X-m}{2}\ge\frac{(m+2)-m}{2}\right)$$
$$=P\left(\frac{Y-(m+4)}{\sigma_2}\le\frac{(m+2)-(m+4)}{\sigma_2}\right)$$
$$P(Z_X\ge 1)=P\left(Z_Y\le-\frac{2}{\sigma_2}\right)$$
$$\therefore P(Z_X\ge 1)=P\left(Z_Y\ge\frac{2}{\sigma_2}\right)$$

즉 $1=\frac{2}{\sigma_2}$이므로 $\sigma_2=2$
$\therefore \sigma_1\times\sigma_2=2\times 2=4$

답 ①

09 확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르고
$P(94\le X\le m+6)=0.7745$에서
$P(94\le X\le m+6)$

$$=P\left(\frac{94-m}{6}\le\frac{X-m}{6}\le\frac{(m+6)-m}{6}\right)$$
$$=P\left(\frac{94-m}{6}\le Z\le 1\right)$$
$$=P\left(\frac{94-m}{6}\le Z\le 0\right)+P(0\le Z\le 1)$$
$$=P\left(0\le Z\le-\frac{94-m}{6}\right)+0.3413$$
$$=0.7745$$
$$\therefore P\left(0\le Z\le-\frac{94-m}{6}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로
$-\frac{94-m}{6}=1.5$, $m-94=9$ $\quad\therefore m=103$

답 ②

10 $Z_W=\frac{W-40}{\sigma_1}$, $Z_X=\frac{X-42}{\sigma_2}$, $Z_Y=\frac{Y-44}{\sigma_3}$로 놓으면 Z_W, Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(W\le 46)=P\left(\frac{W-40}{\sigma_1}\le\frac{46-40}{\sigma_1}\right)=P\left(Z_W\le\frac{6}{\sigma_1}\right)$

$P(X\le 46)=P\left(\frac{X-42}{\sigma_2}\le\frac{46-42}{\sigma_2}\right)=P\left(Z_X\le\frac{4}{\sigma_2}\right)$

$P(Y\le 46)=P\left(\frac{Y-44}{\sigma_3}\le\frac{46-44}{\sigma_3}\right)=P\left(Z_Y\le\frac{2}{\sigma_3}\right)$

이때 $P(W\le 46)=P(X\le 46)=P(Y\le 46)$이므로

$P\left(Z_W\le\frac{6}{\sigma_1}\right)=P\left(Z_X\le\frac{4}{\sigma_2}\right)=P\left(Z_Y\le\frac{2}{\sigma_3}\right)$

즉 $\frac{6}{\sigma_1}=\frac{4}{\sigma_2}=\frac{2}{\sigma_3}$이므로 $\frac{3}{\sigma_1}=\frac{2}{\sigma_2}=\frac{1}{\sigma_3}$

$\frac{3}{\sigma_1}=\frac{2}{\sigma_2}=\frac{1}{\sigma_3}=k$라 하면 $\sigma_1=\frac{3}{k}$, $\sigma_2=\frac{2}{k}$, $\sigma_3=\frac{1}{k}$이므로

$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=6$에서 $\frac{3}{k}+\frac{2}{k}+\frac{1}{k}=6$

$\frac{6}{k}=6 \quad \therefore k=1$

따라서 $\sigma_1=3$, $\sigma_2=2$, $\sigma_3=1$이므로

$\sigma_1-\sigma_2+\sigma_3=3-2+1=2$ 답 ③

11 $E(X)=m$, $V(X)=\sigma^2$ $(\sigma>0)$이라 하면 X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X\ge 14)=P(Z\ge -3)$에서

$P(X\ge 14)=P\left(\frac{X-m}{\sigma}\ge\frac{14-m}{\sigma}\right)$

$=P\left(Z\ge\frac{14-m}{\sigma}\right)$

$=P(Z\ge -3)$

즉 $\frac{14-m}{\sigma}=-3$이므로 $14-m=-3\sigma$ …… ㉠

또 $P(X\ge 30)=P(Z\le -5)=P(Z\ge 5)$에서

$P(X\ge 30)=P\left(\frac{X-m}{\sigma}\ge\frac{30-m}{\sigma}\right)$

$=P\left(Z\ge\frac{30-m}{\sigma}\right)$

$=P(Z\ge 5)$

즉 $\frac{30-m}{\sigma}=5$이므로 $30-m=5\sigma$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=20$, $\sigma=2$

$\therefore E(X)=20$, $V(X)=2^2=4$

$\therefore E(X)+V(X)=20+4=24$ 답 ②

12 응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(40, 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

이때 합격자의 최저 점수가 58점이므로 응시자가 시험에 합격할 확률은

$P(X\ge 58)=P\left(\frac{X-40}{12}\ge\frac{58-40}{12}\right)$

$=P(Z\ge 1.5)$

$=0.5-P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

따라서 전체 합격자 수는

$10000\times 0.0668=668$(명) 답 ③

13 $E(X)=288\times\frac{1}{3}=96$, $V(X)=288\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=64$

이때 288은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(96, 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-96}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(90\le X\le 100)=P\left(\frac{90-96}{8}\le\frac{X-96}{8}\le\frac{100-96}{8}\right)$

$=P\left(-\frac{3}{4}\le Z\le\frac{1}{2}\right)$

$=P\left(-\frac{1}{2}\le Z\le\frac{3}{4}\right)$

$P(92\le X\le k)=P\left(\frac{92-96}{8}\le\frac{X-96}{8}\le\frac{k-96}{8}\right)$

$=P\left(-\frac{1}{2}\le Z\le\frac{k-96}{8}\right)$

이때 $P(90\le X\le 100)<P(92\le X\le k)$, 즉

$P\left(-\frac{1}{2}\le Z\le\frac{3}{4}\right)<P\left(-\frac{1}{2}\le Z\le\frac{k-96}{8}\right)$이므로

$\frac{k-96}{8}>\frac{3}{4}$, $k-96>6 \quad \therefore k>102$

따라서 자연수 k의 최솟값은 103이다. 답 ③

14 확률변수 X가 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{1}{3m}\right)^2\right)$을 따르므로 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

이때 $P(X\le a)+P(X\le a^2)=1$에서

$\{1-P(X\ge a)\}+P(X\le a^2)=1$, 즉

$P(X\le a^2)=P(X\ge a)$이므로

$\frac{a^2+a}{2}=m \quad \therefore a^2+a=2m$ …… ㉠

한편 $Z=\frac{X-m}{\frac{1}{3m}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\le a^2+a)=0.9987$에서

$P(X\le a^2+a)=P(X\le 2m)$ ($\because$ ㉠)

$=P\left(\frac{X-m}{\frac{1}{3m}}\le\frac{2m-m}{\frac{1}{3m}}\right)$

$=P(Z\le 3m^2)$

$=0.5+P(0\le Z\le 3m^2)$

$=0.9987$

$\therefore$ $P(0\le Z\le 3m^2)=0.4987$

이때 $P(0\le Z\le 3)=0.4987$이므로

$3m^2=3$, $m^2=1$ $\quad\therefore$ $m=1$ $\left(\because \dfrac{1}{3m}>0\right)$

$m=1$을 ㉠에 대입하면

$a^2+a=2$, $a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$ $\quad\therefore$ $a=-2$ $(\because a<0)$

또 확률변수 X는 정규분포 $N\left(1,\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-1}{\frac{1}{3}}$이므로

$$P\left(X\le -\frac{a}{6}\right)=P\left(X\le \frac{1}{3}\right)=P\left(\frac{X-1}{\frac{1}{3}}\le \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}}\right)$$
$$=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

답 ③

15 공장에서 생산하는 축구공 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(420,\ 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-420}{4}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이 공장에서 생산한 축구공 한 개가 불량품일 확률은

$P(X<410$ 또는 $X>430)$

$=P(X<410)+P(X>430)$

$=P\left(\dfrac{X-420}{4}<\dfrac{410-420}{4}\right)+P\left(\dfrac{X-420}{4}>\dfrac{430-420}{4}\right)$

$=P(Z_X<-2.5)+P(Z_X>2.5)$

$=P(Z_X>2.5)+P(Z_X>2.5)$

$=2P(Z_X>2.5)$

$=2\{0.5-P(0\le Z_X\le 2.5)\}$

$=1-2P(0\le Z_X\le 2.5)$

$=1-2\times 0.49$

$=0.02$

따라서 임의로 택한 2500개의 축구공 중 불량품의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B(2500,\ 0.02)$를 따르고

$E(Y)=2500\times 0.02=50$, $V(Y)=2500\times 0.02\times 0.98=49$

이때 2500은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z_Y=\dfrac{Y-50}{7}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 불량품이 36개 이하일 확률은

$$P(Y\le 36)=P\left(\frac{Y-50}{7}\le \frac{36-50}{7}\right)$$
$$=P(Z_Y\le -2)=P(Z_Y\ge 2)$$
$$=0.5-P(0\le Z_Y\le 2)$$
$$=0.5-0.48$$
$$=0.02$$

답 ①

16 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 $\underbrace{\text{소수의 눈}}_{2,\,3,\,5}$이 나올 확률은

$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

X는 이항분포 $B\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$, Y는 이항분포 $B\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르고

$P(X=x)={}_2C_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2)$

$P(Y=y)={}_4C_y\left(\dfrac{1}{2}\right)^y\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4-y}$ $(y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$Y=2X$에서 $X=0$, $Y=0$ 또는 $X=1$, $Y=2$ 또는 $X=2$, $Y=4$이고, $X=x$일 사건과 $Y=y$일 사건은 서로 독립이므로

$$P(X=0,\ Y=0)=P(X=0)P(Y=0)$$
$$={}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2\times {}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{64}$$

$$P(X=1,\ Y=2)=P(X=1)P(Y=2)$$
$$={}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\times {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{2}{4}\times\frac{6}{16}=\frac{3}{16}$$

$$P(X=2,\ Y=4)=P(X=2)P(Y=4)$$
$$={}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0\times {}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{64}$$

$\therefore$ $P(Y=2X)$

$=P(X=0,\ Y=0)+P(X=1,\ Y=2)+P(X=2,\ Y=4)$

$=\dfrac{1}{64}+\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{64}=\dfrac{7}{32}$

답 ②

17 이 고등학교 학생들의 체중을 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $N(68,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{Y-68}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이 학교 학생 한 명의 체중이 59 kg 이상 80 kg 이하일 확률은

$P(59\le Y\le 80)$

$=P\left(\dfrac{59-68}{6}\le\dfrac{Y-68}{6}\le\dfrac{80-68}{6}\right)$

$=P(-1.5\le Z\le 2)$

$=P(-1.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 1.5)+P(0\le Z\le 2)$

$=0.43+0.48=0.91$

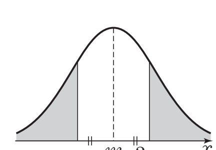
따라서 임의로 택한 이 학교 학생 100명 중 체중이 59 kg 이상 80 kg 이하인 학생 수 X는 이항분포 $B(100,\ 0.91)$을 따르므로

$E(X)=100\times 0.91=91$, $V(X)=100\times 0.91\times 0.09=8.19$

$\therefore$ $V(10X)=10^2V(X)=100\times 8.19=819$

답 ①

18 (1) 확률변수 X의 평균이 m이므로 두 점 $(a,\ 0)$, $(2m-a,\ 0)$은 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=m$에 대하여 서로 대칭이다. 즉 실수 a에 대하여



$\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}(X\ge 2m-a)$

따라서 $\mathrm{P}(X\le 18)=\mathrm{P}(X\ge 2m-18)$이므로

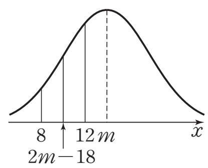
$\mathrm{P}(X\ge 12)<\mathrm{P}(X\le 18)<\mathrm{P}(X\ge 8)$에서

$\mathrm{P}(X\ge 12)<\mathrm{P}(X\ge 2m-18)<\mathrm{P}(X\ge 8)$

즉 $8<2m-18<12$이므로

$26<2m<30$, $13<m<15$

$\therefore m=14$ ($\because m$은 정수) …… ❶



(2) 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-14}{3}$

로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X-11|\le 3)&=\mathrm{P}(-3\le X-11\le 3)\\&=\mathrm{P}(8\le X\le 14)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{8-14}{3}\le\frac{X-14}{3}\le\frac{14-14}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.48\end{aligned}$$ …… ❷

$\therefore 100\mathrm{P}(|X-11|\le 3)=100\times 0.48=48$ …… ❸

답 (1) 14 (2) 48

채점기준	배점
❶ 정수 m의 값 구하기	3
❷ $\mathrm{P}(\lvert X-11\rvert\le 3)$의 값 구하기	2
❸ $100\mathrm{P}(\lvert X-11\rvert\le 3)$의 값 구하기	1

19 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(192,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=192\times\dfrac{1}{4}=48$, $\mathrm{V}(X)=192\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=36$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$을 따른다. 따라서 $Z=\dfrac{X-48}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

…… ❶

이때 이차방정식 $t^2+2Xt-X^3+34X^2=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=X^2-(-X^3+34X^2)\ge 0$

$X^3-33X^2\ge 0$, $X^2(X-33)\ge 0$

$X-33\ge 0$ ($\because X=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 192$)

$\therefore X\ge 33$ …… ❷

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 33)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-48}{6}\ge\frac{33-48}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5+0.494=0.994\end{aligned}$$

$\therefore p=0.994$

$\therefore 1000p=1000\times 0.994=994$ …… ❸

답 994

채점기준	배점
❶ X가 근사적으로 따르는 정규분포를 구하고 $Z=\dfrac{X-48}{6}$이 표준정규분포를 따르는 확률변수임을 설명하기	2
❷ 이차방정식이 실근을 가질 조건 구하기	2
❸ p의 값과 $1000p$의 값 구하기	2

실전 문제 | 2회

p.80~83

01 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(50,\ 0.6)$, 즉 $\mathrm{B}\left(50,\ \dfrac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=50\times\dfrac{3}{5}=30$, $\mathrm{V}(X)=50\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=12$

따라서

$\mathrm{E}(2X-3)=2\mathrm{E}(X)-3=2\times 30-3=57$,

$\mathrm{V}(2X-3)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times 12=48$

이므로

$\mathrm{E}(2X-3)+\mathrm{V}(2X-3)=57+48=105$

답 ③

02 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, $\underbrace{\text{10의 약수의 눈}}_{1,\ 2,\ 5}$이 나올 확률은

$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

주사위를 15번 던질 때 10의 약수인 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르고 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{15}\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15-x}=\dfrac{{}_{15}\mathrm{C}_x}{2^{15}}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 15)$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\le 7)$

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=7)$

$=\dfrac{{}_{15}\mathrm{C}_0}{2^{15}}+\dfrac{{}_{15}\mathrm{C}_1}{2^{15}}+\dfrac{{}_{15}\mathrm{C}_2}{2^{15}}+\cdots+\dfrac{{}_{15}\mathrm{C}_7}{2^{15}}$

$=\dfrac{1}{2^{15}}({}_{15}\mathrm{C}_0+{}_{15}\mathrm{C}_1+{}_{15}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{15}\mathrm{C}_7)$

$=\dfrac{1}{2^{15}}\times 2^{15-1}$

$=\dfrac{1}{2}$

답 ①

참고 이항계수의 성질에 의하여

$${}_{15}\mathrm{C}_0+{}_{15}\mathrm{C}_1+{}_{15}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{15}\mathrm{C}_7={}_{15}\mathrm{C}_8+{}_{15}\mathrm{C}_9+{}_{15}\mathrm{C}_{10}+\cdots+{}_{15}\mathrm{C}_{15}=2^{14}$$

03 이항분포 $\mathrm{B}\left(30,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

${}_{30}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{28}+{}_{30}\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{27}+\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{30}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=30)$

$=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\}$

$=1-\left\{{}_{30}\mathrm{C}_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^{30}+{}_{30}\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^{29}\right\}$

$=1-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{30}+30\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{29}\right\}$

$=1-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{30}+10\left(\frac{2}{3}\right)^{29}\right\}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{29}\left(\frac{2}{3}+10\right)$

$=1-\frac{32}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{29}=1-\frac{2^5\times 2^{29}}{3\times 3^{29}}=1-\frac{2^{34}}{3^{30}}$ 답 ①

04 $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n)$이므로

$\mathrm{P}(X=1)=40\mathrm{P}(X=0)$에서

${}_n\mathrm{C}_1 p^1(1-p)^{n-1}=40{}_n\mathrm{C}_0 p^0(1-p)^n$

$np(1-p)^{n-1}=40(1-p)^n$

$\therefore np=40(1-p)$ …… ㉠

또 $\mathrm{E}(X)=30$에서 $\mathrm{E}(X)=np=30$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$30=40(1-p),\ \frac{3}{4}=1-p \qquad \therefore p=\frac{1}{4}$

$p=\frac{1}{4}$을 ㉡에 대입하면

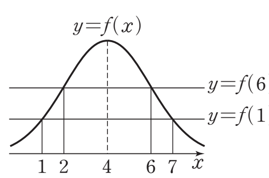
$\frac{1}{4}n=30 \qquad \therefore n=120$

$\therefore \frac{n}{p}=\frac{120}{\frac{1}{4}}=480$ 답 ②

05 $\{f(x)-f(1)\}\{f(x)-f(6)\}=0$에서

$f(x)=f(1)$ 또는 $f(x)=f(6)$

이때 확률변수 X가 평균이 4인 정규분포를 따르므로 X의 확률 밀도함수를 $f(x)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=4$에 대하여 대칭이고 $f(1)=f(7)$, $f(6)=f(2)$



따라서

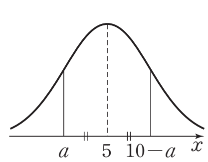
$f(x)=f(1)$에서 $x=1$ 또는 $x=7$,

$f(x)=f(6)$에서 $x=2$ 또는 $x=6$

이므로 구하는 모든 실근의 곱은

$1\times2\times6\times7=84$ 답 ④

06 확률변수 X가 평균이 5인 정규분포를 따르므로 X의 확률밀도함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=5$에 대하여 대칭이다. 따라서 임의의 실수 a에 대하여



$\mathrm{P}(X\le a)+\mathrm{P}(X\le 10-a)$

$=\mathrm{P}(X\le a)+\mathrm{P}(X\ge a)=1$

이고 $\mathrm{P}(X\le 5)=\mathrm{P}(X\ge 5)=0.5$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 1)+\mathrm{P}(X\le 2)+\mathrm{P}(X\le 3)+\cdots+\mathrm{P}(X\le 9)$

$=\{\mathrm{P}(X\le 1)+\mathrm{P}(X\le 9)\}+\{\mathrm{P}(X\le 2)+\mathrm{P}(X\le 8)\}$
$+\{\mathrm{P}(X\le 3)+\mathrm{P}(X\le 7)\}+\{\mathrm{P}(X\le 4)+\mathrm{P}(X\le 6)\}$
$+\mathrm{P}(X\le 5)$

$=1+1+1+1+0.5=4.5$ 답 ④

07 평균이 20인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=20$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X\le 20)=\mathrm{P}(X\ge 20)=0.5$

$\mathrm{P}(18\le X\le 22)=0.2$에서

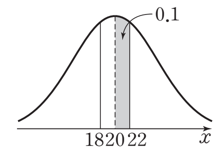
$\mathrm{P}(18\le X\le 22)$

$=\mathrm{P}(18\le X\le 20)+\mathrm{P}(20\le X\le 22)$

$=\mathrm{P}(20\le X\le 22)+\mathrm{P}(20\le X\le 22)$

$=2\mathrm{P}(20\le X\le 22)=0.2$

$\therefore \mathrm{P}(20\le X\le 22)=0.1$ …… ㉠



$\mathrm{P}(X\le 25)=0.9$에서

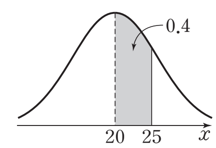
$\mathrm{P}(X\le 25)$

$=\mathrm{P}(X\le 20)+\mathrm{P}(20\le X\le 25)$

$=0.5+\mathrm{P}(20\le X\le 25)$

$=0.9$

$\therefore \mathrm{P}(20\le X\le 25)=0.4$ …… ㉡



따라서 $0.6\le \mathrm{P}(X\ge k)\le 0.9$에서

$0.6\le \mathrm{P}(k\le X\le 20)+\mathrm{P}(X\ge 20)\le 0.9$

$0.6\le \mathrm{P}(k\le X\le 20)+0.5\le 0.9$

$0.1\le \mathrm{P}(k\le X\le 20)\le 0.4$

$0.1\le \mathrm{P}(20\le X\le 40-k)\le 0.4$ ($\because$ 참고 참조)

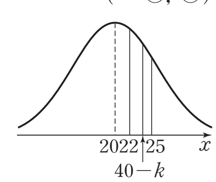
$\therefore \mathrm{P}(20\le X\le 22)\le \mathrm{P}(20\le X\le 40-k)\le \mathrm{P}(20\le X\le 25)$

($\because$ ㉠, ㉡)

즉 $22\le 40-k\le 25$이므로

$-18\le -k\le -15$

$\therefore 15\le k\le 18$

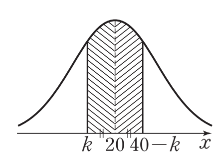


따라서 자연수 k는 15, 16, 17, 18이므로 모든 자연수 k의 값의 합은

$15+16+17+18=66$ 답 ④

참고 $20+(20-k)=40-k$이므로 두 점 $(k,\ 0)$, $(40-k,\ 0)$은 직선 $x=20$에 대하여 대칭이다. 즉

$\mathrm{P}(k\le X\le 20)=\mathrm{P}(20\le X\le 40-k)$



08 ㄱ. 확률변수 X의 평균을 m이라 하면 조건 (가)의

$f(18)<f(12)$에서 $m<\frac{18+12}{2}$

$\therefore m<15$ …… ㉠

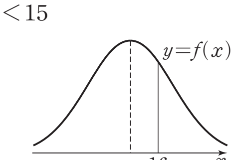
$f(12)<f(14)$에서 $m>\frac{12+14}{2}$

$\therefore m>13$ …… ㉡

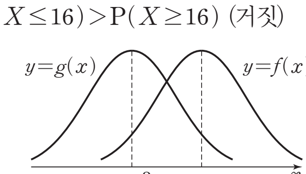
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $13<m<15$

따라서 $m<16$이므로 오른쪽 그림에서

$\mathrm{P}(X\le 16)>\mathrm{P}(X\ge 16)$ (거짓)



ㄴ.



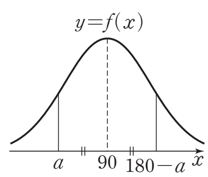
조건 (나)에서 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하면 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m-3,\ \sigma^2)$을 따르고 $Y=X-3$이다.

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)=\sigma^2$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(6\le Y\le 10)=\mathrm{P}(6\le X-3\le 10)=\mathrm{P}(9\le X\le 13)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

09 ㄱ. 확률변수 X가 평균이 90인 정규분포를 따르므로 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 임의의 실수 a에 대하여 $f(a)=f(180-a)$



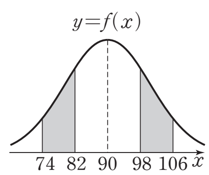
$\therefore A(82)$

$=\mathrm{P}(74\le X\le 82)$

$=\mathrm{P}(180-82\le X\le 180-74)$

$=\mathrm{P}(98\le X\le 106)$

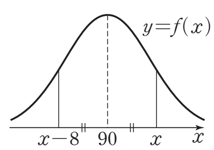
$=A(106)$ (참)



ㄴ. $A(x)=\mathrm{P}(x-8\le X\le x)$는

$\dfrac{(x-8)+x}{2}=90$, 즉 $x=94$에서

최댓값을 갖는다. (거짓)



ㄷ. $A(x)=\mathrm{P}(x-8\le X\le x)$

$=\mathrm{P}(180-x\le X\le 180-(x-8))$

$=\mathrm{P}(180-x\le X\le 188-x)$

$=A(188-x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

다른풀이 ㄱ. $Z=\dfrac{X-90}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$A(82)=\mathrm{P}(74\le X\le 82)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{74-90}{4}\le\dfrac{X-90}{4}\le\dfrac{82-90}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-4\le Z\le -2)$

$=\mathrm{P}(2\le Z\le 4)$

$A(106)=\mathrm{P}(98\le X\le 106)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{98-90}{4}\le\dfrac{X-90}{4}\le\dfrac{106-90}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(2\le Z\le 4)$

$\therefore A(82)=A(106)$ (참)

10 $Z=\dfrac{X-15}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(27\le Y\le 31)=\mathrm{P}(27\le 2X-5\le 31)$

$=\mathrm{P}(32\le 2X\le 36)=\mathrm{P}(16\le X\le 18)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{16-15}{2}\le\dfrac{X-15}{2}\le\dfrac{18-15}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.4332-0.1915=0.2417$ 답 ④

11 $Z_X=\dfrac{X-30}{\sigma}$, $Z_Y=\dfrac{Y-m}{2\sigma}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 32)+\mathrm{P}(Y\le 32)=1$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{X-30}{\sigma}\le\dfrac{32-30}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\dfrac{Y-m}{2\sigma}\le\dfrac{32-m}{2\sigma}\right)=1$

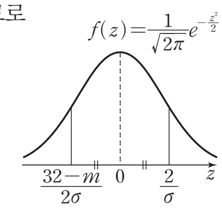
$\therefore \mathrm{P}\left(Z_X\le\dfrac{2}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y\le\dfrac{32-m}{2\sigma}\right)=1$

이때 $\mathrm{P}\left(Z_X\le\dfrac{2}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z_X\ge\dfrac{2}{\sigma}\right)=1$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_Y\le\dfrac{32-m}{2\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\dfrac{2}{\sigma}\right)$

즉 $-\dfrac{2}{\sigma}=\dfrac{32-m}{2\sigma}$이므로

$-4=32-m$ $\quad\therefore m=36$



답 ②

12 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(|X-m|\ge 8)=0.3174$에서

$\mathrm{P}(|X-m|\ge 8)=\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{X-m}{\sigma}\right|\ge\dfrac{8}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(|Z|\ge\dfrac{8}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{8}{\sigma}\text{ 또는 }Z\ge\dfrac{8}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{8}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{8}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{8}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{8}{\sigma}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{8}{\sigma}\right)$

$=2\left\{0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{8}{\sigma}\right)\right\}$

$=1-2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{8}{\sigma}\right)$

$=0.3174$

$-2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{8}{\sigma}\right)=-0.6826$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{8}{\sigma}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{8}{\sigma}=1$ $\quad\therefore \sigma=8$ 답 ⑤

13 갑이 합격하려면 최초 합격자 100명 중 12명 이상이 등록을 포기해야 한다.

이 대학의 최초 합격자가 등록할 확률이 0.8, 포기할 확률이 0.2이므로 최초 합격자 100명 중 등록을 포기하는 수험생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.2)$를 따르고

$\mathrm{E}(X)=100\times 0.2=20$, $\mathrm{V}(X)=100\times 0.2\times 0.8=16$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을

따르므로 최초 합격자 중 12명 이상이 등록을 포기할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 12)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-20}{4}\geq\frac{12-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq -2)\\&=\mathrm{P}(Z\leq 2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

따라서 갑이 합격할 확률은 0.9772이다. 답 ⑤

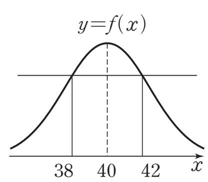
14 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 서로 같으므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모양은 서로 같다. 이때 X의 평균이 40, Y의 평균이 m이므로 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $m-40$만큼 평행이동한 것과 같다. 즉

$g(x)=f(x-(m-40))=f(x-m+40)$

따라서 $g(30)=f(70-m)$이므로

$f(38)\leq g(30)$에서 $f(38)\leq f(70-m)$

오른쪽 그림에서



$38\leq 70-m\leq 42$

$-32\leq -m\leq -28$

$\therefore\ 28\leq m\leq 32$

$\mathrm{P}(25\leq Y\leq 29)$의 값이 최대이려면

$m=\frac{25+29}{2}$, 즉 $m=27$이어야 한다. 그런데 $28\leq m\leq 32$이므로 $\mathrm{P}(25\leq Y\leq 29)$의 값은 m의 값이 27에 가장 가까울 때, 즉 $m=28$일 때 최대가 된다.

$m=28$일 때, Y는 정규분포 $\mathrm{N}(28,\ 2^2)$을 따르므로

$Z=\frac{Y-28}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고

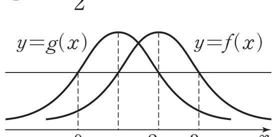
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(25\leq Y\leq 29)&=\mathrm{P}\left(\frac{25-28}{2}\leq\frac{Y-28}{2}\leq\frac{29-28}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 0.5)\\&=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)\\&=0.4332+0.1915=0.6247\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{P}(25\leq Y\leq 29)$의 최댓값은 0.6247이다. 답 ②

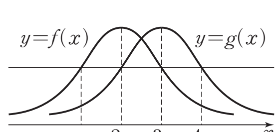
15 $\mathrm{E}(X)=m_1$, $\mathrm{E}(Y)=m_2$, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)=\sigma^2$이라 하면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(m_2,\ \sigma^2)$을 따른다.

X의 평균이 m_1이면 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이므로 $f(a)=f(3a)$에서

$m_1=\frac{a+3a}{2}=2a$



[그림 1]



[그림 2]

X, Y의 표준편차가 서로 같으므로 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모양은 서로 같고, $f(a)=f(3a)=g(2a)$이므로 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같이

$m_2=a$ 또는 $m_2=3a$

이때 $\mathrm{P}(Y\leq 2a)=0.6915>0.5$이므로 [그림 1]에서와 같이

$m_2=a$

따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ \sigma^2)$을 따르고, $Z_Y=\frac{Y-a}{\sigma}$로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\leq 2a)=0.6915$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\leq 2a)&=\mathrm{P}\left(\frac{Y-a}{\sigma}\leq\frac{2a-a}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_Y\leq\frac{a}{\sigma}\right)\\&=0.5+\mathrm{P}\left(0\leq Z_Y\leq\frac{a}{\sigma}\right)\\&=0.6915\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z_Y\leq\frac{a}{\sigma}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z_Y\leq 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{a}{\sigma}=0.5\qquad\therefore\ \sigma=2a$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(2a,\ (2a)^2)$을 따르고,

$Z_X=\frac{X-2a}{2a}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a\leq X\leq 6a)&=\mathrm{P}\left(\frac{a-2a}{2a}\leq\frac{X-2a}{2a}\leq\frac{6a-2a}{2a}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\leq Z_X\leq 2)\\&=\mathrm{P}(-0.5\leq Z_X\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 2)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 0.5)+\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 2)\\&=0.1915+0.4772=0.6687\end{aligned}$$

답 ③

16 3개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때 나오는 세 눈의 수의 중앙값이 1인 경우는 1, 1, 1 또는 1, 1, a $(a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$이므로 중앙값이 1일 확률은

$$\frac{1+\frac{3!}{2!}\times 5}{6^3}=\frac{2}{27}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(270,\ \frac{2}{27}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=270\times\frac{2}{27}=20$

$\therefore\ \mathrm{E}(2X+5)=2\mathrm{E}(X)+5=2\times 20+5=45$ 답 ④

17 택배 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-8}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

임의로 택한 택배 1개의 무게가 5 kg 이상 11.3 kg 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(5\le X\le 11.3)=\mathrm{P}\left(\frac{5-8}{3}\le\frac{X-8}{3}\le\frac{11.3-8}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.1)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.1)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.1)$$
$$=0.34+0.36=0.7$$

이 택배 회사에 접수된 택배 4개 중 무게가 5 kg 이상 11.3 kg 이하인 택배의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(4,\ 0.7)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y=y)={}_4\mathrm{C}_y(0.7)^y(0.3)^{4-y}$ $(y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y\ge 1)=1-\mathrm{P}(Y=0)$$
$$=1-{}_4\mathrm{C}_0(0.7)^0(0.3)^4$$
$$=1-0.0081=0.9919$$

답 ③

18 A 과수원에서 재배한 한라봉 1개, B 과수원에서 재배한 한라봉 1개의 무게를 각각 X, Y라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 12^2)$, Y는 정규분포 $\mathrm{N}(204,\ 20^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-200}{12}$, $Z_Y=\dfrac{Y-204}{20}$로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. …… ❶

A 과수원에서 재배한 한라봉 1개의 무게가 a g 이상일 확률과 B 과수원에서 재배한 한라봉 1개의 무게가 a g 이상일 확률이 서로 같으므로

$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}(Y\ge a)$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{X-200}{12}\ge\dfrac{a-200}{12}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{Y-204}{20}\ge\dfrac{a-204}{20}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge\dfrac{a-200}{12}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\dfrac{a-204}{20}\right)$

즉 $\dfrac{a-200}{12}=\dfrac{a-204}{20}$이므로

$5(a-200)=3(a-204)$, $5a-1000=3a-612$

$2a=388$ $\quad\therefore a=194$ …… ❷

답 194

채점기준	배점
❶ A 과수원, B 과수원에서 재배한 한라봉 1개의 무게를 각각 확률변수 X, Y라 하고 $Z_X=\frac{X-200}{12}$, $Z_Y=\frac{Y-204}{20}$가 표준정규분포를 따르는 확률변수임을 설명하기	2
❷ 주어진 조건을 등식으로 나타내어 a의 값 구하기	3

19 이 지역 고등학생의 주당 인터넷 강의 시청 시간을 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 30^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{Y-240}{30}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. …… ❶

이 지역의 고등학생 중 임의로 택한 한 명의 주당 인터넷 강의 시청 시간이 285분 이상일 확률은

$$\mathrm{P}(Y\ge 285)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-240}{30}\ge\frac{285-240}{30}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.5-0.43=0.07 \quad\cdots\cdots ❷$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10000,\ 0.07)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10000\times 0.07=700$

$\mathrm{V}(X)=10000\times 0.07\times 0.93=651$ …… ❸

$\therefore \mathrm{E}(X-500)=\mathrm{E}(X)-500=700-500=200$

$\mathrm{V}(X-500)=\mathrm{V}(X)=651$

$\therefore \mathrm{E}(X-500)+\mathrm{V}(X-500)=200+651=851$ …… ❹

답 851

채점기준	배점
❶ 이 지역 고등학생의 주당 인터넷 강의 시청 시간을 Y라 하고 $Z=\frac{Y-240}{30}$이 표준정규분포를 따르는 확률변수임을 설명하기	2
❷ 이 지역의 고등학생 중 임의로 택한 한 명의 주당 인터넷 강의 시청 시간이 285분 이상일 확률 구하기	2
❸ X가 이항분포를 따름을 설명하고, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$의 값 각각 구하기	2
❹ $\mathrm{E}(X-500)+\mathrm{V}(X-500)$의 값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.84~88

1 $\mathrm{E}(X)=36\times\dfrac{2}{3}=24$, $\mathrm{V}(X)=36\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=8$

이므로

$\mathrm{E}(2X-a)=2\mathrm{E}(X)-a=2\times 24-a=48-a$

$\mathrm{V}(2X-a)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times 8=32$

이때 $\mathrm{E}(2X-a)=\mathrm{V}(2X-a)$이므로

$48-a=32$ $\quad\therefore a=16$

답 16

2 $\mathrm{E}(X)=18\times\dfrac{1}{3}=6$, $\mathrm{V}(X)=18\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=4$

이므로

$\mathrm{E}(aX+10)=a\mathrm{E}(X)+10=a\times 6+10=6a+10$

$\mathrm{V}(aX+10)=a^2\mathrm{V}(X)=a^2\times 4=4a^2$

이때 $\mathrm{E}(aX+10)=\mathrm{V}(aX+10)$이므로

$6a+10=4a^2$, $4a^2-6a-10=0$

$2a^2-3a-5=0$, $(2a-5)(a+1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\dfrac{5}{2}$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

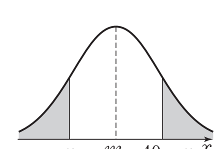
$-1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$

답 ⑤

3 모든 실수 x에 대하여

$\mathrm{P}(X\le x)=\mathrm{P}(X\ge 40-x)$

이므로 오른쪽 그림에서



$m_1=\dfrac{x+(40-x)}{2}=20$

또 모든 실수 x에 대하여 $\mathrm{P}(Y\le x)=\mathrm{P}(X\le x+10)$, 즉 $\mathrm{P}(Y\le x)=\mathrm{P}(X-10\le x)$이므로

$Y=X-10$

$\therefore m_2=\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X-10)=\mathrm{E}(X)-10$

$=20-10$ ($\because \mathrm{E}(X)=m_1=20$)

$=10$

$\sigma_2=\sigma(Y)=\sigma(X-10)=\sigma(X)=\sigma_1$

따라서 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ \sigma^2)$, Y는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ \sigma^2)$을 따르고, $Z_X=\dfrac{X-20}{\sigma}$, $Z_Y=\dfrac{Y-10}{\sigma}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(15\le X\le 20)+\mathrm{P}(15\le Y\le 20)=0.4772$에서

$\mathrm{P}(15\le X\le 20)+\mathrm{P}(15\le Y\le 20)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{15-20}{\sigma}\le\dfrac{X-20}{\sigma}\le\dfrac{20-20}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\dfrac{15-10}{\sigma}\le\dfrac{Y-10}{\sigma}\le\dfrac{20-10}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{5}{\sigma}\le Z_X\le 0\right)+\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{\sigma}\le Z_Y\le\dfrac{10}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\dfrac{5}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{\sigma}\le Z_Y\le\dfrac{10}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{10}{\sigma}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{10}{\sigma}=2\qquad\therefore\ \sigma=5$

$\therefore\ \sigma_1=\sigma_2=5$

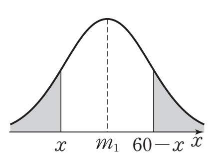
$\therefore\ m_1+\sigma_2=20+5=25$ 답 25

4 모든 실수 x에 대하여 $\mathrm{P}(X\ge x)+\mathrm{P}(X\le x)=1$, 즉 $\mathrm{P}(X\ge x)=1-\mathrm{P}(X\le x)$이므로 조건 (가)의 $\mathrm{P}(X\ge x)+\mathrm{P}(X\ge 60-x)=1$에서

$\{1-\mathrm{P}(X\le x)\}+\mathrm{P}(X\ge 60-x)=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 60-x)=\mathrm{P}(X\le x)$

따라서 오른쪽 그림에서



$m_1=\dfrac{(60-x)+x}{2}=30$

또 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $\mathrm{P}(Y\le x)=\mathrm{P}(X\le x-40)$, 즉 $\mathrm{P}(Y\le x)=\mathrm{P}(X+40\le x)$이므로

$Y=X+40$

$\therefore\ m_2=\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X+40)=\mathrm{E}(X)+40$

$=30+40\ (\because\ \mathrm{E}(X)=m_1=30)$

$=70$

$\sigma_2=\sigma(Y)=\sigma(X+40)=\sigma(X)=\sigma_1$

따라서 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ \sigma^2)$, Y는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ \sigma^2)$을 따르고, $Z_X=\dfrac{X-30}{\sigma}$, $Z_Y=\dfrac{Y-70}{\sigma}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(50\le X\le 70)+\mathrm{P}(50\le Y\le 70)=0.3413$에서

$\mathrm{P}(50\le X\le 70)+\mathrm{P}(50\le Y\le 70)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{50-30}{\sigma}\le\dfrac{X-30}{\sigma}\le\dfrac{70-30}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\dfrac{50-70}{\sigma}\le\dfrac{Y-70}{\sigma}\le\dfrac{70-70}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{20}{\sigma}\le Z_X\le\dfrac{40}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(-\dfrac{20}{\sigma}\le Z_Y\le 0\right)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{20}{\sigma}\le Z_X\le\dfrac{40}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\dfrac{20}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{40}{\sigma}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{40}{\sigma}=1\qquad\therefore\ \sigma=40$

$\therefore\ \sigma_1=\sigma_2=40$

$\therefore\ m_1+m_2-\sigma_1-\sigma_2=30+70-40-40=20$ 답 20

5 수험생의 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(68,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-68}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(55\le X\le 78)=\mathrm{P}\left(\dfrac{55-68}{10}\le\dfrac{X-68}{10}\le\dfrac{78-68}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4032+0.3413=0.7445$ 답 ②

6 토마토 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-72}{\sigma}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 토마토 한 개의 무게가 83 g 이상일 확률이 0.1357이므로

$\mathrm{P}(X\ge 83)=0.1357$에서

$\mathrm{P}(X\ge 83)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-72}{\sigma}\ge\dfrac{83-72}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{11}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{11}{\sigma}\right)=0.1357$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{11}{\sigma}\right)=0.3643$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.1)=0.3643$이므로

$\dfrac{11}{\sigma}=1.1\qquad\therefore\ \sigma=10$

따라서 토마토 한 개의 무게가 85 g 이하일 확률은

$\mathrm{P}(X\le 85)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-72}{10}\le\dfrac{85-72}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1.3)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)$

$=0.5+0.4032=0.9032$

$\therefore\ p=0.9032$

$\therefore\ \sigma+10000p=10+10000\times 0.9032=9042$ 답 ③

7 A 제품 1개, B 제품 1개의 중량을 각각 X, Y라 하면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(9,\ 0.4^2)$, $\mathrm{N}(20,\ 1^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-9}{0.4}$, $Z_Y=\dfrac{Y-20}{1}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(8.9\le X\le 9.4)=\mathrm{P}(19\le Y\le k)$이고

$$\mathrm{P}(8.9\le X\le 9.4)=\mathrm{P}\left(\frac{8.9-9}{0.4}\le\frac{X-9}{0.4}\le\frac{9.4-9}{0.4}\right)=\mathrm{P}(-0.25\le Z_X\le 1)$$

$$\mathrm{P}(19\le Y\le k)=\mathrm{P}\left(\frac{19-20}{1}\le\frac{Y-20}{1}\le\frac{k-20}{1}\right)=\mathrm{P}(-1\le Z_Y\le k-20)=\mathrm{P}(-k+20\le Z_Y\le 1)$$

이므로

$\mathrm{P}(-0.25\le Z_X\le 1)=\mathrm{P}(-k+20\le Z_Y\le 1)$

$-0.25=-k+20$ $\quad\therefore k=20.25$ 답 ④

8 A 제품 1개, B 제품 1개의 중량을 각각 X, Y라 하면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 0.3^2)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-12}{0.3}$, $Z_Y=\dfrac{Y-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(12\le X\le 12.2)+\mathrm{P}(Y\ge 12.2)=0.5$이고

$$\mathrm{P}(12\le X\le 12.2)=\mathrm{P}\left(\frac{12-12}{0.3}\le\frac{X-12}{0.3}\le\frac{12.2-12}{0.3}\right)=\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{2}{3}\right)$$

$$\mathrm{P}(Y\ge 12.2)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-m}{\sigma}\ge\frac{12.2-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{12.2-m}{\sigma}\right)$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{2}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{12.2-m}{\sigma}\right)=0.5$$

$$\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{12.2-m}{\sigma}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{2}{3}\right)$$

$$\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{12.2-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore \frac{12.2-m}{\sigma}=\frac{2}{3}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}\left(Y\ge 12.2+\frac{\sigma}{3}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-m}{\sigma}\ge\frac{12.2+\frac{\sigma}{3}-m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{12.2-m}{\sigma}+\frac{1}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\ (\because ㉠)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y\ge 1)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1)=0.5-0.3413=0.1587$$

답 ④

9 한 개의 주사위를 한 번 던져 4 이하의 눈이 나올 확률은

$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

한 개의 주사위를 16200번 던져 4 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16200,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따르고

$\mathrm{E}(X)=16200\times\dfrac{2}{3}=10800$

$\mathrm{V}(X)=16200\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=3600=60^2$

이때 16200은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10800,\ 60^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-10800}{60}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또 4 이하의 눈이 X번 나오면 5 이상의 눈은 $(16200-X)$번 나오므로 이때의 점 A의 좌표를 Y라 하면

$Y=1\times X+(-1)\times(16200-X)=2X-16200$

따라서 점 A의 좌표가 5700 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(Y\le 5700)=\mathrm{P}(2X-16200\le 5700)=\mathrm{P}(2X\le 21900)=\mathrm{P}(X\le 10950)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{X-10800}{60}\le\frac{10950-10800}{60}\right)=\mathrm{P}(Z\le 2.5)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.5+0.494=0.994$$

$\therefore k=0.994$

$\therefore 1000\times k=1000\times 0.994=994$ 답 994

10 한 개의 주사위를 한 번 던져 2 이하의 눈이 나올 확률은

$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

한 개의 주사위를 450번 던져 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르고

$\mathrm{E}(X)=450\times\dfrac{1}{3}=150$, $\mathrm{V}(X)=450\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=100=10^2$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-150}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또 2 이하의 눈이 X번 나오면 3 이상의 눈은 $(450-X)$번 나오므로 이때의 점 A의 좌표를 Y라 하면

$Y=100+1\times X+2\times(450-X)=-X+1000$

따라서 점 A의 좌표가 860 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(Y\le 860)=\mathrm{P}(-X+1000\le 860)=\mathrm{P}(X\ge 140)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{X-150}{10}\ge\frac{140-150}{10}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -1)=\mathrm{P}(Z\le 1)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.5+0.3413=0.8413$$

답 ③

3 통계적 추정

교과서 예제

p.91, 93

01 답 (1) 전수조사 (2) 표본조사 (3) 표본조사
(4) 표본조사 (5) 전수조사 (6) 표본조사

02 (1) ${}_3\Pi_2=3^2=9$
(2) ${}_3P_2=3\times2=6$

답 (1) 9 (2) 6

참고 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하고 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)를 구하면
(1) (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)
(2) (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 1)

03 (1) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$m=E(X)=0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{4}=3$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}+6^2\times\frac{1}{4}=14$이므로

$\sigma^2=V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=14-3^2=5$

(2) $\overline{X}=\frac{2+2+2+6}{4}=3$

$S^2=\frac{(2-3)^2+(2-3)^2+(2-3)^2+(6-3)^2}{4-1}=4$

답 (1) $m=3$, $\sigma^2=5$ (2) $\overline{X}=3$, $S^2=4$

04 (1) $\overline{X}=\frac{-2+0+2}{3}=0$

$S^2=\frac{(-2-0)^2+(0-0)^2+(2-0)^2}{3-1}=4$

$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{4}=2$

(2) $\overline{X}=\frac{2+(-1)+2}{3}=1$

$S^2=\frac{(2-1)^2+(-1-1)^2+(2-1)^2}{3-1}=3$

$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{3}$

답 (1) $\overline{X}=0$, $S^2=4$, $S=2$ (2) $\overline{X}=1$, $S^2=3$, $S=\sqrt{3}$

05 모집단에서 임의로 택한 하나의 숫자를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하면 표본평균 $\overline{X}$는

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이므로

$X_1=0$, $X_2=1$ 또는 $X_1=1$, $X_2=0$일 때 $\overline{X}=\boxed{\frac{1}{2}}$

또 $\overline{X}=0$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면 (0, 0)이므로

$P(\overline{X}=0)=P(X_1=0, X_2=0)$
$=P(X_1=0)P(X_2=0)$
$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{9}}$

$\overline{X}=\frac{1}{2}$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면 (0, 1) 또는 (1, 0)이므로

$P\left(\overline{X}=\frac{1}{2}\right)=P(X_1=0, X_2=1)+P(X_1=1, X_2=0)$
$=2P(X_1=0, X_2=1)$
$=2P(X_1=0)P(X_2=1)$
$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{2}{9}}$

$\overline{X}=\frac{3}{2}$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면 (1, 2) 또는 (2, 1)이므로

$P\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)=P(X_1=1, X_2=2)+P(X_1=2, X_2=1)$
$=2P(X_1=1, X_2=2)$
$=2P(X_1=1)P(X_2=2)$
$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{2}{9}}$

따라서 □ 안에 알맞은 수를 써넣으면 다음과 같다.

$\overline{X}$	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	$\frac{3}{2}$	2	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\boxed{\frac{1}{9}}$	$\boxed{\frac{2}{9}}$	$\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{2}{9}}$	$\frac{1}{9}$	1

답 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{9}$

06 $E(X)=100$, $V(X)=36$, $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{36}=6$이고 표본의 크기가 9이므로

(1) $E(\overline{X})=E(X)=100$

(2) $V(\overline{X})=\frac{V(X)}{9}=\frac{36}{9}=4$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{9}}=\frac{6}{\sqrt{9}}=2$ ← 또는 $\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\sqrt{4}=2$

답 (1) 100 (2) 4 (3) 2

07 $E(X)=40$, $V(X)=20^2=400$, $\sigma(X)=20$이고 표본의 크기가 25이므로

(1) $E(\overline{X})=E(X)=40$

(2) $V(\overline{X})=\frac{V(X)}{25}=\frac{400}{25}=16$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{25}}=\frac{20}{\sqrt{25}}=4$

답 (1) 40 (2) 16 (3) 4

08 모집단이 정규분포 $N(70,\ 18^2)$을 따르므로 크기가 36인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(70,\ \frac{18^2}{36}\right)$, 즉 $N(70,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-70}{3}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

(1) $P(\overline{X}\le 67)=P\left(\frac{\overline{X}-70}{3}\le\frac{67-70}{3}\right)$
$=P(Z\le -1)$
$=P(Z\ge 1)$
$=0.5-P(0\le Z\le 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$

(2) $P(64\le\overline{X}\le 77.5)=P\left(\frac{64-70}{3}\le\frac{\overline{X}-70}{3}\le\frac{77.5-70}{3}\right)$
$=P(-2\le Z\le 2.5)$
$=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2.5)$
$=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 2.5)$
$=0.4772+0.4938=0.9710$

(3) $P(\overline{X}\ge 65.5)=P\left(\frac{\overline{X}-70}{3}\ge\frac{65.5-70}{3}\right)$
$=P(Z\ge -1.5)$
$=P(Z\le 1.5)$
$=0.5+P(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5+0.4332=0.9332$

답 (1) 0.1587 (2) 0.9710 (3) 0.9332

09 (1) $80-1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le 80+1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}$
$\therefore\ 76.08\le m\le 83.92$

(2) $2\times 1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}=7.84$

답 (1) $76.08\le m\le 83.92$ (2) 7.84

다른풀이 (2) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $76.08\le m\le 83.92$이므로 신뢰구간의 길이는 $83.92-76.08=7.84$

10 표본의 크기 144는 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차의 값 36을 사용할 수 있다.

(1) $120-2.58\times\frac{36}{\sqrt{144}}\le m\le 120+2.58\times\frac{36}{\sqrt{144}}$
$\therefore\ 112.26\le m\le 127.74$

(2) $2\times 2.58\times\frac{36}{\sqrt{144}}=15.48$

답 (1) $112.26\le m\le 127.74$ (2) 15.48

다른풀이 (2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $112.26\le m\le 127.74$이므로 신뢰구간의 길이는 $127.74-112.26=15.48$

11 (1) $p=\frac{2500}{25000}=0.1$

(2) $\hat{p}=\frac{42}{400}=0.105$

답 (1) 0.1 (2) 0.105

12 (1) $E(\hat{p})=p=0.4$

(2) $V(\hat{p})=\frac{0.4\times 0.6}{600}=0.0004$

(3) $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.4\times 0.6}{600}}=0.02$

답 (1) 0.4 (2) 0.0004 (3) 0.02

다른풀이 (3) $\sigma(\hat{p})=\sqrt{V(\hat{p})}=\sqrt{0.0004}=0.02$

13 이 고등학교 학생 중 현장 체험학습에 참여한 경험이 있는 학생의 비율 p는 $p=\frac{20}{100}=0.2$

(1) $E(\hat{p})=p=0.2$

(2) $V(\hat{p})=\frac{0.2\times 0.8}{100}=0.0016$

(3) $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{100}}=0.04$

답 (1) 0.2 (2) 0.0016 (3) 0.04

14 (1) $E(\hat{p})=p=0.1,\ V(\hat{p})=\frac{0.1\times 0.9}{900}=0.0001=0.01^2$이고
$np=900\times 0.1=90\ge 5$,
$nq=900\times 0.9=810\ge 5\ (q=1-p)$
로 n의 값이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.1,\ 0.01^2)$을 따른다.

(2) $E(\hat{p})=p=\frac{1}{3},\ V(\hat{p})=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{18}=\frac{1}{81}=\left(\frac{1}{9}\right)^2$이고
$np=18\times\frac{1}{3}=6\ge 5,\ nq=18\times\frac{2}{3}=12\ge 5\ (q=1-p)$
로 n의 값이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{1}{3},\ \left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$을 따른다.

답 (1) $N(0.1,\ 0.01^2)$ (2) $N\left(\frac{1}{3},\ \left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$

15 75는 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.25,\ \frac{0.25\times 0.75}{75}\right)$, 즉 $N(0.25,\ 0.05^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.25}{0.05}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

(1) $P(\hat{p}\ge 0.35)=P\left(\frac{\hat{p}-0.25}{0.05}\ge\frac{0.35-0.25}{0.05}\right)$
$=P(Z\ge 2)$
$=0.5-P(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772$
$=0.0228$

(2) $\mathrm{P}(0.275 \le \hat{p} \le 0.325)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{0.275-0.25}{0.05} \le \frac{\hat{p}-0.25}{0.05} \le \frac{0.325-0.25}{0.05}\right)$

$=\mathrm{P}(0.5 \le Z \le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$

$=0.4332-0.1915$

$=0.2417$

답 (1) 0.0228 (2) 0.2417

16 (1) $0.3-2.58\times\sqrt{\frac{0.3\times0.7}{21}} \le p \le 0.3+2.58\times\sqrt{\frac{0.3\times0.7}{21}}$

$\therefore 0.042 \le p \le 0.558$

(2) $2\times2.58\times\sqrt{\frac{0.3\times0.7}{21}}=0.516$

답 (1) $0.042 \le p \le 0.558$ (2) 0.516

다른풀이 (2) 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $0.042 \le p \le 0.558$이므로 신뢰구간의 길이는 $0.558-0.042=0.516$

17 임의추출한 환자 100명 중 처음 내원 당시 체온이 37 ℃ 이상이었던 환자의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\frac{50}{100}=0.5$이므로 이 대학병원 전체 환자 중 처음 내원 당시 체온이 37 ℃ 이상이었던 환자의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.5-1.96\times\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{100}} \le p \le 0.5+1.96\times\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{100}}$

$\therefore 0.402 \le p \le 0.598$ 답 $0.402 \le p \le 0.598$

기출 Best | 1회 p.94~97

01 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$는

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

$\overline{X}=2$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)$

$=\mathrm{P}(X_1=1, X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2, X_2=2)+\mathrm{P}(X_1=3, X_2=1)$

$=2\mathrm{P}(X_1=1, X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2, X_2=2)$

$=2\mathrm{P}(X_1=1)\mathrm{P}(X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2)\mathrm{P}(X_2=2)$

$=2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ 답 ①

02 확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a=1$, $6a=1$ $\therefore a=\frac{1}{6}$

X	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이고 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5

이때 $\overline{X}=5$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면 $(5, 5)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=5)=\mathrm{P}(X_1=5, X_2=5)$

$=\mathrm{P}(X_1=5)\mathrm{P}(X_2=5)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}\le4)=1-\mathrm{P}(\overline{X}=5)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 답 ④

03 $\mathrm{E}(X)=30$, $\mathrm{V}(X)=6^2$이고 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=30$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=\frac{6^2}{4}=9$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{X})=30+9=39$ 답 ⑤

04 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+a+\frac{1}{4}=1$ $\therefore a=\frac{5}{12}$

X	-2	0	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)=-2\times\frac{1}{3}+0\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=-\frac{1}{6}$

$\therefore a+\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{5}{12}+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{4}$ 답 ③

05 상자 안에는 $6+4+2=12$(개)의 공이 들어 있으므로 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{6}{12}+1\times\frac{4}{12}+2\times\frac{2}{12}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{6}{12}+1^2\times\frac{4}{12}+2^2\times\frac{2}{12}=1$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\overline{X}$는 표본의 크기가 n일 때의 표본평균이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{5}{9n}$

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{9}$이므로

$\frac{5}{9n}=\frac{1}{9}$ $\therefore n=5$ 답 ②

06 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, 20^2)$을 따르므로 크기가 25인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{20^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 6)&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{4}\right|\le 1.5\right)\\&=\mathrm{P}(|Z|\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=2\times 0.4332\\&=0.8664\end{aligned}$$

답 ④

참고 양수 k에 대하여 $|ka|=k|a|$이므로

$$\left|\frac{\overline{X}-m}{4}\right|=\frac{|\overline{X}-m|}{4}$$

07 이 음식점을 방문한 고객 한 명당 식사 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 16^2)$을 따르므로 임의추출한 고객 64명의 식사 시간의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \frac{16^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-50}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 52)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-50}{2}\ge\frac{52-50}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 ④

08 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 44^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \frac{44^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(200,\ \left(\frac{44}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-200}{\frac{44}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 196)=0.8413$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 196)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-200}{\frac{44}{\sqrt{n}}}\ge\frac{196-200}{\frac{44}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{\sqrt{n}}{11}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\sqrt{n}}{11}\right)\\&=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{11}\right)=0.8413\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{11}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{11}=1,\ \sqrt{n}=11$

$\therefore\ n=121$

답 ②

09 이 지역의 만 6세 어린이의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(115,\ 5^2)$을 따르므로 임의추출한 만 6세 어린이 100명의 키의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(115,\ \frac{5^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(115,\ 0.5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-115}{0.5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)=0.0228$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-115}{0.5}\ge\frac{k-115}{0.5}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-115}{0.5}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-115}{0.5}\right)\\&=0.0228\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-115}{0.5}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로 $\frac{k-115}{0.5}=2$

$k-115=1\qquad\therefore\ k=116$

답 ⑤

10 표본평균의 값이 225, 모표준편차가 30, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$225-1.96\times\frac{30}{\sqrt{36}}\le m\le 225+1.96\times\frac{30}{\sqrt{36}}$

$\therefore\ 215.2\le m\le 234.8$

답 ①

11 표본평균의 값이 172, 표본표준편차의 값이 12이고 표본의 크기가 144로 충분히 크므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$172-2.58\times\frac{12}{\sqrt{144}}\le m\le 172+2.58\times\frac{12}{\sqrt{144}}$

$\therefore\ 169.42\le m\le 174.58$

답 ③

참고 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본표준편차 S의 값 s는 모표준편차 σ와 큰 차이가 없음이 알려져 있다.
따라서 모표준편차 σ를 모르는 경우 n이 충분히 크면 σ 대신 s를 이용하여 신뢰구간을 구할 수 있다.

12 표본평균의 값이 $\overline{x}$, 모표준편차가 18, 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{18}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{18}{\sqrt{n}}$

이것이 $194.12\le m\le 205.88$과 일치하므로

$\overline{x}-1.96\times\frac{18}{\sqrt{n}}=194.12,\ \overline{x}+1.96\times\frac{18}{\sqrt{n}}=205.88$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\overline{x}=200,\ n=36$

$\therefore\ \overline{x}+n=200+36=236$

답 ⑤

13 $b-a$는 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times 2.58\times\frac{22}{\sqrt{121}}=10.32$

답 ④

다른풀이 모표준편차가 22이고, 표본의 크기가 121일 때 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{22}{\sqrt{121}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{22}{\sqrt{121}}$

$\therefore\ \overline{x}-5.16\le m\le\overline{x}+5.16$

따라서 $a=\overline{x}-5.16$, $b=\overline{x}+5.16$이므로

$b-a=(\overline{x}+5.16)-(\overline{x}-5.16)=10.32$

14 $b-a$는 모표준편차가 2.5, 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times1.96\times\frac{2.5}{\sqrt{n}}=\frac{9.8}{\sqrt{n}}$

이때 $b-a\le1$에서 $\frac{9.8}{\sqrt{n}}\le1$

$\sqrt{n}\ge9.8\qquad\therefore\ n\ge96.04$

따라서 자연수 n의 최솟값은 97이다. 답 ②

15 $b-a$는 모표준편차가 10, 표본의 크기가 16일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면

$b-a=2k\times\frac{10}{\sqrt{16}}=5k$

이때 $b-a=9.4$이므로

$5k=9.4\qquad\therefore\ k=1.88$

$\therefore\ \alpha=100\mathrm{P}(|Z|\le k)$

$=100\mathrm{P}(|Z|\le1.88)$

$=100\mathrm{P}(-1.88\le Z\le1.88)$

$=100\times2\mathrm{P}(0\le Z\le1.88)$

$=100\times2\times0.47=94$ 답 ③

16 표본평균의 값이 $\overline{x}$, 모표준편차가 2이고, 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$

$\overline{x}-\frac{3.92}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+\frac{3.92}{\sqrt{n}}$, $-\frac{3.92}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{3.92}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le\frac{3.92}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|$의 값이 0.49 이하이어야 하므로

$\frac{3.92}{\sqrt{n}}\le0.49$

$\sqrt{n}\ge8\qquad\therefore\ n\ge64$

따라서 자연수 n의 최솟값은 64이다. 답 ④

17 $b-a$는 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면

$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. σ의 값이 커지면 $b-a$의 값도 커진다. (참)

ㄴ. n의 값이 커지면 $b-a$의 값은 작아진다. (거짓)

ㄷ. α의 값이 커지면 k의 값이 커지므로 $b-a$의 값도 커진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

18 모비율 p는 $p=0.45$

임의추출한 99명의 유권자 중 대통령을 지지하는 유권자의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 99는 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.45,\ \frac{0.45\times0.55}{99}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.45,\ 0.05^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.45}{0.05}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\hat{p}\le0.5)=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-0.45}{0.05}\le\frac{0.5-0.45}{0.05}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le1)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.5+0.3413$

$=0.8413$ 답 ④

19 임의추출한 단추 100개 중 불량품의 비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{10}{100}=0.1$

표본의 크기는 100이므로 이 공장에서 생산하는 전체 단추 중 불량품의 비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.1-2.58\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}\le p\le0.1+2.58\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}$

$\therefore\ 0.0226\le p\le0.1774$ 답 ②

20 임의추출한 학생 n명 중 버스를 이용하여 등교하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.75$

$b-a$는 표본의 크기가 n일 때 이 학교 전체 학생 중 버스를 이용하여 등교하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times2.58\times\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}=1.29\sqrt{\frac{3}{n}}$

이때 $b-a\le0.43$에서 $1.29\sqrt{\frac{3}{n}}\le0.43$

$\sqrt{n}\ge3\sqrt{3}\qquad\therefore\ n\ge27$

따라서 자연수 n의 최솟값은 27이다. 답 ③

기출 Best | 2회

p.98~101

01 크기가 3인 표본을 X_1, X_2, X_3이라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$는

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

$\overline{X}=2$인 경우는 X_1, X_2, X_3의 값이 1, 2, 3 중 서로 다른 하나씩이거나 $X_1=X_2=X_3=2$인 경우이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)$

$=3!\times\mathrm{P}(X_1=1,\ X_2=2,\ X_3=3)+\mathrm{P}(X_1=2,\ X_2=2,\ X_3=2)$

$=3!\times\mathrm{P}(X_1=1)\mathrm{P}(X_2=2)\mathrm{P}(X_3=3)$

$\qquad+\mathrm{P}(X_1=2)\mathrm{P}(X_2=2)\mathrm{P}(X_3=2)$

$=6\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{64}$ 답 ③

참고 $\overline{X}=2$인 경우를 X_1, X_2, X_3의 순서쌍 (X_1, X_2, X_3)으로 나타내면

$(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$,

$(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$

02 확률의 총합은 1이므로

$4a+a+5a=1$, $10a=1$ $\qquad\therefore a=\frac{1}{10}$

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1

크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$는

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이고 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3

이때 $\overline{X}=1$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면 $(1, 1)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(X_1=1,\ X_2=1)$

$=\mathrm{P}(X_1=1)\mathrm{P}(X_2=1)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

$\overline{X}=\frac{3}{2}$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면

$(1, 2)$, $(2, 1)$이므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}(X_1=1,\ X_2=2)+\mathrm{P}(X_1=2,\ X_2=1)$

$=2\mathrm{P}(X_1=1,\ X_2=2)$

$=2\mathrm{P}(X_1=1)\mathrm{P}(X_2=2)$

$=2\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{25}$

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}\ge 2)=1-\left\{\mathrm{P}(\overline{X}=1)+\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)\right\}$

$=1-\left(\frac{4}{25}+\frac{2}{25}\right)=\frac{19}{25}$ 답 ①

03 $\mathrm{E}(X)=50$, $\sigma(X)=12$이고 표본의 크기가 9이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=50$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{9}}=\frac{12}{\sqrt{9}}=4$

$\therefore \mathrm{E}(2\overline{X}-1)+\sigma(2\overline{X}-1)=\{2\mathrm{E}(\overline{X})-1\}+|2|\sigma(\overline{X})$

$=(2\times 50-1)+2\times 4$

$=107$ 답 ④

04 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+a+b=1$ $\qquad\therefore a+b=\frac{2}{3}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또

$\mathrm{E}(X)=-3\times\frac{1}{3}+0\times a+3\times b=3b-1$

이고, $\mathrm{E}(1-2\overline{X})=2$에서

$1-2\mathrm{E}(\overline{X})=2$, $-2\mathrm{E}(\overline{X})=1$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=-\frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=-\frac{1}{2}$이므로

$3b-1=-\frac{1}{2}$, $3b=\frac{1}{2}$ $\qquad\therefore b=\frac{1}{6}$

$b=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ $\qquad\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}=3$ 답 ⑤

05 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{6}+2\times\frac{3}{6}+4\times\frac{1}{6}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{2}{6}+2^2\times\frac{3}{6}+4^2\times\frac{1}{6}=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-2^2=1$

$\overline{X}$는 표본의 크기가 n일 때의 표본평균이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{1}{n}$

이때 $\mathrm{V}(4\overline{X})=\frac{4}{7}$에서 $4^2\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{7}$, 즉 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{28}$이므로

$\frac{1}{n}=\frac{1}{28}$ $\qquad\therefore n=28$ 답 ④

06 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 36^2)$을 따르므로 크기가 81인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{36^2}{81}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 표본평균과 모평균의 차가 10 이상일 확률은

$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\ge 10)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{4}\right|\ge 2.5\right)$

$=\mathrm{P}(|Z|\ge 2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\le -2.5$ 또는 $Z\ge 2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\le -2.5)+\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$

$=2\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$

$=2\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\}$

$=2(0.5-0.4938)$

$=0.0124$ 답 ②

07 마라톤 대회에 참가한 선수의 기록을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 6^2)$을 따르므로 임의추출한 선수 144명의 기록의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\ \frac{6^2}{144}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(30,\ 0.5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-30}{0.5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(30.5\le\overline{X}\le31)&=\mathrm{P}\left(\frac{30.5-30}{0.5}\le\frac{\overline{X}-30}{0.5}\le\frac{31-30}{0.5}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

답 ①

08 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 15^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(150,\ \frac{15^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(150,\ \left(\frac{15}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-150}{\frac{15}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{435}{\sqrt{n}}\right)=0.1587$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{435}{\sqrt{n}}\right)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-150}{\frac{15}{\sqrt{n}}}\le\frac{\frac{435}{\sqrt{n}}-150}{\frac{15}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le29-10\sqrt{n})\\&=\mathrm{P}(Z\ge-29+10\sqrt{n})\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le-29+10\sqrt{n})\\&=0.1587\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le-29+10\sqrt{n})=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$-29+10\sqrt{n}=1,\ 10\sqrt{n}=30$

$\sqrt{n}=3\qquad\therefore\ n=9$

답 ②

09 이 공장에서 만든 토끼 인형의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(130,\ 16^2)$을 따르므로 임의추출한 토끼 인형 400개의 무게의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(130,\ \frac{16^2}{400}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(130,\ 0.8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-130}{0.8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le k)\ge0.0668$에서 $k<130$일 때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le k)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-130}{0.8}\le\frac{k-130}{0.8}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-130}{0.8}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{k-130}{0.8}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le-\frac{k-130}{0.8}\right)\ge0.0668\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le-\frac{k-130}{0.8}\right)\le0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

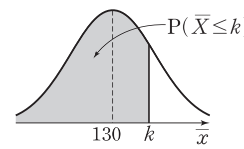
$-\frac{k-130}{0.8}\le1.5,\ k-130\ge-1.2$

$\therefore\ k\ge128.8$

따라서 자연수 k의 최솟값은 129이다.

답 ⑤

참고 $k\ge130$이면 $\mathrm{P}(\overline{X}\le k)\ge0.5$이므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le k)\ge0.0668$을 항상 만족시킨다.



10 표본평균의 값이 200, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$200-2.58\times\frac{10}{\sqrt{36}}\le m\le200+2.58\times\frac{10}{\sqrt{36}}$

$\therefore\ 195.7\le m\le204.3$

답 ③

11 표본평균의 값이 290, 표본표준편차의 값이 30이고 표본의 크기가 49로 충분히 크므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$290-1.96\times\frac{30}{\sqrt{49}}\le m\le290+1.96\times\frac{30}{\sqrt{49}}$

$\therefore\ 281.6\le m\le298.4$

따라서 자연수 m은 282, 283, 284, …, 298의 17개이다.

답 ④

12 표본평균의 값이 $\overline{x}$, 모표준편차가 40, 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{40}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{40}{\sqrt{n}}$

이것이 $53.55\le m\le66.45$와 일치하므로

$\overline{x}-2.58\times\frac{40}{\sqrt{n}}=53.55,\ \overline{x}+2.58\times\frac{40}{\sqrt{n}}=66.45$

두 식을 연립하여 풀면

$\overline{x}=60,\ n=256$

$\therefore\ \overline{x}+n=60+256=316$

답 ⑤

13 $b-a$는 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times1.96\times\frac{30}{\sqrt{36}}=19.6$

답 ②

다른풀이 모표준편차가 30이고, 표본의 크기가 36일 때 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{30}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{30}{\sqrt{36}}$

$\therefore\ \overline{x}-9.8\le m\le\overline{x}+9.8$

즉 $a=\overline{x}-9.8,\ b=\overline{x}+9.8$이므로

$b-a=(\overline{x}+9.8)-(\overline{x}-9.8)=19.6$

14 $b-a$는 모표준편차가 5, 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{25.8}{\sqrt{n}}$

이때 $3\le b-a\le6$에서 $3\le\frac{25.8}{\sqrt{n}}\le6$

$\frac{1}{6}\le\frac{\sqrt{n}}{25.8}\le\frac{1}{3}$, $4.3\le\sqrt{n}\le8.6$

$\therefore 18.49\le n\le73.96$

따라서 자연수 n은 19, 20, 21, ..., 73의 55개이다. 답 ④

15 $b-a$는 모표준편차가 8, 표본의 크기가 16일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면

$b-a=2k\times\frac{8}{\sqrt{16}}=4k$

이때 $b-a=8.2$이므로

$4k=8.2 \quad \therefore k=2.05$

$\therefore \alpha=100\mathrm{P}(|Z|\le k)$
$=100\mathrm{P}(|Z|\le2.05)$
$=100\mathrm{P}(-2.05\le Z\le2.05)$
$=100\times2\mathrm{P}(0\le Z\le2.05)$
$=100\times2\times0.48=96$ 답 ④

16 표본평균의 값이 $\bar{x}$, 모표준편차가 15이고, 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-2.58\times\frac{15}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+2.58\times\frac{15}{\sqrt{n}}$

$\bar{x}-\frac{38.7}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+\frac{38.7}{\sqrt{n}}$, $-\frac{38.7}{\sqrt{n}}\le m-\bar{x}\le\frac{38.7}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\bar{x}|\le\frac{38.7}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\bar{x}|$의 값이 12.9 이하이어야 하므로

$\frac{38.7}{\sqrt{n}}\le12.9$, $\sqrt{n}\ge3$

$\therefore n\ge9$

따라서 자연수 n의 최솟값은 9이다. 답 ②

17 표본의 크기가 n일 때 표본평균의 값이 $\bar{x}$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$\bar{x}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore a=\bar{x}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $b=\bar{x}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. $a+b=\left(\bar{x}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)+\left(\bar{x}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\bar{x}$ (참)

ㄴ. $b-a=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
이므로 n의 값이 작아지면 $b-a$의 값은 커진다. (참)

ㄷ. α의 값이 커지면 k의 값도 커지므로 σ와 α의 값이 모두 커지면 $b-a$의 값도 커진다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

18 모비율 p는 $p=0.6$

임의추출한 학생 150명 중 A 도서관을 이용한 경험이 있는 학생의 비율을 표본비율 $\hat{p}$이라 하면 150은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.6,\ \frac{0.6\times0.4}{150}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.6,\ 0.04^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.6}{0.04}$으로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 임의추출한 학생 150명 중 A 도서관을 이용한 경험이 있는 학생이 84명 이상일 확률은

$\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{84}{150}\right)=\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.56)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-0.6}{0.04}\ge\frac{0.56-0.6}{0.04}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge-1)$
$=\mathrm{P}(Z\le1)$
$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.5+0.3413$
$=0.8413$ 답 ②

다른풀이 임의추출한 학생 150명 중 A 도서관을 이용한 경험이 있는 학생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(150,\ 0.6)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=150\times0.6=90$, $\mathrm{V}(X)=150\times0.6\times0.4=36$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-90}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 임의추출한 학생 150명 중 A 도서관을 이용한 경험이 있는 학생이 84명 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X\ge84)=\mathrm{P}\left(\frac{X-90}{6}\ge\frac{84-90}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge-1)$
$=\mathrm{P}(Z\le1)$
$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.5+0.3413$
$=0.8413$

19 임의추출한 직원 300명 중 병가 사용 경험이 있는 직원의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\frac{75}{300}=0.25$

표본의 크기는 300이므로 이 회사 전체 직원 중 병가 사용 경험이 있는 직원의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.25-1.96\times\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}\le p\le0.25+1.96\times\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}$

$\therefore 0.201\le p\le0.299$ 답 ①

20 임의추출한 고객 n명 중 탕수육을 주문한 고객의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.1$

$b-a$는 표본의 크기가 n일 때 이 중국집 전체 고객 중 탕수육을 주문한 고객의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이이므로

$$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}=\frac{1.176}{\sqrt{n}}$$

이때 $b-a\leq0.0588$에서 $\frac{1.176}{\sqrt{n}}\leq0.0588$

$\sqrt{n}\geq20 \qquad \therefore n\geq400$

따라서 자연수 n의 최솟값은 400이다. 답 ③

변형유형 집중공략

p.102~103

1-1 음료 한 캔의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 12^2)$을 따르므로 임의추출한 음료 4캔의 용량의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \frac{12^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(200,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-200}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 사과맛 음료 한 세트의 용량은 $4\overline{X}$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(776\leq4\overline{X}\leq812)\\
&=\mathrm{P}(194\leq\overline{X}\leq203)\\
&=\mathrm{P}\left(\frac{194-200}{6}\leq\frac{\overline{X}-200}{6}\leq\frac{203-200}{6}\right)\\
&=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq0.5)\\
&=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq0.5)\\
&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq0.5)\\
&=0.3413+0.1915=0.5328
\end{aligned}$$

답 ②

1-2 7시간=420분

따라서 이 학교 학생 한 명의 일일 수면 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(420,\ 30^2)$을 따르므로 임의추출한 학생 25명의 일일 수면 시간의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(420,\ \frac{30^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(420,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-420}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 임의추출한 학생 25명의 수면 시간의 총합은 $25\overline{X}$이므로 이 25명의 일일 수면 시간의 총합이 $\underbrace{180\text{시간}}_{10800\text{분}}$ 이상일 확률은

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(25\overline{X}\geq10800)&=\mathrm{P}(\overline{X}\geq432)\\
&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-420}{6}\geq\frac{432-420}{6}\right)\\
&=\mathrm{P}(Z\geq2)\\
&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)\\
&=0.5-0.4772=0.0228
\end{aligned}$$

답 ①

참고 7(시간)$=7\times60$(분)$=420$(분)

180(시간)$=180\times60$(분)$=10800$(분)

2-1 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 표본의 크기가 n일 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(m-8\leq\overline{X}\leq m+8)=0.6826$에서

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(m-8\leq\overline{X}\leq m+8)\\
&=\mathrm{P}\left(\frac{(m-8)-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leq\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leq\frac{(m+8)-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\\
&=\mathrm{P}\left(-\frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leq Z\leq\frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\\
&=\mathrm{P}\left(-\frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leq Z\leq0\right)+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\\
&=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\\
&=2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.6826
\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)=0.3413$이므로

$\frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=1 \qquad \therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=8 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

표본평균 $\overline{X}$의 값이 30일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$30-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq m\leq30+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$30-2.58\times8\leq m\leq30+2.58\times8$ ($\because$ ㉠)

$\therefore 9.36\leq m\leq50.64$ 답 ①

2-2 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 표본의 크기가 n일 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\geq m+4)=0.0668$에서

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\overline{X}\geq m+4)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\geq\frac{(m+4)-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\\
&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{4}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)
\end{aligned}$$

$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{4}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=0.0668$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{4}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{4}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=1.5 \quad \therefore \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{8}{3}$ …… ㉠

크기가 $4n$인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\bar{x}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}\le m\le \bar{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$$

$$\bar{x}-2.58\times\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+2.58\times\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}$$

$$\bar{x}-2.58\times\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\le m\le \bar{x}+2.58\times\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\ (\because ㉠)$$

$\therefore \bar{x}-3.44\le m\le \bar{x}+3.44$

이때 $\bar{x}$가 정수이므로 신뢰구간에 속하는 정수는

$\bar{x}-3,\ \bar{x}-2,\ \bar{x}-1,\ \dots,\ \bar{x}+3$

의 7개이다.

답 7

서술형 What & How

p.104~105

1 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 할 때, 표본평균 $\bar{X}$는

$\bar{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$이고 $\bar{X}$가 가질 수 있는 값은 $1,\ \dfrac{3}{2},\ 2,\ \dfrac{5}{2},\ 3,\ \dfrac{7}{2},$ 4이므로

$$\mathrm{P}(\bar{X}^2-6\bar{X}+8=0)=\mathrm{P}((\bar{X}-2)(\bar{X}-4)=0)$$
$$=\mathrm{P}(\bar{X}=2 \text{ 또는 } \bar{X}=4)$$
$$=\mathrm{P}(\bar{X}=2)+\mathrm{P}(\bar{X}=4)$$ …… ❶

$\bar{X}=2$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$로 나타내면

$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$이므로

$\mathrm{P}(\bar{X}=2)$

$=\mathrm{P}(X_1=1,\ X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2,\ X_2=2)+\mathrm{P}(X_1=3,\ X_2=1)$

$=2\mathrm{P}(X_1=1,\ X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2,\ X_2=2)$

$=2\mathrm{P}(X_1=1)\mathrm{P}(X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2)\mathrm{P}(X_2=2)$

$=2\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}$

$=\dfrac{19}{100}$ …… ❷

$\bar{X}=4$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$로 나타내면

$(4,\ 4)$이므로

$$\mathrm{P}(\bar{X}=4)=\mathrm{P}(X_1=4,\ X_2=4)$$
$$=\mathrm{P}(X_1=4)\mathrm{P}(X_2=4)$$
$$=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$$ …… ❸

$$\therefore \mathrm{P}(\bar{X}^2-6\bar{X}+8=0)=\mathrm{P}(\bar{X}=2)+\mathrm{P}(\bar{X}=4)$$
$$=\frac{19}{100}+\frac{1}{100}=\frac{1}{5}$$

따라서 $A=\dfrac{1}{5}$이므로

$100A=100\times\dfrac{1}{5}=20$ …… ❹

답 20

2 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 할 때, 표본평균 $\bar{X}$는

$\bar{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$이고 $\bar{X}$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, …, 7이므로

$$\mathrm{P}(\bar{X}^2-13\bar{X}+40\ge 0)=\mathrm{P}((\bar{X}-5)(\bar{X}-8)\ge 0)$$
$$=\mathrm{P}(\bar{X}\le 5 \text{ 또는 } \bar{X}\ge 8)$$
$$=\mathrm{P}(\bar{X}\le 5)\ (\because \bar{X}\le 7)$$
$$=1-\{\mathrm{P}(\bar{X}=6)+\mathrm{P}(\bar{X}=7)\}$$ …… ❶

$\bar{X}=6$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$로 나타내면

$(5,\ 7),\ (7,\ 5)$이므로

$\mathrm{P}(\bar{X}=6)$

$=\mathrm{P}(X_1=5,\ X_2=7)+\mathrm{P}(X_1=7,\ X_2=5)$

$=2\mathrm{P}(X_1=5,\ X_2=7)$

$=2\mathrm{P}(X_1=5)\mathrm{P}(X_2=7)$

$=2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{16}$ …… ❷

$\bar{X}=7$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$로 나타내면

$(7,\ 7)$이므로

$$\mathrm{P}(\bar{X}=7)=\mathrm{P}(X_1=7,\ X_2=7)$$
$$=\mathrm{P}(X_1=7)\mathrm{P}(X_2=7)$$
$$=\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$$ …… ❸

$$\therefore \mathrm{P}(\bar{X}^2-13\bar{X}+40\ge 0)=1-\{\mathrm{P}(\bar{X}=6)+\mathrm{P}(\bar{X}=7)\}$$
$$=1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)=\frac{59}{64}$$

따라서 $A=\dfrac{59}{64}$이므로

$64A=64\times\dfrac{59}{64}=59$ …… ❹

답 59

채점기준	배점
❶ A를 $1-\{\mathrm{P}(\bar{X}=6)+\mathrm{P}(\bar{X}=7)\}$로 나타내기	2
❷ $\mathrm{P}(\bar{X}=6)$의 값 구하기	2
❸ $\mathrm{P}(\bar{X}=7)$의 값 구하기	2
❹ $64A$의 값 구하기	1

3 표본평균의 값은

$\dfrac{-3+1+4+(-2)+0+1+3+4}{8}=1$ …… ❶

이 표본평균의 값을 이용하여 추정한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$1-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}\le m\le 1+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}$ ...... ❷

이것이 $0.02\le m\le 1.98$과 일치하므로

$1-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}=0.02,\ 1+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}=1.98$

$1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}=0.98 \qquad \therefore \sigma=\sqrt{2}$

$\therefore \sigma^2=2$ ...... ❸

답 2

4 표본평균의 값은

$\frac{10+16+14+12+15+12+14+11+13}{9}=13$ ...... ❶

이 표본평균의 값을 이용하여 추정한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$13-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9}}\le m\le 13+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9}}$

$\therefore 13-0.86\sigma\le m\le 13+0.86\sigma$ ...... ❷

이것이 $9.56\le m\le 16.44$와 일치하므로

$13-0.86\sigma=9.56,\ 13+0.86\sigma=16.44$

$0.86\sigma=3.44 \qquad \therefore \sigma=4$ ...... ❸

답 4

채점기준	배점
❶ 표본평균의 값 구하기	2
❷ 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간 나타내기	2
❸ σ의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.106~110

01 ①, ②, ④, ⑤ 표본조사가 더 적합하다.
따라서 전수조사가 더 적합한 것은 ③이다.

답 ③

02 $\bar{x}=\frac{3+3+6+8}{4}=5$

$s^2=\frac{(3-5)^2+(3-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2}{4-1}=6$

$\therefore \bar{x}+s^2=5+6=11$

답 ④

03 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

크기가 3인 표본을 $X_1,\ X_2,\ X_3$이라 할 때, 표본평균 $\bar{X}$는

$\bar{X}=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$이고 $\bar{X}$가 가질 수 있는 값은

$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2$

이때 $\bar{X}=2$인 경우는 $X_1=X_2=X_3=2$인 경우이므로

$P(\bar{X}=2)=P(X_1=2,\ X_2=2,\ X_3=2)$

$=P(X_1=2)P(X_2=2)P(X_3=2)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$

$\therefore P(\bar{X}<2)=1-P(\bar{X}=2)=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$

답 ⑤

04 $E(X)=10,\ \sigma(X)=\sigma$이고 표본의 크기가 36이므로

$E(\bar{X})=E(X)=10,\ \sigma(\bar{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{36}}=\frac{\sigma}{6}$

이때 $\sigma(\bar{X})=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{\sigma}{6}=\frac{1}{2} \qquad \therefore \sigma=3$

$\therefore E(\bar{X})+\sigma^2=10+3^2=19$

답 ①

05 $E(X)=11,\ V(X)=4^2=16$이므로

$E(\bar{X})=E(X)=11,\ V(\bar{X})=\frac{V(X)}{n}=\frac{16}{n}$

$\therefore E(\bar{X}^2)=V(\bar{X})+\{E(\bar{X})\}^2=\frac{16}{n}+11^2=\frac{16}{n}+121$

이때 $123\le E(\bar{X}^2)\le 128$에서

$123\le\frac{16}{n}+121\le 128,\ 2\le\frac{16}{n}\le 7$

$\frac{1}{7}\le\frac{n}{16}\le\frac{1}{2} \qquad \therefore \frac{16}{7}\le n\le 8$

따라서 자연수 n은 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+4+5+6+7+8=33$

답 ②

06 확률의 총합은 1이므로

$7a+4a+a=1,\ 12a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{12}$

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

$E(X)=2\times\frac{7}{12}+4\times\frac{4}{12}+6\times\frac{1}{12}=3$

$E(X^2)=2^2\times\frac{7}{12}+4^2\times\frac{4}{12}+6^2\times\frac{1}{12}=\frac{32}{3}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{32}{3}-3^2=\frac{5}{3}$

표본의 크기가 48일 때의 표본평균 $\bar{X}$에 대하여

$V(\bar{X})=\frac{V(X)}{48}=\frac{\frac{5}{3}}{48}=\frac{5}{144}$

$\therefore V\left(\frac{\bar{X}}{a}\right)=V(12\bar{X})=12^2V(\bar{X})$

$=144\times\frac{5}{144}=5$

답 ③

07 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수를 확률변수 Y라 하고 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

$\mathrm{E}(Y)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{3}{6}=\frac{7}{3}$

$\mathrm{E}(Y^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{2}{6}+3^2\times\frac{3}{6}=6$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=6-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

따라서 9번의 시행에서 각각 꺼낸 공에 적힌 9개의 수의 평균을 $\overline{Y}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\mathrm{E}(Y)=\frac{7}{3}$, $\mathrm{V}(\overline{Y})=\frac{\mathrm{V}(Y)}{9}=\frac{\frac{5}{9}}{9}=\frac{5}{81}$

이고, 공에 적힌 9개의 수의 합은 $9\overline{Y}$이므로 $X=9\overline{Y}$

$\therefore \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(9\overline{Y})+\mathrm{V}(9\overline{Y})$

$=9\mathrm{E}(\overline{Y})+9^2\mathrm{V}(\overline{Y})$

$=9\times\frac{7}{3}+81\times\frac{5}{81}=26$ 답 ①

08 구내식당을 이용하는 손님의 점심 식사 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(25,\ 15^2)$을 따르므로 임의추출한 손님 100명의 점심 식사 시간의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(25,\ \frac{15^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(25,\ 1.5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-25}{1.5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 22)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-25}{1.5}\le\frac{22-25}{1.5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -2)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$ 답 ②

09 이 식품회사에서 생산하는 호빵 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 12^2)$을 따르므로 임의추출한 n개의 호빵의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{12^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$와 모평균 m의 차가 2 이하일 확률이 0.9876이 되려면 $\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 2)=0.9876$에서

$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 2)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right|\le\frac{2}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{6}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)$

$=0.9876$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.4938$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{6}=2.5$, $\sqrt{n}=15$ $\quad\therefore n=225$ 답 ⑤

10 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 45^2)$을 따르므로 표본의 크기가 36일 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \frac{45^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(120,\ \left(\frac{15}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z_X=\frac{X-120}{45}$, $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-120}{\frac{15}{2}}$으로 놓으면 Z_X, $Z_{\overline{X}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le k)=0.8413$에서

$\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}\left(\frac{X-120}{45}\le\frac{k-120}{45}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{k-120}{45}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{k-120}{45}\right)$

$=0.8413$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{k-120}{45}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{k-120}{45}=1$, $k-120=45$ $\quad\therefore k=165$

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}\ge k-30)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 135)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-120}{\frac{15}{2}}\ge\frac{135-120}{\frac{15}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$ 답 ③

11 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이므로 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(120,\ 2^2)$을 따른다.

또 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 12^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 64인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이므로 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \frac{12^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(200,\ 1.5^2)$을 따른다.

따라서 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-120}{2}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-200}{1.5}$으로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 110)=\mathrm{P}(\overline{Y}\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-120}{2}\ge\frac{110-120}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-200}{1.5}\le\frac{k-200}{1.5}\right)$

$\mathrm{P}(Z_{\overline{X}} \geq -5)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}} \leq \frac{k-200}{1.5}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(Z_{\overline{X}} \leq 5)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}} \leq \frac{k-200}{1.5}\right)$

즉 $\frac{k-200}{1.5}=5$이므로

$k-200=7.5 \qquad \therefore k=207.5$ 답 ③

12 세계 육상 선수권 400 m 종목에 참가한 선수의 기록을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 4^2)$을 따르므로 임의추출한 선수 25명의 기록의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \frac{4^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(50,\ 0.8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-50}{0.8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 임의추출한 선수 25명의 기록의 총합은 $25\overline{X}$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(25\overline{X} \geq 1270)&=\mathrm{P}(\overline{X} \geq 50.8)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-50}{0.8} \geq \frac{50.8-50}{0.8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z \geq 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 ④

13 모표준편차가 40이므로 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-2.58\times\frac{40}{\sqrt{4}} \leq m \leq \overline{x_1}+2.58\times\frac{40}{\sqrt{4}}$

$\therefore \overline{x_1}-51.6 \leq m \leq \overline{x_1}+51.6$

$\therefore a=\overline{x_1}-51.6,\ b=\overline{x_1}+51.6$

또 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{40}{\sqrt{16}} \leq m \leq \overline{x_2}+2.58\times\frac{40}{\sqrt{16}}$

$\therefore \overline{x_2}-25.8 \leq m \leq \overline{x_2}+25.8$

$\therefore c=\overline{x_2}-25.8,\ d=\overline{x_2}+25.8$

이때 $\overline{x_1}+\overline{x_2}=150$이므로

$$\begin{aligned}b+d&=(\overline{x_1}+51.6)+(\overline{x_2}+25.8)\\&=(\overline{x_1}+\overline{x_2})+77.4\\&=150+77.4=227.4\end{aligned}$$

답 ④

14 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$\mathrm{P}(|Z| \leq k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이를 l이라 하면

$l=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 신뢰구간의 길이 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$에서 k는 신뢰도에 따른 상수이고, n은 표본의 크기, σ는 모표준편차이므로 신뢰구간의 길이는 표본평균의 값과 무관하다. (거짓)

ㄴ. 신뢰도가 높아지면 k의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다. (참)

ㄷ. 신뢰도가 일정하면 k의 값이 일정하므로 표본의 크기가 4배가 되면 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=2k\times\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}l$

즉 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}$배가 된다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 답 ②

15 $\mathrm{P}(|Z| \leq k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 $f(\alpha)=b-a$는 표본의 크기가 400일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이이므로

$f(\alpha)=b-a=2k\times\frac{5}{\sqrt{400}}=\frac{1}{2}k$

이때 $f(\alpha)=1$에서 $\frac{1}{2}k=1$

$\therefore k=2$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha&=100\mathrm{P}(|Z| \leq k)\\&=100\mathrm{P}(|Z| \leq 2)\\&=100\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 2)\\&=100\times2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)\\&=100\times2\times0.48=96\end{aligned}$$

답 ④

다른풀이 $\mathrm{P}(|Z| \leq k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고, 모표준편차가 5인 모집단에서 크기가 400인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$\overline{x}-k\times\frac{5}{\sqrt{400}} \leq m \leq \overline{x}+k\times\frac{5}{\sqrt{400}}$

$\therefore \overline{x}-\frac{1}{4}k \leq m \leq \overline{x}+\frac{1}{4}k$

즉 $a=\overline{x}-\frac{1}{4}k,\ b=\overline{x}+\frac{1}{4}k$이므로

$f(\alpha)=b-a=\left(\overline{x}+\frac{1}{4}k\right)-\left(\overline{x}-\frac{1}{4}k\right)=\frac{1}{2}k$

16 모비율 p는 $p=0.2$

$\hat{p}$은 임의추출한 100명의 수험생 중 과락 이상의 점수를 받은 수험생의 비율이고, 100은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.2,\ \frac{0.2\times0.8}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.04^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\hat{p} \leq k)=0.9332$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\hat{p} \leq k)&=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-0.2}{0.04} \leq \frac{k-0.2}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-0.2}{0.04}\right)\\&=0.5+\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{k-0.2}{0.04}\right)\\&=0.9332\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-0.2}{0.04}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{k-0.2}{0.04}=1.5$, $k-0.2=0.06$

$\therefore k=0.26$

답 ③

17 임의추출한 학생 n명 중 아침 운동을 하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.2$

표본의 크기는 n이므로 이 지역 전체 고등학생 중 아침 운동을 하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.2-1.96\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}} \le p \le 0.2+1.96\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$$

$$\therefore 0.2-\frac{0.784}{\sqrt{n}} \le p \le 0.2+\frac{0.784}{\sqrt{n}}$$

이것이 $0.1608 \le p \le 0.2392$와 일치하므로

$0.2-\frac{0.784}{\sqrt{n}}=0.1608$, $0.2+\frac{0.784}{\sqrt{n}}=0.2392$

$\frac{0.784}{\sqrt{n}}=0.0392$, $\sqrt{n}=20$

$\therefore n=400$

답 ③

18 $\hat{p}=\frac{225}{300}=0.75$, 표본의 크기는 300이므로 이 지역의 만 19세 이상의 전체 성인 중 A사의 휴대전화를 사용하는 비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-2.58\times\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{300}} \le p \le \hat{p}+2.58\times\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{300}}$$

$$-2.58\times\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{300}} \le p-\hat{p} \le 2.58\times\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{300}}$$

$$|p-\hat{p}| \le 2.58\times\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{300}}$$

$\therefore |p-\hat{p}| \le 0.0645$

따라서 $|p-\hat{p}|$의 최댓값은 0.0645이다.

답 ④

19 주머니에는 $4+3+2+1=10$ (개)의 공이 들어 있으므로 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{4}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{2}{10}+4^2\times\frac{1}{10}=5$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-2^2=1$$

이때 표본의 크기 81은 충분히 큰 수이므로 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(2, \frac{1^2}{81}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(2, \left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-2}{\frac{1}{9}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(19 \le 9\overline{X} \le k)=0.1359$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(19 \le 9\overline{X} \le k)&=\mathrm{P}\left(\frac{19}{9} \le \overline{X} \le \frac{k}{9}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{\frac{19}{9}-2}{\frac{1}{9}} \le \frac{\overline{X}-2}{\frac{1}{9}} \le \frac{\frac{k}{9}-2}{\frac{1}{9}}\right)\\&=\mathrm{P}(1 \le Z \le k-18)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le k-18)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le k-18)-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}(0 \le Z \le k-18)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$이므로

$k-18=2$ $\quad\therefore k=20$

답 ②

20 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$라 하면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}\left(|\hat{p}-p| \le \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{2}\right)<0.99$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(|\hat{p}-p| \le \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{2}\right)&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\right| \le \frac{\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{2}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(|Z| \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)<0.99\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}<2.58$

$\sqrt{n}<5.16$ $\quad\therefore n<26.6256$

따라서 자연수 n의 최댓값은 26이다.

답 ④

21 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하면 표본평균 $\overline{X}$는

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

따라서 $\overline{X}=5$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면 $(4, 6)$, $(6, 4)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}=5)&=\mathrm{P}(X_1=4, X_2=6)+\mathrm{P}(X_1=6, X_2=4)\\&=2\mathrm{P}(X_1=4, X_2=6)\\&=2\mathrm{P}(X_1=4)\mathrm{P}(X_2=6)\\&=2b(1-a-b)\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(\overline{X}=5)=\frac{5}{36}$이므로

$2b(1-a-b)=\frac{5}{36}$

$\therefore 72b(1-a-b)=5$ ⋯⋯ ㉠ ⋯⋯ ❶

또 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=4$이므로

$\mathrm{E}(X)=2\times a+4\times b+6\times(1-a-b)$

$\quad=-4a-2b+6=4$

$-4a-2b=-2,\ 2a+b=1$

$\therefore\ b=1-2a$ ...... ㉡ ...... ❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$72(1-2a)\{1-a-(1-2a)\}=5,\ 72a(1-2a)=5$

$144a^2-72a+5=0,\ (12a-1)(12a-5)=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{12}$ 또는 $a=\frac{5}{12}$

이것을 ㉡에 대입하면

$a=\frac{1}{12}$일 때 $b=1-2\times\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$

$a=\frac{5}{12}$일 때 $b=1-2\times\frac{5}{12}=\frac{1}{6}$

그런데 $a<b$이므로 $a=\frac{1}{12},\ b=\frac{5}{6}$ ...... ❸

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	1

$\overline{X}=6$인 경우를 $X_1,\ X_2$의 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$로 나타내면 $(6,\ 6)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=6)=\mathrm{P}(X_1=6,\ X_2=6)$

$\quad=\mathrm{P}(X_1=6)\mathrm{P}(X_2=6)$

$\quad=\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{144}$

따라서 $p=144,\ q=1$이므로

$p+q=144+1=145$ ...... ❹

답 145

채점기준	배점
❶ $\mathrm{P}(\overline{X}=5)=\frac{5}{36}$임을 이용하여 $a,\ b$에 대한 관계식 세우기	2
❷ $\mathrm{E}(\overline{X})=4$임을 이용하여 $a,\ b$에 대한 관계식 세우기	2
❸ $a,\ b$의 값 각각 구하기	2
❹ $p+q$의 값 구하기	2

22 모표준편차가 σ이고, 크기가 n인 표본을 임의추출할 때 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ...... ❶

이것이 $4.26\le m\le 19.74$와 일치하므로

$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=4.26$ ...... ㉠

$\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=19.74$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\overline{x}=24\qquad\therefore\ \overline{x}=12$

$\overline{x}=12$를 ㉠에 대입하면

$12-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=4.26,\ -2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=-7.74$

$\therefore\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=3$ ...... ❷

같은 표본을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$12-1.96\times3\le m\le12+1.96\times3$

$\therefore\ 6.12\le m\le17.88$ ...... ❸

따라서 이 신뢰구간에 속하는 자연수는 7, 8, 9, ..., 17의 11개이다. ...... ❹

답 11

채점기준	배점
❶ 표본의 크기가 n일 때 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하고 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간 나타내기	1
❷ $\overline{x},\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값 각각 구하기	2
❸ 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간 구하기	2
❹ ❸의 신뢰구간에 속하는 자연수의 개수 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.111~115

01 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+2a=1,\ 3a=\frac{3}{4}\qquad\therefore\ a=\frac{1}{4}$

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1

크기가 4인 표본을 $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$는

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$이고 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 $0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{2},\ \dots,\ \frac{11}{4},\ 3$이므로

$\mathrm{P}(0<\overline{X}<3)=1-\{\mathrm{P}(\overline{X}=0)+\mathrm{P}(\overline{X}=3)\}$

이때 $\overline{X}=0$인 경우를 $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$의 순서쌍 $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)$로 나타내면 $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=0)=\mathrm{P}(X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ X_4=0)$

$\quad=\mathrm{P}(X_1=0)\mathrm{P}(X_2=0)\mathrm{P}(X_3=0)\mathrm{P}(X_4=0)$

$\quad=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$

$\overline{X}=3$인 경우를 $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$의 순서쌍 $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)$로 나타내면 $(3,\ 3,\ 3,\ 3)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\mathrm{P}(X_1=3,\ X_2=3,\ X_3=3,\ X_4=3)$

$\quad=\mathrm{P}(X_1=3)\mathrm{P}(X_2=3)\mathrm{P}(X_3=3)\mathrm{P}(X_4=3)$

$\quad=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(0<\overline{X}<3)=1-\{\mathrm{P}(\overline{X}=0)+\mathrm{P}(\overline{X}=3)\}$

$\quad=1-\left(\frac{1}{256}+\frac{1}{16}\right)=\frac{239}{256}$

답 ④

02 확률의 총합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=1\qquad\therefore\ a+b=\frac{3}{8}$ ...... ㉠

$\mathrm{P}(X\geq2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$는

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

$\overline{X}=2$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)$

$=\mathrm{P}(X_1=1,\ X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2,\ X_2=2)+\mathrm{P}(X_1=3,\ X_2=1)$

$=2\mathrm{P}(X_1=1,\ X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2,\ X_2=2)$

$=2\mathrm{P}(X_1=1)\mathrm{P}(X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2)\mathrm{P}(X_2=2)$

$=2\times b\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}$

이때 $\mathrm{P}(X\geq2)=2\mathrm{P}(\overline{X}=2)$이므로

$\frac{5}{8}=2\left(\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}\right)$, $\frac{5}{8}=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}b=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore b=\frac{1}{4}$

$b=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}=2$

답 ④

03 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{1}{3}=150$, $\mathrm{V}(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$

따라서 표본의 크기가 10일 때

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=150$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{10}=\frac{100}{10}=10$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})-\mathrm{V}(\overline{X})=150-10=140$

답 ①

04 확률의 총합은 1이므로

$4a+3a+2a+a=1$, $10a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{10}$

X	1	2	3	k	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+k\times\frac{1}{10}=\frac{k+16}{10}$

한편 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})$이므로 $\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(\overline{X})=5$에서

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{5}{2}$

즉 $\frac{k+16}{10}=\frac{5}{2}$이므로 $k+16=25$ $\quad\therefore k=9$

X	1	2	3	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{4}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{2}{10}+9^2\times\frac{1}{10}=\frac{23}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{23}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{21}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$

이때 표본의 크기가 64이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{64}}=\frac{\frac{\sqrt{21}}{2}}{8}=\frac{\sqrt{21}}{16}$

답 ①

05 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 수를 확률변수 Y라 하고 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\mathrm{E}(Y)=(-2)\times\frac{1}{5}+(-1)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}=0$

$\mathrm{E}(Y^2)=(-2)^2\times\frac{1}{5}+(-1)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}$

$=2$

$\therefore \mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=2-0^2=2$

따라서 n번의 시행에서 꺼낸 공에 적힌 n개의 수의 평균을 $\overline{Y}$라 하면 $\mathrm{V}(\overline{Y})=\frac{\mathrm{V}(Y)}{n}=\frac{2}{n}$이고, n개의 수의 합이 X이므로

$X=n\overline{Y}$

이때 $\mathrm{V}(X)=10$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(n\overline{Y})=n^2\mathrm{V}(\overline{Y})=n^2\times\frac{2}{n}=2n=10$

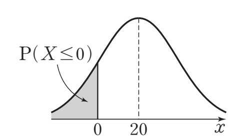
$\therefore n=5$

답 ④

06 ㄱ. 확률변수 X의 평균이 20이므로

$\mathrm{P}(X\leq0)<0.5<\mathrm{P}(X\geq0)$

$\therefore \mathrm{P}(X\leq0)\neq\mathrm{P}(X\geq0)$ (거짓)



ㄴ. $\mathrm{E}(X)=20$, $\sigma(X)=8$이고 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=20$, $\sigma(\overline{X})=\frac{8}{\sqrt{4}}=4$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=20+4=24$ (참)

ㄷ. 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20, 8^2)$을 따르므로 크기가 4인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(20, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z_X=\frac{X-20}{8}$, $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-20}{4}$으로 놓으면 Z_X, $Z_{\overline{X}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\geq24)=\mathrm{P}\left(\frac{X-20}{8}\geq\frac{24-20}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_X\geq0.5)$

$\mathrm{P}(\overline{X}\leq22)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-20}{4}\leq\frac{22-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\leq0.5)$

$\therefore \mathrm{P}(X\geq24)+\mathrm{P}(\overline{X}\leq22)$

$=\mathrm{P}(Z_X\geq0.5)+\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\leq0.5)$

$=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

07 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 표본의 크기가 5일 때의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{5}}\right)^2\right)$, 표본의 크기가 10일 때의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)^2\right)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{Y})=m$ (참)

ㄴ. $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{5}$, $\mathrm{V}(\overline{Y})=\frac{\sigma^2}{10}$이고 $\frac{\sigma^2}{5}>\frac{\sigma^2}{10}$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})>\mathrm{V}(\overline{Y})$ (거짓)

ㄷ. $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{5}}}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}}$으로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le m+5)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{5}}}\le\frac{m+5-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{5}}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{5\sqrt{5}}{\sigma}\right)$$

$$\mathrm{P}(\overline{Y}\le m+5)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}}\le\frac{m+5-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{5\sqrt{10}}{\sigma}\right)$$

이때 $\frac{5\sqrt{5}}{\sigma}<\frac{5\sqrt{10}}{\sigma}$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{5\sqrt{5}}{\sigma}\right)<\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{5\sqrt{10}}{\sigma}\right)$

$\therefore$ $\mathrm{P}(\overline{X}\le m+5)<\mathrm{P}(\overline{Y}\le m+5)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

08 이 공장에서 생산하는 야구공 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(160, 16^2)$을 따르므로 임의추출한 야구공 n개의 무게의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(160, \left(\frac{16}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-160}{\frac{16}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(156\le\overline{X}\le164)\ge0.96$에서

$\mathrm{P}(156\le\overline{X}\le164)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{156-160}{\frac{16}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}-160}{\frac{16}{\sqrt{n}}}\le\frac{164-160}{\frac{16}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)$$

$$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\ge0.96$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\ge0.48$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.48$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{4}\ge2$, $\sqrt{n}\ge8$ $\quad\therefore n\ge64$

따라서 자연수 n의 최솟값은 64이다. 답 ③

09 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50, 12^2)$을 따르므로 이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50, \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(50, 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z_X=\frac{X-50}{12}$, $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-50}{3}$으로 놓으면 Z_X, $Z_{\overline{X}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(47\le\overline{X}\le k)=0.8185$에서

$\mathrm{P}(47\le\overline{X}\le k)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{47-50}{3}\le\frac{\overline{X}-50}{3}\le\frac{k-50}{3}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(-1\le Z_{\overline{X}}\le\frac{k-50}{3}\right)$$

$$=\mathrm{P}(-1\le Z_{\overline{X}}\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{k-50}{3}\right)$$

$$=\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le1)+\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{k-50}{3}\right)$$

$$=0.3413+\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{k-50}{3}\right)=0.8185$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{k-50}{3}\right)=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le2)=0.4772$이므로

$\frac{k-50}{3}=2$, $k-50=6$ $\quad\therefore k=56$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}(X\ge56)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{X-50}{12}\ge\frac{56-50}{12}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z_X\ge0.5)$$

$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_X\le0.5)$$

$$=0.5-0.1915=0.3085$$

답 ②

10 이 공장에서 생산한 비누 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(75, 10^2)$을 따르므로 임의추출한 비누 25개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(75, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(75, 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-75}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르고, 비누 25개를 묶어서 만든 한 세트의 무게는 $25\overline{X}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(25\overline{X}<1750)=\mathrm{P}(\overline{X}<70)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-75}{2}<\frac{70-75}{2}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z<-2.5)$$

$$=\mathrm{P}(Z>2.5)$$

$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)$$

$$=0.5-0.4938=0.0062$$

답 ①

11 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, 3^2)$을 따르므로 표본의 크기가 n일 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{3^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{3}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$f(m)=\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{7.5}{\sqrt{n}}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le\frac{\frac{7.5}{\sqrt{n}}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z\le2.5-\frac{m\sqrt{n}}{3}\right)$$

$\therefore f(0)=\mathrm{P}(Z\le2.5)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)$

$=0.5+0.4938$

$=0.9938$

$f(0.525)=\mathrm{P}\left(Z\le2.5-\dfrac{0.525\sqrt{n}}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le2.5-0.175\sqrt{n})$

따라서 $f(0)+f(0.525)\ge1.1525$에서

$0.9938+\mathrm{P}(Z\le2.5-0.175\sqrt{n})\ge1.1525$

$\mathrm{P}(Z\le2.5-0.175\sqrt{n})\ge0.1587$

$2.5-0.175\sqrt{n}<0$일 때

$\mathrm{P}(Z\ge-2.5+0.175\sqrt{n})\ge0.1587$

$0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le-2.5+0.175\sqrt{n})\ge0.1587$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le-2.5+0.175\sqrt{n})\le0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$-2.5+0.175\sqrt{n}\le1,\ 0.175\sqrt{n}\le3.5$

$\sqrt{n}\le20\qquad\therefore n\le400$

따라서 자연수 n의 최댓값은 400이다. 답 ④

12 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 36일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이가 $35-31=4$이므로

$2\times2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}=4\qquad\therefore 2.58\sigma=12\qquad\cdots\cdots$ ㉠

모표준편차가 σ, 표본의 크기가 64, 표본평균의 값이 32일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$32-2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}\le m\le32+2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}$

$32-\dfrac{12}{8}\le m\le32+\dfrac{12}{8}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore 30.5\le m\le33.5$ 답 ③

13 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 모표준편차가 2, 표본의 크기가 100, 표본평균의 값이 5일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$5-k\times\dfrac{2}{\sqrt{100}}\le m\le5+k\times\dfrac{2}{\sqrt{100}}$

$\therefore 5-\dfrac{1}{5}k\le m\le5+\dfrac{1}{5}k$

이것이 $4.7\le m\le5.3$과 일치하므로

$5-\dfrac{1}{5}k=4.7,\ 5+\dfrac{1}{5}k=5.3$

$\dfrac{1}{5}k=0.3\qquad\therefore k=1.5$

$\therefore \alpha=100\mathrm{P}(|Z|\le k)$

$=100\mathrm{P}(|Z|\le1.5)$

$=100\mathrm{P}(-1.5\le Z\le1.5)$

$=100\times2\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=100\times2\times0.43=86$ 답 ③

14 모표준편차가 5, 표본의 크기가 n일 때 표본평균의 값이 15이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$15-2\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}\le m\le15+2\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}$

$\therefore 15-\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le m\le15+\dfrac{10}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간에 속하는 정수의 개수가 5이므로 5개의 정수는 13, 14, 15, 16, 17이다. 즉

$12<15-\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le13,\ 17\le15+\dfrac{10}{\sqrt{n}}<18$

이므로

$2\le\dfrac{10}{\sqrt{n}}<3,\ \dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{n}}{10}\le\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{10}{3}<\sqrt{n}\le5\qquad\therefore \dfrac{100}{9}<n\le25$

따라서 자연수 n은 12, 13, 14, …, 25의 14개이다. 답 ⑤

15 모표준편차가 σ이고

$b-a$는 표본의 크기가 4일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{4}}$

$d-c$는 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이이므로

$d-c=2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$d-c\le\dfrac{1}{3}(b-a)$이어야 하므로

$2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\dfrac{1}{3}\times\left(2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{4}}\right)$

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}\le\dfrac{1}{6},\ \sqrt{n}\ge6$

$\therefore n\ge36$

따라서 자연수 n의 최솟값은 36이다. 답 ④

16 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하고, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이를 l이라 하면

$l=2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. α의 값이 작아지면 k의 값도 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다. (참)

ㄴ. 신뢰도가 일정하면 k의 값이 일정하므로 표본의 크기가 2배가 될 때의 신뢰구간의 길이는

$$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}l$$

즉 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배가 된다. (거짓)

ㄷ. 신뢰구간의 길이가 일정할 때, 표본의 크기 n을 크게 하면 k의 값도 커진다. 따라서 α의 값도 커지므로 신뢰도가 높아진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

17 배송업체 전체 이용자 중 배송 서비스에 만족하는 이용자의 비율 p는 $p=0.6$

임의추출한 이용자 600명 중 배송 서비스에 만족하는 이용자의 비율을 $\hat{p}$이라 할 때, 600은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}\left(0.6,\ \frac{0.6\times0.4}{600}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.6,\ 0.02^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.6}{0.02}$으로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.61\le\hat{p}\le0.63)&=\mathrm{P}\left(\frac{0.61-0.6}{0.02}\le\frac{\hat{p}-0.6}{0.02}\le\frac{0.63-0.6}{0.02}\right)\\&=\mathrm{P}(0.5\le Z\le1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=0.4332-0.1915\\&=0.2417\end{aligned}$$

답 ⑤

18 전체 예매자 중 예매를 취소하는 사람의 비율 p는 $p=0.1$

$\hat{p}$은 임의추출한 예매자 100명 중 예매를 취소하는 사람의 비율이고, 100은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}\left(0.1,\ \frac{0.1\times0.9}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.1,\ 0.03^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.1}{0.03}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(0.13\le\hat{p}\le k)=0.1359$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.13\le\hat{p}\le k)&=\mathrm{P}\left(\frac{0.13-0.1}{0.03}\le\frac{\hat{p}-0.1}{0.03}\le\frac{k-0.1}{0.03}\right)\\&=\mathrm{P}\left(1\le Z\le\frac{k-0.1}{0.03}\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-0.1}{0.03}\right)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-0.1}{0.03}\right)-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-0.1}{0.03}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{k-0.1}{0.03}=2,\ k-0.1=0.06$

$\therefore k=0.16$ 답 ③

19 임의추출한 거주민 n명 중 1인 가구의 비율 $\hat{p}$은 $\hat{p}=0.1$이고, 표본의 크기는 n이므로 이 지역 전체 거주민 중 1인 가구의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}$$

$$-1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le p-\hat{p}\le1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}$$

$$\therefore |p-\hat{p}|\le1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}$$

이때 $|p-\hat{p}|<0.0588$이어야 하므로

$1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}<0.0588$

$1.96\times\frac{0.3}{\sqrt{n}}<0.0588,\ \sqrt{n}>10$

$\therefore n>100$

따라서 자연수 n의 최솟값은 101이다. 답 ④

20 모표준편차를 σ라 하면

$b-a$는 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$d-c$는 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이이므로

$d-c=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\therefore \frac{b-a}{d-c}=\frac{2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{98}{129}$$

답 ①

21 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고, 임의추출한 만 19세 이상의 성인 500명 중 이 회사 OTT 서비스를 구독하는 사람의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 국내 만 19세 이상의 성인 중 이 회사 OTT 서비스를 구독하는 성인의 비율 p에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-k\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{500}}\le p\le\hat{p}+k\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{500}}$$

이것이 $0.308\le p\le0.332$와 일치하므로

$\hat{p}-k\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{500}}=0.308$ …… ㉠

$\hat{p}+k\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{500}}=0.332$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\hat{p}=0.64$ $\therefore \hat{p}=0.32$

따라서 임의추출한 성인 500명 중 이 회사 OTT 서비스를 구독하는 성인의 수는

$500\times0.32=160$ 답 ②

22 $\mathrm{E}(X)=12$이고, 표본의 크기가 n일 때 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=12,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}$ …… ❶

이때 $V(X)+V(n\bar{X})=E(\bar{X})$에서

$V(X)+n^2V(\bar{X})=E(\bar{X})$

$V(X)+n^2\times\dfrac{V(X)}{n}=12$, $V(X)+nV(X)=12$

$(1+n)V(X)=12 \qquad \therefore V(X)=\dfrac{12}{n+1}$ …… ❷

n과 $V(X)$가 모두 2 이상의 자연수이므로

$n=2$일 때, $V(X)=\dfrac{12}{2+1}=4$

$\therefore V(\bar{X})=\dfrac{V(X)}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

$n=3$일 때, $V(X)=\dfrac{12}{3+1}=3$

$\therefore V(\bar{X})=\dfrac{V(X)}{3}=\dfrac{3}{3}=1$

$n=5$일 때, $V(X)=\dfrac{12}{5+1}=2$

$\therefore V(\bar{X})=\dfrac{V(X)}{5}=\dfrac{2}{5}$ …… ❸

따라서 $V(\bar{X})$의 최댓값은 2, 최솟값은 $\dfrac{2}{5}$이므로

$A=2$, $a=\dfrac{2}{5}$

$\therefore \dfrac{A}{a}=\dfrac{2}{\frac{2}{5}}=5$ …… ❹

답 5

채점기준	배점
❶ $E(\bar{X})$의 값을 구하고 $V(\bar{X})$를 n과 $V(X)$에 대하여 나타내기	1
❷ $V(X)$를 n에 대한 식으로 나타내기	1
❸ $V(\bar{X})$의 값 구하기	3
❹ $\dfrac{A}{a}$의 값 구하기	1

23 A 고등학교 남학생의 키를 X라 하면 X는 정규분포 $N(173,\ 8^2)$을 따르므로 표본의 크기가 16일 때 표본평균 $\bar{X}$는 정규분포 $N\left(173,\ \dfrac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(173,\ 2^2)$을 따른다. …… ❶

또 B 고등학교 남학생의 키를 Y라 하면 Y는 정규분포 $N(170,\ 4^2)$을 따르므로 표본의 크기가 16일 때 표본평균 $\bar{Y}$는 정규분포 $N\left(170,\ \dfrac{4^2}{16}\right)$, 즉 $N(170,\ 1^2)$을 따른다. …… ❷

따라서 $Z_{\bar{X}}=\dfrac{\bar{X}-173}{2}$, $Z_{\bar{Y}}=\dfrac{\bar{Y}-170}{1}$으로 놓으면 $Z_{\bar{X}}$, $Z_{\bar{Y}}$는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\bar{X}\le k)=P\left(\dfrac{\bar{X}-173}{2}\le\dfrac{k-173}{2}\right)=P\left(Z_{\bar{X}}\le\dfrac{k-173}{2}\right)$

$P(\bar{Y}\ge k)=P\left(\dfrac{\bar{Y}-170}{1}\ge\dfrac{k-170}{1}\right)=P(Z_{\bar{Y}}\ge k-170)$

이때 $P(\bar{X}\le k)+P(\bar{Y}\ge k)=1$이므로

$P\left(Z_{\bar{X}}\le\dfrac{k-173}{2}\right)+P(Z_{\bar{Y}}\ge k-170)=1$ …… ❸

즉 $\dfrac{k-173}{2}=k-170$이므로

$k-173=2k-340 \qquad \therefore k=167$ …… ❹

답 167

채점기준	배점
❶ 표본평균 $\bar{X}$의 정규분포 구하기	1
❷ 표본평균 $\bar{Y}$의 정규분포 구하기	1
❸ 주어진 조건을 표준정규분포를 따르는 확률변수에 대한 식으로 나타내기	2
❹ k의 값 구하기	2

참고 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$P(X\le a)+P(X\ge a)=1$ (단, a는 실수)

즉 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$P(Z\le k)+P(Z\ge k)=1$ (단, k는 실수)

수능형 기출문제 & 변형문제

p.116~120

1 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 그 카드에 적힌 수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 1, 3, 5, 7, 9이고

$P(X=1)=P(X=3)=P(X=5)=P(X=7)=P(X=9)=\dfrac{1}{5}$

X	1	3	5	7	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{1}{5}+5\times\dfrac{1}{5}+7\times\dfrac{1}{5}+9\times\dfrac{1}{5}=5$

$E(X^2)=1^2\times\dfrac{1}{5}+3^2\times\dfrac{1}{5}+5^2\times\dfrac{1}{5}+7^2\times\dfrac{1}{5}+9^2\times\dfrac{1}{5}=33$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=33-5^2=8$

$\bar{X}$는 표본의 크기가 3일 때의 표본평균이므로

$V(\bar{X})=\dfrac{V(X)}{3}=\dfrac{8}{3}$

이때 $V(a\bar{X}+6)=24$에서

$V(a\bar{X}+6)=a^2V(\bar{X})=a^2\times\dfrac{8}{3}=24$

$a^2=9 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$

답 ③

2 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 그 카드에 적힌 수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고

$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)=\dfrac{1}{5}$

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{1}{5}+5\times\dfrac{1}{5}=3$

$E(X^2)=1^2\times\dfrac{1}{5}+2^2\times\dfrac{1}{5}+3^2\times\dfrac{1}{5}+4^2\times\dfrac{1}{5}+5^2\times\dfrac{1}{5}=11$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=11-3^2=2$

$\bar{X}$는 표본의 크기가 4일 때의 표본평균이므로

$V(\bar{X})=\dfrac{V(X)}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore V(6\bar{X})=6^2V(\bar{X})=36\times\dfrac{1}{2}=18$

답 ②

3 신생아의 몸무게 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하면

$\mathrm{P}(X\ge 3.4)=\frac{1}{2}$에서 $m=3.4$

따라서 $Z_X=\frac{X-3.4}{\sigma}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le 3.9)+\mathrm{P}(Z\le -1)=1$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{X-3.4}{\sigma}\le\frac{3.9-3.4}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\le -1)=1$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{0.5}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\ge 1)=1$

이때 $\mathrm{P}(Z\le 1)+\mathrm{P}(Z\ge 1)=1$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{0.5}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1)$

즉 $\frac{0.5}{\sigma}=1$이므로 $\sigma=0.5$

따라서 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.5^2)$을 따르므로 표본의 크기가 25일 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3.4,\ \frac{0.5^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.1^2)$을 따른다.

따라서 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-3.4}{0.1}$로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 3.55)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-3.4}{0.1}\ge\frac{3.55-3.4}{0.1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

답 ③

4 부품의 무게 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하면

$\mathrm{P}(X\le 3.1)=\mathrm{P}(X\ge 3.5)$에서 $m=\frac{3.1+3.5}{2}=3.3$

따라서 $Z_X=\frac{X-3.3}{\sigma}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(X\le 3)=0.2266$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 3)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-3.3}{\sigma}\le\frac{3-3.3}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_X\le -\frac{0.3}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{0.3}{\sigma}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{0.3}{\sigma}\right)\\&=0.2266\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{0.3}{\sigma}\right)=0.2734$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.75)=0.2734$이므로

$\frac{0.3}{\sigma}=0.75\qquad\therefore\ \sigma=0.4$

따라서 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3.3,\ 0.4^2)$을 따르므로 표본의 크기가 16일 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3.3,\ \frac{0.4^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(3.3,\ 0.1^2)$을 따른다.

따라서 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-3.3}{0.1}$으로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 3.4)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-3.3}{0.1}\ge\frac{3.4-3.3}{0.1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 ②

5 조건 (가), (나)에서 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(220,\ \sigma^2)$을 따른다고 하면 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ (1.5\sigma)^2)$을 따르므로 지역 A에서 임의추출한 n명의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(220,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고, 지역 B에서 임의추출한 $9n$명의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(240,\ \frac{(1.5\sigma)^2}{9n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(240,\ \left(\frac{0.5\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-240}{\frac{0.5\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 215)=0.1587$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 215)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le\frac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le -\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)\\&=0.1587\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}=1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(\overline{Y}\ge 235)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-240}{\frac{0.5\sigma}{\sqrt{n}}}\ge\frac{235-240}{\frac{0.5\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge -\frac{10\sqrt{n}}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\ge -2)\ (\because ㉠)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\le 2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{Y}}\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

6 조건 (가), (나)에서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 20^2)$을 따르므로 지역 A에서 임의추출한 n명의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고, 지역 B에서 임의추출한 $16n$명의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분

포 $\mathrm{N}\left(2m,\ \frac{20^2}{16n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(2m,\ \left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$, $Z_{\overline{Y}}=\dfrac{\overline{Y}-2m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 2m)=0.3085$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 2m)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\ge\frac{2m-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{m\sqrt{n}}{10}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{m\sqrt{n}}{10}\right)\\&=0.3085\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{m\sqrt{n}}{10}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{m\sqrt{n}}{10}=0.5\qquad \therefore m\sqrt{n}=5\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(\overline{Y}\ge 3m)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-2m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\ge\frac{3m-2m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{m\sqrt{n}}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\ge 1)\ (\because ㉠)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{Y}}\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 ③

7 모표준편차가 σ이고, 표본의 크기가 16일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 $755.9-746.1=9.8$이므로

$2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=9.8$

$\therefore \sigma=10$

즉 모표준편차는 10이고, $b-a$는 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}=\frac{51.6}{\sqrt{n}}$

$b-a\le6$이어야 하므로 $\frac{51.6}{\sqrt{n}}\le6$

$\sqrt{n}\ge8.6\qquad \therefore n\ge73.96$

따라서 자연수 n의 최솟값은 74이다. 답 ②

다른풀이 모표준편차가 σ이므로 표본의 크기가 16일 때 표본평균의 값을 $\overline{x_1}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\therefore \overline{x_1}-0.49\sigma\le m\le\overline{x_1}+0.49\sigma$

이것이 $746.1\le m\le755.9$와 일치하므로

$\overline{x_1}-0.49\sigma=746.1$, $\overline{x_1}+0.49\sigma=755.9$

두 식을 연립하여 풀면

$\overline{x_1}=751$, $\sigma=10$

8 모표준편차가 5이고, $b-a$는 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{19.6}{\sqrt{n}}$

$d-c$는 표본의 크기가 $4n$일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이이므로

$d-c=2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{4n}}=\frac{12.9}{\sqrt{n}}$

따라서 $(b-a)+(d-c)\le10$에서

$\frac{19.6}{\sqrt{n}}+\frac{12.9}{\sqrt{n}}\le10$, $\frac{32.5}{\sqrt{n}}\le10$

$\sqrt{n}\ge3.25\qquad \therefore n\ge10.5625$

따라서 자연수 n의 최솟값은 11이다. 답 ④

9 임의추출한 학생 n명 중 1인 미디어 방송을 시청한 경험이 있는 학생을 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.9$이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.9-1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}\le p\le0.9+1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$

$\therefore 0.9-\frac{0.588}{\sqrt{n}}\le p\le0.9+\frac{0.588}{\sqrt{n}}$

이것이 $0.9-c\le p\le0.9+c$와 일치하므로 $c=\frac{0.588}{\sqrt{n}}$

그런데 $c=0.0294$이므로 $0.0294=\frac{0.588}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}=20\qquad \therefore n=400$ 답 400

10 임의추출한 주민 n명 중 제주도 여행 경험이 있는 주민의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.8$이고, $b-a$는 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$

이때 $b-a=0.032$이므로

$2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.032$

$\sqrt{n}=49\qquad \therefore n=2401$ 답 ④

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.122~125

01 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{15}$ 답 ⑤

02 갑이 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 을이 검은 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{10}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{7}{30}$ 답 ④

03 $\mathrm{P}(X^2\le4)=\mathrm{P}(X^2-4\le0)$

$=\mathrm{P}((X+2)(X-2)\le0)$

$=\mathrm{P}(-2\le X\le2)$

$=\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=2)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{5}$ 답 ③

04 $\mathrm{E}(X)=(-3)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{9}+3\times\frac{1}{3}+9\times\frac{2}{9}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=(-3)^2\times\frac{1}{3}+0^2\times\frac{1}{9}+3^2\times\frac{1}{3}+9^2\times\frac{2}{9}=24$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=24-2^2=20$

이므로 $\mathrm{E}(aX+b)=30$에서

$a\mathrm{E}(X)+b=30$ $\therefore 2a+b=30$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(aX+b)=320$에서

$a^2\mathrm{V}(X)=320$, $20a^2=320$

$a^2=16$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$8+b=30$ $\therefore b=22$

$\therefore a-b=4-22=-18$ 답 ①

05 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따른다고 하면 평균이 5, 분산이 4이므로

$\mathrm{E}(X)=np=5$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=4$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$1-p=\frac{4}{5}$ $\therefore p=\frac{1}{5}$

$p=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{5}n=5$ $\therefore n=25$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{25}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{25-x}$ $(x=0, 1, 2, \dots, 25)$

$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=1)}=\frac{{}_{25}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{23}}{{}_{25}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^{24}}=\frac{\frac{25\times24}{2}\times\frac{1}{5}}{25\times\frac{4}{5}}=3$

답 ②

06 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2\times4}{15}=\frac{8}{15}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$

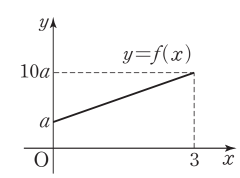
$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{4}{5}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{4}{5}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{45}$ 답 ⑤

07 $f(x)=3ax+a=a(3x+1)$ $(0\le x\le3)$

$0\le x\le3$에서 $f(x)\ge0$이어야 하므로 $a>0$

$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0, a)$, $(3, 10a)$를 지나고, 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times(a+10a)\times3=1$

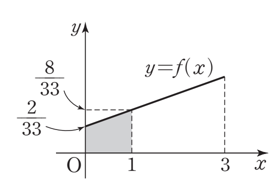
$11a=\frac{2}{3}$ $\therefore a=\frac{2}{33}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{11}x+\frac{2}{33}$ $(0\le x\le3)$이고 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(0, \frac{2}{33}\right)$, $\left(1, \frac{8}{33}\right)$을 지나므로

$\mathrm{P}(0\le X\le1)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{33}+\frac{8}{33}\right)\times1$

$=\frac{5}{33}$



답 ⑤

08 $\mathrm{E}(X)=a\times\frac{1}{4}+2a\times\frac{1}{2}+3a\times\frac{1}{4}=2a$

이때 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=6$이므로

$2a=6$ $\therefore a=3$

X	3	6	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=3^2\times\frac{1}{4}+6^2\times\frac{1}{2}+9^2\times\frac{1}{4}=\frac{81}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{81}{2}-6^2=\frac{9}{2}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{2}=\frac{9}{4}$ 답 ③

09 t에 대한 이차방정식 $t^2+4t+4X=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times4X=4-4X\geq0$

$-4X\geq-4\qquad\therefore X\leq1$

즉 이차방정식 $t^2+4t+4X=0$이 실근을 가질 확률은

$\mathrm{P}(X\leq1)$이고, $Z=\frac{X-3}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\leq1)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-3}{2}\leq\frac{1-3}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\leq-1)\\&=\mathrm{P}(Z\geq1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 ①

10 비가 온 날의 다음 날 비가 올 확률이 0.7이므로 비가 온 날의 다음 날 비가 오지 않을 확률은

$1-0.7=0.3$

화요일에 비가 왔을 때

(i) 수요일에도 비가 오고, 목요일에도 비가 올 확률

$0.7\times0.7=0.49$

(ii) 수요일에는 비가 오지 않고, 목요일에는 비가 올 확률

$0.3\times0.4=0.12$

(i), (ii)에서 목요일에 비가 올 확률은

$0.49+0.12=0.61$ 답 ②

11 150개의 씨앗 중 발아하는 씨앗의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(150,\ 0.6)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=150\times0.6=90,\ \mathrm{V}(X)=150\times0.6\times0.4=36$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-90}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, $\mathrm{P}(X\geq k)\geq0.95$이어야 하므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq k)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-90}{6}\geq\frac{k-90}{6}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-90}{6}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq-\frac{k-90}{6}\right)\\&=0.5+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{k-90}{6}\right)\geq0.95\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{k-90}{6}\right)\geq0.45$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.65)=0.45$이므로

$-\frac{k-90}{6}\geq1.65$

$k-90\leq-9.9\qquad\therefore k\leq80.1$

따라서 자연수 k의 최댓값은 80이다. 답 ③

다른풀이 씨앗의 발아율을 p라 하면 $p=0.6$

임의추출한 150개의 씨앗 중 발아하는 씨앗의 개수의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}\left(0.6,\ \frac{0.6\times0.4}{150}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.6,\ 0.04^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.6}{0.04}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 씨앗 150개 중 k개 이상 발아할 확률이 95 % 이상이려면 $\mathrm{P}\left(\hat{p}\geq\frac{k}{150}\right)\geq0.95$이어야 하므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\geq\frac{k}{150}\right)&=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-0.6}{0.04}\geq\frac{\frac{k}{150}-0.6}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k}{6}-15\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq-\frac{k}{6}+15\right)\\&=0.5+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{k}{6}+15\right)\\&\geq0.95\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{k}{6}+15\right)\geq0.45$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.65)=0.45$이므로

$-\frac{k}{6}+15\geq1.65,\ -\frac{k}{6}\geq-13.35$

$\therefore k\leq80.1$

따라서 자연수 k의 최댓값은 80이다.

12 대중교통을 이용하지 않는 남학생 수를 x라 하면

대중교통을 이용하는 여학생 수는 $x+40$

대중교통을 이용하지 않는 학생이 200명이므로 대중교통을 이용하지 않는 여학생 수는 $200-x$

따라서 전체 여학생 수는

$(200-x)+(x+40)=240$

대중교통을 이용하는 남학생이 50명이므로 전체 남학생 수는

$50+x$

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	대중교통 이용	대중교통 미이용	합계
여학생	$x+40$	$200-x$	240
남학생	50	x	$50+x$
합계		200	

이때 (여학생 수) : (남학생 수)=3 : 2이므로

$240:(50+x)=3:2$

$3(50+x)=480,\ 50+x=160\qquad\therefore x=110$

이것을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	대중교통 이용	대중교통 미이용	합계
여학생	150	90	240
남학생	50	110	160
합계	200	200	400

전교생 중 임의로 택한 한 명이 여학생인 사건을 A, 등교 시 대중교통을 이용하지 않는 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{240}{400}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{90}{400}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{90}{400}}{\frac{240}{400}}=\frac{3}{8}$ 답 ②

13 이 공장에서 생산하는 건전지의 수명이 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$을 따르므로 임의추출한 건전지 100개의 수명의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \frac{2^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(50,\ 0.2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-50}{0.2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)=0.0062$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-50}{0.2}\ge\frac{k-50}{0.2}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-50}{0.2}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-50}{0.2}\right)\\&=0.0062\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-50}{0.2}\right)=0.4938$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$\frac{k-50}{0.2}=2.5$

$k-50=0.5\qquad\therefore k=50.5$ 답 ⑤

14 임의추출한 n명 중 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 주민의 비율을 $\hat{p}$이라 할 때, 이 지역 전체 주민 중 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 주민의 비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-2.58\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\le p\le\hat{p}+2.58\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

이것이 $0.6855\le p\le 0.8145$와 일치하므로

$\hat{p}-2.58\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.6855$ …… ㉠

$\hat{p}+2.58\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.8145$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\hat{p}=1.5\qquad\therefore \hat{p}=0.75$

$\hat{p}=0.75$를 ㉡에 대입하면

$0.75+2.58\times\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}=0.8145$

$\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}=0.025$

$\sqrt{\frac{3}{n}}=\frac{1}{10}$, $\frac{3}{n}=\frac{1}{100}$

$\therefore n=300$ 답 ③

15 응시자들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-80}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격하려면 100명 중 7명 안에 들어야 한다. 즉 합격자의 최소 점수를 k점이라 하면 $\mathrm{P}(X\ge k)=\frac{7}{100}=0.07$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge k)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-80}{4}\ge\frac{k-80}{4}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-80}{4}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-80}{4}\right)\\&=0.07\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-80}{4}\right)=0.43$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$\frac{k-80}{4}=1.5$

$k-80=6\qquad\therefore k=86$

따라서 합격자의 최소 점수는 86점이다. 답 ④

16 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 서로 같으므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모양이 서로 같다. 또 X의 평균이 10이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이고, Y의 평균이 m이므로 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

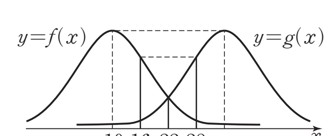
따라서 $\mathrm{P}(X\le 10)=0.5$이므로 조건 ㈎에서

$0.5\le\mathrm{P}(Y\ge 28)$

$\therefore m\ge 28$

또 $f(16)=g(28)$이므로

오른쪽 그림에서



$\frac{10+m}{2}=\frac{16+28}{2}=22$

$10+m=44\qquad\therefore m=34$

따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(34,\ 5^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-34}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 44)&=\mathrm{P}\left(\frac{Y-34}{5}\le\frac{44-34}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 ④

17 $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$ $(k>0)$라 하고 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이를 l_1이라 하면

$l_1=2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ …… ❶

또

$$P(|Z|\le 1.96)=P(-1.96\le Z\le 1.96)$$
$$=2P(0\le Z\le 1.96)$$
$$=2\times 0.475=0.95$$

이므로 표본의 크기가 n일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이를 l_2라 하면

$l_2=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ …… ❷

이때 $l_1=\frac{36}{49}l_2$이므로

$2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{36}{49}\times 2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore k=1.44$ …… ❸

따라서 $P(|Z|\le 1.44)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$$\alpha=100P(|Z|\le 1.44)$$
$$=100P(-1.44\le Z\le 1.44)$$
$$=100\times 2P(0\le Z\le 1.44)$$
$$=100\times 2\times 0.425=85$$ …… ❹

답 85

채점기준	배점
❶ $P(\lvert Z\rvert\le k)=\frac{\alpha}{100}$로 놓고 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이 구하기	2
❷ 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 구하기	1
❸ k의 값 구하기	1
❹ α의 값 구하기	2

18 프로파일러가 용의자 X의 진술을 진실이라 판단하는 사건을 E, 용의자 X가 진실을 말하는 사건을 A라 하면 구하는 확률은 $P(A|E)$이다. 이때

$P(E|A)=0.95$, $P(E^C|A^C)=0.9$, $P(A)=0.3$

이므로

$P(E|A^C)=1-P(E^C|A^C)=1-0.9=0.1$

$P(A^C)=1-P(A)=1-0.3=0.7$

용의자 X가 진실을 말하고, 프로파일러가 용의자 X의 진술을 진실이라 판단할 확률은

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=0.3\times 0.95=0.285$ …… ❶

용의자 X가 거짓을 말하고, 프로파일러가 용의자 X의 진술을 진실이라 판단할 확률은

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=0.7\times 0.1=0.07$ …… ❷

$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$$
$$=0.285+0.07=0.355$$ …… ❸

따라서 구하는 확률은

$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{0.285}{0.355}=\frac{57}{71}$

이므로 $p=71$, $q=57$

$\therefore p+q=71+57=128$ …… ❹

답 128

채점기준	배점
❶ 용의자 X가 진실을 말하고, 프로파일러가 용의자 X의 진술을 진실이라 판단할 확률 구하기	2
❷ 용의자 X가 거짓을 말하고, 프로파일러가 용의자 X의 진술을 진실이라 판단할 확률 구하기	2
❸ 프로파일러가 용의자 X의 진술을 진실이라 판단할 확률 구하기	1
❹ 구하는 확률 및 $p+q$의 값 구하기	1

참고 구하는 확률은

$$\frac{(\text{용의자 X가 진실을 말하고, 프로파일러가 진실이라 판단할 확률})}{(\text{프로파일러가 용의자 X의 진술을 진실이라 판단할 확률})}$$
$$=\frac{0.3\times 0.95}{0.3\times 0.95+0.7\times 0.1}=\frac{57}{71}$$

과 같이 간단히 계산할 수 있다.

19 한 개의 동전을 3번 던지는 게임을 하여 얻는 점수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 1, 4, 11이고

(i) $X=1$인 경우는 (앞, 뒤, 앞), (뒤, 앞, 뒤)의 2가지이므로

$P(X=1)=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$ …… ❶

(ii) $X=4$인 경우는 (앞, 앞, 뒤), (뒤, 앞, 앞), (뒤, 뒤, 앞), (앞, 뒤, 뒤)의 4가지이므로

$P(X=4)=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$ …… ❷

(iii) $X=11$인 경우는 (앞, 앞, 앞), (뒤, 뒤, 뒤)의 2가지이므로

$P(X=11)=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$ …… ❸

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	4	11	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{2}+11\times\frac{1}{4}=5$

따라서 얻을 수 있는 점수의 기댓값은 5점이다. …… ❹

답 5

채점기준	배점
❶ 게임을 하여 얻는 점수를 확률변수 X라 하고, $P(X=1)$의 값 구하기	2
❷ $P(X=4)$의 값 구하기	1
❸ $P(X=11)$의 값 구하기	1
❹ 점수의 기댓값 구하기	2

20 $E(X)=5$에서

$$E(X)=(a-4)\times\frac{2}{3}+(a-2)\times\frac{3}{16}+a\times\frac{1}{8}+(a+2)\times\frac{1}{48}$$
$$=5$$

$32(a-4)+9(a-2)+6a+(a+2)=240$

$48a-144=240$, $48a=384$ $\therefore a=8$ …… ❶

X	4	6	8	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	1

모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$이고

$\overline{X}=5$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면

(4, 6), (6, 4) …… ❷

이므로

$$\begin{aligned}P(\overline{X}=5)&=P(X_1=4, X_2=6)+P(X_1=6, X_2=4)\\&=2P(X_1=4, X_2=6)\\&=2P(X_1=4)P(X_2=6)\\&=2\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{16}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

따라서 $p=4$, $q=1$이므로

$p+q=4+1=5$ …… ❸

답 5

채점기준	배점
❶ 상수 a의 값 구하기	2
❷ $\overline{X}=5$인 경우 구하기	2
❸ $P(\overline{X}=5)$의 값을 구하고, $p+q$의 값 구하기	2

실전 모의고사 2회

p.126~129

01 500명의 주민 중 임의로 택한 한 명이 올해 독감 예방 접종을 받은 주민인 사건을 A, 미성년자인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이고

$P(A)=\dfrac{330}{500}$, $P(A\cap B)=\dfrac{180}{500}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{180}{500}}{\frac{330}{500}}=\frac{6}{11}$$

답 ③

02 복원추출이므로 한 개의 공을 꺼내어 수를 확인한 후 주머니에 다시 넣고 두 번째 공을 꺼내는 것이다.

따라서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 경우의 수는 5개 중 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

답 ③

03 $V(X)=\dfrac{8}{3}$에서 $V(X)=np(1-p)=\dfrac{8}{3}$ …… ㉠

확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \dots, n)$

이므로 $P(X=n-1)=24P(X=n)$에서

${}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)=24\times{}_nC_n p^n$

$\therefore n(1-p)=24p$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$24p^2=\dfrac{8}{3}$, $p^2=\dfrac{1}{9}$ $\quad\therefore p=\dfrac{1}{3}$ $(\because p>0)$

$p=\dfrac{1}{3}$을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{2}{3}n=8$ $\quad\therefore n=12$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(12, \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=12\times\dfrac{1}{3}=4$

답 ④

04 이 농장에서 재배한 고구마 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(120, 20^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-120}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 160)&=P\left(\frac{X-120}{20}\ge\frac{160-120}{20}\right)\\&=P(Z\ge 2)\\&=0.5-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ⑤

05 $P(A|B)=3P(B|A)$에서

$\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=3\times\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$\dfrac{1}{P(B)}=\dfrac{3}{P(A)}$ $(\because P(A\cap B)\neq 0)$

$\therefore P(B)=\dfrac{1}{3}P(A)$ …… ㉠

$P(A\cup B)+P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}$에서

$\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}+P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore P(A)+P(B)=\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$P(A)+\dfrac{1}{3}P(A)=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{4}{3}P(A)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore P(A)=\dfrac{3}{8}$

답 ⑤

06 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 조건 (가)에서

$m=\dfrac{10+24}{2}=17$

또 조건 (나)에서 $V(3X)=3^2V(X)=36$이므로

$V(X)=4$

즉 $\sigma^2=4$이므로 $\sigma=2$

$\therefore m+\sigma=17+2=19$

답 ②

07 이 공장에서 생산한 전구의 수명을 X라 하면 X는 정규분포 $N(4000, 160^2)$을 따르므로 임의추출한 전구 400개의 수명의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(4000, \dfrac{160^2}{400}\right)$, 즉 $N(4000, 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-4000}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(3988\le\overline{X}\le4020)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{3988-4000}{8}\le\frac{\overline{X}-4000}{8}\le\frac{4020-4000}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le2.5)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)$

$=0.4332+0.4938=0.9270$ 답 ④

08 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 6, 9이고

$X=3$인 경우는 숫자 3만 세 번 나오는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{{}_3\Pi_3}=\frac{1}{27}$

$X=6$인 경우는 세 숫자가 3, 6 중에서만 나오고, 이때 3만 세 번 나오는 경우는 제외하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{{}_2\Pi_3-1}{{}_3\Pi_3}=\frac{8-1}{27}=\frac{7}{27}$

$X=9$인 경우는 세 숫자 중 9가 적어도 한 번 나오는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=9)=1-\frac{{}_2\Pi_3}{{}_3\Pi_3}=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$

X	3	6	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$	1

$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{1}{27}+6\times\frac{7}{27}+9\times\frac{19}{27}=8$

$\mathrm{E}(X^2)=3^2\times\frac{1}{27}+6^2\times\frac{7}{27}+9^2\times\frac{19}{27}=\frac{200}{3}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{200}{3}-8^2=\frac{8}{3}$ 답 ①

09 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 2의 배수 또는 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 2의 배수 또는 3의 배수의 눈이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 2의 배수 또는 3의 배수의 눈이 1번 이하, 즉 0번 또는 1번 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$=\frac{1}{81}+\frac{8}{81}=\frac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$ 답 ⑤

참고 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 2의 배수의 눈이 나오는 사건을 X, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 Y라 하면

$X=\{2,\ 4,\ 6\}$, $Y=\{3,\ 6\}$, $X\cap Y=\{6\}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X)=\frac{3}{6}$, $\mathrm{P}(Y)=\frac{2}{6}$, $\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{6}$

따라서 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 2의 배수 또는 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\mathrm{P}(X\cup Y)=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)$

$=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

10 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$ $(k>0)$라 할 때, 표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. n의 값이 일정할 때 α의 값이 작아지면 k의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다. (참)

ㄴ. α의 값이 일정할 때 n의 값이 작아지면 신뢰구간의 길이는 길어진다. (거짓)

ㄷ. α의 값이 일정할 때 n의 값이 2배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배, 즉 $\frac{\sqrt{2}}{2}$배가 된다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

11 임의추출한 직원 2100명 중 아침 식사를 하는 직원의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\frac{630}{2100}=0.3$

$b-a$의 값은 크기가 2100인 표본을 임의추출하여 구한 이 회사 전체 직원 중 아침 식사를 하는 직원의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.3\times0.7}{2100}}=0.0392$ 답 ①

참고 표본의 크기가 2100, 표본비율 $\hat{p}$의 값이 $\frac{630}{2100}=0.3$일 때 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.3-1.96\times\sqrt{\frac{0.3\times0.7}{2100}}\le p\le0.3+1.96\times\sqrt{\frac{0.3\times0.7}{2100}}$

$\therefore\ 0.2804\le p\le0.3196$

12 이 공장에서 생산한 비누 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-100}{5}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이 공장에서 생산한 제품이 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(X\ge110)=\mathrm{P}\left(\frac{X-100}{5}\ge\frac{110-100}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_X\ge2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_X\le2)$

$=0.5-0.48=0.02$

비누 2500개 중 불량품의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따르고

$\mathrm{E}(Y)=2500\times0.02=50$, $\mathrm{V}(Y)=2500\times0.02\times0.98=49$

이때 2500은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z_Y=\frac{Y-50}{7}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 비누 2500개 중 불량품이 57개 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(Y\le 57)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-50}{7}\le\frac{57-50}{7}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_Y\le 1)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1)$$
$$=0.5+0.34=0.84$$
답 ②

13 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+a+b+\frac{1}{10}=1$ $\quad\therefore a+b=\frac{7}{10}$ ······ ㉠

$$\mathrm{E}(X)=(-2)\times\frac{1}{5}+(-1)\times a+0\times b+1\times\frac{1}{10}$$
$$=-a-\frac{3}{10}$$
$$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{5}+(-1)^2\times a+0^2\times b+1^2\times\frac{1}{10}$$
$$=a+\frac{9}{10}$$
$$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\left(a+\frac{9}{10}\right)-\left(-a-\frac{3}{10}\right)^2$$
$$=-a^2+\frac{2}{5}a+\frac{81}{100}=-\left(a-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{17}{20}$$

따라서 $\mathrm{V}(X)$는 $a=\frac{1}{5}$에서 최대가 되므로

$b=\frac{7}{10}-a=\frac{7}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore ab=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

답 ②

14 총 7개의 숫자 및 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$

3이 1과 4보다 왼쪽에 놓이는 사건을 A, a가 1과 4보다 오른쪽에 놓이는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

(i) 3이 1과 4보다 왼쪽에 놓이는 경우

3, 1, 4를 모두 한 문자 X로 바꾸어 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!}$

3개의 X 중 가장 왼쪽의 X에 3을, 나머지 2개의 X에 1, 4를 나열하는 경우의 수는 $2!$

따라서 3이 1과 4보다 왼쪽에 놓이는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!}\times 2!$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{\frac{7!}{3!}\times 2!}{7!}=\frac{1}{3}$$

(ii) 3이 1과 4보다 왼쪽에 놓이고, a가 1과 4보다 오른쪽에 놓이는 경우

3, 1, 4, a를 모두 한 문자 Y로 바꾸어 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{4!}$

4개의 Y 중 가장 왼쪽의 Y에 3을, 가장 오른쪽의 Y에 a를 놓고, 가운데 2개의 Y에 1, 4를 나열하는 경우의 수는 $2!$

따라서 3이 1과 4보다 왼쪽에 놓이고, a가 1과 4보다 오른쪽에 놓이는 경우의 수는 $\frac{7!}{4!}\times 2!$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{\frac{7!}{4!}\times 2!}{7!}=\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$
답 ③

15 조건 (가)에서 $0\le 4+x\le 8$, 즉 $-4\le x\le 4$일 때

$f(4+x)=f(4-x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

$y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=8$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 4)=\mathrm{P}(4\le X\le 8)=\frac{1}{2}$ ······ ㉠

조건 (나)에서

$\mathrm{P}(2\le X\le 6)=\mathrm{P}(2\le X\le 4)+\mathrm{P}(4\le X\le 6)=\frac{5}{7}$

이고 $\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\mathrm{P}(4\le X\le 6)$이므로

$\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\mathrm{P}(4\le X\le 6)=\frac{5}{14}$ ······ ㉡

조건 (다)에서

$\mathrm{P}(3\le X\le 6)=\mathrm{P}(3\le X\le 4)+\mathrm{P}(4\le X\le 6)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(3\le X\le 4)+\frac{5}{14}=\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉡)

$\therefore \mathrm{P}(3\le X\le 4)=\frac{1}{7}$ ······ ㉢

또 ㉢에서

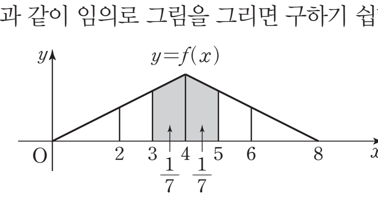
$\mathrm{P}(4\le X\le 5)=\mathrm{P}(3\le X\le 4)=\frac{1}{7}$ ······ ㉣

$\therefore \mathrm{P}(5\le X\le 8)=\mathrm{P}(4\le X\le 8)-\mathrm{P}(4\le X\le 5)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}=\frac{5}{14}$ ($\because$ ㉠, ㉣)

답 ④

참고 다음과 같이 임의로 그림을 그리면 구하기 쉽다.

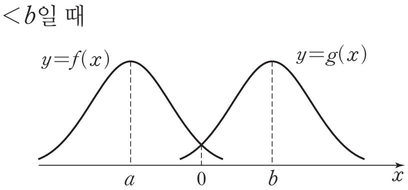


16 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 서로 같으므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모양은 서로 같다.

또 X의 평균이 a이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이고, Y의 평균이 b이므로 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=b$에 대하여 대칭이다.

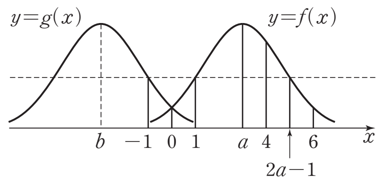
조건 (가)에서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 0이고, 두 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 서로 대칭이다.

(i) $a<0<b$일 때



$f(4)>f(6)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0<a$일 때



두 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 서로 대칭이므로

$b=-a$ ...... ㉠

b는 정수이고, $b=-1$이면 $g(-1)\ge f(4)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\therefore b<-1$

즉 $b<-1<0$이고, $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=0$에 대하여 서로 대칭이므로

$g(-1)=f(1)$

또 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로

$f(1)=f(2a-1)$

즉 위의 그림과 같이 $g(-1)=f(1)=f(2a-1)$이므로

조건 (나)에서 $f(6)<g(-1)<f(4)$, 즉

$f(6)<f(2a-1)<f(4)$이려면

$4<2a-1<6$, $\frac{5}{2}<a<\frac{7}{2}$ $\quad \therefore a=3$ ($\because$ a는 정수)

$\therefore b=-3$ ($\because$ ㉠)

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-3}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}\left(X\ge\frac{1}{3}ab\right)&=\mathrm{P}\left(X\ge\frac{1}{3}\times3\times(-3)\right)\\&=\mathrm{P}(X\ge-3)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{X-3}{4}\ge\frac{-3-3}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge-1.5)=\mathrm{P}(Z\le1.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=0.5+0.4332=0.9332\end{aligned}$$

답 ④

17 남학생이 70명이므로 여학생 수는 $280-70=210$

2학년 여학생 수를 x라 하면 1학년 남학생 수는 $3x$이므로 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	1학년 학생	2학년 학생	합계
남학생	$3x$	$70-3x$	70
여학생	$210-x$	x	210
합계	$2x+210$	$-2x+70$	280

2학년 학생은 $(-2x+70)$명, 여학생은 210명, 2학년 여학생은 x명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{-2x+70}{280}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{210}{280}=\frac{3}{4}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{280}$ ...... ❶

두 사건 A, B가 서로 독립이어야 하므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{x}{280}=\frac{-2x+70}{280}\times\frac{3}{4}$, $4x=3(-2x+70)$

$4x=-6x+210$, $10x=210$ $\quad \therefore x=21$ ...... ❷

따라서 구하는 1학년 여학생 수는

$210-x=210-21=189$ ...... ❸

답 189

채점기준	배점
❶ 2학년 여학생 수를 x라 하고 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 각각 x에 대하여 나타내기	2
❷ 두 사건 A, B가 서로 독립임을 이용하여 등식을 세우고 x의 값 구하기	2
❸ 1학년 여학생 수 구하기	1

18 표본평균의 값 $\bar{x}$는

$\bar{x}=\frac{5+(-3)+5+4+(-3)+7+5+(-4)}{8}=2$ ...... ❶

이 표본평균의 값을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$2-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}\le m\le2+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}$ ...... ❷

이것이 $0.71\le m\le3.29$와 일치하므로

$2-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}=0.71$, $2+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}=3.29$

$2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}=1.29$ $\quad \therefore \sigma=\sqrt{2}$ ...... ❸

즉 $\mathrm{V}(X)=\sigma^2=(\sqrt{2})^2=2$이므로

$\mathrm{V}(4X)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times2=32$ ...... ❹

$\therefore \bar{x}+\mathrm{V}(4X)=2+32=34$ ...... ❺

답 34

채점기준	배점
❶ $\bar{x}$의 값 구하기	1
❷ 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간 나타내기	1
❸ σ의 값 구하기	2
❹ $\mathrm{V}(4X)$의 값 구하기	1
❺ $\bar{x}+\mathrm{V}(4X)$의 값 구하기	1

19 6명 중 4인용 관람차에 탈 4명을 정하면 2인용 관람차에 탈 2명이 정해지므로 전체 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_4$

4인용 관람차에 타는 고등학생의 수, 즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고

$\mathrm{P}(X=1)$은 4인용 관람차에 고등학생 1명 및 중학생 3명이 탈 확률이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_4}=\frac{3\times1}{15}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)$는 4인용 관람차에 고등학생 2명 및 중학생 2명이 탈 확률이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_4}=\frac{3\times3}{15}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)$은 4인용 관람차에 고등학생 3명 및 중학생 1명이 탈 확률이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_4}=\frac{1\times3}{15}=\frac{1}{5}$

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

…… ❶

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{22}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{22}{5}-2^2=\frac{2}{5}$ …… ❷

$\therefore \mathrm{V}(10X)=10^2\mathrm{V}(X)=100\times\frac{2}{5}=40$ …… ❸

답 40

채점기준	배점
❶ 확률변수 X의 확률분포 구하기	3
❷ $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$, $\mathrm{V}(X)$의 값 구하기	2
❸ $\mathrm{V}(10X)$의 값 구하기	1

20 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 조건 ㈎에서

$m=\frac{10+22}{2}=16$ …… ❶

또 조건 ㈏에서

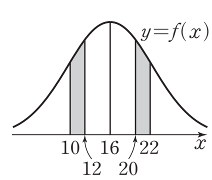
$\mathrm{P}(a\le X\le a+2)=\mathrm{P}(10\le X\le 16)-\mathrm{P}(12\le X\le 16)$

$=\mathrm{P}(10\le X\le 12)$

이때

$\mathrm{P}(10\le X\le 12)=\mathrm{P}(20\le X\le 22)$

이므로



$\mathrm{P}(a\le X\le a+2)=\mathrm{P}(10\le X\le 12)$

$=\mathrm{P}(20\le X\le 22)$

$\therefore a=10$ 또는 $a=20$ …… ❷

조건 ㈐에서

$\mathrm{P}(b\le X\le b+8)=2\mathrm{P}(16\le X\le 22)-2\mathrm{P}(a\le X\le a+2)$

$=2\mathrm{P}(16\le X\le 22)-2\mathrm{P}(20\le X\le 22)$

$=2\{\mathrm{P}(16\le X\le 22)-\mathrm{P}(20\le X\le 22)\}$

$=2\mathrm{P}(16\le X\le 20)$

$=\mathrm{P}(12\le X\le 20)$

$\therefore b=12$ …… ❸

따라서 $a+b$의 최댓값은 $a=20$, $b=12$일 때

$20+12=32$ …… ❹

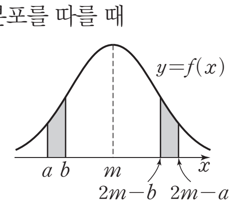
답 32

채점기준	배점
❶ X의 평균 m의 값 구하기	1
❷ a의 값이 될 수 있는 수 구하기	2
❸ b의 값 구하기	3
❹ $a+b$의 최댓값 구하기	1

참고 확률변수 X가 평균이 m인 정규분포를 따를 때

$\mathrm{P}(a\le X\le b)$

$=\mathrm{P}(2m-b\le X\le 2m-a)$



실전 모의고사 3회

p.130~133

01 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=60$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{20}=\frac{40}{20}=2$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{X})=60+2=62$

답 ②

02 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(4,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=4p(1-p)=-4p^2+4p$

$=-4\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+1\ (0<p<1)$

즉 $\mathrm{V}(X)$는 $p=\frac{1}{2}$에서 최댓값 1을 가지므로

$\sigma(X)$의 최댓값은 $\sqrt{1}=1$

답 ④

03 표준편차의 값이 클수록 곡선의 중앙 높이가 낮아지면서 옆으로 퍼지는 모양이 되므로

$\sigma(Y)<\sigma(X)<\sigma(Z)$

답 ②

04 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

$\overline{X}=2$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$로 나타내면

$(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)$

$=\mathrm{P}(X_1=1,\ X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2,\ X_2=2)+\mathrm{P}(X_1=3,\ X_2=1)$

$=2\mathrm{P}(X_1=1,\ X_2=3)+\mathrm{P}(X_1=2,\ X_2=2)$

$=2\times\frac{1}{10}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}$

$=\frac{17}{100}$

답 ①

05 꺼낸 2자루의 필기구에 연필이 포함되어 있는 사건을 A, 꺼낸 2자루의 필기구가 모두 연필인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

A^C는 꺼낸 2자루의 필기구에 연필이 포함되어 있지 않은 사건, 즉 꺼낸 2자루의 필기구가 모두 볼펜인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{7}\mathrm{C}_{2}}{{}_{10}\mathrm{C}_{2}}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

꺼낸 2자루의 필기구가 모두 연필일 확률은

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{3}\mathrm{C}_{2}}{{}_{10}\mathrm{C}_{2}}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$

이때 $B\subset A$, 즉 $A\cap B=B$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{1}{8}$

답 ①

06 2, 4, 6, 8, 10 중 서로 다른 두 수의 차가 될 수 있는 수는 2, 4, 6, 8이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6, 8이고

$\mathrm{P}(|X-5|=3)=\mathrm{P}(X-5=-3$ 또는 $X-5=3)$

$=\mathrm{P}(X=2$ 또는 $X=8)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=8)$

2, 4, 6, 8, 10이 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

꺼낸 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 할 때,

$X=2$인 경우는 두 수 a, b 의 차가 2인 경우이므로 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(2, 4)$, $(4, 6)$, $(6, 8)$, $(8, 10)$의 4가지

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\dfrac{4}{10}$

$X=8$인 경우는 두 수 a, b의 차가 8인 경우이므로 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(2, 10)$의 1가지

$\therefore \mathrm{P}(X=8)=\dfrac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(|X-5|=3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=8)$

$=\dfrac{4}{10}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{2}$

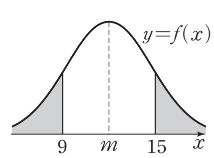
답 ③

07 정규분포를 따르는 확률변수 X의 평균을 m, 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{P}(X\le 9)+\mathrm{P}(X\le 15)=1$에서

$\mathrm{P}(X\le 9)=1-\mathrm{P}(X\le 15)$

$=\mathrm{P}(X\ge 15)$

$\therefore m=\dfrac{9+15}{2}=12$



$\therefore \mathrm{P}(X\ge 9)=\mathrm{P}(9\le X\le 12)+\mathrm{P}(X\ge 12)$

$=0.23+0.5=0.73$

답 ④

08 이 지역 고등학교 3학년 학생의 수학 영역 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 이 지역 고등학교 3학년 학생 한 명의 수학 영역 성적이 40점 이상 55점 이하일 확률은

$\mathrm{P}(40\le X\le 55)=\mathrm{P}\left(\dfrac{40-50}{5}\le \dfrac{X-50}{5}\le \dfrac{55-50}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.48+0.34=0.82$

따라서 이 지역 고등학교 3학년 학생 1000명 중 수학 영역 성적이 40점 이상 55점 이하인 학생 수는

$1000\times 0.82=820$

답 ⑤

09 A팀이 4승 3패로 우승하려면 6차전까지 3승 3패 후 7차전을 이겨야 하므로

${}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{20\times 2^3\times 2}{3^7}=\dfrac{320}{3^7}$

답 ③

10 이 공장에서 생산한 과자 한 봉지의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 24^2)$을 따르므로 이 공장에서 생산한 과자 중 임의추출한 4봉지의 무게의 평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(300,\ \dfrac{24^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(300,\ 12^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-300}{12}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 과자 한 세트의 무게는 $4\overline{X}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(1176\le 4\overline{X}\le 1320)$

$=\mathrm{P}(294\le \overline{X}\le 330)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{294-300}{12}\le Z\le \dfrac{330-300}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 2.5)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=0.1915+0.4938$

$=0.6853$

답 ③

11 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고

$\mathrm{P}(X=x)$는 두 번째로 공을 꺼냈을 때 첫 번째에 나온 수 4개 중 x개, 첫 번째에 나오지 않은 수 4개 중 $(4-x)$개가 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{4-x}}{{}_8\mathrm{C}_4}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{1}{70}$	$\dfrac{16}{70}$	$\dfrac{36}{70}$	$\dfrac{16}{70}$	$\dfrac{1}{70}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{70}+1\times\dfrac{16}{70}+2\times\dfrac{36}{70}+3\times\dfrac{16}{70}+4\times\dfrac{1}{70}$

$=2$

답 ①

12 표본의 크기 100은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차의 값 5를 사용할 수 있다.

따라서 이 지역 전체 만 5세 어린이의 체중의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

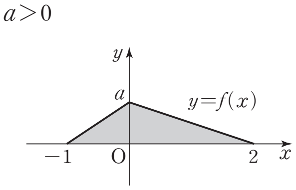
$18-1.96\times\dfrac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 18+1.96\times\dfrac{5}{\sqrt{100}}$

$\therefore 17.02\le m\le 18.98$

답 ④

13 $-1\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이므로 $a>0$

$y=f(x)$의 그래프는 세 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ a)$, $(2,\ 0)$을 지나고, 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$\dfrac{1}{2}\times\{2-(-1)\}\times a=1$

$\dfrac{3}{2}a=1$ $\quad\therefore a=\dfrac{2}{3}$

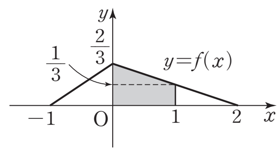
$$\therefore f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{2}{3} & (-1\le x\le 0) \\ -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} & (0<x\le 2) \end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$을 지나므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\times 1$

$=\frac{1}{2}$



답 ③

14 상자 A에서 꺼낸 공에 숫자 2가 적혀 있는 사건을 A, 상자 B에서 꺼낸 공에 짝수가 적혀 있는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B)$이고

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

(i) 상자 A에서 꺼낸 공에 숫자 2가 적혀 있을 때

상자 B에는 숫자 2, 2, 3, 3, 3, 6이 각각 하나씩 적힌 6개의 공이 들어 있으므로 상자 B에서 꺼낸 공에 짝수가 적혀 있을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

(ii) 상자 A에서 꺼낸 공에 숫자 3이 적혀 있을 때

상자 B에는 숫자 2, 3, 3, 3, 3, 6이 각각 하나씩 적힌 6개의 공이 들어 있으므로 상자 B에서 꺼낸 공에 짝수가 적혀 있을 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{12}=\frac{11}{24}$ 답 ①

참고 A^C는 상자 A에서 꺼낸 공에 숫자 3이 적혀 있는 사건이므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4}$

15 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=1 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}$

X	a	$2a$	$3a$	$4a$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=a\times\frac{1}{3}+2a\times\frac{1}{4}+3a\times\frac{1}{4}+4a\times\frac{1}{6}=\frac{9}{4}a$

이때 $\mathrm{E}(X)=\frac{15}{4}$이므로

$\frac{9}{4}a=\frac{15}{4} \qquad \therefore a=\frac{5}{3}$

이때 $Y=aX+b=\frac{5}{3}X+\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{5}{3}X+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{3}\mathrm{E}(X)+\frac{1}{4}$

$=\frac{5}{3}\times\frac{15}{4}+\frac{1}{4}=\frac{13}{2}$ 답 ②

16 집합 X의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 $2^4-1=15$이므로 서로 다른 세 부분집합 A, B, C를 택하는 전체 경우의 수는 ${}_{15}\mathrm{P}_3$

세 집합 A, B, C를 택할 때 $A\subset B\subset C$인 사건을 E, $n(A)=2$인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(F|E)$이고

세 집합 A, B, C 중 어느 것도 공집합이 아니므로 $n(A)=1$ 또는 $n(A)=2$이다. ←즉 F^C는 $n(A)=1$인 사건이다.

(i) $n(A)=1$일 때

서로 다른 세 집합 A, B, C에 대하여 $A\subset B\subset C$인 경우의 수는

$n(A)=1$, $n(B)=2$, $n(C)=3$일 때 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=24$

$n(A)=1$, $n(B)=2$, $n(C)=4$일 때 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times 1=12$

$n(A)=1$, $n(B)=3$, $n(C)=4$일 때 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2\times 1=12$

따라서 $n(A)=1$이고 $A\subset B\subset C$인 경우의 수는 $=n(F^C\cap E)$

$24+12+12=48$

$\therefore \mathrm{P}(F^C\cap E)=\frac{48}{{}_{15}\mathrm{P}_3}$

(ii) $n(A)=2$일 때

서로 다른 세 집합 A, B, C에 대하여 $A\subset B\subset C$인 경우의 수는

$n(A)=2$, $n(B)=3$, $n(C)=4$일 때

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times 1=12$

즉 $n(A)=2$이고 $A\subset B\subset C$인 경우의 수가 12이므로 $=n(F\cap E)$

$\mathrm{P}(F\cap E)=\frac{12}{{}_{15}\mathrm{P}_3}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(F^C\cap E)+\mathrm{P}(F\cap E)$

$=\frac{48}{{}_{15}\mathrm{P}_3}+\frac{12}{{}_{15}\mathrm{P}_3}=\frac{60}{{}_{15}\mathrm{P}_3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(F\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{12}{{}_{15}\mathrm{P}_3}}{\frac{60}{{}_{15}\mathrm{P}_3}}=\frac{1}{5}$ 답 ③

17 임의추출한 n명 중 A과목을 수강하는 학생의 비율이 0.1이고, 이 지역 전체 고등학교 2학년 학생 중 A과목을 수강하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이가 0.0516이므로

$2\times 2.58\times\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}}=0.0516$ …… ❶

$\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}}=\frac{1}{100}$, $\frac{3}{10}\sqrt{\frac{1}{n}}=\frac{1}{100}$

$\sqrt{\frac{1}{n}}=\frac{1}{30}$, $\frac{1}{n}=\frac{1}{900} \qquad \therefore n=900$ …… ❷

답 900

채점기준	배점
❶ 신뢰구간의 길이에 대한 식 세우기	2
❷ 자연수 n의 값 구하기	2

18 4장의 카드 전체를 3가지 색 중 일부 또는 전부를 사용하여 임의로 칠하는 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고

(i) $X=1$, 즉 1가지 색을 사용하는 경우

3가지 색 중 1가지를 택하여 4장의 카드를 모두 칠하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

$\therefore P(X=1)=\dfrac{3}{81}=\dfrac{1}{27}$ …… ❶

(ii) $X=2$, 즉 2가지 색을 사용하는 경우

3가지 색 중 2가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

택한 2가지 색을 모두 사용하여 4장의 카드를 칠하는 경우의 수는

${}_2\Pi_4-\underbrace{2}_{\text{1가지 색만 사용하는 경우 제외}}=2^4-2=14$

따라서 2가지 색을 사용하여 카드를 칠하는 경우의 수는

$3\times14=42$

$\therefore P(X=2)=\dfrac{42}{81}=\dfrac{14}{27}$ …… ❷

(iii) $X=3$, 즉 3가지 색을 모두 사용하는 경우

3가지 색 중 1가지 색을 택하여 2장의 카드를 칠하고, 나머지 2가지 색은 각각 한 장의 카드를 칠하는 경우의 수는

${}_3C_1\times\dfrac{4!}{2!}=36$

$\therefore P(X=3)=\dfrac{36}{81}=\dfrac{4}{9}$ …… ❸

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{14}{27}$	$\frac{4}{9}$	1

$E(X)=1\times\dfrac{1}{27}+2\times\dfrac{14}{27}+3\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{65}{27}$ …… ❹

$\therefore E(27X-2)=27E(X)-2=27\times\dfrac{65}{27}-2=63$ …… ❺

답 63

채점기준	배점
❶ $P(X=1)$의 값 구하기	1
❷ $P(X=2)$의 값 구하기	2
❸ $P(X=3)$의 값 구하기	2
❹ $E(X)$의 값 구하기	1
❺ $E(27X-2)$의 값 구하기	1

다른풀이 (ii) $X=2$, 즉 2가지 색을 사용하는 경우

3가지 색 중 2가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

(ㄱ) 2가지 색 중 1가지 색을 택하여 1장의 카드를 칠하고, 나머지 색은 3장의 카드를 칠하는 경우의 수는

${}_2C_1\times\dfrac{4!}{3!}=8$

(ㄴ) 2가지 색을 각각 2장의 카드에 칠하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

따라서 2가지 색을 사용하여 카드를 칠하는 경우의 수는

$3\times(8+6)=42$

$\therefore P(X=2)=\dfrac{42}{81}=\dfrac{14}{27}$

19 조건 (가)에서 확률변수 X의 평균은 24이다. …… ❶

조건 (나)에서 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것이므로 확률변수 Y의 평균은 $24-k$이다. …… ❷

또 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 같으므로 X, Y의 표준편차를 σ라 하면 X는 정규분포 $N(24,\ \sigma^2)$을 따르고, Y는 정규분포 $N(24-k,\ \sigma^2)$을 따른다. …… ❸

따라서 $Z_X=\dfrac{X-24}{\sigma}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(20\le X\le 28)=0.6826$에서

$$\begin{aligned}P(20\le X\le 28)&=P\left(\frac{20-24}{\sigma}\le\frac{X-24}{\sigma}\le\frac{28-24}{\sigma}\right)\\&=P\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z_X\le\frac{4}{\sigma}\right)\\&=2P\left(0\le Z_X\le\frac{4}{\sigma}\right)\\&=0.6826\end{aligned}$$

$\therefore P\left(0\le Z_X\le\dfrac{4}{\sigma}\right)=0.3413$

이때 $P(0\le Z_X\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{4}{\sigma}=1\quad\therefore \sigma=4$ …… ❹

따라서 Y는 정규분포 $N(24-k,\ 4^2)$을 따르고

$Z_Y=\dfrac{Y-(24-k)}{4}$로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(Y\ge 35)=0.0668$에서

$$\begin{aligned}P(Y\ge 35)&=P\left(\frac{Y-(24-k)}{4}\ge\frac{35-(24-k)}{4}\right)\\&=P\left(Z_Y\ge\frac{k+11}{4}\right)\\&=0.5-P\left(0\le Z_Y\le\frac{k+11}{4}\right)\\&=0.0668\end{aligned}$$

$\therefore P\left(0\le Z_Y\le\dfrac{k+11}{4}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z_Y\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{11+k}{4}=1.5,\ k+11=6\qquad\therefore k=-5$ …… ❺

답 -5

채점기준	배점
❶ X의 평균 구하기	1
❷ Y의 평균을 k에 대하여 나타내기	1
❸ X, Y의 표준편차가 같음을 설명하고 σ로 놓기	1
❹ σ의 값 구하기	2
❺ k의 값 구하기	2

20 X에서 X로의 모든 함수의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4$

$f(2)\le f(3)\le f(4)$인 사건을 A, $f(4)$의 값이 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다. …… ❶

(i) $f(2)\le f(3)\le f(4)$인 함수의 개수

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

$f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

따라서 $f(2)\le f(3)\le f(4)$인 함수의 개수는 $20\times4=80$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{80}{4^4}$ …… ❷

(ii) $f(2)\le f(3)\le f(4)$이고 $f(4)$의 값이 짝수인 함수의 개수

(ㄱ) $f(4)=2$일 때

$f(2)\le f(3)\le 2$이므로 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

$f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

따라서 $f(2)\le f(3)\le f(4)$이고 $f(4)=2$인 함수의 개수는 $3\times4=12$

(ㄴ) $f(4)=4$일 때

$f(2)\le f(3)\le 4$이므로 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

$f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

따라서 $f(2)\le f(3)\le f(4)$이고 $f(4)=4$인 함수의 개수는 $10\times4=40$

(ㄱ), (ㄴ)에서 $f(2)\le f(3)\le f(4)$이고 $f(4)$의 값이 짝수인 함수의 개수는 $12+40=52$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{52}{4^4}$ …… ❸

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{52}{4^4}}{\frac{80}{4^4}}=\frac{13}{20}$$

이므로 $p=20$, $q=13$

$\therefore p+q=20+13=33$ …… ❹

답 33

채점기준	배점
❶ $f(2)\le f(3)\le f(4)$인 사건을 A, $f(4)$의 값이 짝수인 사건을 B로 놓고 구하는 확률이 $\mathrm{P}(B\|A)$임을 설명하기	1
❷ $\mathrm{P}(A)$의 값 구하기	2
❸ $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값 구하기	3
❹ $\mathrm{P}(B\|A)$의 값과 $p+q$의 값 구하기	1

실전 모의고사 4회

p.134~137

01 $\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{16}$

답 ⑤

02 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=15)$

$=a(\sqrt{2}-\sqrt{1})+a(\sqrt{3}-\sqrt{2})+a(\sqrt{4}-\sqrt{3})$
$+\cdots+a(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=a\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$
$+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})\}$

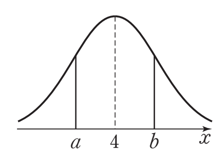
$=a\{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{16})-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{15})\}$

$=a(\sqrt{16}-\sqrt{1})=3a=1$

$\therefore a=\dfrac{1}{3}$

답 ①

03 정규분포를 따르는 확률변수 X의 평균이 4이므로 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다. 즉



$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}(X\le b)$에서

$\dfrac{a+b}{2}=4 \qquad \therefore a+b=8$

이때 자연수 a, b $(a<b)$의 값과 ab의 값은 다음과 같다.

$a=1$일 때 $b=7 \qquad \therefore ab=1\times7=7$

$a=2$일 때 $b=6 \qquad \therefore ab=2\times6=12$

$a=3$일 때 $b=5 \qquad \therefore ab=3\times5=15$

따라서 ab의 최댓값은 15이다.

답 ④

04 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 8^2)$을 따르므로 표본의 크기가 n일 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \dfrac{8^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(100,\ \left(\dfrac{8}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

즉 $\mathrm{E}(\overline{X})=100$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{8}{\sqrt{n}}$이므로 $\mathrm{E}(\overline{X})-\sigma(\overline{X})\ge98$에서

$100-\dfrac{8}{\sqrt{n}}\ge98$, $\dfrac{8}{\sqrt{n}}\le2$

$\sqrt{n}\ge4 \qquad \therefore n\ge16$

따라서 자연수 n의 최솟값은 16이다.

답 ③

05 표본공간을 S라 하면 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 8\}$

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로

$A\cap B=\{2,\ 4\}$

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ (\text{참})$$

ㄴ. $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

또 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{5}{8}$이므로

$P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$

$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

즉 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다. (거짓)

ㄷ. $A\cap B\neq\varnothing$, 즉 $P(A\cap B)\neq 0$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\neq P(A)+P(B)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ①

다른풀이 ㄱ. $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $P(B|A)=\frac{1}{2}$이고 $P(B)=\frac{5}{8}$이므로

$P(B|A)\neq P(B)$

즉 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다. (거짓)

ㄷ. $P(A\cup B)=\frac{7}{8}$, $P(A)=\frac{4}{8}$, $P(B)=\frac{5}{8}$이므로

$P(A)+P(B)=\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{8}$

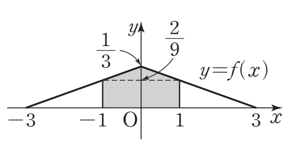
$\therefore P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$ (거짓)

06 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 6\times a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x+\frac{1}{3} & (-3\le x\le 0)\\ -\frac{1}{9}x+\frac{1}{3} & (0<x\le 3)\end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(1,\ \frac{2}{9}\right)$를 지나므로



$$\begin{aligned}P(|X|\le 1)&=P(-1\le X\le 1)\\&=2P(0\le X\le 1)\\&=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\right)\times 1\right\}\\&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

$\therefore a\times P(|X|\le 1)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{27}$ 답 ④

다른풀이
$$\begin{aligned}P(|X|\le 1)&=P(-1\le X\le 1)\\&=2P(0\le X\le 1)\\&=2\{0.5-P(1\le X\le 3)\}\\&=2\left(0.5-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2}{9}\right)=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

07 주머니 속에 들어 있는 12개의 공 중에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공의 색이 모두 다를 확률은

$P(A)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1\times{}_5C_1}{{}_{12}C_3}=\frac{3\times 4\times 5}{220}=\frac{3}{11}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(726,\ \frac{3}{11}\right)$을 따르므로

$V(X)=726\times\frac{3}{11}\times\frac{8}{11}=144$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{144}=12$

$\therefore \sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)=2\times 12=24$ 답 ⑤

08 이 농장에서 수확한 딸기 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $P(|X-m|\ge a)\le 0.2302$이므로

$$\begin{aligned}P(|X-m|\ge a)&=P\left(\left|\frac{X-m}{5}\right|\ge\frac{a}{5}\right)\\&=P\left(|Z|\ge\frac{a}{5}\right)\\&=P\left(Z\le-\frac{a}{5}\text{ 또는 }Z\ge\frac{a}{5}\right)\\&=2P\left(Z\ge\frac{a}{5}\right)\\&=2\left\{0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a}{5}\right)\right\}\\&=1-2P\left(0\le Z\le\frac{a}{5}\right)\le 0.2302\end{aligned}$$

$-2P\left(0\le Z\le\frac{a}{5}\right)\le -0.7698$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a}{5}\right)\ge 0.3849$

이때 $P(0\le Z\le 1.2)=0.3849$이므로

$\frac{a}{5}\ge 1.2 \qquad \therefore a\ge 6$

따라서 양수 a의 최솟값은 6이다. 답 ②

09 6번째 시행을 끝으로 시행을 멈추려면 5번째 시행까지 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 3개를 꺼내고, 6번째 시행에서 검은 바둑돌을 꺼내야 한다.

5번째 시행까지 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 3개를 꺼내는 사건을 A, 6번째 시행에서 검은 바둑돌을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cap B)$이다.

5번째 시행까지 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 3개가 나오는 순서를 정하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 3!}=10$

흰 바둑돌, 검은 바둑돌이 나오는 순서가 정해졌을 때, 흰 바둑돌을 2번, 검은 바둑돌을 3번 꺼낼 확률은

$\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{70}$

$\therefore P(A)=10\times\frac{3}{70}=\frac{3}{7}$

이때 남은 바둑돌은 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 1개이므로 5번째 시행까지 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 3개를 꺼냈을 때 6번째 시행에서 검은 바둑돌을 꺼낼 확률은

$P(B|A)=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$ 답 ①

10 1부터 6까지의 자연수 중 3의 배수는 3, 6이므로 전체 6장의 카드 중 3의 배수가 적힌 카드의 비율 p는

$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 임의추출한 3장의 카드 중 3의 배수가 적혀 있는 카드의 장수를 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르고, 임의추출한 3장의 카드 중 3의 배수가 적혀 있는 카드의 비율 $\hat{p}$은

$\hat{p}=\frac{X}{3}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\hat{p}=\frac{2}{3}\right)=\mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$ 답 ②

참고 (1) X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

(2) 크기가 n인 표본에서 어떤 성질을 가진 것이 추출된 횟수를 확률변수 X라 할 때, 표본비율 $\hat{p}$은

$\hat{p}=\frac{X}{n}$

11 모표준편차가 6이므로

크기가 81인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{6}{\sqrt{81}}\le m\le \overline{x_1}+1.96\times\frac{6}{\sqrt{81}}$

$\therefore \overline{x_1}-1.96\times\frac{2}{3}\le m\le \overline{x_1}+1.96\times\frac{2}{3}$

$\therefore a=\overline{x_1}-1.96\times\frac{2}{3},\ b=\overline{x_1}+1.96\times\frac{2}{3}$

또 크기가 324인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96\times\frac{6}{\sqrt{324}}\le m\le \overline{x_2}+1.96\times\frac{6}{\sqrt{324}}$

$\therefore \overline{x_2}-1.96\times\frac{1}{3}\le m\le \overline{x_2}+1.96\times\frac{1}{3}$

$\therefore c=\overline{x_2}-1.96\times\frac{1}{3},\ d=\overline{x_2}+1.96\times\frac{1}{3}$

이때 $a+b=80$이므로

$a+b=\left(\overline{x_1}-1.96\times\frac{2}{3}\right)+\left(\overline{x_1}+1.96\times\frac{2}{3}\right)=2\overline{x_1}=80$

$\therefore \overline{x_1}=40$

또 $\overline{x_1}+\overline{x_2}=76$이므로

$\overline{x_2}=76-\overline{x_1}=76-40=36$

$\therefore b-c=\left(40+1.96\times\frac{2}{3}\right)-\left(36-1.96\times\frac{1}{3}\right)$

$=4+1.96=5.96$ 답 ⑤

12 모표준편차가 42이고, 이 회사에서 수입한 전구 중 임의추출한 49개의 수명의 평균이 500시간이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 이 회사에서 수입하는 전체 전구의 수명의 평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$500-k\times\frac{42}{\sqrt{49}}\le m\le 500+k\times\frac{42}{\sqrt{49}}$

$\therefore 500-6k\le m\le 500+6k$

이것이 $c\le m\le c+24$와 일치하므로

$c=500-6k,\ c+24=500+6k$

두 식을 변끼리 빼면

$24=12k\qquad \therefore k=2$

따라서

$c=500-6k=500-6\times2=488,$

$\alpha=100\mathrm{P}(|Z|\le k)=100\mathrm{P}(|Z|\le 2)$

$=100\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)=100\times 2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=200\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=200\times 0.48$

$=96$

이므로

$\alpha+c=96+488=584$ 답 ①

13 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고

7개의 공 중 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때,

$\mathrm{P}(X=2)$는 1이 적힌 공을 2개 꺼낼 확률이므로 1이 적힌 공의 개수를 m이라 하면 조건 (가)에서

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_m\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7},\ {}_m\mathrm{C}_2=3\qquad \therefore m=3$

즉 7개의 공 중 1이 적힌 공이 3개이므로 2가 적힌 공의 개수를 n이라 하면 3이 적힌 공의 개수는 $4-n$이다.

$\mathrm{P}(X=4)$는 1이 적힌 공 1개, 3이 적힌 공 1개를 꺼내거나 2가 적힌 공을 2개 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_{4-n}\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$=\frac{3(4-n)+\frac{n(n-1)}{2!}}{21}$

$=\frac{6(4-n)+n(n-1)}{42}$

$=\frac{n^2-7n+24}{42}$

$\mathrm{P}(X=6)$은 3이 적힌 공을 2개 꺼낼 확률이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{{}_{4-n}\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$=\frac{\frac{(4-n)(3-n)}{2!}}{21}$

$=\frac{n^2-7n+12}{42}$

이때 조건 (나)에서

$\frac{n^2-7n+24}{42}=7\times\frac{n^2-7n+12}{42}$

$n^2-7n+24=7(n^2-7n+12)$

$6n^2-42n+60=0,\ n^2-7n+10=0$

$(n-2)(n-5)=0$

$\therefore n=2\ (\because 4-n>0)$ ← 3이 적힌 공의 개수는 양수이다.

따라서 주머니에는 1이 적힌 공 3개, 2가 적힌 공 2개, 3이 적힌

공 2개가 들어 있고, $P(X=3)$은 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 1개를 꺼낼 확률이므로

$P(X=3)=\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_7C_2}=\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$ 답 ④

참고 2가 적힌 공의 개수를 n이라 하면 3이 적힌 공의 개수는 $4-n$이므로 $0<n<4$

14 상자에서 임의로 공 한 개를 꺼낼 때, 흰 공을 꺼낼 확률은 $\dfrac{1}{3}$, 검은 공을 꺼낼 확률은 $\dfrac{2}{3}$이다.

상자에서 6번 공을 꺼낼 때, 흰 공이 k번 나온다고 하면 검은 공은 $(6-k)$번 나온다. 이때 점 P의 좌표는

$P(1\times k+(-1)\times(6-k),\ 1\times k+(-2)\times(6-k))$, 즉

$P(2k-6,\ 3k-12)$

점 P의 좌표가 $(2,\ 0)$이 되려면

$2k-6=2,\ 3k-12=0$

이어야 하므로

$k=4$

따라서 6번의 시행에서 흰 공을 4번, 검은 공을 2번 꺼내야 하므로 구하는 확률은

${}_6C_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{15\times1\times4}{3^6}=\dfrac{20}{3^5}$ 답 ①

15 $Z_X=\dfrac{X-54}{2\sigma}$, $Z_Y=\dfrac{Y-60}{\sigma}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 각각 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(50\le X\le 62)=P\left(\dfrac{50-54}{2\sigma}\le\dfrac{X-54}{2\sigma}\le\dfrac{62-54}{2\sigma}\right)$

$=P\left(-\dfrac{2}{\sigma}\le Z_X\le\dfrac{4}{\sigma}\right)$

$P(a\le Y\le a+6)=P\left(\dfrac{a-60}{\sigma}\le\dfrac{Y-60}{\sigma}\le\dfrac{(a+6)-60}{\sigma}\right)$

$=P\left(\dfrac{a-60}{\sigma}\le Z_Y\le\dfrac{a-54}{\sigma}\right)$

이때 $P(50\le X\le 62)=P(a\le Y\le a+6)$이므로

$P\left(-\dfrac{2}{\sigma}\le Z_X\le\dfrac{4}{\sigma}\right)=P\left(\dfrac{a-60}{\sigma}\le Z_Y\le\dfrac{a-54}{\sigma}\right)$

이때 $\dfrac{4}{\sigma}-\left(-\dfrac{2}{\sigma}\right)=\dfrac{a-54}{\sigma}-\dfrac{a-60}{\sigma}=\dfrac{6}{\sigma}$이므로

$-\dfrac{2}{\sigma}=\dfrac{a-60}{\sigma},\ \dfrac{4}{\sigma}=\dfrac{a-54}{\sigma}$ ⋯⋯ ㉠

또는

$\dfrac{2}{\sigma}=\dfrac{a-54}{\sigma},\ -\dfrac{4}{\sigma}=\dfrac{a-60}{\sigma}$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $a=58$, ㉡에서 $a=56$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$58+56=114$ 답 ①

참고 확률변수 Z가 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따를 때 $P(a\le Z\le b)=P(-b\le Z\le -a)$

16 집합 X에서 X로의 모든 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

함수 f가 $3f(2)=f(1)+f(3)$을 만족시키는 사건을 A, $f(a)=3$인 집합 X의 원소 a가 존재하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

$3f(2)=f(1)+f(3)$을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

$f(2)$의 값	$f(1)$의 값	$f(3)$의 값	$f(4)$의 값
1	1	2	1, 2, 3, 4
1	2	1	1, 2, 3, 4
2	2	4	1, 2, 3, 4
2	3	3	1, 2, 3, 4
2	4	2	1, 2, 3, 4

따라서 $3f(2)=f(1)+f(3)$을 만족시키는 함수 f의 개수는

$4\times5=20$

$\therefore P(A)=\dfrac{20}{256}$

이때 $3f(2)=f(1)+f(3)$이고 $f(a)=3$을 만족시키는 집합 X의 원소 a가 존재하는 경우는 다음과 같다.

$f(2)$의 값	$f(1)$의 값	$f(3)$의 값	$f(4)$의 값
1	1	2	3
1	2	1	3
2	2	4	3
2	3	3	1, 2, 3, 4
2	4	2	3

따라서 $3f(2)=f(1)+f(3)$이고 $f(a)=3$을 만족시키는 집합 X의 원소 a가 존재하는 함수 f의 개수는

$1+1+1+4+1=8$

$\therefore P(A\cap B)=\dfrac{8}{256}$

$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{8}{256}}{\frac{20}{256}}=\dfrac{2}{5}$ 답 ④

17 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_2C_xp^x(1-p)^{2-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2)$이므로

$P(X\ge1)=1-P(X=0)=1-{}_2C_0p^0(1-p)^2$

$=1-(1-p)^2=-p^2+2p$ ⋯⋯ ❶

확률변수 Y의 확률질량함수는

$P(Y=y)={}_7C_y\left(\dfrac{1}{2}\right)^y\left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-y}=\dfrac{{}_7C_y}{2^7}$ $(y=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 7)$

이므로

$P(Y\ge4)=P(Y=4)+P(Y=5)+P(Y=6)+P(Y=7)$

$=\dfrac{{}_7C_4}{2^7}+\dfrac{{}_7C_5}{2^7}+\dfrac{{}_7C_6}{2^7}+\dfrac{{}_7C_7}{2^7}$

$=\dfrac{{}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7}{2^7}$

$=\dfrac{2^6}{2^7}=\dfrac{1}{2}$ ⋯⋯ ❷

이때 $P(X\ge1)+P(Y\ge4)=\dfrac{19}{18}$이므로

$-p^2+2p+\frac{1}{2}=\frac{19}{18}$, $-p^2+2p=\frac{5}{9}$

$9p^2-18p+5=0$, $(3p-5)(3p-1)=0$

$\therefore p=\frac{1}{3}$ ($\because 0<p<1$) ⋯⋯ ❸

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(2, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $V(X)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ ⋯⋯ ❹

이고

$E(9X)=9E(X)=9\times\frac{2}{3}=6$

$V(9X)=9^2V(X)=81\times\frac{4}{9}=36$

$\therefore E(9X)+V(9X)=6+36=42$ ⋯⋯ ❺

답 42

채점기준	배점
❶ $P(X\ge 1)$의 값을 p에 대하여 나타내기	1
❷ $P(Y\ge 4)$의 값 구하기	2
❸ p의 값 구하기	1
❹ $E(X)$, $V(X)$의 값 구하기	1
❺ $E(9X)+V(9X)$의 값 구하기	1

참고 ${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3={}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7=2^{7-1}$

18 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고

$P(X=0)$은 두 번 모두 질 확률이므로

$P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ ⋯⋯ ❶

$P(X=1)$은 한 번은 비기고 한 번은 질 확률이므로

$P(X=1)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ ⋯⋯ ❷

$P(X=2)$는 두 번 모두 비기거나 한 번은 이기고 한 번은 질 확률이므로

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$ ⋯⋯ ❸

$P(X=3)$은 한 번은 이기고 한 번은 비길 확률이므로

$P(X=3)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ ⋯⋯ ❹

$P(X=4)$는 두 번 모두 이길 확률이므로

$P(X=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ ⋯⋯ ❺

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{3}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}=2$

⋯⋯ ❻

답 2

채점기준	배점
❶ $P(X=0)$의 값 구하기	1
❷ $P(X=1)$의 값 구하기	1
❸ $P(X=2)$의 값 구하기	1
❹ $P(X=3)$의 값 구하기	1
❺ $P(X=4)$의 값 구하기	1
❻ $E(X)$의 값 구하기	1

19 주어진 시행을 한 번 할 때 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 E, 주사위 한 개를 한 번 던져 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A라 하면 $A\subset E$이고

1, 2, 3, 6

$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(i) 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$P(A\cap E)=P(A)=\frac{2}{3}$

(ii) 주사위를 한 번 던져서 6의 약수가 아닌 눈이 나오고, 주사위를 두 번째로 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

(i), (ii)에서 주어진 시행을 한 번 할 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$ ⋯⋯ ❶

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(648, \frac{8}{9}\right)$을 따르고 ⋯⋯ ❷

$E(X)=648\times\frac{8}{9}=576$, $V(X)=648\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}=64$

이때 648은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(576, 8^2)$을 따른다. ⋯⋯ ❸

따라서 $Z=\frac{X-576}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$P(568\le X\le 580)=P\left(\frac{568-576}{8}\le\frac{X-576}{8}\le\frac{580-576}{8}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le 0.5)$$
$$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.3413+0.1915=0.5328$$

$\therefore k=0.5328$

$\therefore 10^4\times k=5328$ ⋯⋯ ❹

답 5328

채점기준	배점
❶ 주어진 시행을 한 번 할 때 6의 약수의 눈이 나올 확률 구하기	2
❷ 확률변수 X가 따르는 이항분포 구하기	1
❸ 확률변수 X가 근사적으로 따르는 정규분포 구하기	2
❹ $P(568\le X\le 580)$의 값과 $10^4\times k$의 값 구하기	2

다른풀이 주사위를 한 번 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 6의 약수가 아닌 눈이 나올 확률은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

E^C는 주어진 시행을 한 번 할 때 6의 약수의 눈이 나오지 않는 사건, 즉 주사위를 두 번 던졌을 때 6의 약수가 아닌 눈만 두 번 나오는 사건이므로

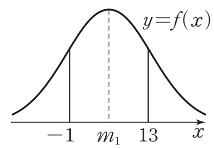
$P(E^C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$\therefore P(E)=1-P(E^C)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

20 조건 (가)에서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 y축, 즉 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로 $m_2=-m_1$이고, 두 곡선의 모양은 같으므로 $\sigma_1=\sigma_2$ ⋯⋯ ❶

또 $g(1)=f(-1)$이므로 조건 (나)에서

$f(-1)=f(13)$



이때 확률변수 X의 평균이 m_1이므로

$m_1=\dfrac{-1+13}{2}=6$ …… ❷

$\therefore m_2=-m_1=-6$ …… ❸

즉 확률변수 X는 정규분포 $N(6, \sigma_1^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $N(-6, \sigma_1^2)$을 따르므로 정규분포 $N(6, \sigma_1^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출했을 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(6, \left(\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고, 정규분포 $N(-6, \sigma_1^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출했을 때 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(-6, \left(\dfrac{\sigma_1}{4}\right)^2\right)$을 따른다. …… ❹

따라서 $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-6}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}$, $Z_{\overline{Y}}=\dfrac{\overline{Y}-(-6)}{\frac{\sigma_1}{4}}$으로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$P(\overline{X}\le 5)=P\left(\dfrac{\overline{X}-6}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}\le\dfrac{5-6}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=P\left(Z_{\overline{X}}\le-\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right)=P\left(Z_{\overline{X}}\ge\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right),$$

$$P(\overline{Y}\ge-3)=P\left(\dfrac{\overline{Y}-(-6)}{\frac{\sigma_1}{4}}\ge\dfrac{-3-(-6)}{\frac{\sigma_1}{4}}\right)$$

$$=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\dfrac{12}{\sigma_1}\right)$$

이때 $P(\overline{X}\le 5)=P(\overline{Y}\ge-3)$이므로

$$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right)=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\dfrac{12}{\sigma_1}\right)$$

$\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_1}=\dfrac{12}{\sigma_1}$, $\sqrt{n}=12$ $\quad\therefore n=144$ …… ❺

답 144

채점기준	배점
❶ $m_2=-m_1$, $\sigma_1=\sigma_2$임을 설명하기	2
❷ m_1의 값 구하기	1
❸ m_2의 값 구하기	1
❹ $\overline{X}$, $\overline{Y}$가 각각 따르는 정규분포 구하기	1
❺ 자연수 n의 값 구하기	2

실전 모의고사 5회

p.138~141

01 ①, ③, ④, ⑤ 표본조사가 더 적합하다.

따라서 전수조사가 더 적합한 것은 ②이다.

답 ②

02 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A, B^C도 서로 독립이므로

$P(A\cap B^C)=\dfrac{1}{7}$에서 $P(A)P(B^C)=\dfrac{1}{7}$

$\therefore P(A)\{1-P(B)\}=\dfrac{1}{7}$ …… ㉠

이때 $P(B)=P(A\cup B)-P(A\cap B^C)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{11}{21}$이므로

이것을 ㉠에 대입하면

$P(A)\times\left(1-\dfrac{11}{21}\right)=\dfrac{1}{7}$

$\therefore P(A)=\dfrac{3}{10}$

답 ③

03 동전 한 개를 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\dfrac{1}{2}$

즉 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=n\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}n$

$V(X)=n\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}n$

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\dfrac{1}{4}n+\left(\dfrac{1}{2}n\right)^2=\dfrac{1}{4}n+\dfrac{1}{4}n^2$

이때 $E(4X^2)-E(8X)=340$에서

$4E(X^2)-8E(X)=340$

$4\left(\dfrac{1}{4}n+\dfrac{1}{4}n^2\right)-8\times\dfrac{1}{2}n=340$

$n^2-3n-340=0$, $(n+17)(n-20)=0$

$\therefore n=20$ ($\because$ n은 자연수)

답 ①

04 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고

$P(X=x)$는 7개의 공 중 4개의 공을 동시에 꺼낼 때 빨간 공 x개, 파란 공 $(4-x)$개를 꺼낼 확률이므로

$P(X=x)=\dfrac{{}_3C_x\times{}_4C_{4-x}}{{}_7C_4}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

따라서

$P(X=0)=\dfrac{{}_3C_0\times{}_4C_4}{{}_7C_4}=\dfrac{1\times1}{35}=\dfrac{1}{35}$

$P(X=1)=\dfrac{{}_3C_1\times{}_4C_3}{{}_7C_4}=\dfrac{3\times4}{35}=\dfrac{12}{35}$

$P(X=2)=\dfrac{{}_3C_2\times{}_4C_2}{{}_7C_4}=\dfrac{3\times6}{35}=\dfrac{18}{35}$

$P(X=3)=\dfrac{{}_3C_3\times{}_4C_1}{{}_7C_4}=\dfrac{1\times4}{35}=\dfrac{4}{35}$

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$E(X)=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{12}{7}$

$E(X^2)=0^2\times\dfrac{1}{35}+1^2\times\dfrac{12}{35}+2^2\times\dfrac{18}{35}+3^2\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{24}{7}$

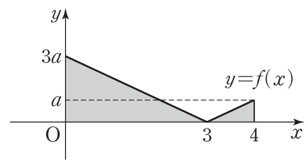
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{24}{7}-\left(\dfrac{12}{7}\right)^2=\dfrac{24}{49}$

$\therefore V(7X)=7^2V(X)=49\times\dfrac{24}{49}=24$

답 ①

05 $0\le x\le4$에서 $f(x)\ge0$이므로 $a>0$

$y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0,\ 3a)$, $(4,\ a)$를 지나고, 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=4$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

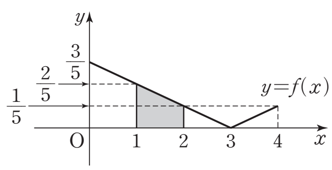


$\frac{1}{2}\times3\times3a+\frac{1}{2}\times1\times a=1$

$\frac{9}{2}a+\frac{a}{2}=1$, $5a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{5}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{5}|x-3|\ (0\le x\le4)$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(1,\ \frac{2}{5}\right)$, $\left(2,\ \frac{1}{5}\right)$을 지나므로



$\mathrm{P}(1\le X\le2)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)\times1=\frac{3}{10}$

답 ③

06 B 지점에 도착하려면 왼쪽 아래로 2번, 오른쪽 아래로 1번 이동해야 하므로 5의 약수의 눈이 2번, 5의 약수가 아닌 눈이 1번 나와야 한다.
1, 5

주사위 한 개를 던져 5의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 갈림길을 3번 만난 후 점 P가 B 지점에 도착할 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$

답 ②

07 (i) 갑이 1, 3, 7, 9가 적힌 카드 중 한 장을 꺼내고, 을이 5, 10이 적힌 카드 중 한 장을 꺼낼 확률

$\frac{4}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{8}{90}$

(ii) 갑이 5가 적힌 카드를 꺼내고, 을이 10이 적힌 카드를 꺼낼 확률

$\frac{1}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{90}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{90}+\frac{1}{90}=\frac{1}{10}$

답 ①

08 $Z=\frac{X-12}{\sigma}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le10)=0.3085$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le10)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-12}{\sigma}\le\frac{10-12}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{2}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2}{\sigma}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)=0.3085\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)=0.1915$이므로

$\frac{2}{\sigma}=0.5 \quad\therefore \sigma=4$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\le5\sigma)&=\mathrm{P}(X\le20)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{X-12}{4}\le\frac{20-12}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

09 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 $\mathrm{P}(X=x)$는 x번 의자에 어른 2명 중 1명을, 1, 2, ..., $(x-1)$번 의자에 어린이 3명 중 $(x-1)$명을 앉히고, $(x+1)$, $(x+2)$, ..., 5번 의자에 남은 $(5-x)$명을 앉힐 확률이므로

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_{x-1}\times(5-x)!}{5!}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_0\times4!}{5!}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_1\times3!}{5!}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_2\times2!}{5!}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_3\times1!}{5!}=\frac{1}{10}$

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{10}=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-2^2=1$

$\therefore \mathrm{V}(3X+1)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times1=9$

답 ①

다른풀이 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{10}$

10 이 골프장을 이용한 팀의 18홀 이용 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(220,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-220}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 이 골프장을 이용한 팀 중 임의로 택한 한 팀이 추가금을 내지 않을 확률, 즉 18홀을 4시간 이하로 이용할 확률은
240분

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le240)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-220}{20}\le\frac{240-220}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le1)\end{aligned}$$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$ 답 ③

참고 3시간 40분은 $3\times60+40=220$(분)이다.

11 $\overline{X_1}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)^2\right)$, $\overline{X_2}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X_1})=\mathrm{E}(\overline{X_2})=m$ (참)

ㄴ. $\mathrm{V}(n_1\overline{X_1})={n_1}^2\mathrm{V}(\overline{X_1})={n_1}^2\times\dfrac{\sigma^2}{n_1}=n_1\sigma^2$

$\mathrm{V}(n_2\overline{X_2})={n_2}^2\mathrm{V}(\overline{X_2})={n_2}^2\times\dfrac{\sigma^2}{n_2}=n_2\sigma^2$

$\therefore \mathrm{V}(n_1\overline{X_1})\ne\mathrm{V}(n_2\overline{X_2})$ (거짓)

ㄷ. $n_1=9n_2$일 때

$\sigma(3\overline{X_1})=|3|\sigma(\overline{X_1})=3\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=\dfrac{3\sigma}{\sqrt{9n_2}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

$\sigma(\overline{X_2})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

$\therefore \sigma(3\overline{X_1})=\sigma(\overline{X_2})$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

12 모표준편차가 4이므로 이 지역에서 임의추출한 만 6세 어린이 n명의 키의 평균의 값을 $\overline{x}$ ($\overline{x}$는 정수)라 하면 이 지역 전체 만 6세 어린이들의 키의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2\times\dfrac{4}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2\times\dfrac{4}{\sqrt{n}}$

$\therefore \overline{x}-\dfrac{8}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+\dfrac{8}{\sqrt{n}}$

이때 $\overline{x}$가 정수이고 이 신뢰구간에 포함된 정수가 5개이므로 이 신뢰구간에 포함된 정수 5개는

$\overline{x}-2$, $\overline{x}-1$, $\overline{x}$, $\overline{x}+1$, $\overline{x}+2$

이다. 즉

$\overline{x}-3<\overline{x}-\dfrac{8}{\sqrt{n}}\le\overline{x}-2$, $\overline{x}+2\le\overline{x}+\dfrac{8}{\sqrt{n}}<\overline{x}+3$

이므로

$2\le\dfrac{8}{\sqrt{n}}<3$, $\dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{n}}{8}\le\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{8}{3}<\sqrt{n}\le4$ $\quad\therefore \dfrac{64}{9}<n\le16$

따라서 자연수 n은 8, 9, 10, …, 16의 9개이다. 답 ⑤

13 수험생들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(66, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-66}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

상위 10 %에 해당하는 점수가 72.4점이므로

$\mathrm{P}(X\ge72.4)=0.1$에서

$\mathrm{P}(X\ge72.4)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-66}{\sigma}\ge\dfrac{72.4-66}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{6.4}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{6.4}{\sigma}\right)=0.1$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{6.4}{\sigma}\right)=0.4$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.28)=0.4$이므로

$\dfrac{6.4}{\sigma}=1.28$ $\quad\therefore \sigma=5$

상위 3 %에 해당하는 점수를 k점이라 하면

$\mathrm{P}(X\ge k)=0.03$이므로

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-66}{5}\ge\dfrac{k-66}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{k-66}{5}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-66}{5}\right)=0.03$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-66}{5}\right)=0.47$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.9)=0.47$이므로

$\dfrac{k-66}{5}=1.9$, $k-66=9.5$ $\quad\therefore k=75.5$

따라서 상위 3 %에 해당하는 점수는 75.5점이다. 답 ④

14 모표준편차가 100이고, $b-a$는 이 회사에서 생산하는 여행용 가방 한 개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2\times1.96\times\dfrac{100}{\sqrt{n}}=\dfrac{392}{\sqrt{n}}$

이때 $56\le b-a\le98$이어야 하므로

$56\le\dfrac{392}{\sqrt{n}}\le98$, $4\le\dfrac{28}{\sqrt{n}}\le7$

$\dfrac{1}{7}\le\dfrac{\sqrt{n}}{28}\le\dfrac{1}{4}$, $4\le\sqrt{n}\le7$

$\therefore 16\le n\le49$

따라서 자연수 n의 최댓값은 49, 최솟값은 16이므로 자연수 n의 최댓값과 최솟값의 합은

$49+16=65$ 답 ④

15 시행 전 5개의 공이 들어 있던 주머니 A에서 공 3개를 꺼냈다가 2개를 주머니 A에 다시 넣는 시행이므로 시행 후 주머니 A에는 공 4개가 들어 있다. 즉 시행 후 주머니 A에 흰 공 1개, 검은 공 3개가 들어 있을 확률을 구해야 한다.

시행 전 주머니 A에는 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있으므로 시행 후 흰 공 1개, 검은 공 3개가 들어 있으려면 흰 공은 2개 줄어들고, 검은 공은 1개 늘어나야 한다.

(i) [1단계] 주머니 A에서 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내고, [2단계] 주머니 B에서 검은 공 2개를 꺼내는 경우

[1단계] 후 주머니 B에는 흰 공 2개, 검은 공 2개가 들어 있으므로 [2단계] 시행 후 주머니 A에 들어 있는 흰 공의 개수가 1이 될 확률은

$$\frac{{}_3C_2 \times {}_2C_1}{{}_5C_3} \times \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{3\times 2}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$$

(ii) [1단계] 주머니 A에서 흰 공 3개를 꺼내고,

[2단계] 주머니 B에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우

[1단계] 후 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 1개가 들어 있으므로 [2단계] 시행 후 주머니 A에 들어 있는 흰 공의 개수가 1이 될 확률은

$$\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_1C_1}{{}_4C_2} = \frac{1}{10} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{20}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$ 답 ②

16 모집단이 정규분포 $N(m,\ 10^2)$을 따르므로

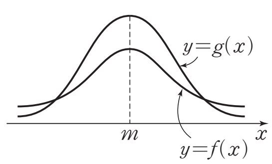
크기가 4인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(m,\ \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $N(m,\ 5^2)$을 따르고,

크기가 25인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포

$N\left(m,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(m,\ 2^2)$을 따른다.

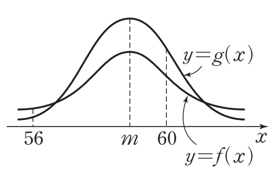
이때 $\overline{X}$, $\overline{Y}$의 평균은 모두 m이므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭축은 모두 직선 $x=m$이고,



$\sigma(\overline{X}) > \sigma(\overline{Y})$이므로 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 위의 그림과 같다.

조건 (가)에서 $m<60$ …… ㉠

조건 (나), (다)에서 오른쪽 그림과 같이



$60-m<m-56$, $-2m<-116$

$\therefore\ m>58$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$58<m<60$

$\therefore\ m=59$ ($\because$ m은 자연수)

따라서 $\overline{X}$는 정규분포 $N(59,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-59}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(a\le\overline{X}\le 69)=0.1359$에서

$$\begin{aligned} P(a\le\overline{X}\le 69) &= P\left(\frac{a-59}{5}\le\frac{\overline{X}-59}{5}\le\frac{69-59}{5}\right) \\ &= P\left(\frac{a-59}{5}\le Z\le 2\right) \\ &= P(0\le Z\le 2)-P\left(0\le Z\le\frac{a-59}{5}\right) \\ &= 0.4772-P\left(0\le Z\le\frac{a-59}{5}\right)=0.1359 \end{aligned}$$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{a-59}{5}\right)=0.3413$

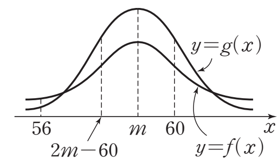
이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{a-59}{5}=1$, $a-59=5$ $\quad\therefore\ a=64$ 답 ③

다른풀이 조건 (가)에서

$m<60$ …… ㉠

조건 (나), (다)에서 오른쪽 그림과 같이



$2m-60>56$, $2m>116$

$\therefore\ m>58$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $58<m<60$

$\therefore\ m=59$ ($\because$ m은 자연수)

17 이 공장에서 만든 A 제품의 무게를 확률변수 X, B 제품의 무게를 확률변수 Y라 하면 X는 정규분포 $N(220,\ 10^2)$을 따르고, Y는 정규분포 $N(240,\ a^2)$을 따른다.

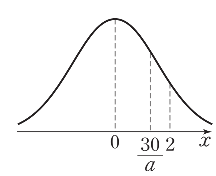
따라서 $Z_X=\frac{X-220}{10}$, $Z_Y=\frac{Y-240}{a}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 …… ❶

$$\begin{aligned} p_1 &= P(X\ge 240) \\ &= P\left(\frac{X-220}{10}\ge\frac{240-220}{10}\right) \\ &= P(Z_X\ge 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= P(Y\ge 270) \\ &= P\left(\frac{Y-240}{a}\ge\frac{270-240}{a}\right) \\ &= P\left(Z_Y\ge\frac{30}{a}\right) \end{aligned}$$ …… ❷

이때 $p_1\le p_2$이므로 $\frac{30}{a}\le 2$

$\therefore\ a\ge 15$



따라서 양수 a의 최솟값은 15이다. …… ❸

답 15

채점기준	배점
❶ X, Y가 따르는 정규분포를 각각 구하고 표준정규분포를 따르는 확률변수로 각각 표준화하기	1
❷ p_1, p_2의 값을 표준정규분포를 따르는 확률변수에 대한 확률로 각각 나타내기	3
❸ 양수 a의 최솟값 구하기	1

18 모비율 $p=0.2$이고 표본의 크기 n이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.2,\ \frac{0.2\times0.8}{n}\right)$, 즉

$N\left(0.2,\ \left(\frac{0.4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. …… ❶

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.2}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\hat{p}\ge 0.24)=0.0228$에서

$$\begin{aligned} P(\hat{p}\ge 0.24) &= P\left(\frac{\hat{p}-0.2}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}\ge\frac{0.24-0.2}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{10}\right) \\ &= 0.5-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right) \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.4772$ ······ ❷

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{10}=2,\ \sqrt{n}=20$

$\therefore n=400$ ······ ❸

답 400

채점기준	배점
❶ 표본비율 $\hat{p}$의 분포 구하기	1
❷ $\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{10}\right)$의 값 구하기	2
❸ 자연수 n의 값 구하기	2

19 12개의 공 중 흰 공이 $k\ (1\le k\le 11)$개이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{k}{12}$

1부터 12까지의 자연수 중 3의 배수는 3, 6, 9, 12의 4개이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ······ ❶

3의 배수가 적힌 흰 공의 개수를 a라 하면 $a\le k,\ a\le 4$이고

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{a}{12}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{a}{12}=\frac{k}{12}\times\frac{1}{3}\qquad \therefore a=\frac{k}{3}$ ······ ❷

이때 a, k의 값은 오른쪽 표와 같으므로 모든 자연수 k의 값의 합은

$3+6+9=18$ ······ ❸

a	k
1	3
2	6
3	9

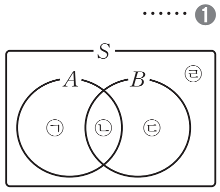
답 18

채점기준	배점
❶ $\mathrm{P}(A)$를 k에 대한 식으로 나타내고, $\mathrm{P}(B)$의 값 구하기	2
❷ 3의 배수가 적힌 흰 공의 개수를 a라 하고, 두 사건 A, B가 서로 독립일 조건을 a, k에 대한 식으로 나타내기	2
❸ a, k가 될 수 있는 값을 구하고, 모든 자연수 k의 값의 합 구하기	2

20 집합 S의 부분집합의 개수는 $2^3=8$

집합 S의 부분집합 중 서로 다른 두 집합을 택하여 각각 A, B라 하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{P}_2=56$

집합 $A\cap B$의 원소의 개수, 즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2 ······ ❶



집합 S의 원소 3개 중 $A\cap B$의 원소, 즉 ㉡ 영역에 들어갈 원소 x개를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_x$

나머지 $(3-x)$개의 원소는 ㉠, ㉢, ㉣ 중 한 영역에 들어가야 하고, $(3-x)$개의 원소가 모두 ㉣ 영역에 들어가면 $A=B$가 되므로 이 한 가지 경우를 제외하는 경우의 수는

${}_3\Pi_{3-x}-1=3^{3-x}-1$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소가 x개일 때, 서로 다른 두 집합 A, B를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_x\times(3^{3-x}-1)\ (x=0,\ 1,\ 2)$ ······ ❷

즉 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\times(3^{3-x}-1)}{56}\ (x=0,\ 1,\ 2)$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times(3^3-1)}{56}=\frac{26}{56}=\frac{13}{28}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times(3^2-1)}{56}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times(3^1-1)}{56}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$ ······ ❸

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{13}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{28}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{13}{28}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{3}{28}=\frac{9}{14}$

따라서 $p=14,\ q=9$이므로

$p+q=14+9=23$ ······ ❹

답 23

채점기준	배점
❶ 확률변수 X가 가질 수 있는 값 구하기	1
❷ $X=x$일 때의 경우의 수를 x에 대한 식으로 나타내기	4
❸ $\mathrm{P}(X=0)$, $\mathrm{P}(X=1)$, $\mathrm{P}(X=2)$의 값 구하기	1
❹ $\mathrm{E}(X)$의 값과 $p+q$의 값 구하기	1