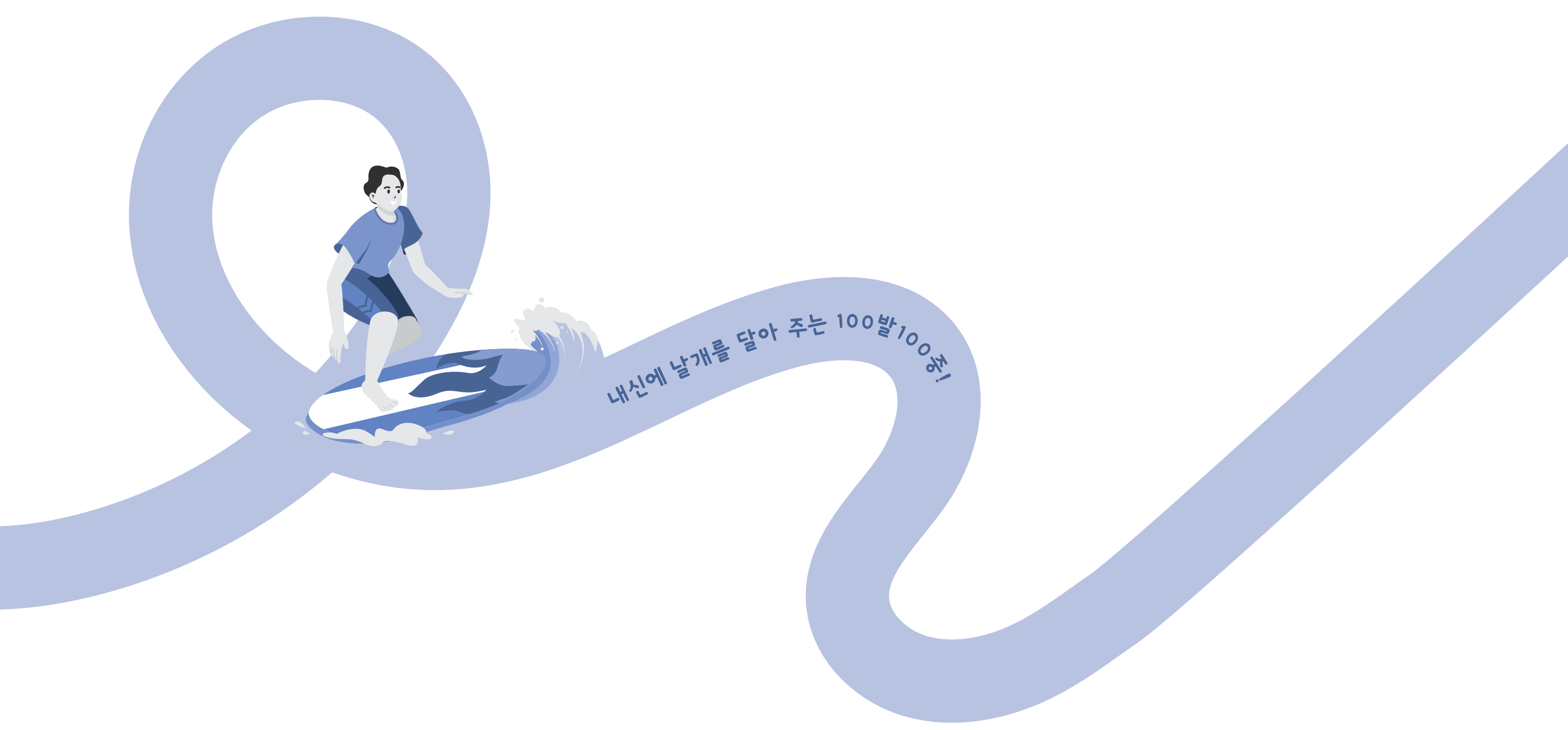
정답 및 해설

고등 내신 1등급을 위한 기출문제집

100발 100중

고등 기출문제집

미적분 I 하



Ⅱ 미분

3 도함수의 활용 (2)

교과서 예제 p.7

01 (1) 증가 (2) 감소 (3) 증가

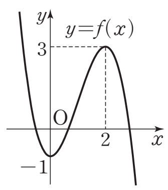
02 (1) 구간 $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$에서 감소한다.
(2) 구간 $[0, 1]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$에서 감소한다.

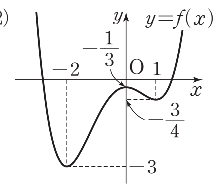
03 구간 $[-1, 3]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$에서 감소한다.

04 극댓값: 2, 극솟값: -2

05 (1) b, d, h (2) a, c, e

06 (1) 극댓값: 6, 극솟값: -26 (2) 극댓값: 3, 극솟값: 2

07 (1)


(2)


08 (1) 최댓값: 12, 최솟값: -15 (2) 최댓값: 16, 최솟값: -1

09 $12\sqrt{3}$

기출 Best | 1회 p.8~11

01 ③	02 ③	03 ①	04 ②	05 ④
06 ③	07 ④	08 ②	09 ⑤	10 ⑤
11 ④	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ⑤
16 ④	17 ①	18 ④	19 ⑤	20 ④

기출 Best | 2회 p.12~15

01 ②	02 ⑤	03 ②	04 ③	05 ④
06 ④	07 ③	08 ②	09 ③	10 ②
11 ④	12 ④	13 ①	14 ④	15 ①
16 ④	17 ③	18 ②	19 ④	20 ②

변형유형 집중공략 p.16~17

1-1 ②	1-2 ⑤	2-1 200	2-2 100

서술형 What & How p.18~21

1 4	2 -28	3 -24	4 2
5 -6	6 1	7 21	8 10

실전 문제 | 1회 p.22~25

01 ⑤	02 ②	03 ④	04 ①	05 ④
06 ③	07 ⑤	08 ④	09 ③	10 ①
11 ①	12 ④	13 ⑤	14 ③	15 ④
16 ②	17 ⑤	18 33	19 4	

실전 문제 | 2회 p.26~29

01 ①	02 ③	03 ⑤	04 ③	05 ④
06 ⑤	07 ①	08 ④	09 ②	10 ①
11 ⑤	12 ③	13 ②	14 ④	15 ④
16 ④	17 ③	18 25	19 -12	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.30~34

1 ①	2 ④	3 6	4 21	5 ③
6 ①	7 ⑤	8 ⑤	9 ⑤	10 ③

4 도함수의 활용 (3)

교과서 예제 p.37

01 (1) 3 (2) 2 (3) 2 (4) 2

02 (1) 3 (2) 2 (3) 3

03 (1) $-5<a<27$ (2) $a=-5$ 또는 $a=27$
(3) $a<-5$ 또는 $a>27$

04 (가) 1 (나) 2

05 풀이 참조

06 (1) -24 (2) 0 (3) 5

07 20

기출 Best | 1회 p.38~41

01 ⑤	02 ③	03 ①	04 ③	05 ⑤
06 ⑤	07 ②	08 ⑤	09 ②	10 ④
11 ①	12 ①	13 ④	14 ⑤	15 ②
16 ③	17 ⑤			

기출 Best | 2회 p.42~45

01 ① 02 ② 03 ④ 04 ① 05 ④
06 ⑤ 07 ② 08 ⑤ 09 ③ 10 ⑤
11 ⑤ 12 ① 13 ③ 14 ③ 15 ③
16 ① 17 ③

변형유형 집중공략 p.46~47

1-1 28 1-2 19 2-1 ② 2-2 ④

서술형 What & How p.48~49

1 6 2 7 3 (1) 20 (2) -20
4 (1) 80 (2) -40

실전 문제 | 1회 p.50~53

01 ④ 02 ③ 03 ③ 04 ① 05 ③
06 ② 07 ④ 08 ⑤ 09 ② 10 ④
11 ② 12 ③ 13 ① 14 ④ 15 ③
16 ② 17 ① 18 0 19 96

실전 문제 | 2회 p.54~57

01 ① 02 ⑤ 03 ② 04 ③ 05 ②
06 ④ 07 ② 08 ① 09 ③ 10 ③
11 ① 12 ③ 13 ② 14 ④ 15 ④
16 ④ 17 ① 18 54 19 -1

수능형 기출문제 & 변형문제 p.58~60

1 ③ 2 ② 3 3
4 ② 5 ① 6 ④

III 적분

1 부정적분

교과서 예제 p.63

01 (1) $3x+C$ (단, C는 적분상수)
(2) x^4+C (단, C는 적분상수)
(3) x^3+5x+C (단, C는 적분상수)
02 (1) $f(x)=3x^2+2x$ (2) $f(x)=4x^3+6x-2$
03 (1) $f(x)=3x-4$ (2) $f(x)=4x^2+4x+4$
04 (1) x^2-x (2) x^2-x+C (단, C는 적분상수)
05 (1) $\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)
(2) $\frac{1}{6}x^6+C$ (단, C는 적분상수)
(3) $\frac{1}{11}x^{11}+C$ (단, C는 적분상수)
06 (1) x^2+3x+C (단, C는 적분상수)
(2) $2x^4+2x^3-4x+C$ (단, C는 적분상수)
(3) $\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)
(4) $\frac{1}{4}x^4-x+C$ (단, C는 적분상수)
(5) $\frac{1}{2}x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)
07 (1) $\frac{1}{3}x^3-3x^2-2x+C$ (단, C는 적분상수)
(2) $4x^2+C$ (단, C는 적분상수)
(3) $\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$ (단, C는 적분상수)

기출 Best | 1회 p.64~66

01 ① 02 ⑤ 03 ③ 04 ① 05 ②
06 ⑤ 07 ① 08 ③ 09 ③ 10 ⑤
11 ③ 12 ② 13 ⑤ 14 ③ 15 ①
16 ②

기출 Best | 2회 p.67~69

01 ④ 02 ⑤ 03 ③ 04 ① 05 ④
06 ② 07 ③ 08 ④ 09 ③ 10 ④
11 ② 12 ① 13 ④ 14 ④ 15 ③
16 ③

변형유형 집중공략 p.70~71

1-1 ① 1-2 ② 2-1 ⑤ 2-2 ②

서술형 What & How p.72~73

1 2 2 17 3 12 4 -12

실전 문제 | 1회 p.74~77

01 ③ 02 ③ 03 ② 04 ④ 05 ③
06 ① 07 ③ 08 ② 09 ④ 10 ①
11 ③ 12 ⑤ 13 ④ 14 ② 15 ④
16 ① 17 ③ 18 4 19 18

실전 문제 | 2회 p.78~81

01 ⑤	02 ④	03 ⑤	04 ③	05 ②
06 ①	07 ⑤	08 ④	09 ④	10 ①
11 ④	12 ③	13 ⑤	14 ④	15 ③
16 ④	17 ①	18 30	19 108	

수능형 기출문제 & 변형문제 p.82~84

1 ④	2 ①	3 ②
4 ④	5 9	6 1

2 정적분

교과서 예제 p.87

01 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$ (3) -2

02 (1) $2x-6$ (2) x^4-4x^2+2x-3

03 (1) 6 (2) 2

04 (1) 30 (2) 12 (3) -6

05 (1) 4 (2) -12

06 (1) 20 (2) -6

07 3

08 (1) $f(x)=-2x+3$ (2) $f(x)=3x^2-4x+2$

09 (1) 3 (2) 6 (3) 4

기출 Best | 1회 p.88~90

01 ②	02 ④	03 ②	04 ①	05 ②
06 ⑤	07 ②	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 ④	12 ③	13 ④	14 ②	15 ④
16 ②	17 ③			

기출 Best | 2회 p.91~93

01 ⑤	02 ⑤	03 ①	04 ③	05 ⑤
06 ①	07 ①	08 ④	09 ②	10 ③
11 ④	12 ②	13 ④	14 ③	15 ⑤
16 ⑤	17 ③			

변형유형 집중공략 p.94~97

1-1 ②	1-2 ④	2-1 6	2-2 11
3-1 ③	3-2 ④	4-1 ⑤	4-2 ②

서술형 What & How p.98~101

1 17	2 15	3 11	4 12
5 -8	6 6	7 18	8 156

실전 문제 | 1회 p.102~106

01 ②	02 ⑤	03 ②	04 ①	05 ③
06 ①	07 ②	08 ③	09 ①	10 ③
11 ④	12 ②	13 ②	14 ⑤	15 ②
16 ④	17 ⑤	18 ③	19 ②	20 ①
21 ④	22 ③	23 40	24 3	

실전 문제 | 2회 p.107~111

01 ①	02 ②	03 ①	04 ⑤	05 ⑤
06 ①	07 ②	08 ①	09 ④	10 ②
11 ①	12 ⑤	13 ②	14 ④	15 ④
16 ③	17 ③	18 ③	19 ④	20 ⑤
21 ③	22 20	23 -1		

수능형 기출문제 & 변형문제 p.112~116

1 ④	2 ③	3 5	4 -3	5 ③
6 ①	7 ②	8 ④	9 7	10 16

3 정적분의 활용

교과서 예제 p.119

01 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$

02 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{2}$

03 (1) 3 (2) 3

04 (1) $a=-1,\ b=1$ (2) $f(x)\le g(x)$ (3) $\frac{8}{3}$

05 (1) $\frac{64}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$

06 (1) $-\frac{5}{3}$ (2) $-\frac{11}{3}$ (3) 4

기출 Best | 1회
p.120~123

01 ④	02 ②	03 ②	04 ⑤	05 ④
06 ③	07 ④	08 ②	09 ②	10 ⑤
11 ④	12 ④	13 ③	14 ②	15 ②
16 ①	17 ④	18 ⑤	19 ⑤	

기출 Best | 2회
p.124~127

01 ⑤	02 ①	03 ④	04 ④	05 ②
06 ④	07 ①	08 ③	09 ③	10 ①
11 ③	12 ③	13 ②	14 ①	15 ⑤
16 ③	17 ④	18 ⑤	19 ④	

변형유형 집중공략
p.128~129

1-1 ①	1-2 3	2-1 3	2-2 6

서술형 What & How
p.130~131

1 2	2 -64	3 4	4 72

실전 문제 | 1회
p.132~135

01 ④	02 ④	03 ①	04 ③	05 ④
06 ⑤	07 ③	08 ③	09 ④	10 ⑤
11 ④	12 ④	13 ③	14 ②	15 ④
16 ③	17 ⑤	18 13	19 1	

실전 문제 | 2회
p.136~139

01 ①	02 ②	03 ②	04 ③	05 ①
06 ②	07 ④	08 ①	09 ③	10 ③
11 ②	12 ⑤	13 ④	14 ①	15 ④
16 ③	17 ②	18 3	19 4	

수능형 기출문제 & 변형문제
p.140~144

1 ④	2 ②	3 ⑤	4 ④	5 ③
6 ②	7 ②	8 ①	9 ⑤	10 ④

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회
p.146~149

01 ④	02 ②	03 ①	04 ②	05 ②
06 ②	07 ④	08 ⑤	09 ①	10 ④
11 ③	12 ②	13 ②	14 ①	15 ②
16 ④	17 2	18 27	19 -8	20 23

실전 모의고사 2회
p.150~153

01 ③	02 ④	03 ②	04 ②	05 ⑤
06 ⑤	07 ②	08 ⑤	09 ⑤	10 ⑤
11 ③	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 ②	17 30	18 28	19 -26	20 2

실전 모의고사 3회
p.154~157

01 ⑤	02 ⑤	03 ④	04 ④	05 ①
06 ③	07 ④	08 ⑤	09 ②	10 ③
11 ①	12 ③	13 ②	14 ④	15 ①
16 ⑤	17 27	18 -5	19 1	20 36

실전 모의고사 4회
p.158~161

01 ③	02 ④	03 ②	04 ④	05 ⑤
06 ②	07 ②	08 ①	09 ④	10 ⑤
11 ①	12 ④	13 ②	14 ④	15 ⑤
16 ②	17 -18	18 15	19 28	20 53

실전 모의고사 5회
p.162~165

01 ④	02 ①	03 ③	04 ③	05 ⑤
06 ⑤	07 ②	08 ①	09 ②	10 ⑤
11 ①	12 ②	13 ③	14 ①	15 ⑤
16 ②	17 -3	18 16	19 4	20 27

Ⅱ 미분

3 도함수의 활용 (2)

교과서 예제 p.7

01 (1) $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+1)-(x_2^2+1)=x_1^2-x_2^2$

$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$

이므로 $f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=x^2+1$은 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

(2) $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=(-x_1^3+2)-(-x_2^3+2)=x_2^3-x_1^3$

$=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$

이때 $x_2-x_1>0$, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$

이므로

$f(x_1)-f(x_2)=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=-x^3+2$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

(3) $2\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2-4x_1)-(x_2^2-4x_2)$

$=(x_1^2-x_2^2)-4(x_1-x_2)$

$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)-4(x_1-x_2)$

$=(x_1-x_2)(x_1+x_2-4)$

이때 $x_1-x_2<0$, $x_1+x_2-4>2+2-4=0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2-4)<0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=x^2-4x$는 구간 $[2, \infty)$에서 증가한다.

답 (1) 증가 (2) 감소 (3) 증가

참고 (3) $x_1\ge 2$, $x_2>2$이므로 $x_1+x_2>4$ $\quad\therefore x_1+x_2-4>0$

02 (1) $f(x)=x^3-2x^2+x$에서

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 1]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

03 도함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 3]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$에서 감소한다. 답 풀이 참조

04 함수 $f(x)$는 $x=-2$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $x=-2$에서 극댓값 2를 갖는다.

또 $x=0$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $x=0$에서 극솟값 -2를 갖는다. 답 극댓값: 2, 극솟값: -2

05 (1) 함수 $f(x)$는 $x=b$, $x=d$, $x=h$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $x=b$, $x=d$, $x=h$에서 극댓값을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $x=a$, $x=c$, $x=e$에서 극솟값을 갖는다.

답 (1) b, d, h (2) a, c, e

06 (1) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	-26	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 6, $x=3$에서 극솟값 -26을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4-2x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3, $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극솟값 2를 갖는다.

답 (1) 극댓값: 6, 극솟값: -26 (2) 극댓값: 3, 극솟값: 2

07 (1) $f(x)=-x^3+3x^2-1$에서

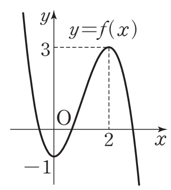
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{3}$에서

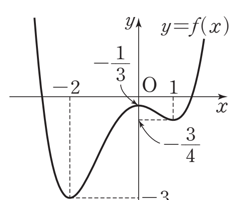
$f'(x)=x^3+x^2-2x=x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	$-\frac{1}{3}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

08 (1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	↗	12	↘	-15

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 12, $x=2$에서 최솟값 -15를 갖는다.

(2) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$에서

$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	16	↘	-1	↗	0	↗	7

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 16, $x=0$에서 최솟값 -1을 갖는다.

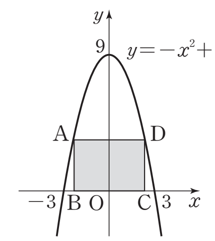
답 (1) 최댓값: 12, 최솟값: -15
(2) 최댓값: 16, 최솟값: -1

09 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 각 꼭짓점을 A, B, C, D라 하고

D$(t, -t^2+9)$ $(0<t<3)$

라 하면

$\overline{AD}=2t$, $\overline{CD}=-t^2+9$



직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2t(-t^2+9)=-2t^3+18t$이므로

$S'(t)=-6t^2+18=-6(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})$

$S'(t)=0$에서 $t=\sqrt{3}$ ($\because 0<t<3$)

$0<t<3$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$12\sqrt{3}$	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\sqrt{3}$에서 최댓값 $12\sqrt{3}$을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $12\sqrt{3}$이다.

답 $12\sqrt{3}$

기출 Best | 1회

p.8~11

01 $f(x)=-x^3-2x^2+4x-3$에서

$f'(x)=-3x^2-4x+4=-(x+2)(3x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-11	↗	$-\frac{41}{27}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$, $\left[\frac{2}{3}, \infty\right)$에서 감소하므로 $f(x)$가 감소하는 구간에 속하는 x의 값이 아닌 것은 ③ -1이다.

답 ③

02 $f(x)=x^3+ax^2+3x+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3\times3=a^2-9\leq 0$, $(a+3)(a-3)\leq 0$

$\therefore -3\leq a\leq 3$

따라서 $m=-3$, $n=3$이므로

$n-m=3-(-3)=6$

답 ③

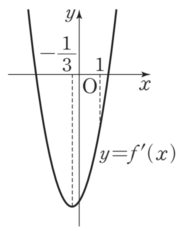
03 $f(x)=x^3+x^2+ax+4$에서

$f'(x)=3x^2+2x+a=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+a-\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 감소하려면

$0<x<1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

오른쪽 그림에서



$f'(1)=3+2+a\le 0$

$\therefore a\le -5$

따라서 실수 a의 최댓값은 -5이다.

답 ①

04 $f(x)=3x^4+16x^3+18x^2+5$에서

$f'(x)=12x^3+48x^2+36x=12x(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-22	↗	10	↘	5	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 -22, $x=-1$에서 극댓값 10, $x=0$에서 극솟값 5를 가지므로 모든 극값의 합은

$-22+10+5=-7$

답 ②

05 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 3을 가지므로

$f(2)=3$, $f'(2)=0$

$f(2)=3$에서 $8+4a+2b+3=3$

$4a+2b=-8$ $\quad\therefore 2a+b=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=0$에서 $12+4a+b=0$

$\therefore 4a+b=-12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=4$

$\therefore b-a=4-(-4)=8$

답 ④

06 $f(x)=-x^3+6x^2+k$에서

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	k	↗	$k+32$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 k, $x=4$에서 극댓값 $k+32$를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같으므로

$|k|=|k+32|$

$k\ne k+32$이므로 $k=-(k+32)$

$2k=-32$ $\quad\therefore k=-16$

답 ③

07 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이므로

$a>0$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$에서 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖는다고 하면 α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이고, α, β는 서로 다른 두 양수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\frac{c}{3a}>0$

이때 $a>0$이므로 $b<0$, $c>0$

$\therefore \frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=\frac{a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{c}{c}$

$=1+(-1)+1=1$

답 ④

08 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$-3-2a+b=0$, $-3+2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$

$\therefore f(x)=-x^3+3x+c$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$c-2$	↗	$c+2$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $c-2$, $x=1$에서 극댓값 $c+2$를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 3이므로

$c+2=3$ $\quad\therefore c=1$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$c-2=1-2=-1$

답 ②

09 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 2, 5이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

① 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.

② 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대가 아니다.

③ 열린구간 $(-3, -2)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

④ 열린구간 $(0, 2)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

⑤ 열린구간 $(5, 6)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다. (참)

답 ⑤

10 $f(x)=x^3-3x^2$에서

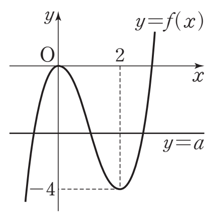
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



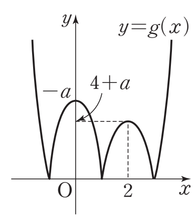
함수 $g(x)=|f(x)-a|$가 서로 다른 세 점에서 미분가능하지 않으려면 직선 $y=a$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-4<a<0$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$ 답 ⑤

참고 $-4<a<0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 세 점에서 미분가능하지 않다.



11 $f(x)=-2x^3+ax^2-ax$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax-a$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(-6)\times(-a)=a^2-6a>0$, $a(a-6)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>6$

따라서 자연수 a의 최솟값은 7이다. 답 ④

12 $f(x)=-2x^3+kx^2-6x+4$에서

$f'(x)=-6x^2+2kx-6$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

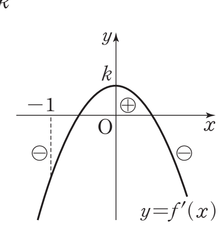
$\frac{D}{4}=k^2-(-6)\times(-6)=k^2-36\le0$, $(k+6)(k-6)\le0$

$\therefore -6\le k\le6$

따라서 정수 k는 -6, -5, -4, $\dots$, 6의 13개이다. 답 ③

13 $f(x)=-x^3+kx$에서 $f'(x)=-3x^2+k$

삼차함수 $f(x)$가 $-1<x<0$에서 극솟값을 가지려면 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, $f'(-1)<0$, $f'(0)>0$이어야 한다.



$f'(-1)<0$에서 $-3+k<0$ $\quad\therefore k<3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(0)>0$에서 $k>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<k<3$

따라서 정수 k는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$ 답 ②

다른풀이 $f(x)=-x^3+kx$에서 $f'(x)=-3x^2+k$

(i) $k\le0$일 때 $f'(x)=-3x^2+k\le0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(ii) $k>0$일 때 $f'(x)=0$에서

$-3\left(x+\sqrt{\frac{k}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)=0$

$\therefore x=-\sqrt{\frac{k}{3}}$ 또는 $x=\sqrt{\frac{k}{3}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{k}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{k}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$가 $-1<x<0$에서 극솟값을 가지려면

$-1<-\sqrt{\frac{k}{3}}<0$이어야 하므로

$0<\sqrt{\frac{k}{3}}<1$, $0<\frac{k}{3}<1$ $\quad\therefore 0<k<3$

(i), (ii)에서 $0<k<3$

따라서 정수 k는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$

14 $f(x)=x^4+2x^3+ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+6x^2+2ax=2x(2x^2+3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2+3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+3x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times2\times a=9-8a>0$, $8a<9$

$\therefore a<\frac{9}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $2x^2+3x+a=0$이 $x=0$을 해로 갖지 않아야 하므로

$a\ne0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$ 답 ⑤

참고 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때 $f(x)$는 항상 극솟값을 갖고, 최고차항의 계수가 음수일 때 $f(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.

15 $f(x)=-3x^4+2ax^3-6(a+5)x^2$에서

$f'(x)=-12x^3+6ax^2-12(a+5)x$

$\quad=-6x(2x^2-ax+2a+10)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
이차방정식 $2x^2-ax+2a+10=0$이 두 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D=(-a)^2-4\times2\times(2a+10)=a^2-16a-80<0$
$(a+4)(a-20)<0$
$\therefore -4<a<20$

(ii) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우
이차방정식 $2x^2-ax+2a+10=0$이 $x=0$과 0이 아닌 다른 실근을 두 근으로 갖거나 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.
(ㄱ) $x=0$을 근으로 가질 때
$2a+10=0$, $2a=-10$ $\quad\therefore a=-5$
(ㄴ) 0이 아닌 실수를 중근으로 가질 때
$D=a^2-16a-80=0$, $(a+4)(a-20)=0$
$\therefore a=-4$ 또는 $a=20$
(ㄱ), (ㄴ)에서 $a=-5$ 또는 $a=-4$ 또는 $a=20$

(iii) 이차방정식 $2x^2-ax+2a+10=0$이 $x=0$을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=-5$ 또는 $-4\le a\le20$
따라서 $M=20$, $m=-5$이므로
$M+m=20+(-5)=15$ 답 ⑤

다른풀이 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않도록 하는 실수 a의 집합을 A라 하면 A^C는 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 실수 a의 집합이다.
사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 즉 이차방정식 $2x^2-ax+2a+10=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이차방정식 $2x^2-ax+2a+10=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a+4)(a-20)>0$
$\therefore a<-4$ 또는 $a>20$ ...... ㉠
또 이차방정식 $2x^2-ax+2a+10=0$이 $x=0$을 근으로 갖지 않아야 하므로 $a\ne-5$ ...... ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$a<-5$ 또는 $-5<a<-4$ 또는 $a>20$
즉 $A^C=\{a\,|\,a<-5$ 또는 $-5<a<-4$ 또는 $a>20\}$이므로
$A=\{a\,|\,a=-5$ 또는 $-4\le a\le20\}$

참고 이차방정식 $2x^2-ax+2a+10=0$은 $a=-4$일 때 $x=-1$, $a=20$일 때 $x=5$를 중근으로 갖는다.

16 $f(x)=x^3-3x$에서
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	18

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 18, $x=1$에서 최솟값 -2를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은
$18+(-2)=16$ 답 ④

17 $f(x)=x^4-8x^2+k$에서
$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
닫힌구간 $[-3, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$k+9$	↘	$k-16$	↗	k	↘	$k-16$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 $k+9$, $x=-2$ 또는 $x=2$에서 최솟값 $k-16$을 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 24이므로
$k+9=24$ $\quad\therefore k=15$
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은
$k-16=15-16=-1$ 답 ①

18 $\mathrm{P}\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$이라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}^2=t^2+\left(\frac{1}{2}t^2-4\right)^2=\frac{1}{4}t^4-3t^2+16$
$f(t)=\frac{1}{4}t^4-3t^2+16$이라 하면
$f'(t)=t^3-6t=t(t+\sqrt{6})(t-\sqrt{6})$
$f'(t)=0$에서 $t=-\sqrt{6}$ 또는 $t=0$ 또는 $t=\sqrt{6}$
함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	7	↗	16	↘	7	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=-\sqrt{6}$ 또는 $t=\sqrt{6}$에서 최솟값 7을 가지므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 최솟값은 7이다. 답 ④

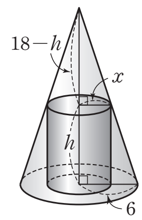
19 $\mathrm{P}(t, -4t^2+12t)$ $(0<t<3)$라 하고 삼각형 POH의 넓이를 $S(t)$라 하면
$S(t)=\frac{1}{2}\times t\times(-4t^2+12t)=-2t^3+6t^2$
$S'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$
$S'(t)=0$에서 $t=2$ $(\because 0<t<3)$
$0<t<3$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=2$에서 최댓값 8을 가지므로 삼각형 POH의 넓이의 최댓값은 8이다.

답 ⑤

20 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x $(0<x<6)$, 높이를 h라 하면



$x:(18-h)=6:18=1:3$에서

$3x=18-h$

$\therefore h=18-3x$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2h=\pi x^2(18-3x)=3\pi(6x^2-x^3)$

$V'(x)=3\pi(12x-3x^2)=-9\pi x(x-4)$

$V'(x)=0$에서 $x=4$ $(\because 0<x<6)$

$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	96π	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=4$에서 최댓값 96π를 가지므로 원기둥의 부피의 최댓값은 96π이다.

답 ④

기출 Best | 2회

p.12~15

01 $f(x)=-x^3+3x-6$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	-4	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 감소하므로 함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 아닌 것은 ② $[-1, 0]$이다.

답 ②

02 $f(x)=x^3+2ax^2-4(a-6)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+4ax-4(a-6)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-3\times\{-4(a-6)\}=4a^2+12a-72\leq 0$

$a^2+3a-18\leq 0$, $(a+6)(a-3)\leq 0$

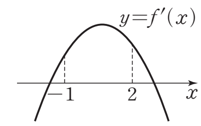
$\therefore -6\leq a\leq 3$

따라서 정수 a는 $-6, -5, -4, \dots, 3$의 10개이다.

답 ⑤

03 $f(x)=-2x^3+ax^2+16x+3$에서 $f'(x)=-6x^2+2ax+16$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-1, 2)$에서 증가하려면 $-1<x<2$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(-1)\geq 0$, $f'(2)\geq 0$

$f'(-1)=-6-2a+16\geq 0$에서

$-2a\geq -10 \quad \therefore a\leq 5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=-24+4a+16\geq 0$에서

$4a\geq 8 \quad \therefore a\geq 2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2\leq a\leq 5$

따라서 $M=5$, $m=2$이므로

$M+m=5+2=7$

답 ②

04 $f(x)=3x^4+8x^3+4$에서

$f'(x)=12x^3+24x^2=12x^2(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-12	$\nearrow$	4	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 -12를 가지므로

$a=-2$, $b=-12$

$\therefore ab=-2\times(-12)=24$

답 ③

05 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f(-1)=5$, $f'(-1)=0$

$f(-1)=5$에서

$-1+a-b+5=5 \quad \therefore a-b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(-1)=0$에서

$3-2a+b=0 \quad \therefore 2a-b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

답 ④

06 $f(x)=-2x^3+9kx^2-12k^2x$에서

$f'(x)=-6x^2+18kx-12k^2$

$=-6(x-k)(x-2k)$

$f'(x)=0$에서 $x=k$ 또는 $x=2k$

$k<0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$2k$	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-4k^3$	↗	$-5k^3$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2k$에서 극솟값 $-4k^3$, $x=k$에서 극댓값 $-5k^3$을 갖는다.
이때 극댓값과 극솟값의 차가 27이므로
$-5k^3-(-4k^3)=27,\ -k^3=27,\ k^3=-27$
$\therefore k=-3\ (\because k<0)$ 답 ④

07 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)>0$이므로 $c>0$
$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax+b$
삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖는다고 하면 α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이고, α, β는 서로 다른 두 음수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{2a}{-3}=\frac{2a}{3}<0,\ \alpha\beta=\frac{b}{-3}=-\frac{b}{3}>0$$

$\therefore a<0,\ b<0$

$$\therefore \frac{|a|}{a}+\frac{3|b|}{b}+\frac{5|c|}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{-3b}{b}+\frac{5c}{c}$$
$$=-1+(-3)+5=1$$
답 ③

08 $f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f'(x)=-6x^2+2ax+b$
함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-3)=0$, $f'(0)=0$이므로
$-54-6a+b=0,\ b=0$
$b=0$을 $-54-6a+b=0$에 대입하면
$-54-6a=0,\ 6a=-54 \qquad \therefore a=-9$
$\therefore f(x)=-2x^3-9x^2+c$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$c-27$	↗	c	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 $c-27$, $x=0$에서 극댓값 c를 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 9이므로 $c=9$
따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은
$c-27=9-27=-18$ 답 ②

09 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, c, e, g이므로 $f'(x)=0$에서
$x=a$ 또는 $x=c$ 또는 $x=e$ 또는 $x=g$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

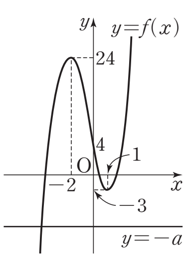
x	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$	e	$\cdots$	g	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

① 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 아니다.
② 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극대가 아니다.
③ 열린구간 (c, d)에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다. (참)
④ 열린구간 (d, e)에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.
⑤ 열린구간 (f, g)에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다. 답 ③

10 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+4$에서
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

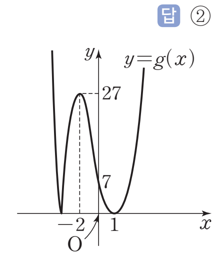
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	24	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $g(x)=|f(x)+a|$가 한 점에서만 미분가능하지 않으려면 직선 $y=-a$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 한 점에서만 만나거나 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 점을 지나야 하므로
$-a\le-3$ 또는 $-a\ge24$
$\therefore a\le-24$ 또는 $a\ge3$
따라서 양수 a의 최솟값은 3이다. 답 ②

참고 $a=3$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 한 점에서만 미분가능하지 않다.



11 $f(x)$가 삼차함수이므로 $a\ne0$

$$f(x)=ax^3-3x^2+\frac{1}{3}ax-4\text{에서}$$

$$f'(x)=3ax^2-6x+\frac{1}{3}a$$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-3a\times\frac{1}{3}a=9-a^2>0,\ a^2-9<0$$

$(a+3)(a-3)<0 \qquad \therefore -3<a<3$
이때 $a\ne0$이므로 $-3<a<0$ 또는 $0<a<3$
따라서 정수 a는 -2, -1, 1, 2의 4개이다. 답 ④

12 $f(x)=x^3+(a+2)x^2+(a+2)x-4$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+2)x+a+2$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-3(a+2)\le 0,\ a^2+a-2\le 0$

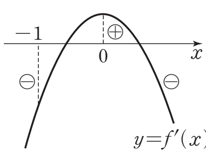
$(a+2)(a-1)\le 0 \quad \therefore -2\le a\le 1$

답 ④

13 $f(x)=-2x^3+(-a+6)x^2+ax$에서

$f'(x)=-6x^2+2(-a+6)x+a$

삼차함수 $f(x)$가 $-1<x<0$에서 극솟값, $x>0$에서 극댓값을 가지려면 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, $f'(-1)<0$, $f'(0)>0$이어야 한다.



$f'(-1)<0$에서 $-6-2(-a+6)+a<0$

$-6+2a-12+a<0,\ 3a<18 \quad \therefore a<6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(0)>0$에서 $a>0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<a<6$

따라서 정수 a의 최댓값은 5이다.

답 ①

14 $f(x)=-3x^4-16x^3+3ax^2+5$에서

$f'(x)=-12x^3-48x^2+6ax=-6x(2x^2+8x-a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2+8x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+8x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-2\times(-a)=2a+16>0,\ 2a>-16$

$\therefore a>-8 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $2x^2+8x-a=0$이 $x=0$을 해로 갖지 않아야 하므로

$a\ne 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-8<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ④ -4이다.

답 ④

15 $f(x)=x^4+4ax^3+2x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3+12ax^2+4x=4x(x^2+3ax+1)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(ⅰ) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3ax+1=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(3a)^2-4\times 1\times 1=9a^2-4<0$

$(3a+2)(3a-2)<0 \quad \therefore -\frac{2}{3}<a<\frac{2}{3}$

(ⅱ) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3ax+1=0$이 $x=0$을 근으로 가질 수 없으므로 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다. 따라서

$D=9a^2-4=0$에서

$a^2=\frac{4}{9} \quad \therefore a=\pm\frac{2}{3}$

(ⅲ) 이차방정식 $x^2+3ax+1=0$이 $x=0$을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $-\frac{2}{3}\le a\le\frac{2}{3}$

따라서 정수 a는 0의 1개이다.

답 ①

참고 이차방정식 $x^2+3ax+1=0$은 $a=-\frac{2}{3}$일 때 $x=1$, $a=\frac{2}{3}$일 때 $x=-1$을 중근으로 갖는다.

16 $f(x)=x^4+4x^3-12$에서 $f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$

닫힌구간 $[-4,\ 0]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-12	↘	-39	↗	-12

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$ 또는 $x=0$에서 최댓값 -12, $x=-3$에서 최솟값 -39를 가지므로

$M=-12,\ m=-39$

$\therefore M-m=-12-(-39)=27$

답 ④

17 $f(x)=-x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax$

$f'(1)=3$에서 $-3+2a=3$

$2a=6 \quad \therefore a=3$

$\therefore f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	$b+2$	↗	$b+4$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $b+4$를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 8이므로

$b+4=8 \quad \therefore b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$

답 ③

18 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(t-6)^2+\{-t^2+1-(-2)\}^2$

$=t^4-5t^2-12t+45$

$f(t)=t^4-5t^2-12t+45$라 하면

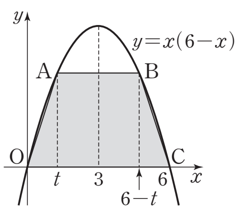
$f'(t)=4t^3-10t-12=2(t-2)(2t^2+4t+3)$

$f'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because 2t^2+4t+3=2(t+1)^2+1>0$)
함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	17	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 최솟값 17을 가지므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{17}$이다. 답 ②

19 오른쪽 그림과 같이
A$(t,\ t(6-t))(0<t<3)$라 하면
B$(6-t,\ t(6-t))$
C$(6,\ 0)$이라 하고 사다리꼴 AOCB의 넓이를 $S(t)$라 하면

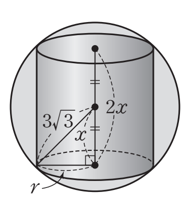


$S(t)=\frac{1}{2}\times[\{(6-t)-t\}+6]\times t(6-t)$
$=t^3-12t^2+36t$
$S'(t)=3t^2-24t+36=3(t-2)(t-6)$
$S'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because 0<t<3$)
$0<t<3$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	32	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=2$에서 최대이므로 구하는 사다리꼴의 높이는
$t(6-t)=2\times(6-2)=8$ 답 ④

20 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 $2x$ $(0<x<3\sqrt{3})$라 하면



$r^2=(3\sqrt{3})^2-x^2=27-x^2$
원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면
$V(x)=\pi r^2\times 2x$
$=\pi(27-x^2)\times 2x$
$=2\pi(-x^3+27x)$
$V'(x)=2\pi(-3x^2+27)$
$=-6\pi(x+3)(x-3)$
$V'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 0<x<3\sqrt{3}$)
$0<x<3\sqrt{3}$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	$(3\sqrt{3})$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	108π	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=3$에서 최댓값 108π를 가지므로 원기둥의 부피의 최댓값은 108π이다. 답 ②

변형유형 집중공략

p.16~17

1-1 $f(x)=x^3+ax^2+bx-3$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=2$, $x=4$에서 극값을 가지므로
$f'(2)=0$, $f'(4)=0$
$12+4a+b=0$, $48+8a+b=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-9$, $b=24$이므로
$f(x)=x^3-9x^2+24x-3$
$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	17	↘	13	↗

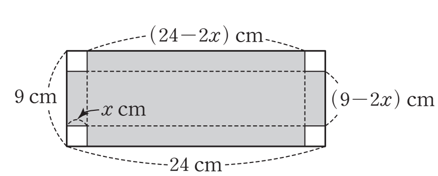
따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 17, $x=4$에서 극솟값 13을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은
$17+13=30$ 답 ②

1-2 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-3$, $x=1$에서 극값을 가지므로
$f'(-3)=0$, $f'(1)=0$
$27-6a+b=0$, $3+2a+b=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-9$이므로
$f(x)=x^3+3x^2-9x+c$
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$c+27$	↘	$c-5$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 $c+27$, $x=1$에서 극솟값 $c-5$를 갖는다.
이때 극댓값이 극솟값의 3배이므로
$c+27=3(c-5)$, $c+27=3c-15$
$-2c=-42 \qquad \therefore c=21$
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은
$c+27=21+27=48$ 답 ⑤

2-1



잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm $\left(0<x<\frac{9}{2}\right)$라 하고 상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라 하면

$V(x)=x(24-2x)(9-2x)=4x^3-66x^2+216x$

$V'(x)=12x^2-132x+216=12(x-2)(x-9)$

$V'(x)=0$에서 $x=2\left(\because 0<x<\dfrac{9}{2}\right)$

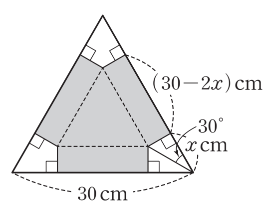
$0<x<\dfrac{9}{2}$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$\left(\frac{9}{2}\right)$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	200	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=2$에서 최댓값 200을 가지므로 상자의 부피의 최댓값은 200 cm^3이다.

$\therefore M=200$ 답 200

2-2 오른쪽 그림에서 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $(30-2x)$ cm $(0<x<15)$ 인 정삼각형이고, 상자의 높이는



$x\tan 30^\circ=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$(cm)

상자의 부피를 $V(x)$ cm^3라 하면

$V(x)=\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(30-2x)^2\right\}\times\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

$\quad=x^3-30x^2+225x$

$V'(x)=3x^2-60x+225=3(x-5)(x-15)$

$V'(x)=0$에서 $x=5$ $(\because 0<x<15)$

$0<x<15$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	5	$\cdots$	(15)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	500	$\searrow$	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=5$에서 최댓값 500을 가지므로

$a=5$, $b=500$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{500}{5}=100$ 답 100

참고 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

서술형 What & How

p.18~21

1 모든 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty, t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(t)$가 되려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다. …… ❶

$f(x)=-x^3+2ax^2+3(a-1)x-4$에서

$f'(x)=-3x^2+4ax+3(a-1)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2a)^2-(-3)\times 3(a-1)=4a^2+9a-9\le 0$

$(a+3)(4a-3)\le 0 \qquad \therefore -3\le a\le \dfrac{3}{4}$ …… ❷

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0의 4개이다. …… ❸

답 4

2 모든 실수 t에 대하여 구간 $[t, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(t)$가 되려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다. …… ❶

$f(x)=2x^3+(a+1)x^2-(a+1)x+a$에서

$f'(x)=6x^2+2(a+1)x-(a+1)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-6\times\{-(a+1)\}=a^2+8a+7\le 0$

$(a+7)(a+1)\le 0 \qquad \therefore -7\le a\le -1$ …… ❷

따라서 정수 a는 -7, -6, -5, …, -1이므로 구하는 합은

$-7+(-6)+(-5)+\cdots+(-1)=-28$ …… ❸

답 -28

채점기준	배점
❶ 최솟값이 $f(t)$가 될 조건 알기	2
❷ a의 값의 범위 구하기	2
❸ 모든 정수 a의 값의 합 구하기	1

3 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ …… ❶

조건 (나)에서 $f(-1)=8$, $f'(-1)=0$

조건 (가)에서 $f'(1+x)=f'(1-x)$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(3)=f'(-1) \qquad \therefore f'(3)=0$

$f'(-1)=0$, $f'(3)=0$에서

$3-2a+b=0$, $27+6a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+c$

$f(-1)=8$에서 $-1-3+9+c=8 \qquad \therefore c=3$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+3$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$ …… ❷

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -24를 갖는다. …… ❸

답 -24

다른풀이 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 ㈎에서 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$-\dfrac{2a}{2\times3}=1 \qquad \therefore a=-3$

$\therefore f'(x)=3x^2-6x+b$

조건 ㈏에서 $f'(-1)=0$이므로

$3+6+b=0 \qquad \therefore b=-9$

참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 축은 직선

$x=-\dfrac{b}{2a}$이다.

4 조건 ㈎에서 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ …… ㉠ …… ❶

조건 ㈐에서 $f'(1-x)+f'(1+x)=0$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(1)+f'(1)=0$, $2f'(1)=0$

$\therefore f'(1)=0$

또 $x=1$을 대입하면

$f'(0)+f'(2)=0$

$\therefore f'(0)=-f'(2)=0$ ($\because$ 조건 ㈏)

즉 $f'(0)=f'(1)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=4x(x-1)(x-2)=4x^3-12x^2+8x$ …… ❷

이것이 ㉠과 일치하므로

$3a=-12$, $2b=8$, $c=0$

$\therefore a=-4$, $b=4$, $c=0$

$\therefore f(x)=x^4-4x^3+4x^2$ …… ❸

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로

$p=1$, $q=1$

$\therefore p+q=1+1=2$ …… ❹

답 2

채점기준	배점
❶ $f(x)$, $f'(x)$를 미지수를 이용하여 나타내기	1
❷ $f'(x)$ 구하기	2
❸ $f(x)$ 구하기	1
❹ $p+q$의 값 구하기	2

5 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+7)x$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+a+7$ …… ❶

삼차함수 $f(x)$가 $x\le0$에서 극값을 갖지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 극값을 갖지 않는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-3(a+7)=a^2-a-20\le0$

$(a+4)(a-5)\le0$

$\therefore -4\le a\le5$ …… ❷

(ii) 삼차함수 $f(x)$가 $x>0$에서만 극값을 갖는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-3(a+7)=a^2-a-20>0$

$(a+4)(a-5)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>5$ …… ㉠

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-\dfrac{2(a+1)}{3}>0$

$a+1<0 \qquad \therefore a<-1$ …… ㉡

(두 근의 곱)$=\dfrac{a+7}{3}>0$

$a+7>0 \qquad \therefore a>-7$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$-7<a<-4$ …… ❸

(i), (ii)에서 $-7<a\le5$

따라서 정수 a의 최솟값은 -6이다. …… ❹

답 -6

6 $f(x)=-x^3+ax^2+ax$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+a$ …… ❶

삼차함수 $f(x)$가 $x>1$에서 극값을 갖지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 극값을 갖지 않는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-(-3)\times a=a^2+3a\le0$

$a(a+3)\le0$

$\therefore -3\le a\le0$ …… ❷

(ii) 삼차함수 $f(x)$가 $x\le1$에서만 극값을 갖는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$이 $x\le1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$\dfrac{D}{4}=a^2-(-3)\times a=a^2+3a>0$

$a(a+3)>0$

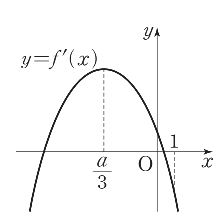
$\therefore a<-3$ 또는 $a>0$ …… ㉠

오른쪽 그림에서 $f'(1)\le0$이어야 하므로

$f'(1)=-3+2a+a\le0$, $3a\le3$

$\therefore a\le1$ …… ㉡

이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=\dfrac{a}{3}$이므로



$\frac{a}{3}<1$　　$\therefore a<3$　　$\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$a<-3$ 또는 $0<a\le 1$　　$\cdots\cdots$ ❸

(i), (ii)에서 $a\le 1$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.　　$\cdots\cdots$ ❹

답 1

채점기준	배점
❶ $f'(x)$ 구하기	1
❷ $f(x)$가 모든 실수 x에서 극값을 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위 구하기	2
❸ $f(x)$가 $x\le 1$에서만 극값을 갖도록 하는 a의 값의 범위 구하기	3
❹ 정수 a의 최댓값 구하기	1

7 $f(x)=-x^3-3x^2+24x+a$에서

$f'(x)=-3x^2-6x+24=-3(x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$　　$\cdots\cdots$ ❶

닫힌구간 $[-6, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-6	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a-36$	↘	$a-80$	↗	$a+28$	↘	$a-16$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $a+28$, $x=-4$에서 최솟값 $a-80$을 갖는다.　　$\cdots\cdots$ ❷

이때 최댓값과 최솟값의 합이 -10이므로

$(a+28)+(a-80)=-10$

$2a=42$　　$\therefore a=21$　　$\cdots\cdots$ ❸

답 21

8 $f(x)=-2x^3-6x^2+a$에서

$f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because -3\le x\le -1$)　　$\cdots\cdots$ ❶

닫힌구간 $[-3, -1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↘	$a-8$	↗	$a-4$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 a, $x=-2$에서 최솟값 $a-8$을 가지므로

$M=a$, $m=a-8$　　$\cdots\cdots$ ❷

이때 $M+m=12$이므로

$a+(a-8)=12$, $2a=20$

$\therefore a=10$　　$\cdots\cdots$ ❸

답 10

채점기준	배점
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	2
❷ M, m을 a에 대한 식으로 나타내기	2
❸ a의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.22~25

01 $f(x)=-x^3+9x^2-24x$에서

$f'(x)=-3x^2+18x-24=-3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-20	↗	-16	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 2]$, $[4, \infty)$에서 감소하므로

$a\le 2$

즉 실수 a의 최댓값은 2이다.

답 ⑤

02 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 감소해야 한다.

$f(x)=-3x^3-3kx^2+kx+4$에서

$f'(x)=-9x^2-6kx+k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3k)^2-(-9)\times k=9k^2+9k\le 0$

$k(k+1)\le 0$　　$\therefore -1\le k\le 0$

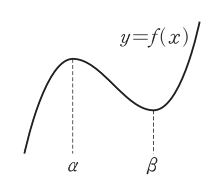
따라서 정수 k는 -1, 0의 2개이다.

답 ②

03 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다. 즉 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이므로



$f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$

즉 α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3}$, $\alpha\beta=\frac{b}{3}$

이때 조건 (나)에서 $-6=-\frac{2a}{3}$, $2=\frac{b}{3}$

$\therefore a=9$, $b=6$

따라서 $f(x)=x^3+9x^2+6x+c$이므로

$f(-2)=-8+36-12+c=c+16$

$f(-1)=-1+9-6+c=c+2$

$\therefore f(-2)-f(-1)=(c+16)-(c+2)=14$

답 ④

04 함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 -16을 가지므로

$g(-1)=-16$, $g'(-1)=0$

$g(x)=(x^2+3x-2)f(x)$이고, $g(-1)=-16$이므로

$g(-1)=-4f(-1)=-16$

$\therefore f(-1)=4$

$g'(x)=(2x+3)f(x)+(x^2+3x-2)f'(x)$이고,

$g'(-1)=0$이므로

$g'(-1)=f(-1)-4f'(-1)=0$

$4-4f'(-1)=0$ ($\because f(-1)=4$)

$4f'(-1)=4 \qquad \therefore f'(-1)=1$

답 ①

05 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+6ax+3b$

이때 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-7)=0$,

$f'(-1)=0$이므로

$f'(x)=3(x+7)(x+1)=3x^2+24x+21$

따라서 $6a=24$, $3b=21$이므로

$a=4$, $b=7$

$\therefore f(x)=x^3+12x^2+21x+c$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-7	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$c+98$	↘	$c-10$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $c-10$을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값이 -4이므로

$c-10=-4 \qquad \therefore c=6$

$\therefore a+b+c=4+7+6=17$

답 ④

06 $f(x)=2x^3+3(a-1)x^2-6ax$에서

$f'(x)=6x^2+6(a-1)x-6a$

$\quad=6(x+a)(x-1)$ $(a>0)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=1$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a^2(a+3)$	↘	$-3a-1$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$g(a)=f(-a)=a^2(a+3)$

극솟값은

$h(a)=f(1)=-3a-1$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{g(a)}{a^2h(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{a^2(a+3)}{a^2(-3a-1)}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{a+3}{-3a-1}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1+\frac{3}{a}}{-3-\frac{1}{a}}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

답 ③

07 ㄱ. $a<x<c$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다. (참)

ㄴ. $k(x)=f(x)+g(x)$라 하면

$k'(x)=f'(x)+g'(x)$

이때 $f'(a)=g'(a)=0$이므로

$k'(a)=f'(a)+g'(a)=0+0=0$

$x<a$일 때 $f'(x)>0$, $g'(x)>0$이므로 $k'(x)>0$

$a<x<c$일 때 $f'(x)<0$, $g'(x)<0$이므로 $k'(x)<0$

$x=a$의 좌우에서 함수 $k(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	(c)
$k'(x)$	$+$	0	$-$	
$k(x)$	↗	극대	↘	

따라서 함수 $k(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다. (참)

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$에서 $f'(x)=g'(x)$

$\therefore x=a$ 또는 $x=b$

$x<a$일 때 $f'(x)>g'(x)$이므로 $h'(x)>0$

$a<x<b$일 때 $f'(x)<g'(x)$이므로 $h'(x)<0$

$x>b$일 때 $f'(x)>g'(x)$이므로 $h'(x)>0$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

08 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+2$에서

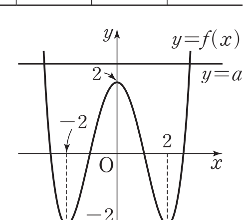
$f'(x)=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $g(x)=|f(x)-a|$가 서로 다른 두 점에서 미분가능하지 않으려면 직선 $y=a$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 극값을 갖는 점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나거나 $f(x)$가 극댓값을 갖는 점을 지나야 하므로

$a\ge 2$

따라서 실수 a의 최솟값은 2이다.

답 ④

09 $f'(x)=\begin{cases} -a & (x>1) \\ 3x^2+6ax & (x<1) \end{cases}$

$=\begin{cases} -a & (x>1) \\ 3x(x+2a) & (x<1) \end{cases}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2a$ 또는 $x=0$

$-2a<0$이므로 $x<1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$4a^3-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

따라서 $x<1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-2a$에서 극댓값 $4a^3-1$, $x=0$에서 극솟값 -1을 갖는다.

한편

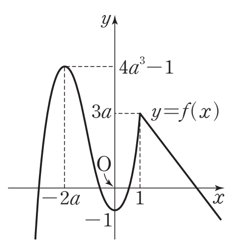
$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(-ax+4a)=-a+4a=3a$

$\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x^3+3ax^2-1)=1+3a-1=3a$

$f(1)=-a+4a=3a$

이므로 $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)=f(1)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고, $x\geq1$에서 직선 $y=-ax+4a$는 기울기가 음수인 직선이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x\geq1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=3a$를 갖는다.

이때 $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=f(-2a)+f(0)+f(1)=5$이므로

$4a^3-1+(-1)+3a=5$

$4a^3+3a-7=0$, $(a-1)(4a^2+4a+7)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a$는 실수)

따라서 $f(x)=\begin{cases} -x+4 & (x\geq1) \\ x^3+3x^2-1 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(-2)=-8+12-1=3$ 답 ③

10 $f(x)=6x^4+8ax^3+3x^2-4$에서

$f'(x)=24x^3+24ax^2+6x=6x(4x^2+4ax+1)$

사차함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2+4ax+1=0$이 두 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-4\times1=4a^2-4<0$

$4(a+1)(a-1)<0 \qquad \therefore -1<a<1$

(ii) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $4x^2+4ax+1=0$이 $x=0$을 근으로 가질 수 없으므로 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

따라서 $\frac{D}{4}=4a^2-4=0$에서

$4a^2=4$, $a^2=1 \qquad \therefore a=\pm1$

(iii) 이차방정식 $4x^2+4ax+1=0$이 $x=0$을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $-1\leq a\leq1$

따라서 $M=1$, $m=-1$이므로

$Mm=1\times(-1)=-1$ 답 ①

11 $-2<x<0$일 때 $f(x)=x^3+15x+20$이므로

$f'(x)=3x^2+15=3(x^2+5)>0$

$0<x<2$일 때 $f(x)=x^3-15x+20$이므로

$f'(x)=3x^2-15=3(x^2-5)<0$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	-18	$\nearrow$	20	$\searrow$	-2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 20, $x=-2$에서 최솟값 -18을 가지므로

$M=20$, $m=-18$

$\therefore M+m=20+(-18)=2$ 답 ①

참고 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 $f'(0)$의 값은 존재하지 않는다.

12 $g(x)=2x^2+4x+1=2(x+1)^2-1\geq-1$

이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $t\geq-1$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$

$f(t)=t^3+6t^2-15t+6$에서

$f'(t)=3t^2+12t-15=3(t+5)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-5$ 또는 $t=1$

$t\geq-1$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	26	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 -2를 가지므로 함수 $(f\circ g)(x)$의 최솟값은 -2이다. 답 ④

13 $f(x)=x^3-ax^2-a^2x+5$에서

$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{a}{3}$ 또는 $x=a$

닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-a^3+5$	$\nearrow$	$\frac{5}{27}a^3+5$	$\searrow$	$-a^3+5$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-a$ 또는 $x=a$에서 최솟값 $-a^3+5$,

$x=-\frac{a}{3}$에서 최댓값 $\frac{5}{27}a^3+5$를 갖는다.

이때 $f(x)$의 최솟값이 -22이므로

$-a^3+5=-22,\ -a^3=-27$

$a^3=27 \quad \therefore a=3$ ($\because a$는 실수)

따라서 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 $f(x)$의 최댓값은

$\frac{5}{27}a^3+5=\frac{5}{27}\times 3^3+5=10 \quad \therefore M=10$

$\therefore a+M=3+10=13$

답 ⑤

14 $\mathrm{P}(t, t^2+1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=t^2+(t^2-5)^2+(t-8)^2+(t^2+6)^2$

$=2t^4+4t^2-16t+125$

$f(t)=2t^4+4t^2-16t+125$라 하면

$f'(t)=8t^3+8t-16=8(t-1)(t^2+t+2)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ $\left(\because t^2+t+2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\right)$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	115	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 115를 가지므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값은 115이다.

답 ③

15 $f(x)=x^2-6x+9$라 하면 $f'(x)=2x-6$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(p, f(p))$, 즉

(p, p^2-6p+9) $(0<p<3)$에서의 접선의 방정식은

$y-(p^2-6p+9)=(2p-6)(x-p)$

$\therefore y=2(p-3)x+9-p^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$\left(\frac{p+3}{2}, 0\right)$, $(0, 9-p^2)$

이때 직선 ㉠과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(p)$라 하면

$S(p)=\frac{1}{2}\times\frac{p+3}{2}\times(9-p^2)$

$=-\frac{1}{4}(p^3+3p^2-9p-27)$

$S'(p)=-\frac{1}{4}(3p^2+6p-9)=-\frac{3}{4}(p+3)(p-1)$

$S'(p)=0$에서 $p=1$ $(\because 0<p<3)$

$0<p<3$에서 함수 $S(p)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

p	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$S'(p)$		$+$	0	$-$	
$S(p)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	

따라서 함수 $S(p)$는 $p=1$에서 최대이다.

이때 점 (p, q), 즉 $(1, q)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$q=f(1)=1-6+9=4$

$\therefore p+q=1+4=5$

답 ④

16 $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+48x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x+48$

$=4(x+2)(x-2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-80$	$\nearrow$	$a+48$	$\searrow$	$a+45$	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하려면 극값이 0이어야 하므로

$a-80=0$ 또는 $a+48=0$ 또는 $a+45=0$

$\therefore a=80$ 또는 $a=-48$ 또는 $a=-45$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$80+(-48)+(-45)=-13$

답 ②

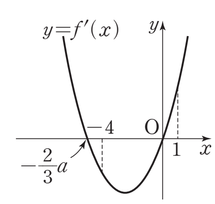
17 $f(x)=x^3+ax^2+5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

조건 (가)에서 $-4<x<0$일 때 $f'(x)\le 0$,

조건 (나)에서 $1<x<4$일 때 $f'(x)\ge 0$이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $-\frac{2}{3}a\le -4$이어야 하므로 $a\ge 6$

$\therefore f(-2)=-8+4a+5=4a-3$

$\ge 4\times 6-3=21$

따라서 $f(-2)$의 최솟값은 21이다.

답 ⑤

18 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a<0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad \cdots\cdots$ ㉠ $\quad \cdots\cdots$ ❶

함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-3)=0$, $f'(0)=0$이므로

$f'(x)=3ax(x+3)=3ax^2+9ax \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $2b=9a$, $c=0$

$\therefore b=\frac{9}{2}a,\ c=0 \quad \cdots\cdots$ ❷

$\therefore f(x)=ax^3+\frac{9}{2}ax^2+d$

한편 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{27}{2}a+d$	$\nearrow$	d	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 $\frac{27}{2}a+d$, $x=0$에서 극댓값 d를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값이 6이므로

$\frac{27}{2}a+d=6$ ...... ㉢

또 $f(-2)=13$이므로 $-8a+18a+d=13$

$\therefore 10a+d=13$ ...... ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-2$, $d=33$ ...... ❸

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $d=33$ ...... ❹

답 33

채점기준	배점
❶ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하고 $f'(x)$ 구하기	1
❷ c의 값을 구하고 b를 a에 대한 식으로 나타내기	2
❸ a, d의 값 구하기	2
❹ $f(x)$의 극댓값 구하기	1

19 $f(x)=x^3-(a+3)x^2+bx+4$에서

$f'(x)=3x^2-2(a+3)x+b$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 곱이 0이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{b}{3}=0$ $\therefore b=0$ ...... ❶

$\therefore f(x)=x^3-(a+3)x^2+4$

$f'(x)=3x^2-2(a+3)x=x\{3x-2(a+3)\}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{2(a+3)}{3}$

$a>0$이므로 닫힌구간 $[-3, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-9a-50$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-4a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 4, $x=-3$에서 최솟값 $-9a-50$을 갖는다. ...... ❷

이때 최댓값과 최솟값의 차가 63이므로

$4-(-9a-50)=63$, $9a=9$ $\therefore a=1$ ...... ❸

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+4$이므로

$f(4)=64-64+4=4$ ...... ❹

답 4

채점기준	배점
❶ b의 값 구하기	1
❷ 함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값 구하기	2
❸ a의 값 구하기	2
❹ $f(4)$의 값 구하기	1

참고 $a>0$이므로 $a+3>3$ $\therefore \frac{2(a+3)}{3}>2$

실전 문제 | 2회

p.26~29

01 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 즉 함수 $f(x)$가 일대일함수이려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

이때 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$f(x)=-x^3+2ax^2-6ax$에서

$f'(x)=-3x^2+4ax-6a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-(-3)\times(-6a)=4a^2-18a\le0$

$2a(2a-9)\le0$ $\therefore 0\le a\le\frac{9}{2}$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$0+1+2+3+4=10$

답 ①

02 $f(x)=x^3+3x^2-72x-21$에서

$f'(x)=3x^2+6x-72$

함수 $f(x)$가 감소하려면 $f'(x)\le0$이어야 하므로

$f'(x)=3x^2+6x-72\le0$, $x^2+2x-24\le0$

$(x+6)(x-4)\le0$ $\therefore -6\le x\le4$

즉 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-6, 4]$에서 감소한다.

따라서 열린구간 $(-a, a)$가 닫힌구간 $[-6, 4]$에 포함되어야 하므로 양수 a의 최댓값은 4이다.

답 ③

03 기울기가 15인 직선의 방정식을 $y=15x+k$ (k는 상수)라 하면 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=15x+k$가 $x=4$인 점에서 접하고, $x=-2$인 점에서 만나므로 삼차방정식 $f(x)=15x+k$, 즉 $f(x)-15x-k=0$은 $x=4$를 중근으로 갖고 $x=-2$를 한 근으로 갖는다. 이때 삼차식 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로

$f(x)-15x-k=-(x-4)^2(x+2)$

$\therefore f(x)=-(x-4)^2(x+2)+15x+k$

$=-x^3+6x^2+15x+k-32$

$f'(x)=-3x^2+12x+15=-3(x+1)(x-5)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$k-40$	$\nearrow$	$k+68$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값 $k+68$, $x=-1$에서 극솟값 $k-40$을 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는

$(k+68)-(k-40)=108$

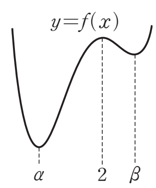
답 ⑤

04 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로 도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 8인 삼차함수이다.

또 조건 ㈏에서 $f'(2)=f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로

$f'(x)=8(x-2)(x-\alpha)(x-\beta)$

사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로



$\alpha<2<\beta$ ⋯⋯ ㉠

조건 ㈎에서

$f'(1)=8\times(-1)\times(1-\alpha)(1-\beta)$

$\quad=-8(1-\alpha)(1-\beta)=72$

즉 $(1-\alpha)(1-\beta)=-9$이므로

$1-\alpha-\beta+\alpha\beta=-9$

$\therefore\ \alpha+\beta-\alpha\beta=10$ ⋯⋯ ㉡

이때 조건 ㈐에서 $\beta=\alpha+6$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$\alpha+(\alpha+6)-\alpha(\alpha+6)=10$

$\alpha^2+4\alpha+4=0,\ (\alpha+2)^2=0$

$\therefore\ \alpha=-2$

$\alpha=-2$일 때, $\beta=-2+6=4$이므로 ㉠을 만족시킨다.

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=4$이므로

$f'(x)=8(x-2)(x+2)(x-4)$

$\therefore\ f'(3)=8\times1\times5\times(-1)=-40$ 답 ③

05 $f(x)=x^3+px^2-24x+q$에서

$f'(x)=3x^2+2px-24$

조건 ㈎에서

$f'(-1)=3-2p-24=-15$

$-2p=6 \qquad \therefore\ p=-3$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x^2-24x+q$

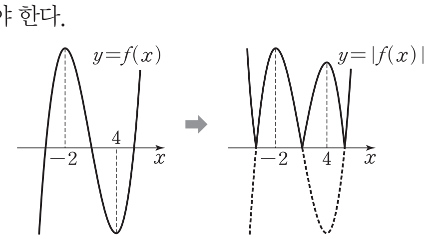
$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$q+28$	↘	$q-80$	↗

조건 ㈏가 성립하려면 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $f(-2)>0,\ f(4)<0$이므로 함수 $|f(x)|$의 두 극댓값은 $f(-2),\ -f(4)$이다. 따라서 조건 ㈐에서

$|f(-2)-\{-f(4)\}|=8,\ |f(-2)+f(4)|=8$

$|q+28+q-80|=8,\ |2q-52|=8$

$2q-52=\pm8,\ 2q=52\pm8$

$2q=60$ 또는 $2q=44$

$\therefore\ q=30\ (\because\ q>26)$

$\therefore\ p+q=-3+30=27$ 답 ④

06 $\alpha,\ \beta$가 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이므로

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

이때 조건 ㈎에서 $\alpha\neq\beta$이므로 $f(\alpha),\ f(\beta)$는 삼차함수 $f(x)$의 극값이다.

조건 ㈏에서

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=17$

$(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=289$

$8^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=289\ (\because$ 조건 ㈎$)$

$\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=225$

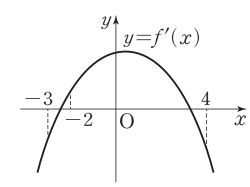
$\therefore\ |f(\beta)-f(\alpha)|=15$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는 15이다. 답 ⑤

07 $f(x)=-5x^3+ax^2+a^2x+6$에서

$f'(x)=-15x^2+2ax+a^2$

이때 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-3<x<-2$에서 한 실근을 갖고, $-2<x<4$에서 한 실근을 가져야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(-3)<0,\ f'(-2)>0,\ f'(4)<0$

이어야 한다.

$f'(-3)<0$에서 $a^2-6a-135<0$

$(a+9)(a-15)<0 \qquad \therefore\ -9<a<15$ ⋯⋯ ㉠

$f'(-2)>0$에서 $a^2-4a-60>0$

$(a+6)(a-10)>0 \qquad \therefore\ a<-6$ 또는 $a>10$ ⋯⋯ ㉡

$f'(4)<0$에서 $a^2+8a-240<0$

$(a+20)(a-12)<0 \qquad \therefore\ -20<a<12$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$-9<a<-6$ 또는 $10<a<12$

따라서 정수 a는 $-8,\ -7,\ 11$이므로 구하는 합은

$-8+(-7)+11=-4$ 답 ①

08 $f(x)=-x^3+12x^2+6kx+8$에서

$f'(x)=-3x^2+24x+6k$

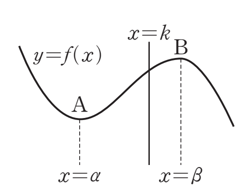
삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha,\ x=\beta$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0$

직선 $x=k$가 두 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha)),\ \mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))\ (\alpha<\beta)$ 사이를 지나므로

$\alpha<k<\beta$

즉 오른쪽 그림에서 $f'(k)>0$이어야 하므로



$f'(k)=-3k^2+24k+6k>0$

$-3k^2+30k>0,\ k^2-10k<0$

$k(k-10)<0 \qquad \therefore 0<k<10$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, …, 9의 9개이다. 답 ④

09 $f(x)=x^3-7ax^2+15a^2x-9a^3=(x-a)(x-3a)^2$에서

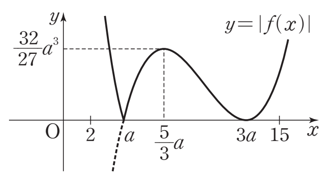
$f'(x)=3x^2-14ax+15a^2=(3x-5a)(x-3a)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{5}{3}a$ 또는 $x=3a$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{5}{3}a$	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{32}{27}a^3$	↘	0	↗

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉 함수 $|f(x)|$는 $x=\frac{5}{3}a$에서 극댓값, $x=a$, $x=3a$에서 극솟값을 갖는다.

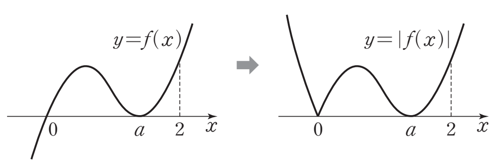
a, $\frac{5}{3}a$, $3a$가 열린구간 $(2, 15)$에 모두 존재하려면

$2<a$, $3a<15 \qquad \therefore 2<a<5$

따라서 $m=2$, $n=5$이므로

$m+n=2+5=7$ 답 ②

10 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(c)=0$이면 함수 $|f(x)|$는 $x=c$에서 반드시 극솟값을 갖게 되므로 조건 (다)에서 $|f(x)|$의 극솟값은 0이고, 함수 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 한다. 이때 $f(0)=0$, $f'(0)=f'(2)>0$이므로 $f(x)$의 극솟값이 0이고, $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 $f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x\ (a>0)$라 하면

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$

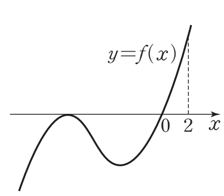
이때 $f'(0)=f'(2)$이므로

$a^2=12-8a+a^2$, $8a=12 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 $f'(x)=3x^2-6x+\frac{9}{4}$이므로

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+3+\frac{9}{4}=6$ 답 ①

참고 오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$의 극댓값이 0이면 $f'(2)>f'(0)$이 되므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



11 $x\geq0$일 때

$g(x)=x^4-x^3+f(x)=x^4-x^3+(1-a)x^3=x^4-ax^3$

$x<0$일 때

$g(x)=x^4+x^3+f(x)=x^4+x^3$

이때

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^4-ax^3-0}{x}=\lim_{x\to0+}(x^3-ax^2)=0$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x^4+x^3-0}{x}=\lim_{x\to0-}(x^3+x^2)=0$$

이므로 $g'(0)=0$

$$\therefore g'(x)=\begin{cases}4x^3-3ax^2 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ 4x^3+3x^2 & (x<0)\end{cases}=\begin{cases}x^2(4x-3a) & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ x^2(4x+3) & (x<0)\end{cases}$$

(i) $a>0$일 때

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{3}{4}a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=-\frac{3}{4}$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}a$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{3}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}a$에서 극소이고 $x=0$에서 극대이다.

(ii) $a\leq0$일 때

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{3}{4}$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{3}{4}$에서 극소이다.

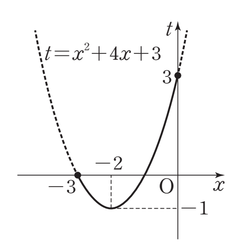
(i), (ii)에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $a>0$이다. 답 ⑤

12 $y=(x^2+4x+3)^3-12(x^2+4x+3)+6$에서

$t=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$

로 놓으면 $-3\leq x\leq0$에서 $-1\leq t\leq3$

이고 $y=t^3-12t+6$



$g(t)=t^3-12t+6$이라 하면

$g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$

$-1\leq t\leq3$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	17	↘	-10	↗	-3

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 최댓값 17, $t=2$에서 최솟값 -10을 가지므로 구하는 합은

$17+(-10)=7$ 답 ③

13 $g(x)=x^3-12x+3$이라 하면

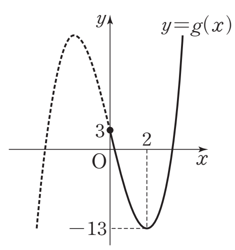
$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$x\geq0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	3	↘	-13	↗

따라서 $x\geq0$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $a=1$일 때

닫힌구간 $[0, 1]$에서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 최댓값 3을 가지므로

$f(1)=3$

(ii) $a=3$일 때

$g(0)=3$, $g(3)=27-36+3=-6$

즉 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 3이므로

$f(3)=3$

(iii) $a=4$일 때

$g(0)=3$, $g(4)=64-48+3=19$

즉 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 19이므로

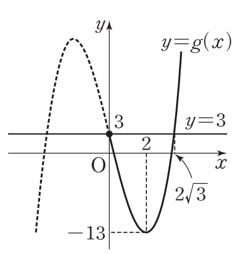
$f(4)=19$

(i), (ii), (iii)에서

$f(1)+f(3)+f(4)=3+3+19=25$ 답 ②

다른풀이 $g(x)=x^3-12x+3$이라 하면

$y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점의 x좌표 중 양수인 것은



$x^3-12x+3=3$에서 $x^3-12x=0$

$x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0$

$\therefore x=2\sqrt{3}$ ($\because x>0$)

즉 닫힌구간 $[0, a]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은

$0<a\leq2\sqrt{3}$일 때 $g(0)=g(2\sqrt{3})=3$

$a>2\sqrt{3}$일 때 $g(a)=a^3-12a+3$

$$\therefore f(a)=\begin{cases} 3 & (0<a\leq2\sqrt{3}) \\ a^3-12a+3 & (a>2\sqrt{3}) \end{cases}$$

따라서 $f(1)=f(3)=3$, $f(4)=19$이므로

$f(1)+f(3)+f(4)=3+3+19=25$

14 제품의 1개당 가격을 $10x$원 올릴 때 하루에 판매하여 남긴 총 이익금을 $f(x)$원이라 하면

$f(x)=(120+10x)(288-2x^2)$

$\quad=-20x^3-240x^2+2880x+34560$

$f'(x)=-60x^2-480x+2880=-60(x+12)(x-4)$

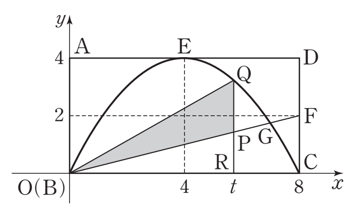
$f'(x)=0$에서 $x=4$ ($\because 0<x<12$)

$0<x<12$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(12)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	40960	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 40960을 가지므로 하루에 판매하여 남긴 이익금이 최대가 되도록 제품의 가격을 정할 때 하루에 남긴 총 이익금은 40960원이다. 답 ④

15 점 B를 원점, 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 생각하여 주어진 도형을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 포물선의 방정식을 $y=ax(x-8)$ $(a<0)$이라 하면 이 포물선이 점 $E(4, 4)$를 지나므로

$4=a\times4\times(-4)$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{4}$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x(x-8)=-\frac{1}{4}x^2+2x$

또 직선 BF의 방정식은 $y=\frac{1}{4}x$

포물선과 직선 BF의 교점 G의 x좌표는 $-\frac{1}{4}x^2+2x=\frac{1}{4}x$에서

$-x^2+8x=x$, $x^2-7x=0$, $x(x-7)=0$

$\therefore x=7$ ($\because x>0$)

따라서 점 R의 x좌표를 t라 하면 $0<t<7$이고

$P\left(t, \frac{1}{4}t\right)$, $Q\left(t, -\frac{1}{4}t^2+2t\right)$

삼각형 BPQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{BR}\times\overline{PQ}$$
$$=\frac{1}{2}\times t\times\left\{\left(-\frac{1}{4}t^2+2t\right)-\frac{1}{4}t\right\}$$
$$=-\frac{1}{8}t^3+\frac{7}{8}t^2$$

$S'(t)=-\frac{3}{8}t^2+\frac{7}{4}t=-\frac{1}{8}t(3t-14)$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{14}{3}$ ($\because 0<t<7$)

$0<t<7$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{14}{3}$	$\cdots$	(7)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$S\left(\frac{14}{3}\right)$	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\frac{14}{3}$에서 최대이므로

$\overline{\mathrm{BR}}=t=\frac{14}{3}$

답 ④

16 조건 ㈎에서 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 각각 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \qquad \therefore f(0)=0$

또 $y=h$를 대입하면

$f(x+h)=f(x)+f(h)+2xh(x+h)$

이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2xh(x+h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+2x(x+h)\right\}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+2x(x+h)\right\}\\&=f'(0)+2x^2\\&=-18+2x^2\ (\because \text{조건 ㈏})\\&=2(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

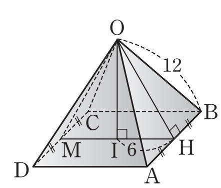
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$a=-3,\ b=3$

$\therefore b-a=3-(-3)=6$

답 ④

17 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면은 정사각형이다.

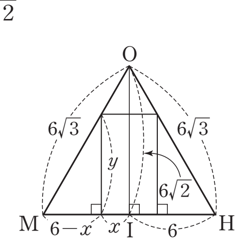


오른쪽 그림과 같이 정사각뿔의 두 모서리 AB, CD의 중점을 각각 H, M이라 하면 정삼각형 OAB에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times12=6\sqrt{3}$

점 O에서 면 ABCD에 내린 수선의 발을 I라 하면 직각삼각형 OIH에서

$\overline{\mathrm{OI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}^2-\overline{\mathrm{IH}}^2}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-6^2}=6\sqrt{2}$



이때 직육면체의 밑면의 한 모서리의 길이를 $2x\ (0<x<6)$, 높이를 y라 하면 오른쪽 그림에서

$(6-x):y=6:6\sqrt{2}=1:\sqrt{2}$

$\therefore y=\sqrt{2}(6-x)$

직육면체의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=(2x)^2\times\sqrt{2}(6-x)=-4\sqrt{2}x^3+24\sqrt{2}x^2$

$V'(x)=-12\sqrt{2}x^2+48\sqrt{2}x=-12\sqrt{2}x(x-4)$

$V'(x)=0$에서 $x=4\ (\because 0<x<6)$

$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$128\sqrt{2}$	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $128\sqrt{2}$를 가지므로 직육면체의 부피의 최댓값은 $128\sqrt{2}$이다.

답 ③

18 조건 ㈎에서 극한값이 존재하고 $x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다. 즉

$\lim_{x\to-2}f(x)=0 \qquad \therefore f(-2)=0\ (\because f(x)$는 연속함수$)$

따라서 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=f'(-2)$이므로

$f'(-2)=0$ …… ❶

$f(-2)=0,\ f'(-2)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=a(x-b)(x+2)^2$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$f'(x)=a\{(x+2)^2+2(x-b)(x+2)\}$

$\quad\ =a\{3x^2+(-2b+8)x-4b+4\}$ …… ❷

조건 ㈏에서 $f(1)=-27,\ f'(1)=0$이므로

$f(1)=9a(1-b)=-27 \qquad \therefore a(1-b)=-3$ …… ㉠

$f'(1)=a(-6b+15)=0 \qquad \therefore b=\frac{5}{2}\ (\because a\neq0)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-3 \qquad \therefore a=2$ …… ❸

따라서 $f(x)=2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+2)^2=(2x-5)(x+2)^2$이므로

$f(3)=1\times5^2=25$ …… ❹

답 25

채점기준	배점
❶ $f(-2)$, $f'(-2)$의 값 구하기	2
❷ $f(x)$, $f'(x)$를 상수 a, b를 이용하여 나타내기	2
❸ a, b의 값 구하기	2
❹ $f(3)$의 값 구하기	1

19 $f(x)=2ax^3+3ax^2+b$에서

$f'(x)=6ax^2+6ax=6ax(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ …… ❶

$a>0$이므로 닫힌구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-27a+b$	↗	$a+b$	↘	b	↗	$5a+b$

…… ❷

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $5a+b$, $x=-3$에서 최솟값 $-27a+b$를 갖는다.
이때 최댓값이 18, 최솟값이 -14이므로
$5a+b=18,\ -27a+b=-14$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=13$
$\therefore a-b=1-13=-12$ ⋯⋯ ❸

답 -12

채점기준	배점
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	2
❷ 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내기	2
❸ $a-b$의 값 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.30~34

1 $f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$에서
$f'(x)=-4x^3+16a^2x=-4x(x+2a)(x-2a)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2a$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2a$ 또는 $x=2a$에서 극대이다.
이때 $f(x)$가 $x=b$, $x=2-2b$에서 극대이고 $a>0$, $b>1$이므로
$-2a=\underbrace{2-2b}_{2-2b<0},\ 2a=b$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$
$\therefore a+b=1+2=3$

답 ①

2 $f(x)=-x^4+18a^2x^2-4$에서
$f'(x)=-4x^3+36a^2x=-4x(x+3a)(x-3a)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3a$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	0	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3a$ 또는 $x=3a$에서 극대이다.
이때 $f(x)$가 $x=3-b$, $x=3b-15$에서 극대이므로
(i) $-3a=3-b$, $3a=3b-15$일 때
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=6$
(ii) $-3a=3b-15$, $3a=3-b$일 때
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=6$
$a=-1$은 $a>0$을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 $a=1,\ b=6$
$\therefore b-a=6-1=5$

답 ④

3 $f(x)=x^3-6x^2+ax+10$에서
$f'(x)=3x^2-12x+a$
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=3$에서 미분가능하고 연속이다.
함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로
$\lim_{x\to3+}g(x)=\lim_{x\to3-}g(x)=g(3)$
이때
$\lim_{x\to3+}g(x)=\lim_{x\to3+}f(x)=f(3)$,
$\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3-}\{b-f(x)\}=b-f(3)$,
$g(3)=f(3)$
이므로 $b-f(3)=f(3)$
$\therefore b=2f(3)=2(3a-17)=6a-34$ ⋯⋯ ㉠
함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로
$$\lim_{x\to3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$
이때
$$\lim_{x\to3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=a-9,$$
$$\lim_{x\to3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{\{b-f(x)\}-f(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{2f(3)-f(x)-f(3)}{x-3}\ (\because b=2f(3))$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{-\{f(x)-f(3)\}}{x-3}$$
$=-f'(3)=-a+9$
이므로
$a-9=-a+9,\ 2a=18$
$\therefore a=9$
$\therefore g'(3)=a-9=9-9=0$
$a=9$를 ㉠에 대입하면 $b=20$
$$\therefore g(x)=\begin{cases}-x^3+6x^2-9x+10 & (x<3)\\ x^3-6x^2+9x+10 & (x\ge3)\end{cases}$$
$x<3$일 때, $g'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$
$g'(x)=0$에서 $x=1\ (\because x<3)$
$x\ge3$일 때, $g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$g'(x)=0$에서 $x=3\ (\because x\ge3)$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	6	↗	10	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 6을 갖는다.

답 6

4 $f(x)=-x^3-9x^2+ax+9$에서 $f'(x)=-3x^2-18x+a$
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-2$에서 미분가능하고 연속이다.

함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2+} g(x)=\lim_{x\to-2-} g(x)=g(-2)$

이때

$\lim_{x\to-2+} g(x)=\lim_{x\to-2+} \{b-f(x)\}=b-f(-2)$,

$\lim_{x\to-2-} g(x)=\lim_{x\to-2-} f(x)=f(-2)$,

$g(-2)=b-f(-2)$

이므로

$f(-2)=b-f(-2)$

$\therefore b=2f(-2)=2\times(-2a-19)=-4a-38$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to-2+} \frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2-} \frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$

이때

$\lim_{x\to-2+} \frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$

$=\lim_{x\to-2+} \frac{\{b-f(x)\}-\{b-f(-2)\}}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2+} \frac{-\{f(x)-f(-2)\}}{x+2}$

$=-f'(-2)=-a-24$,

$\lim_{x\to-2-} \frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$

$=\lim_{x\to-2-} \frac{f(x)-\{b-f(-2)\}}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2-} \frac{f(x)-\{2f(-2)-f(-2)\}}{x+2}$ $(\because b=2f(-2))$

$=\lim_{x\to-2-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$

$=f'(-2)=a+24$

이므로

$-a-24=a+24$, $2a=-48$

$\therefore a=-24$

$\therefore g'(-2)=-a-24=24-24=0$

$a=-24$를 ㉠에 대입하면 $b=58$

$\therefore g(x)=\begin{cases} -x^3-9x^2-24x+9 & (x<-2) \\ x^3+9x^2+24x+49 & (x\ge-2) \end{cases}$

$x<-2$일 때

$g'(x)=-3x^2-18x-24=-3(x+4)(x+2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-4$ $(\because x<-2)$

$x\ge-2$일 때

$g'(x)=3x^2+18x+24=3(x+4)(x+2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ $(\because x\ge-2)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	25	↗	29	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-4$에서 극솟값 25를 가지므로

$k=-4$, $m=25$

$\therefore k+m=-4+25=21$

답 21

5 $f(x)=x(x-a)(x-6)=x^3-(a+6)x^2+6ax$라 하면

$f'(x)=3x^2-2(a+6)x+6a$

점 $(0, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를

$(t,\ t^3-(a+6)t^2+6at)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-2(a+6)t+6a$

접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+6)t^2+6at\}=\{3t^2-2(a+6)t+6a\}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\{t^3-(a+6)t^2+6at\}=-t\{3t^2-2(a+6)t+6a\}$

$2t^3-(a+6)t^2=0$, $t^2\{2t-(a+6)\}=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{a+6}{2}$

즉 두 접선의 접점의 x좌표는 각각 0, $\frac{a+6}{2}$이므로 두 접선의 기울기는 각각

$f'(0)=6a$,

$f'\left(\frac{a+6}{2}\right)=3\times\left(\frac{a+6}{2}\right)^2-2(a+6)\times\frac{a+6}{2}+6a$

$=-\frac{1}{4}(a^2-12a+36)$

두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$라 하면

$g(a)=6a\times\left\{-\frac{1}{4}(a^2-12a+36)\right\}$

$=-\frac{3}{2}(a^3-12a^2+36a)$ $(0<a<6)$

$g'(a)=-\frac{3}{2}(3a^2-24a+36)$

$=-\frac{9}{2}(a-2)(a-6)$

$g'(a)=0$에서 $a=2$ $(\because 0<a<6)$

$0<a<6$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	-48	↗	

따라서 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 최솟값 -48을 가지므로 구하는 최솟값은 -48이다.

답 ③

6 $f(x)=x(x-a)(x-9)=x^3-(a+9)x^2+9ax$라 하면

$f'(x)=3x^2-2(a+9)x+9a$

점 $(0, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를

$(t,\ t^3-(a+9)t^2+9at)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-2(a+9)t+9a$

접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+9)t^2+9at\}=\{3t^2-2(a+9)t+9a\}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\{t^3-(a+9)t^2+9at\}=-t\{3t^2-2(a+9)t+9a\}$

$2t^3-(a+9)t^2=0$, $t^2\{2t-(a+9)\}=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{a+9}{2}$

즉 두 접선의 접점의 x좌표는 각각 0, $\frac{a+9}{2}$이므로 두 접선의 기울기는 각각

$f'(0)=9a$,

$f'\left(\frac{a+9}{2}\right)=3\times\left(\frac{a+9}{2}\right)^2-2(a+9)\times\frac{a+9}{2}+9a$

$=-\frac{1}{4}(a^2-18a+81)$

두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$라 하면

$g(a)=9a\times\left\{-\frac{1}{4}(a^2-18a+81)\right\}$

$=-\frac{9}{4}(a^3-18a^2+81a)\ (0<a<9)$

$g'(a)=-\frac{9}{4}(3a^2-36a+81)$

$=-\frac{27}{4}(a-3)(a-9)$

$g'(a)=0$에서 $a=3$ ($\because 0<a<9$)

$0<a<9$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(9)
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	-243	↗	

따라서 함수 $g(a)$는 $a=3$에서 최솟값 -243을 갖는다. 답 ①

7 $f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$이므로 $f(x)=t$로 놓으면 $t\geq k-1$이고

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$

$g(t)=2t^3-9t^2+12t-2$에서

$g'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	3	↘	2	↗

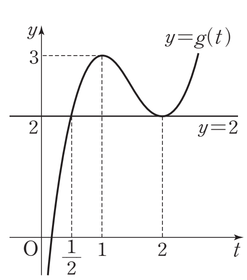
따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극댓값 3, $t=2$에서 극솟값 2를 갖는다.

$t\geq k-1$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 2이므로 $g(t)=2$에서

$2t^3-9t^2+12t-2=2$, $2t^3-9t^2+12t-4=0$

$(2t-1)(t-2)^2=0$ $\quad\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=2$는 오른쪽 그림과 같으므로 $t\geq k-1$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는



$\frac{1}{2}\leq k-1\leq 2$ $\quad\therefore \frac{3}{2}\leq k\leq 3$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다. 답 ⑤

참고 $k-1<\frac{1}{2}$ 또는 $k-1>2$일 때, $t\geq k-1$에서 $g(t)$의 최솟값은 $g(k-1)$이다.

8 $f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$

이므로 $f(x)=t$로 놓으면 $t\geq k-1$이고

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$

$g(t)=t^3-3t^2-9t+19$에서

$g'(t)=3t^2-6t-9=3(t+1)(t-3)$

$g'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=3$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	24	↘	-8	↗

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 극댓값 24, $t=3$에서 극솟값 -8을 갖는다.

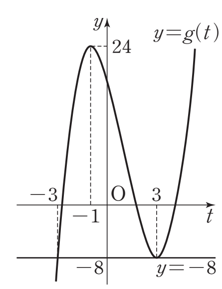
$t\geq k-1$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 -8이므로 $g(t)=-8$에서

$t^3-3t^2-9t+19=-8$, $t^3-3t^2-9t+27=0$

$(t+3)(t-3)^2=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=3$

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=-8$은 오른쪽 그림과 같으므로 $t\geq k-1$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 -8이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는



$-3\leq k-1\leq 3$

$\therefore -2\leq k\leq 4$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, $\ldots$, 4의 7개이다. 답 ⑤

9 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하자.

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하고 연속이다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$

이때

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}(x^3+ax^2+bx+c)=c$,

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$g(0)=f(0)=c$

이므로 $c=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

이때

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^3+ax^2+bx}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}(x^2+ax+b)=b,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=0$$
이므로 $b=0$

$\therefore g'(0)=0$

따라서 $f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$이므로

$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

$x<0$에서 $g(x)=\frac{1}{2}$이고 함수 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작으므로 $g(x)$는 $x\ge0$에서 최솟값을 가져야 한다. 즉 함수 $f(x)$는 $x\ge0$에서 극솟값을 가져야 한다.

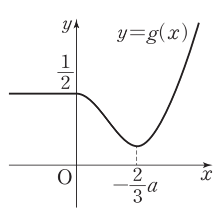
이때 $a>0$이면 $f(x)$는 $x>0$에서 극솟값을 갖지 않으므로

$a<0$

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}$	$\nearrow$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $g(0)=\frac{1}{2}$, $g'(0)=0$이므로

$g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=a+\frac{3}{2}$

$a<0$이므로 $a+\frac{3}{2}<\frac{3}{2}$

$\therefore g(1)<\frac{3}{2}$ (참)

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0이므로

$\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0$, $\frac{4}{27}a^3=-\frac{1}{2}$, $a^3=-\frac{27}{8}$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$ ($\because$ a는 실수)

즉 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$g(2)=f(2)=8-6+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

10 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하자.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하고 연속이다.

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0-}h(x)=h(0)$$
이때
$$\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0+}3=3,$$
$$\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0-}(2x^3+ax^2+bx+c)=c,$$
$h(0)=3$

이므로 $c=3$

$\therefore f(x)=2x^3+ax^2+bx+3$

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로
$$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$
이때
$$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{3-3}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{2x^3+ax^2+bx}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}(2x^2+ax+b)=b$$
이므로 $b=0$

$\therefore h'(0)=0$

따라서 $f(x)=2x^3+ax^2+3$이므로

$f'(x)=6x^2+2ax=2x(3x+a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{a}{3}$ 또는 $x=0$

$x\ge0$에서 $h(x)=3$이고 함수 $h(x)$의 최댓값이 3보다 크므로 $h(x)$는 $x<0$에서 최댓값을 가져야 한다. 즉 함수 $f(x)$는 $x<0$에서 극댓값을 가져야 한다.

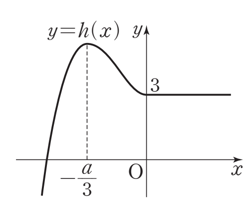
이때 $a<0$이면 $f(x)$는 $x<0$에서 극댓값을 갖지 않으므로

$a>0$

$x<0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$	(0)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{a^3}{27}+3$	$\searrow$	

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $h(0)=3$, $h'(0)=0$이므로

$h(0)-h'(0)=3$ (참)

ㄴ. $h(-1)=f(-1)$

$=-2+a+3=a+1$

$a>0$이므로 $a+1>1$

$\therefore h(-1)>1$ (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$의 최댓값이 4이므로

$\frac{a^3}{27}+3=4$, $\frac{a^3}{27}=1$, $a^3=27$

$\therefore a=3$

즉 $f(x)=2x^3+3x^2+3$이므로

$h(-3)=f(-3)=-54+27+3=-24$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

4 도함수의 활용 (3)

교과서 예제

p.37

01 (1) $f(x)=x^3-3x-1$이라 하면

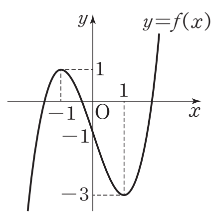
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



(2) $f(x)=x^3-6x^2+32$라 하면

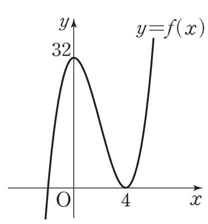
$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(3) $f(x)=x^4-2x^2-1$이라 하면

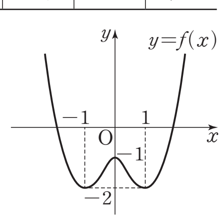
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(4) $3x^4-1=8x^3-6x^2$에서 $3x^4-8x^3+6x^2-1=0$

$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$이라 하면

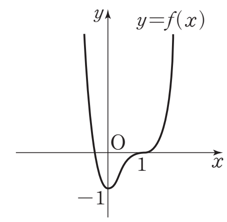
$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 (1) 3 (2) 2 (3) 2 (4) 2

다른풀이 (1) 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 1, $x=1$에서 극솟값 -3을 갖고 $1\times(-3)=-3<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 32, $x=4$에서 극솟값 0을 갖고 $32\times 0=0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

02 (1) 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(2) 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(3) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 (1) 3 (2) 2 (3) 3

03 $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

(1) 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(3)<0$이어야 하므로

$(a+5)(a-27)<0$

$\therefore -5<a<27$

(2) 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$f(-1)f(3)=0$이어야 하므로

$(a+5)(a-27)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=27$

(3) 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-1)f(3)>0$이어야 하므로

$(a+5)(a-27)>0$

$\therefore a<-5$ 또는 $a>27$

답 (1) $-5<a<27$ (2) $a=-5$ 또는 $a=27$
(3) $a<-5$ 또는 $a>27$

04 $f(x)=2x^3-3x^2+3$이라 하면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	2	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=\boxed{1}$에서

$f(\boxed{1})=\boxed{2}>0$

즉 $x>0$일 때 $f(x)\geq\boxed{2}$이므로

$2x^3-3x^2+3>0$ 답 (가) 1 (나) 2

05 $f(x)=3x^4-4x^3+18$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	18	↘	17	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=1$에서

$f(1)=17>0$

즉 $f(x)\geq 17$이므로

$3x^4-4x^3+18>0$ 답 풀이 참조

06 (1) 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t-15$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$3-12-15=-24$

(2) 점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$6\times2-12=0$

(3) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$3t^2-12t-15=0$, $3(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5$ ($\because t>0$)

$t=5$의 좌우에서 속도 v의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=5$에서 운동 방향을 바꾼다.

답 (1) -24 (2) 0 (3) 5

07 정사각형의 시각 t에서의 넓이를 S라 하면

$S=(t+3)^2=t^2+6t+9$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=2t+6$

따라서 $t=7$에서의 넓이 S의 변화율은

$2\times7+6=20$ 답 20

기출 Best | 1회

p.38~41

01 방정식 $x^3-9x^2+24x-17=a$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3-9x^2+24x-17$과 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^3-9x^2+24x-17$이라 하면

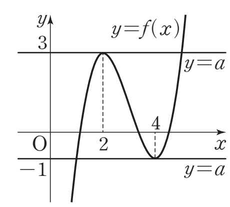
$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나려면



$a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+3=2$ 답 ⑤

02 $2x^3+3x^2-12x-a=0$에서

$2x^3+3x^2-12x=a$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가지려면 곡선 $y=2x^3+3x^2-12x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표 중 두 개는 음수이고, 다른 한 개는 양수이어야 한다.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

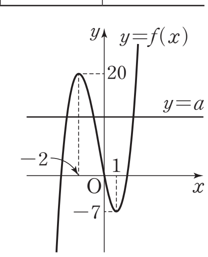
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표 중 두 개는 음수, 한 개는 양수이려면



$0<a<20$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, ..., 19의 19개이다. 답 ③

03 $f(x)=x^3-9x^2+15x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(1)f(5)<0$이어야 하므로

$(k+7)(k-25)<0$

$\therefore -7<k<25$

따라서 정수 k의 최솟값은 -6이다. 답 ①

04 곡선 $y=x^3+6x^2+3$과 직선 $y=-9x+k$가 한 점에서 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 방정식 $x^3+6x^2+3=-9x+k$, 즉 $x^3+6x^2+9x+3-k=0$이 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+6x^2+9x+3-k$라 하면

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

극값 중 하나가 0이어야 한다.

$f(-3)f(-1)=0$이어야 하므로

$(3-k)(-1-k)=0$ $\quad\therefore k=3$ ($\because k>0$)

답 ③

05 $f(x)=x^4-6x^2-8x+k$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$k+3$	$\searrow$	$k-24$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $k-24$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면

$k-24>0$ $\quad\therefore k>24$

따라서 정수 k의 최솟값은 25이다.

답 ⑤

06 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이 성립해야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(x^4-2x^2-1)-(-x^2+2x-a)$

$\quad\;\;=x^4-x^2-2x+a-1$

$h'(x)=4x^3-2x-2=2(x-1)(2x^2+2x+1)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$a-3$	$\nearrow$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $a-3$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)>0$이 성립하려면

$a-3>0$ $\quad\therefore a>3$

따라서 정수 a의 최솟값은 4이다.

답 ⑤

07 $f(x)=x^3+9x^2-21x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2+18x-21=3(x+7)(x-1)$

$x\ge1$일 때 $f'(x)\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다.

즉 $x\ge1$에서 부등식 $f(x)\ge0$이 성립하려면 $f(1)\ge0$이어야 하므로

$f(1)=1+9-21-k\ge0$ $\quad\therefore k\le-11$

따라서 실수 k의 최댓값은 -11이다.

답 ②

08 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+a$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$a-44$	$\nearrow$

따라서 $x>0$일 때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $a-44$이므로 $x>0$에서 부등식 $f(x)\ge0$이 성립하려면

$a-44\ge0$ $\quad\therefore a\ge44$

답 ⑤

09 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3at^2+4at+1$

$t=1$일 때 $v=-6$이므로

$-6=3a+4a+1$, $7a=-7$

$\therefore a=-1$

답 ②

10 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t$

$3t^2-6t=24$에서

$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because t>0$)

점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-6$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$6\times4-6=18$

답 ④

11 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=5$

이때 $t=1$, $t=5$의 좌우에서 v의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=1$에서 첫 번째로, $t=5$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

따라서 $t=5$에서의 점 P의 위치는

$5^3-9\times5^2+15\times5=-25$

답 ①

12 기차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=30-2t$

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$30-2t=0$, $2t=30$ $\quad\therefore t=15$

따라서 기차가 15초 동안 움직인 거리는

$30\times15-15^2=225$ (m)

답 ①

13 ㄱ. 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$이고, $v'(b)>0$이므로 $t=b$일 때 점 P의 가속도는 양수이다. (참)

ㄴ. $v(c)>0$, $v(d)>0$이므로 $t=c$일 때와 $t=d$일 때 점 P의 운동 방향은 서로 같다. (거짓)

ㄷ. $t=b$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 $0<t<f$에서 점 P는 운동 방향을 1번 바꾼다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

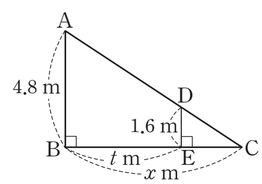
14 ㄱ. $v(1)=x'(1)=0$이므로 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이다. (참)

ㄴ. $x(7)=0$이므로 $t=7$일 때 점 P는 원점에 있다. (참)

ㄷ. $0<t<9$에서 $t=5$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P는 $t=5$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

15 갑이 출발한 후 t초 동안 걸어간 거리는 $\overline{BE}=t$ m



이때 오른쪽 그림에서

$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}=x-t$ (m)이고

$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$ (AA 닮음)

이므로

$\overline{EC}:\overline{BC}=1.6:4.8=1:3$

$3\overline{EC}=\overline{BC}$, $3(x-t)=x$

$3x-3t=x$, $2x=3t$ $\quad\therefore x=\frac{3}{2}t$

따라서 그림자의 끝이 움직이는 속도는

$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}$ (m/s) 답 ②

16 t초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $5t$ cm이므로 원의 넓이를 S cm^2라 하면

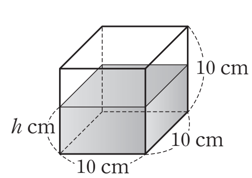
$S=\pi\times(5t)^2=25\pi t^2$

$\therefore \frac{dS}{dt}=50\pi t$

따라서 $\underbrace{\text{수면에 돌이 떨어진 지 3초 후}}_{t=3}$의 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$50\pi\times3=150\pi$ (cm^2/s) 답 ③

17 t초 후의 물의 높이를 h cm라 하면



$h=\frac{1}{2}t$ (cm)

물의 부피를 V cm^3라 하면

$V=10\times10\times h$

$=10\times10\times\frac{1}{2}t=50t$

$\therefore \frac{dV}{dt}=50$

따라서 물의 부피의 변화율은 50 cm^3/s이다. 답 ⑤

01 방정식 $4x^3-3x+2=a$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=4x^3-3x+2$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=4x^3-3x+2$라 하면

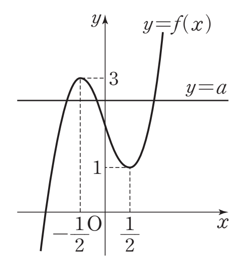
$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	1	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$1<a<3$

따라서 정수 a는 2의 1개이다. 답 ①

02 $x^3-x^2-5x-a=2x^2+19x$에서

$x^3-3x^2-24x=a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3-3x^2-24x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 두 개는 양수이어야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-24x$라 하면

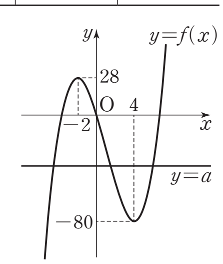
$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-80	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 두 개는 양수이려면



$-80<a<0$

따라서 정수 a의 최솟값은 -79이다. 답 ②

03 $f(x)=x^3-3x^2-9x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면

$f(-1)f(3)>0$이어야 하므로

$(-k+5)(-k-27)>0$

$(k+27)(k-5)>0$

$\therefore k<-27$ 또는 $k>5$

따라서 $\alpha=-27$, $\beta=5$이므로

$\alpha+\beta=-27+5=-22$ 답 ④

04 두 곡선 $y=x^3-10x+a-3$, $y=-x^3-3x^2+2x+1$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$x^3-10x+a-3=-x^3-3x^2+2x+1$, 즉

$2x^3+3x^2-12x+a-4=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+a-4$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(-2)f(1)=0$이어야 하므로

$(a+16)(a-11)=0 \qquad \therefore a=11 \ (\because a>0)$ 답 ①

05 $x^4-4x^3\geq k$에서 $x^4-4x^3-k\geq 0$

$f(x)=x^4-4x^3-k$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-k$	$\searrow$	$-27-k$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $-27-k$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-27-k\geq 0 \qquad \therefore k\leq -27$

따라서 실수 k의 최댓값은 -27이다. 답 ④

06 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)<0$이 성립해야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(-x^3+3x+1)-(x^4-x^3-x^2+x+a)$

$\quad =-x^4+x^2+2x-a+1$

$h'(x)=-4x^3+2x+2$

$\quad =-2(x-1)(2x^2+2x+1)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	$-a+3$	$\searrow$

함수 $h(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $-a+3$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)<0$이 성립하려면

$-a+3<0 \qquad \therefore a>3$

따라서 정수 a의 최솟값은 4이다. 답 ⑤

07 $2x^3-15x^2+a<-24x$에서

$2x^3-15x^2+24x+a<0$

$f(x)=2x^3-15x^2+24x+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$x\leq 1$일 때 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1]$에서 증가한다.

즉 $x\leq 1$에서 부등식 $f(x)<0$이 성립하려면 $f(1)<0$이어야 하므로

$f(1)=2-15+24+a<0 \qquad \therefore a<-11$

따라서 정수 a의 최댓값은 -12이다. 답 ②

08 $2x^3-2x\leq x^3+10x+k$에서

$x^3-12x-k\leq 0$

$f(x)=x^3-12x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$x<0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	(0)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$-k+16$	$\searrow$	

따라서 $x<0$일 때 함수 $f(x)$의 최댓값은 $-k+16$이므로 $x<0$에서 부등식 $f(x)\leq 0$이 성립하려면

$-k+16\leq 0 \qquad \therefore k\geq 16$

따라서 실수 k의 최솟값은 16이다. 답 ⑤

09 $x=t^3-6t^2+8t=t(t-2)(t-4)$이므로 $x=0$에서

$t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=4$

즉 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나는 것은 $t=2$일 때이다.

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t+8$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$3\times 2^2-12\times 2+8=-4$ 답 ③

10 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-30t$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-30$

이때 점 P의 가속도가 0이면

$6t-30=0$, $6t=30 \qquad \therefore t=5$

따라서 $t=5$에서의 점 P의 위치는

$5^3-15\times 5^2-5=-255$ 답 ⑤

11 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=4t^3+12t^2-72t=4t(t+6)(t-3)$

$v=0$에서 $t=3$ ($\because t>0$)

$t=3$의 좌우에서 점 P의 속도 v의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=3$일 때 운동 방향을 바꾼다.

점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=12t^2+24t-72$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$12\times3^2+24\times3-72=108$ 답 ⑤

12 브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=36-2at$

자동차가 브레이크를 밟은 후 정지할 때까지 걸린 시간이 6초, 즉 $t=6$에서의 속도가 0이므로

$36-12a=0,\ 12a=36 \qquad \therefore a=3$ 답 ①

13 ㄱ. $0<t<a$에서 $v(t)$가 증가하므로 속도가 증가한다. (참)

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$이고, $t=d$에서 $v'(t)=0$이므로 $t=d$에서의 가속도는 0이다. (참)

ㄷ. $v(b)=0,\ v(f)=0$이고, $t=b,\ t=f$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

14 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=x'(t)$

ㄱ. $3<t<8$일 때 $v(t)=x'(t)<0$이고, $v(8)=x'(8)=0$이므로 $v(t)<v(8)$

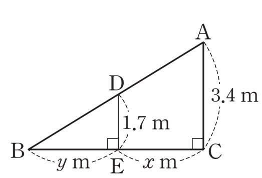
따라서 $0<t<13$에서 점 P의 속도는 $t=8$일 때 최소가 아니다. (거짓)

ㄴ. $3<t<8$일 때 $v(t)=x'(t)<0$이므로 $t=6$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다. (거짓)

ㄷ. $0<t<13$에서 $t=3$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P는 $t=3$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 답 ③

15 t초 동안 갑이 움직인 거리를 x m, 갑의 그림자의 길이를 y m라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle$ABC$\backsim\triangle$DBE (AA 닮음)

이므로

$\overline{AC}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{BE}$에서

$3.4:1.7=(x+y):y$

$3.4y=1.7(x+y),\ 2y=x+y \qquad \therefore y=x$

이때 $x=2t$이므로 $y=2t$

$\therefore \dfrac{dy}{dt}=2$

따라서 갑의 그림자의 길이의 변화율은 2 m/s이다. 답 ③

16 t초 후 정사각형의 한 변의 길이는 $(8+3t)$ cm이므로 t초 후 정사각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=(8+3t)^2=9t^2+48t+64$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=18t+48$

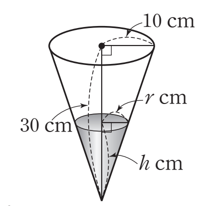
정사각형의 넓이가 400 cm^{2}이면 $S=(8+3t)^2=400$에서

$8+3t=20$ ($\because 8+3t>0$), $3t=12 \qquad \therefore t=4$

따라서 $t=4$일 때 정사각형의 넓이의 변화율은

$18\times4+48=120$ (cm^2/s) 답 ①

17 t초 후의 물의 높이를 h cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$r:h=10:30=1:3$

$3r=h \qquad \therefore r=\dfrac{1}{3}h$

또 t초 후의 물의 높이는 $2t$ cm이므로 $h=2t$

물의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\times\left(\dfrac{1}{3}h\right)^2\times h$

$=\dfrac{\pi}{27}h^3=\dfrac{\pi}{27}\times(2t)^3=\dfrac{8}{27}\pi t^3$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{8}{9}\pi t^2$

따라서 $t=3$일 때 물의 부피의 변화율은

$\dfrac{8}{9}\pi\times3^2=8\pi$ (cm^3/s) 답 ③

변형유형 집중공략

p.46~47

1-1 방정식 $|2x^3-6x-2|=t$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|2x^3-6x-2|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=2x^3-6x-2$라 하면

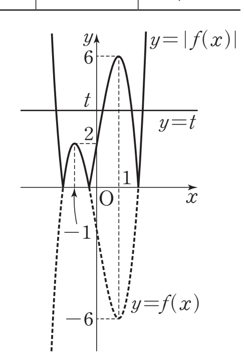
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 3 & (t=0 \text{ 또는 } t=6)\\ 6 & (0<t<2)\\ 5 & (t=2)\\ 4 & (2<t<6)\\ 2 & (t>6)\end{cases}$$

$\therefore g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(7)$

$=6+5+4+4+4+3+2$

$=28$ 답 28

1-2 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다.

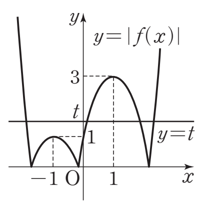
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$A(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 3 & (t=0 \text{ 또는 } t=3) \\ 6 & (0<t<1) \\ 5 & (t=1) \\ 4 & (1<t<3) \\ 2 & (t>3) \end{cases}$$

$\therefore A(0)+A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)$

$=3+5+4+3+2+2=19$ 답 19

2-1 시각 t에서 $\overline{AP}=2t$이므로

$\overline{PB}=\overline{AB}-\overline{AP}=20-2t$

따라서

$S=\pi\overline{AP}^2+\pi\overline{PB}^2$

$=\pi\times(2t)^2+\pi\times(20-2t)^2$

$=8\pi(t^2-10t+50)$

이므로

$\dfrac{dS}{dt}=8\pi(2t-10)=16\pi(t-5)$

이때 $\overline{AP}=2t=8$에서 $t=4$

따라서 $t=4$일 때 S의 변화율은

$16\pi\times(-1)=-16\pi$ 답 ②

2-2 시각 t에서 $\overline{AP}=kt$이므로

$\overline{PB}=\overline{AB}-\overline{AP}=10-kt$

따라서 두 정삼각형의 넓이는 각각

$S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(kt)^2,\ S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(10-kt)^2$

이므로

$S=S_1+S_2$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(kt)^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(10-kt)^2$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2k^2t^2-20kt+100)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(k^2t^2-10kt+50)$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2k^2t-10k)=\sqrt{3}(k^2t-5k)$

이때 $\overline{AP}=kt=6$, 즉 $t=\dfrac{6}{k}$일 때 $\dfrac{dS}{dt}=2\sqrt{3}$이므로

$2\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(k^2\times\dfrac{6}{k}-5k\right)$

$\therefore k=2$ 답 ④

서술형 What & How p.48~49

1 $f(x)=x^3-3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-3)=3t^2(x-t)$ …… ❶

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a-(t^3-3)=3t^2(1-t)$

$\therefore 2t^3-3t^2+a+3=0$ …… ㉠

점 $(1,\ a)$에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프에 서로 다른 세 개의 접선을 그으려면 접점의 좌표가 3개이어야 하므로 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. …… ❷

$g(t)=2t^3-3t^2+a+3$이라 하면

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(0)g(1)<0$이어야 하므로

$(a+3)(a+2)<0$

$\therefore -3<a<-2$ …… ❸

따라서 $m=-3,\ n=-2$이므로

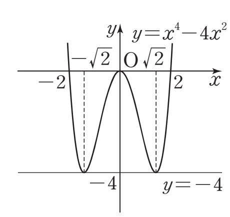
$mn=-3\times(-2)=6$ …… ❹

답 6

참고 (1) 삼차함수의 그래프 밖의 한 점에서 삼차함수의 그래프에 그은 접선의 개수는 접점의 x좌표 t의 개수와 일치한다.

(2) 그러나 사차함수의 경우 한 접선에 접점이 2개인 경우가 있으므로 그래프 밖의 한 점에서 그래프에 그은 접점의 x좌표 t의 개수와 접선의 개수가 일치하지 않는다.

예 오른쪽 그림과 같이 점 $(0,\ -4)$에서 곡선 $y=x^4-4x^2$에 그은 접선의 접점의 x좌표는 $-\sqrt{2},\ \sqrt{2}$의 2개이지만 접선은 직선 $y=-4$의 1개뿐이다.



2 $f(x)=x^3-3x^2+k$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+k)$라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+k)=(3t^2-6t)(x-t)$ …… ❶

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4-(t^3-3t^2+k)=(3t^2-6t)(-t)$

$\therefore 2t^3-3t^2+4-k=0$ …… ㉠

점 $(0, 4)$에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프에 서로 다른 두 개의 접선을 그으려면 접점의 좌표가 2개이어야 하므로 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. …… ❷

$g(t)=2t^3-3t^2+4-k$라 하면

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$g(0)g(1)=0$이어야 하므로

$(4-k)(3-k)=0$

$\therefore k=3$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$3+4=7$ …… ❸

답 7

채점기준	배점
❶ 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+k)로 놓고 접선의 방정식 세우기	1
❷ t에 대한 삼차방정식을 구하고, 삼차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 설명하기	2
❸ 실수 k의 값과 그 합 구하기	3

3 (1) t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=-10t+20$ …… ❶

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$-10t+20=0, \ -10t=-20$

$\therefore t=2$ …… ❷

따라서 물체가 최고 높이에 도달했을 때, 즉 $t=2$일 때 물체의 지면으로부터의 높이는

$-5\times2^2+20\times2=20$ (m)

$\therefore a=20$ …… ❸

(2) 물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$-5t^2+20t=0, \ -5t(t-4)=0$

$\therefore t=4 \ (\because t>0)$ …… ❹

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간, 즉 $t=4$일 때 물체의 속도는

$-10\times4+20=-20$ (m/s)

$\therefore b=-20$ …… ❺

답 (1) 20 (2) -20

4 (1) t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=-10t+30$ …… ❶

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$-10t+30=0, \ -10t=-30$ $\therefore t=3$ …… ❷

따라서 물체가 최고 높이에 도달했을 때, 즉 $t=3$일 때 물체의 지면으로부터의 높이는

$-5\times3^2+30\times3+35=80$ (m)

$\therefore a=80$ …… ❸

(2) 물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$-5t^2+30t+35=0$

$t^2-6t-7=0, \ (t+1)(t-7)=0$

$\therefore t=7 \ (\because t>0)$ …… ❹

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간, 즉 $t=7$일 때 물체의 속도는

$-10\times7+30=-40$ (m/s)

$\therefore b=-40$ …… ❺

답 (1) 80 (2) -40

채점기준	배점
❶ t초 후의 물체의 속도 구하기	1
❷ 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 시각 구하기	2
❸ 물체가 최고 높이에 도달했을 때 지면으로부터의 높이 및 a의 값 구하기	1
❹ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 시각 구하기	2
❺ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도 및 b의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.50~53

01 방정식 $3x^4-16x^3+18x^2=k$가 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=3x^4-16x^3+18x^2$과 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

$f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$이라 하면

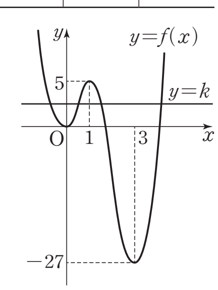
$f'(x)=12x^3-48x^2+36x=12x(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	5	↘	-27	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나려면



$0<k<5$

따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 ④

02 $f(x)=g(x)$에서 $f(x)-g(x)=0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(x^3-5x^2+x)-(x^2-8x+a)$

$\quad=x^3-6x^2+9x-a$

$h'(x)=3x^2-12x+9$

$\quad=3(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

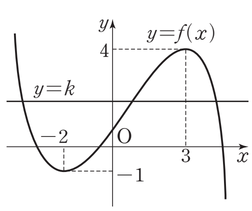
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	$-a+4$	↘	$-a$	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $-a+4$, $x=3$에서 극솟값 $-a$를 갖는다.
삼차방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 3개의 실근을 가지려면
$h(1)h(3)<0$이어야 하므로
$(-a+4)\times(-a)<0$, $a(a-4)<0$
$\therefore\ 0<a<4$
따라서 정수 a는 1, 2, 3이므로 모든 정수 a의 값의 합은
$1+2+3=6$ 답 ③

03 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
$y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(-2)=f'(3)=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	4	↘

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$-1<k<4$
따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3의 4개이다. 답 ③

04 두 곡선 $y=2x^3-4x^2+4x+k$, $y=5x^2-8x$의 교점의 개수가 2 이상이려면 방정식 $2x^3-4x^2+4x+k=5x^2-8x$, 즉
$2x^3-9x^2+12x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이어야 한다.
$f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$라 하면
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$
삼차방정식 $f(x)=0$이 2개 이상의 실근을 가지려면
$f(1)f(2)\le 0$이어야 하므로
$(k+5)(k+4)\le 0$
$\therefore\ -5\le k\le -4$
따라서 $\alpha=-5$, $\beta=-4$이므로
$\alpha+\beta=(-5)+(-4)=-9$ 답 ①

05 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이 성립해야 하므로
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=(x^4+x^3+3x^2+k)-(x^3+9x^2+8x)$
$\quad=x^4-6x^2-8x+k$
$h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$
$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$k+3$	↘	$k-24$	↗

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $k-24$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이 성립하려면
$k-24>0$ $\quad\therefore\ k>24$
따라서 정수 k의 최솟값은 25이다. 답 ③

06 $f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$이라 하면
$f'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)$
$\quad=4(x-1)(x^2+x+a+1)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ $(\because\ x^2+x+a+1>0)$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a^2-2a-3	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 a^2-2a-3을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하려면
$a^2-2a-3\ge 0$, $(a+1)(a-3)\ge 0$
$a-3\ge 0$ $(\because\ a>0)$
$\therefore\ a\ge 3$
따라서 양수 a의 최솟값은 3이다. 답 ②

참고 $x^2+x+a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0$ $(\because\ a>0)$

07 $f(x)=x^3-2x^2-7x+a$라 하면
$f'(x)=3x^2-4x-7=(x+1)(3x-7)$
$x<-1$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다. 즉 $x<-1$일 때 부등식 $f(x)\le 0$이 성립하려면
$f(-1)\le 0$이어야 하므로
$-1-2+7+a\le 0$
$\therefore\ a\le -4$
따라서 실수 a의 최댓값은 -4이다. 답 ④

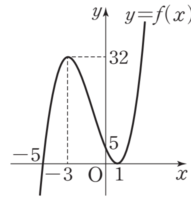
08 $f(x)=x^3+3x^2-9x+5=(x+5)(x-1)^2$에서
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구간 $[a, \infty)$에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$a\geq -5$

따라서 실수 a의 최솟값은 -5이다.



답 ⑤

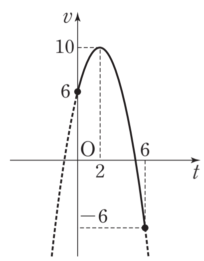
09 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-t^2+4t+6=-(t-2)^2+10$

따라서 $0\leq t\leq 6$일 때, 점 P의 속력 $|v|$는 $t=2$에서 최대이고 $|v|$의 최댓값은 10이다.

따라서 $a=2$, $M=10$이므로

$a+M=2+10=12$



답 ②

10 $h(t)=f(t)-g(t)$라 하면

$h'(t)=f'(t)-g'(t)=3t^2+2at+45$

$t=3$에서 두 점 P, Q가 만나고 P, Q의 속도가 같으므로

$h(3)=0$, $h'(3)=0$

$h(3)=0$에서 $27+9a+135+b=0$

$\therefore b=-9a-162$ ······ ㉠

$h'(3)=0$에서 $27+6a+45=0$

$6a=-72$ $\quad\therefore a=-12$

$a=-12$를 ㉠에 대입하면

$b=108-162=-54$

$\therefore h(t)=t^3-12t^2+45t-54$,

$h'(t)=3t^2-24t+45=3(t-3)(t-5)$

$h'(t)=0$에서 $t=3$ 또는 $t=5$

따라서 두 점 P, Q의 속도가 다시 같아지는 시각은 $t=5$일 때이고, 이때 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|h(5)|=|125-300+225-54|$

$=|-4|=4$

답 ④

11 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이려면 두 점 P, Q의 속도의 부호가 서로 반대이어야 한다.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=f'(t)=6t-12$, $v_Q(t)=g'(t)=4t-16$

$v_P(t)v_Q(t)<0$에서

$(6t-12)(4t-16)<0$

$(t-2)(t-4)<0$ $\quad\therefore 2<t<4$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=4$이므로

$\alpha+\beta=2+4=6$

답 ②

12 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=6t^2+2pt+q$, $a=\dfrac{dv}{dt}=12t+2p$

$t=3$에서 점 P의 가속도가 0이므로

$36+2p=0$, $2p=-36$ $\quad\therefore p=-18$

$t=2$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌면 속도는 0이므로

$24-72+q=0$ $\quad\therefore q=48$

따라서 $v=6t^2-36t+48$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$6-36+48=18$

답 ③

13 물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=-10t+a$

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$-10t+a=0$, $-10t=-a$ $\quad\therefore t=\dfrac{a}{10}$

$t=\dfrac{a}{10}$일 때 물체가 최고 높이에 도달하고, 물체가 지면으로부터 최소 45 m인 지점까지 도달해야 하므로

$-5\times\left(\dfrac{a}{10}\right)^2+a\times\dfrac{a}{10}\geq 45$

$\dfrac{a^2}{20}-45\geq 0$, $a^2-900\geq 0$

$(a+30)(a-30)\geq 0$

$a-30\geq 0$ ($\because a>0$) $\quad\therefore a\geq 30$

따라서 양수 a의 최솟값은 30이다.

답 ①

14 ㄱ. $v(a)>0$, $v(e)<0$이므로 $t=a$일 때와 $t=e$일 때 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다. (참)

ㄴ. $t=d$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $t=d$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다. (거짓)

ㄷ. $v'(t)=0$이면 점 P의 가속도가 0이고, $v'(a)=0$, $v'(c)=0$, $v'(d)=0$, $v'(e)=0$이므로 $0<t<g$에서 점 P의 가속도가 0이 되는 순간은 4번 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

15 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$r=5+t$, $h=10-t$

t초 후의 원기둥의 부피를 V cm^3라 하면

$V=\pi r^2h=\pi(5+t)^2(10-t)$

이므로

$\dfrac{dV}{dt}=\pi\{2(5+t)(10-t)+(5+t)^2\times(-1)\}$

$=3\pi(5+t)(5-t)$

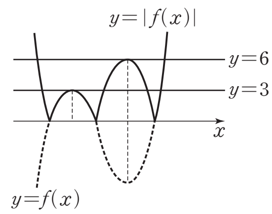
$\dfrac{dV}{dt}=0$에서 $t=5$ ($\because t\geq 0$)

$\therefore a=5$

답 ③

16 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수와 같다.

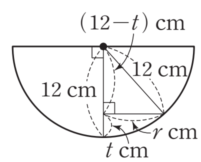
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 극댓값 3, 극솟값 -6을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형과 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 세 점에서 만나는 경우는 $t=0$ 또는 $t=6$인 경우이므로 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은 $0+6=6$

답 ②

17 t초 후의 수면의 높이는 t cm이므로 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$(12-t)^2+r^2=12^2$

$\therefore r^2=-t^2+24t$

t초 후의 수면의 넓이를 S cm²라 하면

$S=\pi r^2=\pi(-t^2+24t)$

이므로 $\dfrac{dS}{dt}=\pi(-2t+24)$

따라서 $t=4$에서 수면의 넓이의 변화율은

$\pi(-8+24)=16\pi$ (cm²/s)

$\therefore a=16$

답 ①

18 $f(x)=x^3+12x^2+36x$라 하면

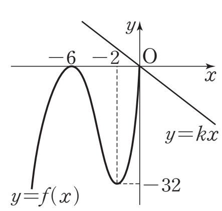
$f'(x)=3x^2+24x+36=3(x+6)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-6$ 또는 $x=-2$ …… ❶

$x\le0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	0	↘	-32	↗	0

따라서 $x\le0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. …… ❷



이때 $y=kx$의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $x\le0$에서 $f(x)\le kx$가 항상 성립하려면

$k\le0$

따라서 실수 k의 최댓값은 0이다. …… ❸

답 0

채점기준	배점
❶ $f(x)=x^3+12x^2+36x$라 하고 $f'(x)=0$인 x의 값 구하기	2
❷ $x\le0$에서 $y=f(x)$의 그래프 그리기	2
❸ 조건을 만족시키는 k의 값의 범위와 k의 최댓값 구하기	2

다른풀이 $x^3+12x^2+36x\le kx$에서

$x=0$일 때, $0\le0$이므로 k의 값에 관계없이 부등식이 성립한다.

$x<0$일 때, $x^2+12x+36\ge k$

$\therefore (x+6)^2\ge k$ …… ㉠

$x<0$일 때, 함수 $y=(x+6)^2$의 최솟값은 $x=-6$에서 0, 즉 $(x+6)^2\ge0$이므로 부등식 ㉠이 성립하려면

$k\le0$

따라서 실수 k의 최댓값은 0이다.

19 $x_R=x_P+x_Q=(2t^2+t)+(2t^3-8t^2+12t)$

$\quad=2t^3-6t^2+13t$ …… ❶

점 Q가 선분 PR의 중점이므로 $x_Q=\dfrac{x_P+x_R}{2}$에서

$2t^3-8t^2+12t=\dfrac{(2t^2+t)+(2t^3-6t^2+13t)}{2}$

$\quad=\dfrac{2t^3-4t^2+14t}{2}$

$\quad=t^3-2t^2+7t$

즉 $t^3-6t^2+5t=0$이므로 $t(t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$ ($\because t>0$)

즉 시각 $t=1$ 또는 $t=5$에서 점 Q는 선분 PR의 중점이 된다. …… ❷

한편 점 R의 속도를 v_R이라 하면

$v_R=\dfrac{dx_R}{dt}=6t^2-12t+13$

이므로 시각 $t=1$에서의 점 R의 속도는

$6-12+13=7$

시각 $t=5$에서의 점 R의 속도는

$6\times5^2-12\times5+13=103$ …… ❸

따라서 점 R의 시각 $t=1$에서의 속도와 시각 $t=5$에서의 속도의 차는

$103-7=96$ …… ❹

답 96

채점기준	배점
❶ x_R 구하기	1
❷ 점 Q가 선분 PR의 중점이 되는 시각 구하기	3
❸ 점 R의 시각 $t=t_1$, $t=t_2$에서의 속도 각각 구하기	1
❹ 속도의 차 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.54~57

01 $2x^3-3x=-3x^2+9x+a$에서

$2x^3+3x^2-12x=a$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 곡선 $y=2x^3+3x^2-12x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표 중 두 개는 양수, 한 개는 음수이어야 한다.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

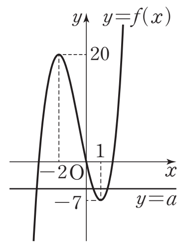
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수, 한 개는 음수이려면



$-7<a<0$

따라서 정수 a는 -6, -5, -4, -3, -2, -1의 6개이다.

답 ①

02 $f(x)=3x^4+4x^3-7$이라 하면

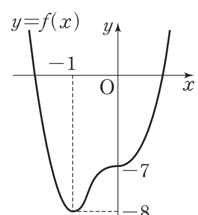
$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	-8	↗	-7	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(1)=0$이므로 $x=1$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 연속이고

$f(-2)=9>0$, $f(-1)=-8<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, -1)$에 존재한다. 즉 방정식 $f(x)=0$의 한 근 c는 -2보다 크고 -1보다 작다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

03 두 함수 $y=x^4-3x^2-4x+a$, $y=-4x^2+2x-a$의 그래프가 오직 한 점에서 만나려면 방정식

$x^4-3x^2-4x+a=-4x^2+2x-a$, 즉

$x^4+x^2-6x+2a=0$이 오직 한 실근을 가져야 한다.

$h(x)=x^4+x^2-6x+2a$라 하면

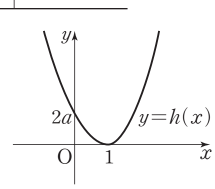
$h'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$2a-4$	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $2a-4$를 가지므로 방정식 $h(x)=0$이 오직 한 실근을 가지려면



$2a-4=0$

$2a=4$ $\quad\therefore a=2$

답 ②

04 $f(x)=x^4-32x-a^2+14a$라 하면

$f'(x)=4x^3-32=4(x-2)(x^2+2x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-a^2+14a-48$	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-a^2+14a-48$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면

$-a^2+14a-48>0$, $a^2-14a+48<0$

$(a-6)(a-8)<0$ $\quad\therefore 6<a<8$

$\therefore a=7$ ($\because$ a는 정수)

답 ③

05 $f(x)=x^3-9x^2+14x$라 하면

$f'(x)=3x^2-18x+14$

점 $(0, k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-9t^2+14t)라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-9t^2+14t)=(3t^2-18t+14)(x-t)$

이 직선이 점 $(0, k)$를 지나므로

$k-(t^3-9t^2+14t)=(3t^2-18t+14)(-t)$

$\therefore 2t^3-9t^2+k=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(0, k)$에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프에 서로 다른 세 개의 접선을 그으려면 접점의 좌표가 3개이어야 하므로 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-9t^2+k$라 하면

$g'(t)=6t^2-18t=6t(t-3)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=3$

삼차방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(0)g(3)<0$이어야 하므로

$k(k-27)<0$ $\quad\therefore 0<k<27$

따라서 정수 k는 $1, 2, 3, \dots, 26$의 26개이다.

답 ②

06 방정식 $f(|x|)+8=0$, 즉 $f(|x|)=-8$의 실근의 개수는 함수 $y=f(|x|)$의 그래프와 직선 $y=-8$의 교점의 개수와 같다.

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

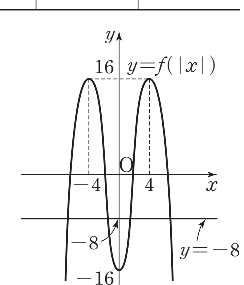
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-16	↗	16	↘

$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x\ge 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 함수 $y=f(|x|)$의 그래프와 직선 $y=-8$은 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $f(|x|)=-8$의 실근은 4개이다.



답 ④

참고 $f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x\ge0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(|x|)$의 그래프에서

① $x\ge0$인 부분은 $y=f(x)$의 그래프와 같다.

② $x<0$인 부분은 $y=f(-x)$의 그래프와 같다.

즉 $y=f(x)$ $(x>0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프와 같다.

07 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(5x^3-10x^2+k)-(5x^2+2)$

$=5x^3-15x^2+k-2$

$h'(x)=15x^2-30x=15x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$0<x<3$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$k-22$	↗	

따라서 $0<x<3$일 때 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $k-22$를 가지므로 $0<x<3$에서 $h(x)\ge0$이 성립하려면

$k-22\ge0$ $\quad\therefore k\ge22$

따라서 실수 k의 최솟값은 22이다. 답 ②

08 $g(x)=f(x)-3x$라 하면

$g(x)=(x^3-2x^2-x-7)-3x$

$=x^3-2x^2-4x-7$

$g'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-7	↘	-15	↗	9

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $g(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 9, $x=2$일 때 최솟값 -15를 가지므로

$-15\le g(x)\le9$ $\quad\therefore |g(x)|\le15$

따라서 닫힌구간 $[0, 4]$에서 $|g(x)|\le k$가 성립하려면

$k\ge15$

이어야 하므로 양수 k의 최솟값은 15이다. 답 ①

09 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t+a=3(t-1)^2+a-3$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 모든 양수 t에 대하여 $v\ge0$이거나 모든 양수 t에 대하여 $v<0$이어야 한다.

그런데 이차함수 v의 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 양수 t에 대하여 $v\ge0$이어야 한다.

이때 v는 $t=1$에서 최솟값 $a-3$을 가지므로 모든 양수 t에 대하여 $v\ge0$이려면

$a-3\ge0$ $\quad\therefore a\ge3$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다. 답 ③

10 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$

$v=0$에서 $t=2$ 또는 $t=4$

점 P는 $t=4$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로

$l=4$

$t=4$에서의 점 P의 위치는

$4^3-9\times4^2+24\times4=16$ $\quad\therefore m=16$

점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-18$

$t=4$에서의 점 P의 가속도는

$6\times4-18=6$ $\quad\therefore n=6$

$\therefore l+m+n=4+16+6=26$ 답 ③

11 $x(t)$가 t에 대한 삼차식이고, $x(0)=x(2)=x(7)=0$이므로

$x(t)=kt(t-2)(t-7)=kt^3-9kt^2+14kt$ $(k>0)$

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=x'(t)=3kt^2-18kt+14k$

$a=\dfrac{dv}{dt}=6kt-18k$

가속도가 0이려면 $a=0$에서

$6kt-18k=0$, $6kt=18k$

$\therefore t=3$ 답 ①

12 물체의 t초 후의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s^{2}이라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=-10t+40$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-10$

ㄱ. 가속도 a는 상수이므로 물체의 가속도는 일정하다. (참)

ㄴ. $t=1$일 때의 물체의 속도는

$-10\times1+40=30$ (m/s) (참)

ㄷ. 최고 높이에 도달한 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$-10t+40=0$, $-10t=-40$

$\therefore t=4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

13 점 M의 시각 t에서의 위치를 $x_{\mathrm{M}}(t)$라 하면

$x_{\mathrm{M}}(t)=\dfrac{x_{\mathrm{P}}(t)+x_{\mathrm{Q}}(t)}{2}=\dfrac{(2t^3-6t^2)+(2t^2+2t)}{2}$

$=t^3-2t^2+t$

세 점 P, Q, M의 t분 후의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$, $v_{\mathrm{M}}(t)$라 하면

$v_P(t)=\dfrac{dx_P(t)}{dt}=6t^2-12t=6t(t-2)$

$v_Q(t)=\dfrac{dx_Q(t)}{dt}=4t+2$

$v_M(t)=\dfrac{dx_M(t)}{dt}=3t^2-4t+1=(3t-1)(t-1)$

점이 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v_P(t)=0$에서 $t=2$ ($\because t>0$)이고 $t=2$의 좌우에서 속도의 부호가 바뀌므로 점 P는 시각 $t=2$에서 운동 방향을 바꾼다.

$\therefore a=1$

$0<t<10$에서 $v_Q(t)>0$이므로 점 Q는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

$\therefore b=0$

$v_M(t)=0$에서 $t=\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=1$이고 $t=\dfrac{1}{3}$, $t=1$의 좌우에서 속도의 부호가 각각 바뀌므로 점 M은 $t=\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=1$에서 운동 방향을 바꾼다.

$\therefore c=2$

$\therefore a+b+c=1+0+2=3$

답 ②

14 두 점 P, Q가 동시에 출발한 지 t초 후의 $\overline{AP}$, $\overline{CQ}$의 길이는 각각

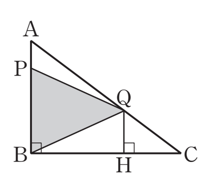
$\overline{AP}=t$ (cm), $\overline{CQ}=2t$ (cm)

$\therefore \overline{PB}=\overline{AB}-\overline{AP}=3-t$ (cm)

한편 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ (cm)

또 점 Q에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle ABC \backsim \triangle QHC$ (AA 닮음)

이므로 $\overline{CH}:\overline{CB}=\overline{CQ}:\overline{CA}$

$\overline{CH}:4=2t:5$, $5\overline{CH}=8t$

$\therefore \overline{CH}=\dfrac{8}{5}t$ (cm)

$\therefore \overline{BH}=\overline{BC}-\overline{CH}=4-\dfrac{8}{5}t$ (cm)

삼각형 BQP의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{BH}$

$=\dfrac{1}{2}(3-t)\left(4-\dfrac{8}{5}t\right)$

$=\dfrac{4}{5}t^2-\dfrac{22}{5}t+6$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=\dfrac{8}{5}t-\dfrac{22}{5}$

따라서 $t=1$에서의 삼각형 BQP의 넓이의 변화율은

$\dfrac{8}{5}\times1-\dfrac{22}{5}=-\dfrac{14}{5}$ (cm^2/s)

답 ④

15 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2t, 0)$, $(0, 3t)$이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{2t}+\dfrac{y}{3t}=1$ …… ㉠

이때 직선 ㉠과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$\dfrac{x}{2t}+\dfrac{x}{3t}=1$에서 $\dfrac{5x}{6t}=1$ $\quad\therefore x=\dfrac{6}{5}t$

$\therefore R\left(\dfrac{6}{5}t, \dfrac{6}{5}t\right)$

선분 OR의 길이를 l이라 하면

$l=\sqrt{\left(\dfrac{6}{5}t\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}t\right)^2}=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}t$ ($\because t>0$)

$\therefore \dfrac{dl}{dt}=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

따라서 선분 OR의 길이의 변화율은 $\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$이다.

답 ④

16 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\dfrac{1}{x}\geq2\sqrt{x\times\dfrac{1}{x}}=2$

즉 $x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $t\geq2$

이때 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=t^3-3t$이므로

$x^3+\dfrac{1}{x^3}-45\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\geq n$에서

$(t^3-3t)-45t\geq n$ $\quad\therefore t^3-48t\geq n$

$f(t)=t^3-48t$라 하면

$f'(t)=3t^2-48=3(t+4)(t-4)$

$f'(t)=0$에서 $t=4$ ($\because t\geq2$)

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	-88	↘	-128	↗

$t\geq2$일 때, 함수 $f(t)$는 $t=4$에서 최솟값 -128을 가지므로 부등식 $f(t)\geq n$이 성립하려면

$n\leq-128$

따라서 정수 n의 최댓값은 -128이다.

답 ④

17 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2kt-k+6$

점 P가 움직이는 방향이 두 번 바뀌려면 $v=0$, 즉 이차방정식 $3t^2+2kt-k+6=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) 이차방정식 $3t^2+2kt-k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-3(-k+6)>0$

$k^2+3k-18>0$, $(k+6)(k-3)>0$

$\therefore k<-6$ 또는 $k>3$

(ⅱ) 두 근의 합이 양수이어야 하므로

$-\dfrac{2k}{3}>0$ $\quad\therefore k<0$

(iii) 두 근의 곱이 양수이어야 하므로

$\dfrac{-k+6}{3}>0,\ -k+6>0 \qquad \therefore k<6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$k<-6$

답 ①

18 $|x^3-3x^2+n|<34$에서 $-34<x^3-3x^2+n<34$

$\therefore -34-n<x^3-3x^2<34-n$ ...... ❶

$f(x)=x^3-3x^2$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

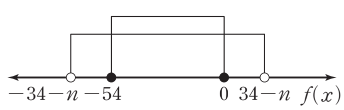
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-54	↗	0	↘	-4	↗	0

$-3\le x\le 3$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은 0, 최솟값은 -54이므로

$-54\le f(x)\le 0$ ...... ❷



따라서 $-3\le x\le 3$에서 부등식 $-34-n<f(x)<34-n$이 성립하려면

$-34-n<-54,\ 0<34-n$

$\therefore 20<n<34$ ...... ❸

따라서 정수 n의 최댓값은 33, 최솟값은 21이므로

$M=33,\ m=21$

$\therefore M+m=33+21=54$ ...... ❹

답 54

채점기준	배점
❶ 주어진 부등식을 절댓값을 풀어 나타내기	2
❷ $-3\le x\le 3$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2$의 최댓값과 최솟값 구하기	2
❸ 부등식을 만족시키는 n의 값의 범위 구하기	1
❹ $M+m$의 값 구하기	1

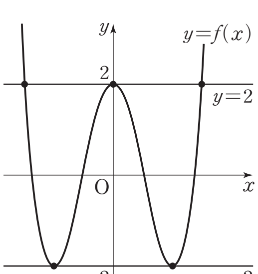
19 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 1, $f(0)=2$이므로

$f(x)=x^4+ax^2+2$ (a는 상수)

와 같이 나타낼 수 있다.

방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 5이므로 두 방정식 $f(x)=2$, $f(x)=-2$의 서로 다른 실근의 개수의 합이 5이다.

따라서 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같고 $f(x)$의 극댓값은 2, 극솟값은 -2이다. ...... ❶



$f'(x)=4x^3+2ax=2x(2x^2+a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{-\dfrac{a}{2}}\ (a<0)$

$f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2, $x=\pm\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f\left(\sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right)=-2,\ \dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}+2=-2$

$-\dfrac{a^2}{4}=-4,\ a^2=16 \qquad \therefore a=-4\ (\because a<0)$

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+2$이므로 ...... ❷

$f(1)=1-4+2=-1$ ...... ❸

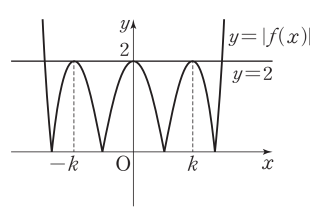
답 -1

채점기준	배점
❶ 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형 나타내기	3
❷ $f(x)$ 구하기	2
❸ $f(1)$의 값 구하기	1

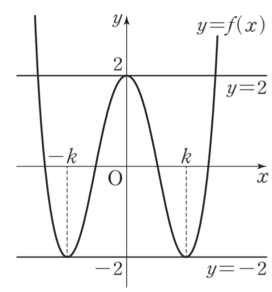
다른풀이 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 5이므로

$y=|f(x)|$, $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

즉 사차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2$가 두 점에서 접하므로

$f(x)-(-2)=(x-k)^2(x+k)^2\ (k>0)$이라 하면

$f(x)=(x-k)^2(x+k)^2-2$

이때 $f(0)=2$이므로

$2=k^4-2,\ k^4=4 \qquad \therefore k=\sqrt{2}\ (\because k>0)$

따라서 $f(x)=(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2-2$이므로

$f(1)=(1-\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})^2-2=-1$

수능형 기출문제 & 변형문제

p.58~60

1 $2x^3+6x^2+a=0$에서 $2x^3+6x^2=-a$ ...... ㉠

방정식 ㉠이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 $-2\le x\le 2$일 때 곡선 $y=2x^3+6x^2$과 직선 $y=-a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=2x^3+6x^2$이라 하면

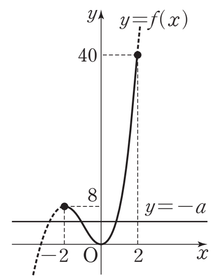
$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	0	↗	40

$-2\le x\le 2$일 때 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $-2\le x\le 2$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$가 서로 다른 두 점에서 만나려면



$0<-a\le 8$

$\therefore\ -8\le a<0$

따라서 정수 a는 $-8,\ -7,\ -6,\ \ldots,\ -1$의 8개이다. 답 ③

2 $2x^3-9x^2-k=0$에서 $2x^3-9x^2=k$ $\cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠이 $-1\le x\le 3$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 $-1\le x\le 3$일 때 곡선 $y=2x^3-9x^2$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=2x^3-9x^2$이라 하면

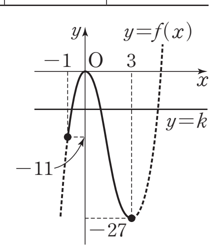
$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

$-1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-11	↗	0	↘	-27

$-1\le x\le 3$일 때 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $-1\le x\le 3$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면



$-11\le k<0$

따라서 정수 k는 $-11,\ -10,\ -9,\ \ldots,\ -1$의 11개이다. 답 ②

3 $f(x)\ge 3g(x)$에서 $f(x)-3g(x)\ge 0$

$h(x)=f(x)-3g(x)$라 하면

$h(x)=x^3+3x^2-k-3(2x^2+3x-10)$

$\quad\ =x^3-3x^2-9x-k+30$

$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

$-1\le x\le 4$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$35-k$	↘	$3-k$	↗	$10-k$

$-1\le x\le 4$일 때 함수 $h(x)$의 최솟값은 $3-k$이므로

$-1\le x\le 4$에서 $h(x)\ge 0$이 성립하려면

$3-k\ge 0\qquad \therefore\ k\le 3$

따라서 실수 k의 최댓값은 3이다. 답 3

4 $f(x)\ge g(x)$에서 $f(x)-g(x)\ge 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(x^3-3x^2-x+1)-(-3x^2+2x+a)$

$\quad\ =x^3-3x-a+1$

$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$-2\le x\le 1$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0
$h(x)$	$-a-1$	↗	$-a+3$	↘	$-a-1$

$-2\le x\le 1$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $-a-1$이므로

$-2\le x\le 1$에서 부등식 $h(x)\ge 0$이 성립하려면

$-a-1\ge 0\qquad \therefore\ a\le -1$

따라서 실수 a의 최댓값은 -1이다. 답 ②

5 두 점 P, Q의 위치가 같아질 때, $x_1=x_2$에서

$t^2+t-6=-t^3+7t^2,\ t^3-6t^2+t-6=0$

$(t-6)(t^2+1)=0\qquad \therefore\ t=6$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1,\ v_2$라 하면

$v_1=\dfrac{dx_1}{dt}=2t+1,\ v_2=\dfrac{dx_2}{dt}=-3t^2+14t$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 $a_1,\ a_2$라 하면

$a_1=\dfrac{dv_1}{dt}=2,\ a_2=\dfrac{dv_2}{dt}=-6t+14$

따라서 $t=6$에서 점 P의 가속도는 2,

점 Q의 가속도는 $-6\times 6+14=-22$

$\therefore\ p=2,\ q=-22$

$\therefore\ p-q=2-(-22)=24$ 답 ①

6 두 점 P, Q의 위치가 같아질 때, $x_{\mathrm{P}}=x_{\mathrm{Q}}$에서

$t^3-2t^2+3t=t^2+3t$

$t^3-3t^2=0,\ t^2(t-3)=0$

$\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}},\ v_{\mathrm{Q}}$라 하면

$v_{\mathrm{P}}=\dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{dt}=3t^2-4t+3,\ v_{\mathrm{Q}}=\dfrac{dx_{\mathrm{Q}}}{dt}=2t+3$

$t=3$에서 점 P의 속도는

$3\times 3^2-4\times 3+3=18$

점 Q의 속도는

$2\times 3+3=9$

따라서 두 점 P, Q의 $t=3$에서의 속도의 합은

$18+9=27$ 답 ④

Ⅲ 적분

1 부정적분

교과서 예제 p.63

01 (1) $(3x)'=3$이므로

$\int 3\,dx=3x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $(x^4)'=4x^3$이므로

$\int 4x^3\,dx=x^4+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $(x^3+5x)'=3x^2+5$이므로

$\int (3x^2+5)\,dx=x^3+5x+C$ (단, C는 적분상수)

답 (1) $3x+C$ (단, C는 적분상수)
(2) x^4+C (단, C는 적분상수)
(3) x^3+5x+C (단, C는 적분상수)

02 (1) $f(x)=(x^3+x^2+C)'=3x^2+2x$

(2) $f(x)=(x^4+3x^2-2x+C)'=4x^3+6x-2$

답 (1) $f(x)=3x^2+2x$ (2) $f(x)=4x^3+6x-2$

03 (1) 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=(x^3-2x^2+C)'=3x^2-4x$

$f(x)$가 다항함수이므로

$f(x)=3x-4$

(2) 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}(x-1)f(x)&=(x^4-4x+C)'\\&=4x^3-4\\&=4(x-1)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

$f(x)$가 다항함수이므로

$f(x)=4(x^2+x+1)=4x^2+4x+4$

답 (1) $f(x)=3x-4$ (2) $f(x)=4x^2+4x+4$

04 (1) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$이므로

$\dfrac{d}{dx}\int (x^2-x)\,dx=x^2-x$

(2) $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (C는 적분상수)이므로

$\int\left\{\dfrac{d}{dx}(x^2-x)\right\}dx=x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

답 (1) x^2-x (2) x^2-x+C (단, C는 적분상수)

05 (1) $\int x\,dx=\dfrac{1}{1+1}x^{1+1}+C=\dfrac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\int x^5\,dx=\dfrac{1}{5+1}x^{5+1}+C=\dfrac{1}{6}x^6+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\int x^{10}\,dx=\dfrac{1}{10+1}x^{10+1}+C=\dfrac{1}{11}x^{11}+C$

답 (1) $\dfrac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)
(2) $\dfrac{1}{6}x^6+C$ (단, C는 적분상수)
(3) $\dfrac{1}{11}x^{11}+C$ (단, C는 적분상수)

06 (1)
$$\begin{aligned}\int (2x+3)\,dx&=\int 2x\,dx+\int 3\,dx\\&=2\int x\,dx+3\int dx\\&=2\times\frac{1}{2}x^2+3x+C\\&=x^2+3x+C\end{aligned}$$
(단, C는 적분상수)

(2)
$$\begin{aligned}\int (8x^3+6x^2-4)\,dx&=\int 8x^3\,dx+\int 6x^2\,dx-\int 4\,dx\\&=8\int x^3\,dx+6\int x^2\,dx-4\int dx\\&=8\times\frac{1}{4}x^4+6\times\frac{1}{3}x^3-4x+C\\&=2x^4+2x^3-4x+C\end{aligned}$$
(단, C는 적분상수)

(3)
$$\begin{aligned}\int (x-1)^2\,dx&=\int (x^2-2x+1)\,dx\\&=\int x^2\,dx-\int 2x\,dx+\int 1\,dx\\&=\int x^2\,dx-2\int x\,dx+\int dx\\&=\frac{1}{3}x^3-2\times\frac{1}{2}x^2+x+C\\&=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C\end{aligned}$$
(단, C는 적분상수)

(4)
$$\begin{aligned}\int (x-1)(x^2+x+1)\,dx&=\int (x^3-1)\,dx\\&=\int x^3\,dx-\int 1\,dx\\&=\frac{1}{4}x^4-x+C\end{aligned}$$
(단, C는 적분상수)

(5)
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2x-3}{x+1}\,dx&=\int\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}\,dx\\&=\int (x-3)\,dx\\&=\int x\,dx-\int 3\,dx\\&=\frac{1}{2}x^2-3x+C\end{aligned}$$
(단, C는 적분상수)

답 (1) x^2+3x+C (단, C는 적분상수)
(2) $2x^4+2x^3-4x+C$ (단, C는 적분상수)
(3) $\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)
(4) $\dfrac{1}{4}x^4-x+C$ (단, C는 적분상수)
(5) $\dfrac{1}{2}x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)

07 (1) $\int(x^2-3x+2)dx-\int(3x+4)dx$

$=\int\{(x^2-3x+2)-(3x+4)\}dx$

$=\int(x^2-6x-2)dx$

$=\int x^2dx-\int 6x\,dx-\int 2\,dx$

$=\int x^2dx-6\int x\,dx-2\int dx$

$=\frac{1}{3}x^3-6\times\frac{1}{2}x^2-2x+C$

$=\frac{1}{3}x^3-3x^2-2x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\int(x+2)^2dx-\int(x-2)^2dx$

$=\int\{(x+2)^2-(x-2)^2\}dx$

$=\int\{(x^2+4x+4)-(x^2-4x+4)\}dx$

$=\int 8x\,dx=8\int x\,dx$

$=8\times\frac{1}{2}x^2+C$

$=4x^2+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\int\frac{x^3}{x+2}dx+\int\frac{8}{x+2}dx$

$=\int\frac{x^3+8}{x+2}dx$

$=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$

$=\int(x^2-2x+4)dx$

$=\int x^2dx-\int 2x\,dx+\int 4\,dx$

$=\int x^2dx-2\int x\,dx+4\int dx$

$=\frac{1}{3}x^3-2\times\frac{1}{2}x^2+4x+C$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$ (단, C는 적분상수)

답 (1) $\frac{1}{3}x^3-3x^2-2x+C$ (단, C는 적분상수)
(2) $4x^2+C$ (단, C는 적분상수)
(3) $\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$ (단, C는 적분상수)

기출 Best | 1회

p.64~66

01 $\int f(x)dx=-3x^2+x+C$에서

$f(x)=(-3x^2+x+C)'=-6x+1$

답 ①

02 $\int xf(x)dx=x^3+x^2+C$에서

$xf(x)=(x^3+x^2+C)'=3x^2+2x$

$f(x)$가 다항함수이므로

$f(x)=3x+2$

$\therefore f(1)=3\times1+2=5$

답 ⑤

03 $\frac{d}{dx}\int(ax^2-2x+3)dx=ax^2-2x+3$이므로

$ax^2-2x+3=4x^2+bx+c$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=4,\ -2=b,\ 3=c$

따라서 $a=4,\ b=-2,\ c=3$이므로

$a-b-c=4-(-2)-3=3$

답 ③

04 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-x)\right\}dx=x^3-x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x+1$이므로

$f(1)=1-1+1=1$

답 ①

05 $\int\{f(x)+5x\}dx=x^3+ax^2+bx+C$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+5x=3x^2+2ax+b$

$\therefore f(x)=3x^2+(2a-5)x+b$

$f(0)=4$이므로 $b=4$

또 $f'(x)=6x+2a-5$이고 $f'(-1)=-5$이므로

$-6+2a-5=-5,\ 2a=6\qquad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x^2+x+4$이므로

$f(2)=12+2+4=18$

답 ②

06 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 2\,dx$이므로

$f(x)+g(x)=2x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$

$-1+(-4)=C_1\qquad \therefore C_1=-5$

$\therefore f(x)+g(x)=2x-5\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2x-5$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int(2x-5)dx$이므로

$f(x)-g(x)=x^2-5x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-g(0)=C_2$

$-1-(-4)=C_2\qquad \therefore C_2=3$

$\therefore f(x)-g(x)=x^2-5x+3\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1,\ g(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-4$

따라서

$f(-1)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-1=1,\ g(1)=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}-4=-1$

이므로

$f(-1)-g(1)=1-(-1)=2$ 답 ⑤

07 $f(x)=\int(x+1)^3dx-\int(x-1)^3dx$

$=\int\{(x+1)^3-(x-1)^3\}dx$

$=\int\{(x^3+3x^2+3x+1)-(x^3-3x^2+3x-1)\}dx$

$=\int(6x^2+2)dx$

$=2x^3+2x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(-1)=-4$이므로

$-2-2+C=-4 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=2x^3+2x$이므로

$f(2)=16+4=20$ 답 ①

08 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2x)dx$

$=x^3+x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(2)=14$이므로

$8+4+C=14 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+2$이므로

$f(-2)=-8+4+2=-2$ 답 ③

09 $F'(x)=f(x)$이므로

$F(x)=xf(x)-4x^3+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^2+2x$

$xf'(x)=12x^2-2x$

$\therefore f'(x)=12x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x-2)dx$

$=6x^2-2x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=0$이므로

$6-2+C=0 \qquad \therefore C=-4$

따라서 $f(x)=6x^2-2x-4$이므로

$f(3)=54-6-4=44$ 답 ③

10 $\int f(x)dx=xf(x)+2x^3-x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-2x$

$xf'(x)=-6x^2+2x \qquad \therefore f'(x)=-6x+2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x+2)dx$

$=-3x^2+2x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=-3x^2+2x+1$ 답 ⑤

11 (i) $x<1$일 때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3x^2dx$

$=x^3+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(0)=-2$이므로 $C_1=-2$

$\therefore f(x)=x^3-2$

(ii) $x>1$일 때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+1)dx$

$=x^2+x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} x^3-2 & (x<1) \\ x^2+x+C_2 & (x>1)\end{cases}$$

미분가능한 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다. 즉

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

이때

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^3-2)=1-2=-1,$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+x+C_2)=1+1+C_2=2+C_2$

이므로 $-1=2+C_2=f(1)$

$\therefore C_2=-3,\ f(1)=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3-2 & (x<1) \\ x^2+x-3 & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$f(2)=4+2-3=3$ 답 ③

12 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-4x$이므로

$f'(x)=3x^2-4x$

이때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x)dx$

$=x^3-2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2,\ -13)$을 지나므로

$f(-2)=-8-8+C=-13 \qquad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+3$이고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(3,\ a)$를 지나므로

$a=27-18+3=12$ 답 ②

13 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3-\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times(-1)\right\}$

$=3f'(1)-\{-f'(1)\}=4f'(1)$

한편 $f(x)=\int(x^2+4x+1)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+4x+1 \qquad \therefore f'(1)=1+4+1=6$

따라서 구하는 극한값은

$4f'(1)=4\times6=24$

답 ⑤

14 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

이때 $f'(0)=2$이고

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$$

이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

따라서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+3xh\}-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3xh}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+3x\\&=3x+2\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx=\int(3x+2)dx\\&=\frac{3}{2}x^2+2x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x$이므로

$f(4)=24+8=32$

답 ③

다른풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$에서

$f(x+y)-f(x)=f(y)+3xy$

위의 식의 양변을 y로 나누면

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+3x$$

$$\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\left\{\frac{f(y)}{y}+3x\right\}$$

$\therefore f'(x)=3x+2$

15 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 아래로 볼록하고,

$f'(0)=f'(3)=0$이므로

$f'(x)=ax(x-3)\ (a>0)$

이라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx=\int ax(x-3)dx\\&=\int(ax^2-3ax)dx\\&=\frac{a}{3}x^3-\frac{3a}{2}x^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	C	↘	$-\frac{9}{2}a+C$	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 C, $x=3$에서 극솟값

$-\frac{9}{2}a+C$를 갖고, 극댓값이 5, 극솟값이 -4이므로

$C=5,\ -\frac{9}{2}a+C=-4$

따라서 $a=2$, $C=5$이므로

$f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+5$

답 ①

16 $f(x)=3\int(x+3)(x-1)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

이때

$$\begin{aligned}f(x)&=3\int(x+3)(x-1)dx=\int(3x^2+6x-9)dx\\&=x^3+3x^2-9x+C\ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -20을 가지므로

$f(1)=-20$

$1+3-9+C=-20 \qquad \therefore C=-15$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x-15$이고 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-3)=-27+27+27-15=12$

답 ②

기출 Best | 2회

p.67~69

01 $\int(6x^2+ax-5)dx=bx^3+3x^2+cx+1$에서

$$\begin{aligned}6x^2+ax-5&=(bx^3+3x^2+cx+1)'\\&=3bx^2+6x+c\end{aligned}$$

따라서 $6=3b$, $a=6$, $-5=c$이므로

$a=6,\ b=2,\ c=-5$

$\therefore a+b+c=6+2+(-5)=3$

답 ④

02 $\int(x-2)f(x)dx=2x^3-6x^2+1$에서

$$\begin{aligned}(x-2)f(x)&=(2x^3-6x^2+1)'=6x^2-12x\\&=6x(x-2)\end{aligned}$$

$f(x)$가 다항함수이므로

$f(x)=6x$

$\therefore f(2)=6\times2=12$ 답 ⑤

03 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int(ax^2+bx-5)dx=ax^2+bx-5$이므로

$ax^2+bx-5=3x^2-x+c$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=3,\ b=-1,\ -5=c$

따라서 $a=3,\ b=-1,\ c=-5$이므로

$abc=3\times(-1)\times(-5)=15$ 답 ③

04 $\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}(3x^2-4x)\right\}dx=3x^2-4x+C$ (C는 적분상수)

이므로

$f(x)=3x^2-4x+C$

이때 $f(1)=3$이므로

$3-4+C=3 \qquad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=3x^2-4x+4$이므로

$f(-1)=3+4+4=11$ 답 ①

05 $\displaystyle\int(x+3)f'(x)dx=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-12x+C$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x+3)f'(x)=3x^2+5x-12=(3x-4)(x+3)$

$\therefore f'(x)=3x-4$

$\therefore f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int(3x-4)dx$

$=\dfrac{3}{2}x^2-4x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(1)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{3}{2}-4+C_1=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore C_1=3$

따라서 함수 $f(x)$의 상수항은 3이다. 답 ④

06 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+2$에서

$\displaystyle\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(2x+2)dx$이므로

$f(x)+g(x)=x^2+2x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1 \qquad \therefore C_1=1+(-1)=0$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+2x$ …… ㉠

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2$에서

$\displaystyle\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int3x^2dx$이므로

$f(x)g(x)=x^3+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2 \qquad \therefore C_2=1\times(-1)=-1$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\begin{cases}f(x)=x-1\\g(x)=x^2+x+1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x^2+x+1\\g(x)=x-1\end{cases}$

이때 $f(0)=1,\ g(0)=-1$이므로

$f(x)=x^2+x+1,\ g(x)=x-1$

따라서 $f(-2)=4-2+1=3,\ g(-1)=-1-1=-2$이므로

$f(-2)+g(-1)=3+(-2)=1$ 답 ②

07 $f(x)=\displaystyle\int(x-2)(x^2+x+1)dx+\int(2x-1)(x^2+x+1)dx$

$=\displaystyle\int\{(x-2)(x^2+x+1)+(2x-1)(x^2+x+1)\}dx$

$=\displaystyle\int\{(x-2)+(2x-1)\}(x^2+x+1)dx$

$=\displaystyle\int(3x-3)(x^2+x+1)dx$

$=3\displaystyle\int(x-1)(x^2+x+1)dx$

$=3\displaystyle\int(x^3-1)dx$

$=3\left(\dfrac{1}{4}x^4-x\right)+C$

$=\dfrac{3}{4}x^4-3x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{4}x^4-3x+3$이므로

$f(1)=\dfrac{3}{4}-3+3=\dfrac{3}{4}$ 답 ③

08 $f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int(-3x^2+6x+2)dx$

$=-x^3+3x^2+2x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=-1+3+2+C=C+4,\ g(1)=1+1+1=3$이고

$f(1)-g(1)=2$이므로

$f(1)-g(1)=(C+4)-3=C+1=2 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+2x+1$이므로

$f(2)=-8+12+4+1=9$ 답 ④

09 $F(x)=xf(x)+2x^3-3x^2+5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-6x$

$xf'(x)=-6x^2+6x$

$\therefore f'(x)=-6x+6$

$\therefore f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int(-6x+6)dx$

$=-3x^2+6x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 4이므로

$f(x)=-3(x-1)^2+C+3$에서

$C+3=4 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-3x^2+6x+1$이므로

$f(2)=-12+12+1=1$ 답 ③

10 $xf(x)-\int f(x)dx=x^3-4x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=3x^2-8x$

$xf'(x)=3x^2-8x \qquad \therefore f'(x)=3x-8$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-8)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-8x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=-\frac{25}{2}$이므로

$\frac{3}{2}-8+C=-\frac{25}{2} \qquad \therefore C=-6$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2-8x-6$

답 ④

11 (i) $x<-1$일 때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x-1)dx$

$=-x^2-x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

(ii) $x>-1$일 때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x+2)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+2x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-x+C_1 & (x<-1)\\ \frac{1}{2}x^2+2x+C_2 & (x>-1)\end{cases}$$

미분가능한 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$에서도 연속이다. 즉

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$

이때

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-x^2-x+C_1)$

$=-1+1+C_1=C_1$,

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+C_2\right)$

$=\frac{1}{2}-2+C_2=-\frac{3}{2}+C_2$

이므로

$C_1=-\frac{3}{2}+C_2=f(-1)$

$C_1=-\frac{3}{2}+C_2$에서 $C_2-C_1=\frac{3}{2}$

$f(0)=C_2$, $f(-2)=-4+2+C_1=C_1-2$이므로

$f(0)-f(-2)=C_2-(C_1-2)$

$=C_2-C_1+2$

$=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$

답 ②

12 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-6x^2+2x+3$이므로

$f'(x)=-6x^2+2x+3$

이때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x^2+2x+3)dx$

$=-2x^3+x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

이고, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$f(2)=-16+4+6+C=1 \qquad \therefore C=7$

따라서 $f(x)=-2x^3+x^2+3x+7$이므로

$f(-2)=16+4-6+7=21$

답 ①

13 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}=\frac{1}{4}f'(2)$

한편 $f(x)=\int(x^2+x+2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x+2 \qquad \therefore f'(2)=4+2+2=8$

따라서 구하는 극한값은

$\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\times8=2$

답 ④

14 $f(x+y)=f(x)+f(y)-4$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-4 \qquad \therefore f(0)=4$

따라서

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)-4\}-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-4}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)$

이므로 $f'(0)=k$ (k는 상수)라 하면 $f'(x)=k$이고

$f(x)=\int f'(x)dx=\int k\,dx$

$=kx+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=4$이므로 $C=4$

$\therefore f(x)=kx+4$

$f(1)=7$이므로 $k+4=7 \qquad \therefore k=3$

$\therefore f'(0)=3$

답 ④

다른풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)-4$에서

$f(x+y)-f(x)=f(y)-4$

위의 식의 양변을 y로 나누면

$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)-4}{y}=\frac{f(y)-f(0)}{y-0}$

이때 $\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}$이므로

$f'(x)=f'(0)$

15 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 위로 볼록하고,

$f'(0)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=ax(x-2)$ $(a<0)$

라 하면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-2)dx$

$=\int(ax^2-2ax)dx$

$=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$ (단, C는 적분상수)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	C	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}a+C$	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $-\frac{4}{3}a+C$, $x=0$에서 극솟값 C를 갖고, 극댓값이 4, 극솟값이 0이므로

$-\frac{4}{3}a+C=4$, $C=0$

따라서 $a=-3$, $C=0$이므로

$f(x)=-x^3+3x^2$ 답 ③

16 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점에서의 접선의 기울기가 $-3x(x-4)$이므로

$f'(x)=-3x(x-4)$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\{-3x(x-4)\}dx$

$=\int(-3x^2+12x)dx$

$=-x^3+6x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	C	$\nearrow$	$C+32$	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값 $C+32$, $x=0$에서 극솟값 C를 갖는다. 이때 극댓값이 37이므로

$C+32=37 \quad \therefore C=5$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 5이다. 답 ③

변형유형 집중공략

p.70~71

1-1 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(-x^2+10x)\right\}dx$

$=-x^2+10x+C$

$=-(x-5)^2+C+25$ (단, C는 적분상수)

함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값 $C+25$를 갖고

이때 $f(x)$의 최댓값이 13이므로

$C+25=13 \quad \therefore C=-12$

따라서 $f(x)=-x^2+10x-12$이므로

$f(2)=-4+20-12=4$ 답 ①

1-2 $F(x)=\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)=-2x^2+12x$

$G(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$

$=-2x^2+12x+C$

$=-2(x-3)^2+C+18$ (단, C는 적분상수)

함수 $G(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $C+18$을 갖고

이때 $G(x)$의 최댓값이 11이므로

$C+18=11 \quad \therefore C=-7$

따라서 $F(x)=-2x^2+12x$, $G(x)=-2x^2+12x-7$이므로

$F(1)=-2+12=10$, $G(2)=-8+24-7=9$

$\therefore F(1)-G(2)=10-9=1$ 답 ②

2-1 $g(x)$는 다항함수 $f(x)-3x^2$을 적분한 함수이므로 다항함수이다. 이때 $f(x)$가 이차함수, $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 다항함수 $g(x)$는 이차함수이다.

따라서 $g(x)$의 도함수 $g'(x)=f(x)-3x^2$은 일차함수이므로

$f(x)-3x^2=ax+b$ (단, a, b는 상수, $a\neq0$)

$\therefore f(x)=3x^2+ax+b$

$\therefore g(x)=\int\{f(x)-3x^2\}dx=\int(ax+b)dx$

$=\frac{a}{2}x^2+bx+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $g(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore g(x)=\frac{a}{2}x^2+bx$ ······ ㉠

$f(x)g(x)=9x^4+18x^3$에서

$(3x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx\right)=9x^4+18x^3$

이때 우변의 x의 계수가 0이므로 좌변의 x의 계수 b^2도 0이다.

즉 $b=0$이므로

$\frac{a}{2}x^2(3x^2+ax)=9x^4+18x^3$

$\therefore \frac{3}{2}ax^4+\frac{a^2}{2}x^3=9x^4+18x^3$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$\frac{3}{2}a=9$, $\frac{a^2}{2}=18 \quad \therefore a=6$

따라서 ㉠에서 $g(x)=3x^2$이므로 $g(-1)=3$ 답 ⑤

2-2 함수 $f(x)g(x)$가 함수 $f(x)-g(x)$의 부정적분 중 하나이면

$f(x)g(x)=\int\{f(x)-g(x)\}dx$ ······ ㉠

이므로 $f(x)g(x)$의 차수는 $f(x)-g(x)$의 차수보다 1만큼 커야 한다. ······ ㉡

$f(x)$가 이차함수이므로

(i) $g(x)$가 0이 아닌 상수함수일 때

$f(x)g(x)$는 이차함수, $f(x)-g(x)$도 이차함수이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(x)$가 일차함수일 때

$f(x)g(x)$는 삼차함수, $f(x)-g(x)$는 이차함수이므로 ㉡을 만족시킨다.

(iii) $g(x)$가 이차함수일 때

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 같으면 $f(x)g(x)$는 사차함수, $f(x)-g(x)$는 일차함수 또는 상수함수이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

또 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 다르면 $f(x)g(x)$는 사차함수, $f(x)-g(x)$는 이차함수이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

(iv) $g(x)$가 n차함수일 때 (단, $n\ge3$)

$f(x)g(x)$는 $(n+2)$차함수, $f(x)-g(x)$는 n차함수이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $g(x)$는 일차함수이므로

$g(x)=ax+b$ (단, a, b는 상수, $a\neq0$)

$g'(x)=a$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=f(x)-g(x)$ …… ㉢

이때 $f(x)=x^2+7x+12$에서 $f'(x)=2x+7$이므로 ㉢에서

$(2x+7)(ax+b)+(x^2+7x+12)\times a$

$=(x^2+7x+12)-(ax+b)$

$\therefore 3ax^2+(14a+2b)x+12a+7b=x^2+(7-a)x+12-b$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3a=1$, $14a+2b=7-a$, $12a+7b=12-b$

$\therefore a=\frac{1}{3}$, $b=1$

따라서 $g(x)=\frac{1}{3}x+1$이므로

$g(3)=\frac{1}{3}\times3+1=2$

답 ②

서술형 What & How

p.72~73

1 주어진 그래프에서

$$f'(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ 2 & (x\ge1) \end{cases}$$ …… ❶

이므로

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x+C_1 & (x<1) \\ 2x+C_2 & (x\ge1) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수) …… ❷

$y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0$ $\quad\therefore C_1=0$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$2+C_2=\frac{1}{2}+1$ $\quad\therefore C_2=-\frac{1}{2}$ …… ❸

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x & (x<1) \\ 2x-\frac{1}{2} & (x\ge1) \end{cases}$ 이므로

$f\left(\frac{5}{4}\right)=2\times\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=2$ …… ❹

답 2

2 주어진 그래프에서

$$f'(x)=\begin{cases} x & (x<0) \\ 3x & (x\ge0) \end{cases}$$ …… ❶

이므로

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1 & (x<0) \\ \frac{3}{2}x^2+C_2 & (x\ge0) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수) …… ❷

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지나므로

$f(1)=1$, $\frac{3}{2}+C_2=1$ $\quad\therefore C_2=-\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$C_2=C_1$ $\quad\therefore C_1=-\frac{1}{2}$ …… ❸

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} & (x<0) \\ \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2} & (x\ge0) \end{cases}$ 이므로

$f(3)=\frac{3}{2}\times9-\frac{1}{2}=13$, $f(-3)=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$

$\therefore f(3)+f(-3)=13+4=17$ …… ❹

답 17

채점기준	배점
❶ $f'(x)$ 구하기	1
❷ $f'(x)$의 부정적분 구하기	1
❸ 적분상수 C_1, C_2의 값 구하기	2
❹ $f(3)+f(-3)$의 값 구하기	1

3 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\quad\therefore f(0)=0$ …… ❶

이때 $f'(-1)=2$이고

$$\begin{aligned} f'(-1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{\{f(-1)+f(h)-h(-1+h)\}-f(-1)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}-(-1+h)\right\} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+1 \end{aligned}$$

이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+1=2$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$ …… ❷

따라서

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+xh(x+h)\}-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+x(x+h)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+x^2=x^2+1 \quad \text{…… ❸}$$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+1)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x$이므로 …… ❹

$f(3)=9+3=12$ …… ❺

답 12

4 $f(x+y)=f(x)+f(y)-6xy(x+y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$ …… ❶

이때 $f'(2)=-22$이고

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2)+f(h)-12h(2+h)\}-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}-12(2+h)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-24$$

이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-24=-22$$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2$ …… ❷

따라서

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)-6xh(x+h)\}-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}-6x(x+h)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-6x^2$$
$$=-6x^2+2 \quad \text{…… ❸}$$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x^2+2)dx$$
$$=-2x^3+2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-2x^3+2x$이므로 …… ❹

$f(2)=-16+4=-12$ …… ❺

답 -12

채점기준	배점
❶ $f(0)$의 값 구하기	1
❷ 미분계수의 정의를 이용하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$의 값 구하기	2
❸ 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$ 구하기	2
❹ 부정적분을 이용하여 $f(x)$ 구하기	1
❺ $f(2)$의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.74~77

01 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이므로 $F(x)$, $G(x)$의 상수항을 제외한 모든 항이 같다. 즉

$G(x)=x^5+2x^3-3x^2+k$ (k는 상수)

꼴이다. 이때 $G(0)=3$이므로 $k=3$

따라서 $G(x)=x^5+2x^3-3x^2+3$이므로

$G(1)=1+2-3+3=3$

답 ③

02 $\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx=x^2-4x+C$ (C는 적분상수)

이므로

$f(x)=x^2-4x+C$

방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱이 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$C=2$

따라서 $f(x)=x^2-4x+2$이므로

$f(2)=4-8+2=-2$

답 ③

03 $f(x)=x^2$이고, 함수 $f(x)+g(x)$가 함수 $2f(x)-g(x)$의 부정적분 중 하나이므로 함수 $x^2+g(x)$는 함수 $2x^2-g(x)$의 한 부정적분이다.

$$\therefore x^2+g(x)=\int\{2x^2-g(x)\}dx$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+g'(x)=2x^2-g(x)$

$\therefore g(x)+g'(x)=2x^2-2x$ …… ㉠

다항함수 $g(x)$가 n차함수이면 $g'(x)$는 $(n-1)$차함수이므로 ㉠의 좌변은 n차함수이고, ㉠의 우변은 이차함수이므로

$n=2$

즉 $g(x)$는 이차함수이고, $g(x)$의 최고차항의 계수는 2이다.

따라서 $g(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$g'(x)=4x+a$

㉠에서 $(2x^2+ax+b)+(4x+a)=2x^2-2x$

$\therefore 2x^2+(a+4)x+(a+b)=2x^2-2x$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+4=-2,\ a+b=0 \qquad \therefore a=-6,\ b=6$

따라서 $g(x)=2x^2-6x+6$이므로

$g(1)=2-6+6=2$ 답 ②

04 $f(x)=\int xg(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$에서

$f'(x)-g'(x)=4x^3+2x \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x \qquad \cdots\cdots$ ㉢

다항함수 $g(x)$가 n차함수이면 $xg(x)$는 $(n+1)$차함수,

$g'(x)$는 $(n-1)$차함수이므로 ㉢의 좌변은 $(n+1)$차함수이고,

㉢의 우변은 삼차함수이므로

$n+1=3 \qquad \therefore n=2$

즉 $g(x)$는 이차함수이고, $g(x)$의 최고차항의 계수는 4이다.

따라서 $g(x)=4x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$g'(x)=8x+a$

㉢에서

$x(4x^2+ax+b)-(8x+a)=4x^3+2x$

$\therefore 4x^3+ax^2+(b-8)x-a=4x^3+2x$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=0,\ b-8=2 \qquad \therefore a=0,\ b=10$

따라서 $g(x)=4x^2+10$이므로

$g(-1)=4+10=14$ 답 ④

05 $f(x)=\int\left(\frac{1}{3}x^4+2x^3+x^2-1\right)dx-\int\left(\frac{1}{3}x^4+2x^3\right)dx$

$=\int\left\{\left(\frac{1}{3}x^4+2x^3+x^2-1\right)-\left(\frac{1}{3}x^4+2x^3\right)\right\}dx$

$=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(-3)=-1$이므로

$-9+3+C=-1 \qquad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+5$이므로

$f(3)=9-3+5=11$ 답 ③

06 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x-1)dx$

$=x^3+2x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=-2$이므로 $C=-2$

$\therefore f(x)=x^3+2x^2-x-2$

$=(x+2)(x+1)(x-1)$

$f(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 합은

$-2+(-1)+1=-2$ 답 ①

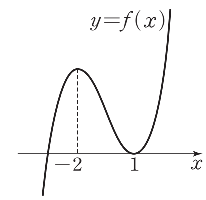
07 $f'(x)=0$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 갖는다. 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하고 접점의 x좌표가 양수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 x축에 접한다.



$\therefore f(1)=0$

이때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+x-2)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+C$ (C는 적분상수)

이므로

$f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2+C=0 \qquad \therefore C=\frac{7}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{7}{6}$이므로

$f(0)=\frac{7}{6}$ 답 ③

08 $F'(x)=f(x)$이므로

$F(x)=xf(x)-\frac{2}{3}x^3+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x^2+4x$

$xf'(x)=2x^2-4x$

$\therefore f'(x)=2x-4$

따라서

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-4)dx$

$=x^2-4x+C$ (C는 적분상수)

이고, $f(4)=0$이므로

$16-16+C=0 \qquad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -4이다. 답 ②

09 $\int\frac{f'(x)}{x}dx=6x^2+4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{x}=12x+4 \qquad \therefore f'(x)=12x^2+4x$

따라서

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2+4x)dx$

$=4x^3+2x^2+C$ (C는 적분상수)

이고, $f(1)=10$이므로

$4+2+C=10 \quad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=4x^3+2x^2+4$이므로

$f(2)=32+8+4=44$ 답 ④

10 (i) $x<1$일 때

$f'(x)=x-(x-1)=1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 1dx$$

$=x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(-1)=2$이므로

$-1+C_1=2 \quad \therefore C_1=3$

$\therefore f(x)=x+3$

(ii) $x\ge1$일 때

$f'(x)=x+(x-1)=2x-1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-1)dx$$

$=x^2-x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

(i), (ii)에서

$$f'(x)=\begin{cases}1 & (x<1)\\ 2x-1 & (x\ge1)\end{cases},\ f(x)=\begin{cases}x+3 & (x<1)\\ x^2-x+C_2 & (x\ge1)\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

이때

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x+3)=1+3=4$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2-x+C_2)=1-1+C_2=C_2$,

$f(1)=1-1+C_2=C_2$

이므로

$C_2=4$, $f(1)=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x+3 & (x<1)\\ x^2-x+4 & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$f(3)=9-3+4=10$ 답 ①

11 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x+2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)-\{f(x+2h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times3-\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times2\right\}$

$=3f'(x)-2f'(x)=f'(x)$

이므로

$f'(x)=3x^2-2x+3$

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-2x+3)dx$$

$=x^3-x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

이고, $f(0)=1$이므로

$C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+3x+1$이므로

$f(-2)=-8-4-6+1=-17$ 답 ③

12 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+xy^2+x^2y$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+xh+xh^2+x^2h\}-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+x+xh+x^2\right\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+x+x^2=x^2+x+1$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+x+1)dx$$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$이므로

$f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$ 답 ⑤

13 $f'(x)=3x^2+4x+a$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x+a)dx$$

$=x^3+2x^2+ax+C$ (단, C는 적분상수)

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)$이어야 한다. 즉

$\lim_{x\to0-}\{-f(x)\}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=-f(0)$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to0+$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다. 즉

$\lim_{x\to0+}f(x)=0$

$f(x)$는 연속함수이므로

$f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=0 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+ax$이므로

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x^3+2x^2+ax}{x}$

$=\lim_{x\to0+}(x^2+2x+a)$

$=a$

즉 ㉠에서 $-f(0)=a=0$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2$이므로

$f(2)=8+8=16$ 답 ④

14 $\int xf'(x)dx=-\frac{3}{4}x^4+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf'(x)=-3x^3+4x$

$\therefore f'(x)=-3x^2+4$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-3x^2+4)dx$

$=-x^3+4x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(2)=1$이므로

$-8+8+C_1=1 \qquad \therefore C_1=1$

$\therefore f(x)=-x^3+4x+1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4x^3+3x^2+5$에서

$f'(x)+g'(x)=4x^3+3x^2+5$

$g'(x)=(4x^3+3x^2+5)-(-3x^2+4)$

$=4x^3+3x^2+5+3x^2-4$

$=4x^3+6x^2+1$

$\therefore g(x)=\int g'(x)dx=\int(4x^3+6x^2+1)dx$

$=x^4+2x^3+x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

이때 $g(-1)=0$이므로

$1-2-1+C_2=0 \qquad \therefore C_2=2$

$\therefore g(x)=x^4+2x^3+x+2$

따라서

$f(3)=-27+12+1=-14$, $g(1)=1+2+1+2=6$

이므로

$f(3)-g(1)=-14-6=-20$ 답 ②

15 (i) $x<-1$일 때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 1dx=x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

(ii) $-1<x<1$일 때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2xdx=x^2+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

(iii) $x>1$일 때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-1)dx=-x+C_3$

(단, C_3은 적분상수)

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x)=\begin{cases} x+C_1 & (x<-1) \\ x^2+C_2 & (-1<x<1) \\ -x+C_3 & (x>1) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서도 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이면

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(x+C_1)=C_1-1$,

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^2+C_2)=C_2+1$

에서

$C_1-1=C_2+1=f(-1) \qquad \therefore C_2=C_1-2$

$\therefore f(x)=x^2+C_2=x^2+C_1-2 \ (-1<x<1)$

또 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2+C_1-2)=C_1-1$,

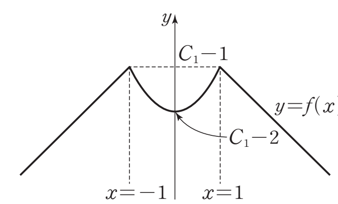
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(-x+C_3)=C_3-1$

에서

$C_1-1=C_3-1=f(1) \qquad \therefore C_3=C_1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+C_1 & (x<-1) \\ x^2+C_1-2 & (-1\le x<1) \\ -x+C_1 & (x\ge1) \end{cases}$이고,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극대이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다. (참)

ㄷ. $f(0)=2$에서

$C_1-2=2 \qquad \therefore C_1=4$

이때 함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=-1$, $x=1$일 때

$C_1-1=4-1=3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

16 $(x-2)f(x)=\frac{d}{dx}\int(x^2+3x+a)dx$에서

$(x-2)f(x)=x^2+3x+a$

이 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=4+6+a \qquad \therefore a=-10$

따라서 $(x-2)f(x)=x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$이므로

$f(x)=x+5 \qquad \therefore f(1)=6$ 답 ①

17 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5-a$에서 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다. 즉

$\lim_{x\to1}f(x)=0$

$\therefore f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=0$ ($\because f(x)$는 연속함수)

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=5-a$

이때 $f'(x)=3x+a$에서 $f'(1)=3+a$이므로

$5-a=3+a$, $-2a=-2 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f'(x)=3x+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x+1)dx$

$=\frac{3}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=0$이므로

$\frac{3}{2}+1+C=0 \quad \therefore C=-\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+x-\frac{5}{2}$이므로

$f(-1)=\frac{3}{2}-1-\frac{5}{2}=-2$

$\therefore a-f(-1)=1-(-2)=3$

답 ③

18 $f(x)=\int(5x^2-3x+2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=5x^2-3x+2$ …… ❶

한편

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h+2h^2)-f(1+2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h+2h^2)-f(1)-\{f(1+2h)-f(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+3h+2h^2)-f(1)}{3h+2h^2}\times(3+2h)-\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2\right\}$$

…… ❷

$3h+2h^2=t$로 놓으면 $h\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+3h+2h^2)-f(1)}{3h+2h^2}\times(3+2h)\right\}-\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h+2h^2)-f(1)}{3h+2h^2}\times\lim_{h\to0}(3+2h)-2f'(1)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}\times3-2f'(1)$$

$=3f'(1)-2f'(1)=f'(1)$

$=5-3+2=4$ …… ❸

답 4

채점기준	배점
❶ $f(x)=\int(5x^2-3x+2)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$ 구하기	1
❷ 주어진 식을 미분계수의 정의를 이용하는 꼴로 나타내기	2
❸ 주어진 식의 값 구하기	3

19 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 위로 볼록하고,

$f'(-1)=f'(3)=0$이므로

$f'(x)=a(x+1)(x-3)\ (a<0)$

이라 하면 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 점 $(0, 6)$을 지나므로

$f'(0)=6,\ -3a=6 \quad \therefore a=-2$

따라서

$f'(x)=-2(x+1)(x-3)=-2x^2+4x+6$ …… ❶

이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x^2+4x+6)dx$

$=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x+C$ (단, C는 적분상수)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0 \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x$ …… ❷

한편 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{10}{3}$	↗	18	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 18을 갖는다. …… ❸

답 18

채점기준	배점
❶ $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f'(x)$ 구하기	2
❷ $f(x)$ 구하기	2
❸ 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타낸 표를 이용하여 $f(x)$의 극댓값 구하기	2

실전 문제 | 2회

p.78~81

01 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+a$

$f'(3)=7$이므로

$6+a=7 \quad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=x^2+x+b,\ f'(x)=2x+1$

따라서

$F(x)=\int f(x)dx=\int(x^2+x+b)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+bx+C$ (C는 적분상수)

이고, 삼차함수 $F(x)$가 이차함수 $f(x)$, 일차함수 $f'(x)$를 모두 인수로 가지므로

$F(x)=kf(x)f'(x)$ (단, k는 0이 아닌 상수)

$\therefore \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+bx+C=k(x^2+x+b)(2x+1)$

이때 좌변의 x^3의 계수가 $\frac{1}{3}$, 우변의 x^3의 계수가 $2k$이므로

$2k=\frac{1}{3} \quad \therefore k=\frac{1}{6}$

따라서 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+bx+C=\frac{1}{6}(x^2+x+b)(2x+1)$이므로

$2x^3+3x^2+6bx+6C=(x^2+x+b)(2x+1)$

$\therefore 2x^3+3x^2+6bx+6C=2x^3+3x^2+(2b+1)x+b$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$6b=2b+1,\ 6C=b$

$\therefore b=\frac{1}{4},\ C=\frac{1}{24}$

따라서 $f(x)=x^2+x+\frac{1}{4}$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=4$ 답 ⑤

02 $\frac{d}{dx}\left\{f(x)+\int xf(x)dx\right\}=x^3-x$에서

$f'(x)+xf(x)=x^3-x$ …… ㉠

다항함수 $f(x)$가 n차함수이면 좌변은 $(n+1)$차함수, 우변은 삼차함수이므로

$n+1=3$ $\therefore n=2$

즉 $f(x)$는 이차함수이고, 삼차함수 $xf(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다. 따라서

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

라 하면 $f'(x)=2x+a$

이를 ㉠에 대입하면

$(2x+a)+x(x^2+ax+b)=x^3-x$

$x^3+ax^2+(2+b)x+a=x^3-x$ …… ㉡

㉡은 x에 대한 항등식이므로

$a=0$, $2+b=-1$

$\therefore a=0$, $b=-3$

따라서 $f(x)=x^2-3$이므로

$f(3)=9-3=6$ 답 ④

03 $\frac{d}{dx}\int\{f(x)-4x^3+2x\}dx=f(x)-4x^3+2x$,

$\int\left[\frac{d}{dx}\{3f(x)-6x^2\}\right]dx=3f(x)-6x^2+C$ (C는 적분상수)

이므로

$f(x)-4x^3+2x=3f(x)-6x^2+C$

$2f(x)=-4x^3+6x^2+2x-C$

$\therefore f(x)=-2x^3+3x^2+x-\frac{C}{2}$

$f(2)=6$이므로

$-16+12+2-\frac{C}{2}=6$ $\therefore C=-16$

따라서 $f(x)=-2x^3+3x^2+x+8$이므로

$f(0)=8$ 답 ⑤

04 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-2x-4$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(3x^2-2x-4)dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2-4x+C$ (단, C는 적분상수)

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C$ $\therefore C=2\times2=4$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2-4x+4$

$=(x+2)(x-1)(x-2)$

이때 $f(0)=2$, $g(0)=2$이므로

$\begin{cases}f(x)=x+2\\g(x)=(x-1)(x-2)\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=(x-1)(x-2)\\g(x)=x+2\end{cases}$

$g(x)=(x-1)(x-2)$일 때

$g(-3)=(-4)\times(-5)=20>0$

이므로 $g(-3)<0$을 만족시키지 않는다.

$g(x)=x+2$일 때

$g(-3)=-3+2=-1<0$

이므로 $g(-3)<0$을 만족시킨다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)$, $g(x)=x+2$이므로

$f(5)=4\times3=12$ 답 ③

05 $F(x)=(x^2+x)f(x)-x^3+x^2+2$ …… ㉠

(i) $f(x)$가 상수함수일 때

㉠의 좌변은 일차함수, 우변은 삼차함수이므로 ㉠을 만족시키는 함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)$의 차수가 2 이상일 때

$f(x)$가 n차함수 $(n\ge2)$이면 ㉠의 좌변은 $(n+1)$차함수, 우변은 $(n+2)$차함수이므로 ㉠을 만족시키는 함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x)$는 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne0$)라 하면

$F(x)=\int f(x)dx=\int(ax+b)dx$

$=\frac{a}{2}x^2+bx+C$ (단, C는 적분상수)

㉠에서

$\frac{a}{2}x^2+bx+C=(x^2+x)(ax+b)-x^3+x^2+2$

$\frac{a}{2}x^2+bx+C=(a-1)x^3+(a+b+1)x^2+bx+2$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-1=0$, $\frac{a}{2}=a+b+1$, $C=2$

$\therefore a=1$, $b=-\frac{3}{2}$, $C=2$

따라서 $f(x)=x-\frac{3}{2}$, $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$이므로

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1$, $F(1)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2=1$

$\therefore f\left(\frac{5}{2}\right)+F(1)=1+1=2$ 답 ②

06 $f(x)=\int\frac{(2x-1)^2}{x}dx-\int\frac{1}{x}dx$

$=\int\left\{\frac{(2x-1)^2}{x}-\frac{1}{x}\right\}dx$

$=\int\left(\frac{4x^2-4x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx$

$=\int\frac{4x^2-4x}{x}dx$

$=\int(4x-4)dx=2x^2-4x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=0$이므로

$2-4+C=0$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=2x^2-4x+2$이므로

$f(2)=8-8+2=2$ 답 ①

07 $f'(x)=(x+1)(x-1)(4x-3)$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int (x+1)(x-1)(4x-3)dx$$
$$=\int (4x^3-3x^2-4x+3)dx$$
$$=x^4-x^3-2x^2+3x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

한편 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$C-3$	↗	$f\left(\frac{3}{4}\right)$	↘	$C+1$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최소이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면 $f(-1)\geq 0$, 즉

$C-3\geq 0 \qquad \therefore C\geq 3$

$\therefore f(1)=C+1\geq 3+1=4$

따라서 $f(1)$의 최솟값은 4이다. 답 ⑤

08 $F(x)=xf(x)-3x^4+4x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+12x^2$

$xf'(x)=12x^3-12x^2$

$\therefore f'(x)=12x^2-12x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (12x^2-12x)dx$$
$$=4x^3-6x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(1)=0$이므로

$4-6+C=0 \qquad \therefore C=2$

$\therefore f(x)=4x^3-6x^2+2$

한편 $f'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$-1\leq x\leq 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-8	↗	2	↘	0

따라서 $-1\leq x\leq 1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 2, $x=-1$에서 최솟값 -8을 가지므로

$M=2,\ m=-8$

$\therefore M-m=2-(-8)=10$ 답 ④

09 $y=f'(x)$의 그래프에서

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & (x<0) \\ 2 & (0\leq x<2) \\ -1 & (x>2) \end{cases}$$

이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+C_1 & (x<0) \\ 2x+C_2 & (0\leq x<2) \\ -x+C_3 & (x\geq 2) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2, C_3은 적분상수)

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0) \qquad \therefore C_2=C_1$

또 $x=2$에서도 연속이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)$

$-2+C_3=4+C_2,\ -2+C_3=4+C_1$

$\therefore C_3=C_1+6$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+C_1 & (x<0) \\ 2x+C_1 & (0\leq x<2) \\ -x+C_1+6 & (x\geq 2) \end{cases}$$

이므로

$f(-2)=4-4+C_1=C_1$

$f(4)=-4+C_1+6=C_1+2$

$\therefore f(-2)-f(4)=C_1-(C_1+2)=-2$ 답 ④

10 $f'(x)=6x^2+2x+a$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x^2+2x+a)dx$$
$$=2x^3+x^2+ax+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(x)$가 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(1)=0,\ f(2)=0$

$f(1)=3+a+C=0 \qquad \therefore a+C=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=20+2a+C=0 \qquad \therefore 2a+C=-20 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-17,\ C=14$ 답 ①

11 $f'(x)=6x^2+2x-3$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x^2+2x-3)dx$$
$$=2x^3+x^2-3x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(-1)=0$이므로

$-2+1+3+C=0 \qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2-3x-2$이므로

$$F(x)=\int (2x^3+x^2-3x-2)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}$$

$F(3)=\frac{81}{2}+9-\frac{27}{2}-6+C_1=30+C_1$, $F(0)=C_1$이므로

$F(3)-F(0)=(30+C_1)-C_1=30$ 답 ④

12 $\{(x^3+1)f(x)\}'=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$이므로

$3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)=2x-3$에서

$\{(x^3+1)f(x)\}'=2x-3$

$\int\{(x^3+1)f(x)\}'dx=\int(2x-3)dx$이므로

$(x^3+1)f(x)=x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1+3+C$ $\quad\therefore C=-4$

따라서 $(x^3+1)f(x)=x^2-3x-4$이므로

$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x^3+1}=\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\frac{x-4}{x^2-x+1}$

$\therefore \lim_{x\to4}\frac{x-4}{f(x)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x^2-x+1)}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}(x^2-x+1)$

$=16-4+1=13$ 답 ③

13 조건 ㈎에서

$\int\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}dx=\int(3x^2-3)dx$

$f(x)g(x)=x^3-3x+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉠

조건 ㈏에서 $f(x)=(x-2)g(x)$를 ㉠에 대입하면

$(x-2)\{g(x)\}^2=x^3-3x+C$

양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8-6+C$ $\quad\therefore C=-2$

$\therefore (x-2)\{g(x)\}^2=x^3-3x-2=(x-2)(x+1)^2$

따라서 $\{g(x)\}^2=(x+1)^2$이므로

$g(x)=x+1$ 또는 $g(x)=-(x+1)$

이때 조건 ㈐에서 $g(0)<0$이므로

$g(x)=-(x+1)=-x-1$

$\therefore f(x)=(x-2)g(x)=(x-2)(-x-1)$

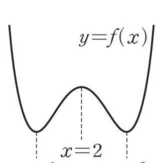
$=-x^2+x+2$

따라서 $f(1)=-1+1+2=2$, $g(3)=-3-1=-4$이므로

$f(1)-g(3)=2-(-4)=6$ 답 ⑤

14 조건 ㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, 조건 ㈏에서 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 사차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가져야 한다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$f'(1)=f'(2)=f'(3)=0$이고, 삼차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 4이므로

$f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)$

$=4x^3-24x^2+44x-24$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-24x^2+44x-24)dx$

$=x^4-8x^3+22x^2-24x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 조건 ㈐에서 $f(1)=0$이므로

$1-8+22-24+C=0$ $\quad\therefore C=9$

따라서 $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+9$이므로

$f(-1)=1+8+22+24+9=64$ 답 ④

15 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f(0)=0$, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이므로

$f(x)=x(x-\alpha)^2$

한편 조건 ㈎에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$이므로

$g(x)=xf(x)+C=x^2(x-\alpha)^2+C$ (단, C는 적분상수)

$\therefore g'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)$

$=2x(2x-\alpha)(x-\alpha)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\alpha$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\alpha}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	C	↗	$\frac{\alpha^4}{16}+C$	↘	C	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값 $\frac{\alpha^4}{16}+C$, $x=0$ 또는 $x=\alpha$에서 극솟값 C를 갖는다. 이때 조건 ㈏에서

$\frac{\alpha^4}{16}+C=19$, $C=3$

$\therefore \alpha=4$, $C=3$ $(\because \alpha>0)$

따라서 $g(x)=x^2(x-4)^2+3$이므로

$g\left(\frac{\alpha}{4}\right)=g(1)=1\times(-3)^2+3=12$ 답 ③

참고 $g'(x)=\{x^2(x-\alpha)^2+C\}'$

$=\{x^2(x-\alpha)(x-\alpha)+C\}'$

$=2x(x-\alpha)(x-\alpha)+x^2(x-\alpha)+x^2(x-\alpha)$

$=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)$

$=2x(x-\alpha)\{(x-\alpha)+x\}$

$=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

16 $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$에서

$f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=8$에서 $C=8$이므로

$f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+8$

이때 $f(1)=15$이므로

$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}+8=15$

$n+8=15$ $\quad\therefore n=7$ 답 ④

17 $F(x)=\int f(x)dx$, 즉 $F'(x)=f(x)$이므로

$F(x)=x^3+ax^2+bx-1$에서

$f(x)=F'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(1)=4$이므로

$3+2a+b=4 \quad \therefore b=-2a+1$ …… ㉠

한편 $f'(x)=6x+2a$이므로

$f'(0)=2a$

이때 $|f'(0)|\le 8$이므로

$|2a|\le 8$, $|a|\le 4$

$\therefore -4\le a\le 4$

이때

$F(1)=1+a+b-1=a+b$

$\quad =a+(-2a+1)$ ($\because$ ㉠)

$\quad =-a+1$

이고, $-4\le a\le 4$에서 $-3\le -a+1\le 5$이므로

$-3\le F(1)\le 5$

따라서 $F(1)$의 최댓값은 5, 최솟값은 -3이므로 그 합은

$5+(-3)=2$

답 ①

18 $\frac{d}{dx}\{f(x)+xf'(x)\}=3x^2-4x$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+xf'(x)\}\right]dx=\int(3x^2-4x)dx$

$\therefore f(x)+xf'(x)=x^3-2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$, 즉

$f(x)+xf'(x)=x^3-2x^2$ …… ❶

$\{xf(x)\}'=x^3-2x^2$이므로

$\int[\{xf(x)\}']dx=\int(x^3-2x^2)dx$

$\therefore xf(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(0)=0$이므로 $C_1=0$, 즉

$xf(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3$ …… ❷

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{2}{3}x^2$

$\therefore f(6)=54-24=30$ …… ❸

답 30

채점기준	배점
❶ $f(x)+xf'(x)$ 구하기	2
❷ $xf(x)$ 구하기	2
❸ $f(x)$ 및 $f(6)$의 값 구하기	1

다른풀이 $\frac{d}{dx}\{f(x)+xf'(x)\}=3x^2-4x$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+xf'(x)\}\right]dx=\int(3x^2-4x)dx$

$\therefore f(x)+xf'(x)=x^3-2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=C \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)+xf'(x)=x^3-2x^2$ …… ㉠

$f(x)$가 상수함수이면 $f'(x)=0$이므로 ㉠이 성립하지 않는다.

자연수 n에 대하여 $f(x)$가 n차함수이고, $f(x)$의 n차항을

ax^n $(a\ne 0)$이라 하면 $f'(x)$의 $(n-1)$차항은 nax^{n-1}이므로

$f(x)+xf'(x)$의 최고차항은

$ax^n+x\times nax^{n-1}=a(1+n)x^n$

이때 $a(1+n)\ne 0$이므로 $f(x)+xf'(x)$는 n차함수이고, ㉠의 우변이 삼차함수이므로

$n=3$

즉 $f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로 ㉠에서

$(ax^3+bx^2+cx)+x(3ax^2+2bx+c)=x^3-2x^2$

$4ax^3+3bx^2+2cx=x^3-2x^2$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$4a=1$, $3b=-2$, $2c=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{2}{3}$, $c=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{2}{3}x^2$이므로

$f(6)=30$

19 $f(x)$가 삼차함수이므로 $f'(x)$는 이차함수이고, $f'(x)$가 $x=1$에서 최솟값 -27을 가지므로

$f'(x)=a(x-1)^2-27$ $(a>0)$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극값을 가지면 $f'(-2)=0$이므로

$f'(-2)=9a-27=0$, $9a=27$

$\therefore a=3$

$\therefore f'(x)=3(x-1)^2-27=3x^2-6x-24$ …… ❶

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-6x-24)dx$

$\quad =x^3-3x^2-24x+C$ (단, C는 적분상수) …… ❷

또 $f'(x)=3(x+2)(x-4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$C+28$	$\searrow$	$C-80$	$\nearrow$

…… ❸

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $C+28$, $x=4$에서 극솟값 $C-80$을 가지므로 구하는 극댓값과 극솟값의 차는

$(C+28)-(C-80)=108$ …… ❹

답 108

채점기준	배점
❶ $f'(x)$ 구하기	3
❷ $f(x)$ 구하기	1
❸ 함수 $f(x)$의 증가와 감소 조사하기	2
❹ 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제 p.82~84

1 $f(1)=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-2ax)dx$

$=2x^3-ax^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=4$이므로 $C=4$

$\therefore f(x)=2x^3-ax^2+4$

$f(1)=a$이므로 $2-a+4=a$

$2a=6 \quad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+4$이므로

$f(2)=16-12+4=8$

답 ④

2 $f(-2)=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-2ax)dx$

$=x^4-ax^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=-6$이므로 $C=-6$

$\therefore f(x)=x^4-ax^2-6$

$f(-2)=a$이므로 $16-4a-6=a$

$5a=10 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=x^4-2x^2-6$이므로

$f(1)=1-2-6=-7$

답 ①

3 다항함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다. 따라서

$f'(x)=\{3x-f(1)\}(x-1)=3\left\{x-\frac{f(1)}{3}\right\}(x-1)$

$=3(x-1)^2$

이어야 하므로

$\frac{f(1)}{3}=1 \quad \therefore f(1)=3$

한편

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3(x-1)^2dx$

$=\int(3x^2-6x+3)dx$

$=x^3-3x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

이므로 $f(1)=3$에서

$1-3+3+C=3 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$이므로

$f(2)=8-12+6+2=4$

답 ②

4 다항함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다. 따라서

$f'(x)=\{-6x-f(-1)\}(x+1)$

$=-6\left\{x+\frac{f(-1)}{6}\right\}(x+1)=-6(x+1)^2$

이어야 하므로

$\frac{f(-1)}{6}=1 \quad \therefore f(-1)=6$

한편

$f(x)=\int f'(x)dx=\int -6(x+1)^2dx$

$=\int(-6x^2-12x-6)dx$

$=-2x^3-6x^2-6x+C$ (C는 적분상수)

이므로 $f(-1)=6$에서

$2-6+6+C=6 \quad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=-2x^3-6x^2-6x+4$이므로

$f(-2)=16-24+12+4=8$

답 ④

5 $f(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ k(2x-x^2) & (x\ge 0)\end{cases}$에서

$F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2 & (x\ge 0)\end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

함수 $F(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}F(x)=\lim_{x\to 0+}F(x)=F(0) \quad \therefore C_1=C_2$

$\therefore F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_1 & (x\ge 0)\end{cases}$

따라서

$F(2)=k\times\left(4-\frac{8}{3}\right)+C_1=\frac{4}{3}k+C_1$, $F(-3)=-9+C_1$

이므로 $F(2)-F(-3)=21$에서

$\frac{4}{3}k+C_1-(-9+C_1)=21$

$\frac{4}{3}k+9=21$, $\frac{4}{3}k=12$

$\therefore k=9$

답 9

6 $f(x)=\begin{cases}2x-1 & (x<1)\\ 3kx^2-3k+1 & (x\ge 1)\end{cases}$에서

$F(x)=\begin{cases}x^2-x+C_1 & (x<1)\\ kx^3+(-3k+1)x+C_2 & (x\ge 1)\end{cases}$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

함수 $F(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}F(x)=\lim_{x\to 1+}F(x)=F(1)$

$C_1=-2k+1+C_2 \quad \therefore C_2=C_1+2k-1$

$\therefore F(x)=\begin{cases}x^2-x+C_1 & (x<1)\\ kx^3+(-3k+1)x+(C_1+2k-1) & (x\ge 1)\end{cases}$

따라서

$F(-3)=9+3+C_1=12+C_1$,

$F(3)=27k+3(-3k+1)+(C_1+2k-1)=20k+C_1+2$

이므로 $F(-3)-F(3)=-10$에서

$(12+C_1)-(20k+C_1+2)=-10$

$-20k+10=-10$, $-20k=-20$

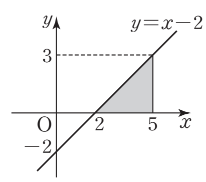
$\therefore k=1$

답 1

2 정적분

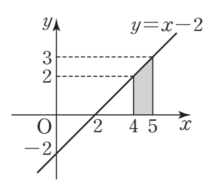
교과서 예제 p.87

01 (1) 정적분 $\int_2^5 (x-2)dx$의 값은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x-2$와 x축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로



$$\int_2^5 (x-2)dx=\frac{1}{2}\times(5-2)\times3=\frac{9}{2}$$

(2) 정적분 $\int_4^5 (x-2)dx$의 값은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x-2$와 x축 및 두 직선 $x=4$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이이다.

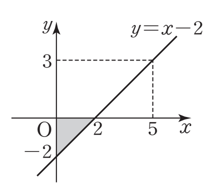


$x=4$일 때, $y=4-2=2$이므로

$$\int_4^5 (x-2)dx=\frac{1}{2}\times(2+3)\times(5-4)=\frac{5}{2}$$

(3) $0\le x\le 2$에서 $x-2\le 0$이므로

$$\int_0^2 (x-2)dx=-\frac{1}{2}\times2\times2=-2$$



답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$ (3) -2

02 (1) $\frac{d}{dx}\int_2^x (2t-6)dt=2x-6$

(2) $\frac{d}{dx}\int_{-3}^x (t^4-4t^2+2t-3)dt=x^4-4x^2+2x-3$

답 (1) $2x-6$ (2) x^4-4x^2+2x-3

03 (1) $\int_1^2 (3x^2-1)dx=\left[x^3-x\right]_1^2=(8-2)-(1-1)=6$

(2) $\int_{-1}^1 (4t^3+2t+1)dt=\left[t^4+t^2+t\right]_{-1}^1$

$=(1+1+1)-(1+1-1)=2$

답 (1) 6 (2) 2

04 (1) $\int_1^3 3(2x+1)dx=3\int_1^3 (2x+1)dx=3\left[x^2+x\right]_1^3$

$=3\{(9+3)-(1+1)\}$

$=3\times10=30$

(2) $\int_{-1}^2 2(x-1)(3x-1)dx=2\int_{-1}^2 (3x^2-4x+1)dx$

$=2\left[x^3-2x^2+x\right]_{-1}^2$

$=2\{(8-8+2)-(-1-2-1)\}$

$=2\times6=12$

(3) $\int_0^2 (3x+2)dx-\int_0^2 (5x+3)dx$

$=\int_0^2 \{(3x+2)-(5x+3)\}dx$

$=\int_0^2 (-2x-1)dx=\left[-x^2-x\right]_0^2$

$=(-4-2)-(0-0)=-6$

답 (1) 30 (2) 12 (3) -6

05 (1) $\int_0^5 (3x^2-2x)dx+\int_5^2 (3x^2-2x)dx$

$=\int_0^2 (3x^2-2x)dx=\left[x^3-x^2\right]_0^2$

$=(8-4)-(0-0)=4$

(2) $\int_1^2 (-x^3+2x)dx+\int_2^3 (-t^3+2t)dt$

$=\int_1^2 (-x^3+2x)dx+\int_2^3 (-x^3+2x)dx$

$=\int_1^3 (-x^3+2x)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_1^3$

$=\left(-\frac{81}{4}+9\right)-\left(-\frac{1}{4}+1\right)=-12$

답 (1) 4 (2) -12

06 (1) $\int_{-2}^2 (4x^3+3x^2+2x+1)dx$

$=\int_{-2}^2 (4x^3+2x)dx+\int_{-2}^2 (3x^2+1)dx$

$=0+2\int_0^2 (3x^2+1)dx=2\left[x^3+x\right]_0^2$

$=2\{(8+2)-0\}$

$=2\times10=20$

(2) $\int_{-1}^1 (x^5-5x^4+x^3-3x^2+x-1)dx$

$=\int_{-1}^1 (x^5+x^3+x)dx+\int_{-1}^1 (-5x^4-3x^2-1)dx$

$=0+2\int_0^1 (-5x^4-3x^2-1)dx$

$=2\left[-x^5-x^3-x\right]_0^1$

$=2\{(-1-1-1)-0\}$

$=2\times(-3)=-6$

답 (1) 20 (2) -6

07 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$\int_4^8 f(x)dx=\int_{4-4}^{8-4} f(x)dx$

$=\int_0^4 f(x)dx=3$

답 3

08 (1) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(-x^2+3x-2)$

$\therefore f(x)=-2x+3$

(2) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+2x)$$

$\therefore f(x)=3x^2-4x+2$

답 (1) $f(x)=-2x+3$ (2) $f(x)=3x^2-4x+2$

09 (1) $f(t)=t^2+2t+3$이라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $F'(t)=f(t)$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(t^2+2t+3)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\Big[F(t)\Big]_0^x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$

$$=F'(0)=f(0)$$

$$=3$$

(2) $f(t)=(t+1)(t+2)$라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $F'(t)=f(t)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t+1)(t+2)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\Big[F(t)\Big]_1^x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$

$$=F'(1)=f(1)$$

$$=2\times3=6$$

(3) $f(x)=3x^2-x+2$라 하고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}(3x^2-x+2)dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}f(x)dx$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\Big[F(x)\Big]_1^{1+h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$

$$=F'(1)=f(1)$$

$$=3-1+2=4$$

답 (1) 3 (2) 6 (3) 4

기출 Best | 1회

p.88~90

01 $\int_0^1(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$

$$=\Big[x+x^2+x^3+\cdots+x^n\Big]_0^1$$

$$=(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n개})-0=n$$

이므로

$n=324$

답 ②

02 $\int_{-1}^k(6x-12)dx=\Big[3x^2-12x\Big]_{-1}^k$

$$=(3k^2-12k)-(3+12)$$

$$=3k^2-12k-15$$

$$=3(k-2)^2-27$$

따라서 정적분 $\int_{-1}^k(6x-12)dx$는 $k=2$에서 최솟값 -27을 갖는다.

답 ④

03 $2\int_{-1}^2(2x^2+1)dx+\int_2^{-1}(x^2-4x)dx$

$$=\int_{-1}^2(4x^2+2)dx-\int_{-1}^2(x^2-4x)dx$$

$$=\int_{-1}^2\{(4x^2+2)-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^2(3x^2+4x+2)dx$$

$$=\Big[x^3+2x^2+2x\Big]_{-1}^2$$

$$=(8+8+4)-(-1+2-2)=21$$

답 ②

04 $\int_1^2 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx-\int_0^2 f(x)dx$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx+\int_2^0 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^0 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^0 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^3(3x^2+2x)dx=\Big[x^3+x^2\Big]_1^3$$

$$=(27+9)-(1+1)=34$$

답 ①

05 $\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^3(-x^2+2x)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_1^3$$

$$=\Big(\frac{1}{3}-0\Big)+\Big\{(-9+9)-\Big(-\frac{1}{3}+1\Big)\Big\}$$

$$=\frac{1}{3}+\Big(-\frac{2}{3}\Big)=-\frac{1}{3}$$

답 ②

06 $\int_{-1}^3(x^2-2|x|+3)dx$

$$=\int_{-1}^0(x^2+2x+3)dx+\int_0^3(x^2-2x+3)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\Big]_{-1}^0+\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\Big]_0^3$$

$$=\Big\{0-\Big(-\frac{1}{3}+1-3\Big)\Big\}+\{(9-9+9)-0\}$$

$$=\frac{7}{3}+9=\frac{34}{3}$$

답 ⑤

07 $\int_{-a}^{a}(2x^3-3x^2+x)dx=\int_{-a}^{a}(2x^3+x)dx+\int_{-a}^{a}(-3x^2)dx$

$=0+2\int_{0}^{a}(-3x^2)dx=2\Big[-x^3\Big]_0^a$

$=2(-a^3-0)=-2a^3$

즉 $-2a^3=-16$이므로 $a^3=8$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 실수)

답 ②

08 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=4$에서

$2\int_{0}^{2}f(x)dx=4 \qquad \therefore \int_{0}^{2}f(x)dx=2$

$\therefore \int_{-5}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{5}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx$

$=2+3=5$

답 ④

09 조건 (가)에서 $0\le x<3$일 때, $f(x)=2x^2-6x+8$이므로

$\int_{0}^{3}f(x)dx=\int_{0}^{3}(2x^2-6x+8)dx=\Big[\frac{2}{3}x^3-3x^2+8x\Big]_0^3$

$=(18-27+24)-0=15$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_{3}^{9}f(x)dx=\int_{3}^{6}f(x)dx+\int_{6}^{9}f(x)dx$

$=\int_{0}^{3}f(x)dx+\int_{0}^{3}f(x)dx$

$=2\int_{0}^{3}f(x)dx=2\times15=30$

답 ①

10 $\int_{0}^{2}f(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면 $f(x)=x+a$이므로

$\int_{0}^{2}f(t)dt=\int_{0}^{2}(t+a)dt=\Big[\frac{1}{2}t^2+at\Big]_0^2=2+2a$

즉 $2+2a=a$이므로 $a=-2$

따라서 $f(x)=x-2$이므로

$f(1)=1-2=-1$

답 ⑤

11 $\int_{1}^{x}f(t)dt=x^3+ax-2a^2$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-2a^2$, $2a^2-a-1=0$

$(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$\int_{1}^{x}f(t)dt=x^3+x-2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+1$

$\therefore f(1)=3+1=4$

답 ④

12 $\int_{2}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3+2x^2-20x+24$에서

$x\int_{2}^{x}f(t)dt-\int_{2}^{x}tf(t)dt=x^3+2x^2-20x+24$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{2}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+4x-20$

$\therefore \int_{2}^{x}f(t)dt=3x^2+4x-20$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+4$

$\therefore f(-1)=-6+4=-2$

답 ③

13 $f(x)=\int_{0}^{x}(6t^2-18t+12)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)$를 갖고

$f(1)=\int_{0}^{1}(6t^2-18t+12)dt=\Big[2t^3-9t^2+12t\Big]_0^1$

$=(2-9+12)-0=5$

$f(2)=\int_{0}^{2}(6t^2-18t+12)dt=\Big[2t^3-9t^2+12t\Big]_0^2$

$=(16-36+24)-0=4$

이므로 모든 극값의 합은 $5+4=9$

답 ④

14 $f(x)=\int_{-x}^{x}(t^3+3t^2-3)dt$

$=\int_{-x}^{x}t^3dt+\int_{-x}^{x}(3t^2-3)dt$

$=0+2\int_{0}^{x}(3t^2-3)dt$

$=2\int_{0}^{x}(3t^2-3)dt$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(3x^2-3)=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$0\le x\le3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

$f(0)=0$

$f(1)=2\int_{0}^{1}(3t^2-3)dt=2\Big[t^3-3t\Big]_0^1$

$=2\{(1-3)-0\}=-4$

$f(3)=2\int_{0}^{3}(3t^2-3)dt=2\Big[t^3-3t\Big]_0^3$

$=2\{(27-9)-0\}=36$

따라서 $0\le x\le3$일 때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 36, $x=1$에서 최솟값 -4를 가지므로

$M=36$, $m=-4$

$\therefore M+m=36+(-4)=32$ 답 ②

15 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록하고 $f(0)=f(3)=0$이므로

$f(x)=ax(x-3)$ $(a<0)$

이라 하자.

이때 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 최댓값 $\frac{9}{4}$를 갖는다. 즉

$f\left(\frac{3}{2}\right)=a\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-x(x-3)=-x^2+3x$

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=-x(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극대이므로 $g(x)$의 극댓값은

$g(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^3(-t^2+3t)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^3$

$=\left(-9+\frac{27}{2}\right)-0=\frac{9}{2}$ 답 ④

16 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $F'(t)=f(t)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{\left[F(t)\right]_1^x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=f(1)$

즉 $f(1)=0$이므로

$1+a-3=0$ $\quad\therefore a=2$ 답 ②

17 $f(x)=x^4-x^2$이라 하고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+3h}(x^4-x^2)dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_2^{2+3h}f(x)dx$

$=\lim_{h\to0}\frac{\left[F(x)\right]_2^{2+3h}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+3h)-F(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(2+3h)-F(2)}{3h}\times3\right\}$

$=3F'(2)=3f(2)$

이때 $f(2)=2^4-2^2=12$이므로

$3f(2)=3\times12=36$ 답 ③

기출 Best | 2회

p.91~93

01 $\int_{-1}^2\{f'(x)+6x\}dx=\left[f(x)+3x^2\right]_{-1}^2$

$=\{f(2)+12\}-\{f(-1)+3\}$

$=\{f(2)+12\}-(2+3)$

$=f(2)+7$

즉 $f(2)+7=-3$이므로 $f(2)=-10$ 답 ⑤

02 $\int_2^k(-4x+12)dx=\left[-2x^2+12x\right]_2^k$

$=(-2k^2+12k)-(-8+24)$

$=-2k^2+12k-16$

$=-2(k-3)^2+2$

따라서 정적분 $\int_2^k(-4x+12)dx$는 $k=3$에서 최댓값 2를 가지므로 $m=3$, $n=2$

$\therefore m+n=3+2=5$ 답 ⑤

03 $\int_1^3(2x+1)^2dx+\int_3^1(2x-1)^2dx$

$=\int_1^3(2x+1)^2dx-\int_1^3(2x-1)^2dx$

$=\int_1^3\{(2x+1)^2-(2x-1)^2\}dx$

$=\int_1^3\{(4x^2+4x+1)-(4x^2-4x+1)\}dx$

$=\int_1^3 8xdx=\left[4x^2\right]_1^3$

$=36-4=32$ 답 ①

04 $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_9^{10}f(x)dx$

$=\int_0^{10}f(x)dx=\int_0^{10}(3x^2-2x)dx$

$=\left[x^3-x^2\right]_0^{10}=(1000-100)-0$

$=900$ 답 ③

05 $\int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$

$=\int_{-1}^0(x+1)dx+\int_0^1 1dx+\int_1^3(-x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^0+\left[x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^3$

$=\left\{0-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}+(1-0)$

$+\left\{(-9+9)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}+1-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$ 답 ⑤

06 $x^2-x=0$에서 $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le 0$일 때 $x^2-x\ge 0$, $0\le x\le 1$일 때 $x^2-x\le 0$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|x^2-x|dx&=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{1}\{-(x^2-x)\}dx\\&=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\\&=\left\{0-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-0\right\}\\&=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1\end{aligned}$$

답 ①

07 $$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}(x^3-3x+4)dx&=\int_{-a}^{a}(x^3-3x)dx+\int_{-a}^{a}4dx\\&=0+2\int_{0}^{a}4dx=2\Big[4x\Big]_{0}^{a}\\&=2(4a-0)=8a\end{aligned}$$

즉 $8a=48$이므로 $a=6$

답 ①

08 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$\int_{-3}^{3}f(x)dx=0$

즉 $\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{3}f(x)dx=0$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^{0}f(x)dx&=-\int_{0}^{3}f(x)dx\\&=-\left\{\int_{0}^{5}f(x)dx+\int_{5}^{3}f(x)dx\right\}\\&=-\left\{\int_{0}^{5}f(x)dx-\int_{3}^{5}f(x)dx\right\}\\&=-(10-3)=-7\end{aligned}$$

답 ④

09 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\begin{aligned}\int_{202}^{206}f(x)dx&=\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx\\&=\int_{-2}^{0}(2x+4)dx+\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx\\&=\Big[x^2+4x\Big]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{0}^{2}\\&=\{0-(4-8)\}+\left\{\left(\frac{8}{3}-8+8\right)-0\right\}\\&=4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}\end{aligned}$$

답 ②

10 $\int_{0}^{1}f(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면 $f(x)=4x^3+ax$이므로

$\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}(4t^3+at)dt=\left[t^4+\frac{a}{2}t^2\right]_{0}^{1}=1+\frac{a}{2}$

즉 $1+\frac{a}{2}=a$이므로 $\frac{a}{2}=1$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $f(x)=4x^3+2x$이므로

$f(2)=32+4=36$

답 ③

11 $2f(x)=6x^2-4x+\int_{2}^{x}f'(t)dt$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)=24-8+0$ $\quad\therefore f(2)=8$

$2f(x)=6x^2-4x+\int_{2}^{x}f'(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(x)=12x-4+f'(x)$ $\quad\therefore f'(x)=12x-4$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int f'(x)dx=\int(12x-4)dx\\&=6x^2-4x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때 $f(2)=8$이므로

$24-8+C=8$ $\quad\therefore C=-8$

따라서 $f(x)=6x^2-4x-8$이므로

$f(3)=54-12-8=34$

답 ④

12 $\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3+ax^2-x+1$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-1+1$ $\quad\therefore a=-1$

$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3-x^2-x+1$에서

$x\int_{1}^{x}f(t)dt-\int_{1}^{x}tf(t)dt=x^3-x^2-x+1$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{1}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2x-1$

$\therefore \int_{1}^{x}f(t)dt=3x^2-2x-1$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2$

$\therefore f(-2)=-12-2=-14$

답 ②

13 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -7을 가지므로

$f(1)=-7$, $f'(1)=0$

이때

$$\begin{aligned}f(1)&=\int_{0}^{1}(6t^2+at+b)dt=\left[2t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_{0}^{1}\\&=2+\frac{a}{2}+b\end{aligned}$$

이므로 $2+\frac{a}{2}+b=-7$

$4+a+2b=-14$ $\quad\therefore a+2b=-18$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=\int_{0}^{x}(6t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x^2+ax+b$

$f'(1)=0$이므로

$6+a+b=0$ $\quad\therefore a+b=-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=-12$

$\therefore a-b=6-(-12)=18$

답 ④

14 $f(x)=\int_{-2}^{x}(-|t|+2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-|x|+2$

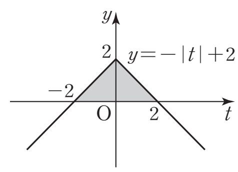
$f'(x)=0$에서 $-|x|+2=0$, $|x|=2$ $\quad\therefore x=\pm 2$

$-2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $-2\le x\le 6$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $f(2)$를 가지므로 $f(x)$의 최댓값은

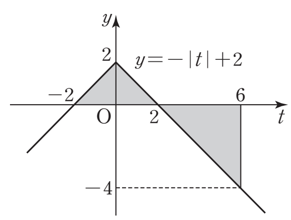
$$f(2)=\int_{-2}^{2}(-|t|+2)dt$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times2=4$$



또

$$f(-2)=\int_{-2}^{-2}(-|t|+2)dt=0$$

$$f(6)=\int_{-2}^{6}(-|t|+2)dt$$
$$=\int_{-2}^{2}(-|t|+2)dt+\int_{2}^{6}(-|t|+2)dt$$



$$=\frac{1}{2}\times4\times2+\left(-\frac{1}{2}\times4\times4\right)$$
$$=4+(-8)=-4$$

이므로 $f(x)$의 최솟값은 $f(6)=-4$이다.

따라서 $M=4$, $m=-4$이므로

$M-m=4-(-4)=8$

답 ③

15 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록하고 $f(0)=f(1)=0$이므로

$f(x)=ax(x-1)=ax^2-ax\ (a<0)$

라 하자.

$g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=ax(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$x\ge0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	극대	↘

따라서 $x\ge0$일 때, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 최댓값

$$g(1)=\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}(at^2-at)dt$$
$$=\left[\frac{a}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_{0}^{1}=\left(\frac{a}{3}-\frac{a}{2}\right)-0=-\frac{a}{6}$$

를 갖는다. 이때 최댓값이 $\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{a}{6}=\frac{1}{2}\qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-3x^2+3x$이므로

$f(-2)=-12-6=-18$

답 ⑤

16 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $F'(t)=f(t)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_{2}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\Big[F(t)\Big]_{2}^{x}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$

즉 $\frac{1}{4}f(2)=5$이므로 $f(2)=20$

$8-12+4+a=20\qquad \therefore a=20$

답 ⑤

17 $f(x)=2x^3+5x^2$이라 하고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{-1-h}^{-1+2h}(2x^3+5x^2)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{-1-h}^{-1+2h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{-1-h}^{-1+2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(-1+2h)-F(-1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(-1+2h)-F(-1)-\{F(-1-h)-F(-1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(-1+2h)-F(-1)}{2h}\times2-\frac{F(-1-h)-F(-1)}{-h}\times(-1)\right\}$$
$$=2F'(-1)-\{-F'(-1)\}=3F'(-1)=3f(-1)$$

이때 $f(-1)=-2+5=3$이므로

$3f(-1)=3\times3=9$

답 ③

변형유형 집중공략

p.94~97

1-1 $$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{2}(x^2+ax+b)dx=\int_{-2}^{2}(x^2+b)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(x^2+b)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3+bx\right]_{0}^{2}$$
$$=2\left\{\left(\frac{8}{3}+2b\right)-0\right\}=4b+\frac{16}{3}$$

즉 $4b+\frac{16}{3}=\frac{28}{3}$이므로 $4b=4\qquad \therefore b=1$

따라서 $f(x)=x^2+ax+1$이므로

$$\int_{-2}^{2}xf(x)dx=\int_{-2}^{2}(x^3+ax^2+x)dx=\int_{-2}^{2}ax^2dx$$
$$=2\int_{0}^{2}ax^2dx=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{2}$$
$$=2\left(\frac{8}{3}a-0\right)=\frac{16}{3}a$$

즉 $\frac{16}{3}a=16$이므로 $a=3$

$\therefore ab=3\times1=3$

답 ②

1-2 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx$에서

$\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx$

$\therefore \int_{-1}^{0} f(x)dx=0$

$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx=0$

이때 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=-1$이므로

$f(x)=ax^2+bx-1$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx&=\int_{-1}^{1} (ax^2+bx-1)dx=2\int_{0}^{1} (ax^2-1)dx\\&=2\left[\frac{a}{3}x^3-x\right]_0^1=2\left(\frac{a}{3}-1\right)-0\\&=\frac{2}{3}a-2\end{aligned}$$

즉 $\frac{2}{3}a-2=0$이므로 $\frac{2}{3}a=2$

$\therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x^2+bx-1$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} f(x)dx&=\int_{0}^{1} (3x^2+bx-1)dx\\&=\left[x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_0^1\\&=1+\frac{b}{2}-1=\frac{b}{2}\end{aligned}$$

즉 $\frac{b}{2}=0$이므로 $b=0$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로

$f(2)=12-1=11$ 답 ④

2-1 $\int_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{1}{2}\times4\times2=4$,

$\int_{-2}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{2} f(x)dx=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{6} f(x)dx&=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{6} f(x)dx\\&=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{-2}^{2} f(x)dx\\&=2+4=6\end{aligned}$$

답 6

다른풀이 $\int_{0}^{6} f(x)dx$

$$\begin{aligned}&=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{6} f(x)dx\\&=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx\\&=\int_{-2}^{0} f(x)dx+2\int_{0}^{2} f(x)dx\\&=\int_{-2}^{0} (x+2)dx+2\int_{0}^{2} (-x+2)dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{0}+2\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2\\&=\{0-(2-4)\}+2\{(-2+4)-0\}\\&=2+2\times2=6\end{aligned}$$

2-2 $\int_{0}^{3} f(x)dx=\frac{1}{2}\times3\times2=3$,

$\int_{0}^{2} f(x)dx=\frac{1}{2}\times2\times2=2$,

$\int_{2}^{3} f(x)dx=\frac{1}{2}\times1\times2=1$

이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{9} f(x)dx&=\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{6} f(x)dx+\int_{6}^{9} f(x)dx\\&=\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{0}^{3} f(x)dx\\&=3\int_{0}^{3} f(x)dx=3\times3=9\end{aligned}$$

이때 $\int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{9} f(x)dx+\int_{9}^{a} f(x)dx=11$이므로

$9+\int_{9}^{a} f(x)dx=11 \quad \therefore \int_{9}^{a} f(x)dx=2$

그런데 $\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{9}^{11} f(x)dx=2$이므로

$a=11$ 답 11

3-1 $$\begin{aligned}f(x)&=3x^2+\int_{0}^{2} (2x-1)f(t)dt\\&=3x^2+2x\int_{0}^{2} f(t)dt-\int_{0}^{2} f(t)dt\end{aligned}$$

$\int_{0}^{2} f(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면 $f(x)=3x^2+2ax-a$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} f(t)dt&=\int_{0}^{2} (3t^2+2at-a)dt\\&=\left[t^3+at^2-at\right]_0^2\\&=(8+4a-2a)-0\\&=2a+8\end{aligned}$$

즉 $2a+8=a$이므로 $a=-8$

따라서 $f(x)=3x^2-16x+8$이므로

$f(3)=27-48+8=-13$ 답 ③

3-2 $$\begin{aligned}f(x)&=3x^2+\int_{0}^{1} xf(t)dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(t)dt\\&=3x^2+x\int_{0}^{1} f(t)dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(t)dt\end{aligned}$$

$\int_{0}^{1} f(t)dt=a$, $\int_{0}^{2} f(t)dt=b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2+ax+\frac{1}{2}b$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} f(t)dt&=\int_{0}^{1}\left(3t^2+at+\frac{1}{2}b\right)dt\\&=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+\frac{b}{2}t\right]_0^1\\&=1+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\end{aligned}$$

즉 $1+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=a$이므로

$\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=1 \quad \therefore a-b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2\left(3t^2+at+\frac{1}{2}b\right)dt$$

$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+\frac{b}{2}t\right]_0^2$$

$$=8+2a+b$$

즉 $8+2a+b=b$이므로 $2a=-8$ $\quad\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $-4-b=2$ $\quad\therefore b=-6$

따라서 $f(x)=3x^2-4x-3$이므로

$f(-3)=27+12-3=36$

답 ④

4-1 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+2h}f'(t)dt$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\Big[f(t)\Big]_{2-h}^{2+2h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times2-\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\times(-1)\right\}$$

$$=2f'(2)-\{-f'(2)\}=3f'(2)$$

이때 $f(x)=3x^2-x$에서 $f'(x)=6x-1$이므로

$f'(2)=12-1=11$

$\therefore 3f'(2)=3\times11=33$

답 ⑤

4-2 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\int_3^x f(t)dt-f(x)}{x^2-9}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow3$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이므로 (분자)$\longrightarrow0$이다. 즉

$$\lim_{x\to3}\left\{\int_3^x f(t)dt-f(x)\right\}=0$$

함수 $\int_3^x f(t)dt-f(x)$는 연속함수이므로

$\int_3^3 f(t)dt-f(3)=0$ $\quad\therefore f(3)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$F(t)=\int_3^x f(t)dt$라 하면 $F(3)=0$, $F'(t)=f(t)$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{\int_3^x f(t)dt-f(x)}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\Big[F(t)\Big]_3^x-f(x)}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)-\{f(x)-f(3)\}}{(x-3)(x+3)}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+3}-\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+3}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}F'(3)-\frac{1}{6}f'(3)=\frac{1}{6}f(3)-\frac{1}{6}f'(3)$$

$$=-\frac{1}{6}f'(3)\ (\because ㉠)$$

즉 $-\frac{1}{6}f'(3)=2$이므로 $f'(3)=-12$

답 ②

서술형 What & How

p.98~101

1 $f(x)=x^3-3x-1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

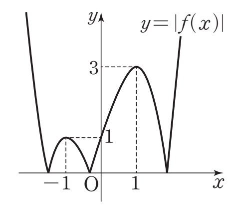
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

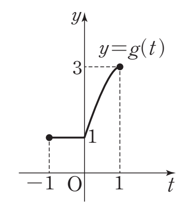
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

$\cdots\cdots$ ❶

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같고 $g(t)$는 $-1\le x\le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값이므로 $-1\le t\le1$에서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$$g(t)=\begin{cases}1 & (-1\le t<0)\\ -f(t) & (0\le t\le1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & (-1\le t<0)\\ -t^3+3t+1 & (0\le t\le1)\end{cases}\quad\cdots\cdots ❷$$

이므로

$$\int_{-1}^1 g(t)dt=\int_{-1}^0 1\,dt+\int_0^1(-t^3+3t+1)dt$$

$$=\Big[t\Big]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t\right]_0^1$$

$$=\{0-(-1)\}+\left\{\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1\right)-0\right\}$$

$$=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}\quad\cdots\cdots ❸$$

따라서 $p=4$, $q=13$이므로

$p+q=4+13=17$ $\quad\cdots\cdots$ ❹

답 17

2 $f(x)=2x^3-6x^2+2$에서

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

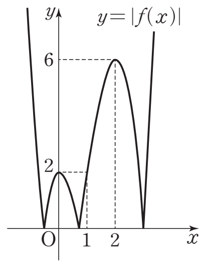
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

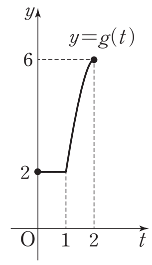
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-6	↗

$\cdots\cdots$ ❶

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같고 $g(t)$는 $0\le x\le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값이므로 $0\le t\le2$에서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0\le t<1) \\ -f(t) & (1\le t\le 2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2 & (0\le t<1) \\ -2t^3+6t^2-2 & (1\le t\le 2)\end{cases} \qquad \cdots\cdots ❷$$

이므로

$$\int_0^2 g(t)dt=\int_0^1 2dt+\int_1^2(-2t^3+6t^2-2)dt$$

$$=\Big[2t\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{2}t^4+2t^3-2t\Big]_1^2$$

$$=(2-0)+\left\{(-8+16-4)-\left(-\frac{1}{2}+2-2\right)\right\}$$

$$=2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2} \qquad \cdots\cdots ❸$$

따라서 $p=2$, $q=13$이므로

$p+q=2+13=15$ $\cdots\cdots$ ❹

답 15

채점기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내기	2
❷ $0\le t\le 2$에서 함수 $g(t)$ 구하기	3
❸ $\int_0^2 g(t)dt$의 값 구하기	2
❹ $p+q$의 값 구하기	1

3 조건 (가)에서 $f(x)=\begin{cases} -2x+1 & (-1\le x<0) \\ 2x^2+1 & (0\le x\le 1)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0(-2t+1)dt+\int_0^1(2t^2+1)dt$$

$$=\Big[-t^2+t\Big]_{-1}^0+\Big[\frac{2}{3}t^3+t\Big]_0^1$$

$$=\{0-(-1-1)\}+\left\{\left(\frac{2}{3}+1\right)-0\right\}$$

$$=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3} \qquad \cdots\cdots ❶$$

$$g(a+6)-g(a)=\int_2^{a+6}f(t)dt-\int_2^a f(t)dt$$

$$=\int_2^{a+6}f(t)dt+\int_a^2 f(t)dt$$

$$=\int_a^{a+6}f(t)dt \qquad \cdots\cdots ❷$$

이고 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_a^{a+6}f(t)dt=\int_a^{a+2}f(t)dt+\int_{a+2}^{a+4}f(t)dt+\int_{a+4}^{a+6}f(t)dt$$

$$=\int_a^{a+2}f(t)dt+\int_a^{a+2}f(t)dt+\int_a^{a+2}f(t)dt$$

$$=3\int_a^{a+2}f(t)dt=3\int_{-1}^1 f(t)dt$$

$$=3\times\frac{11}{3}=11 \qquad \cdots\cdots ❸$$

답 11

4 조건 (가)에서 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & (0\le x<1) \\ x^2-2x+2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$이므로

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1(-t^2+2)dt+\int_1^2(t^2-2t+2)dt$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+2t\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2+2t\Big]_1^2$$

$$=\left\{\left(-\frac{1}{3}+2\right)-0\right\}+\left\{\left(\frac{8}{3}-4+4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+2\right)\right\}$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=3 \qquad \cdots\cdots ❶$$

이때 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로

$$\int_{-2}^2 f(t)dt=2\int_0^2 f(t)dt=2\times 3=6 \qquad \cdots\cdots ❷$$

$$g(a+8)-g(a)=\int_1^{a+8}f(t)dt-\int_1^a f(t)dt$$

$$=\int_1^{a+8}f(t)dt+\int_a^1 f(t)dt$$

$$=\int_a^{a+8}f(t)dt \qquad \cdots\cdots ❸$$

이고 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_a^{a+8}f(t)dt=\int_a^{a+4}f(t)dt+\int_{a+4}^{a+8}f(t)dt$$

$$=\int_a^{a+4}f(t)dt+\int_a^{a+4}f(t)dt$$

$$=2\int_a^{a+4}f(t)dt=2\int_{-2}^2 f(t)dt$$

$$=2\times 6=12 \qquad \cdots\cdots ❹$$

답 12

채점기준	배점
❶ $\int_0^2 f(t)dt$의 값 구하기	3
❷ $\int_{-2}^2 f(t)dt$의 값 구하기	1
❸ $g(a+8)-g(a)$를 정적분으로 나타내기	1
❹ $g(a+8)-g(a)$의 값 구하기	2

5 $\int_2^x(t-x)f(t)dt=-x^3+ax^2+8x+b$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=-8+4a+16+b \qquad \therefore b=-4a-8$ $\cdots\cdots$ ㉠ $\cdots\cdots$ ❶

$\int_2^x(t-x)f(t)dt=-x^3+ax^2+8x+b$에서

$$\int_2^x tf(t)dt-x\int_2^x f(t)dt=-x^3+ax^2+8x+b$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$xf(x)-\int_2^x f(t)dt-xf(x)=-3x^2+2ax+8$$

$$\therefore \int_2^x f(t)dt=3x^2-2ax-8 \qquad \cdots\cdots ❷$$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=12-4a-8$, $4a=4 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-12$ …… ❸

$\int_{2}^{x} f(t)dt=3x^2-2x-8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2$ …… ❹

$\therefore f(a)+b=f(1)+(-12)$

$=(6-2)+(-12)=-8$ …… ❺

답 -8

6 $\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+3x-1$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+3-1 \qquad \therefore a=-3$ …… ❶

$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3-3x^2+3x-1$에서

$x\int_{1}^{x}f(t)dt-\int_{1}^{x}tf(t)dt=x^3-3x^2+3x-1$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{1}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-6x+3$

$\therefore \int_{1}^{x}f(t)dt=3x^2-6x+3$ …… ❷

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-6$ …… ❸

$f(x)=0$에서 $6x-6=0 \qquad \therefore x=1$

$x\le1$에서 $f(x)\le0$, $x\ge1$에서 $f(x)\ge0$이므로

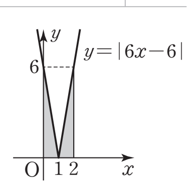
$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}|f(x)|dx&=\int_{0}^{2}|6x-6|dx\\&=\int_{0}^{1}(-6x+6)dx+\int_{1}^{2}(6x-6)dx\\&=\Big[-3x^2+6x\Big]_{0}^{1}+\Big[3x^2-6x\Big]_{1}^{2}\\&=\{(-3+6)-0\}+\{(12-12)-(3-6)\}\\&=3+3=6\end{aligned}$$ …… ❹

답 6

채점기준	배점
❶ a의 값 구하기	1
❷ $\int_{1}^{x}f(t)dt$ 구하기	2
❸ $f(x)$ 구하기	1
❹ $\int_{0}^{2}\lvert f(x)\rvert dx$의 값 구하기	2

다른풀이 $\int_{0}^{2}|6x-6|dx$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times6\right)=6$



7 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$ …… ❶

이때 $f'(0)=1$이고

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$ …… ❷

따라서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+2xh\}-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2x=2x+1\end{aligned}$$ …… ❸

이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx=\int(2x+1)dx\\&=x^2+x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^2+x$이므로 …… ❹

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}f(x)dx&=\int_{-3}^{3}(x^2+x)dx=\int_{-3}^{3}x^2dx=2\int_{0}^{3}x^2dx\\&=2\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{3}=2(9-0)=18\end{aligned}$$ …… ❺

답 18

8 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \qquad \therefore f(0)=1$ …… ❶

이때 $f'(0)=2$이고

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=2$ …… ❷

따라서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x)+f(h)+2xh-1\}-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+2x=2x+2\end{aligned}$$ …… ❸

이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx=\int(2x+2)dx\\&=x^2+2x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^2+2x+1$이므로 …… ❹

$$\begin{aligned}\int_{-6}^{6}f(x)dx&=\int_{-6}^{6}(x^2+2x+1)dx=\int_{-6}^{6}(x^2+1)dx\\&=2\int_{0}^{6}(x^2+1)dx=2\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_{0}^{6}\\&=2\{(72+6)-0\}=2\times78=156\end{aligned}$$ …… ❺

답 156

채점기준	배점
❶ $f(0)$의 값 구하기	1
❷ $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$의 값 구하기	2
❸ $f'(x)$ 구하기	2
❹ $f(x)$ 구하기	1
❺ $\int_{-6}^{6}f(x)dx$의 값 구하기	2

실전 문제 | 1회

p.102~106

01 $\{x^2f(x)\}'=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

$$\int_{-1}^{2}\{2xf(x)+x^2f'(x)\}dx=\Big[x^2f(x)\Big]_{-1}^{2}$$
$$=4f(2)-f(-1)$$
$$=4\times2-3=5$$

답 ②

02 $f(0)=f(2)=f(4)=4$이므로

$f(x)=x(x-2)(x-4)+4$
$\quad=x^3-6x^2+8x+4$

$$\therefore \int_0^4 f(x)dx=\int_0^4(x^3-6x^2+8x+4)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2+4x\Big]_0^4$$
$$=64-128+64+16=16$$

답 ⑤

03 $$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x+2)^2dx=\int_{-1}^{1}(x^2+4x+4)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^2+4)dx=2\int_0^1(x^2+4)dx$$
$$=2\Big[\frac{1}{3}x^3+4x\Big]_0^1$$
$$=2\times\Big\{\Big(\frac{1}{3}+4\Big)-0\Big\}=\frac{26}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+2)dx=\int_{-1}^{1}2dx$$
$$=2\int_0^1 2dx=2\Big[2x\Big]_0^1=2\times(2-0)=4$$

이므로 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\Big\{\int_{-1}^{1}f(x)dx\Big\}^2$에서

$\dfrac{26}{3}=k\times4^2 \qquad \therefore k=\dfrac{13}{24}$

답 ②

04 함수 $y=F(x)$의 그래프에서 $F(-1)=2$, $F(2)=0$이므로

$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_{-1}^{2}=F(2)-F(-1)$$
$$=0-2=-2$$

답 ①

05 $\displaystyle\int_0^5 f(x)dx=\int_2^5 f(x)dx+\frac{20}{3}$에서

$$\int_0^5 f(x)dx-\int_2^5 f(x)dx=\frac{20}{3}$$
$$\int_0^5 f(x)dx+\int_5^2 f(x)dx=\frac{20}{3}$$
$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\frac{20}{3}$$

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $f(2)=0$이므로

$4+2a+b=0 \qquad \therefore b=-2a-4$

따라서 $f(x)=x^2+ax-2a-4$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^2+ax-2a-4)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-2ax-4x\Big]_0^2$$
$$=\Big(\frac{8}{3}+2a-4a-8\Big)-0$$
$$=-2a-\frac{16}{3}$$

즉 $-2a-\dfrac{16}{3}=\dfrac{20}{3}$이므로 $-2a=12 \qquad \therefore a=-6$

따라서 $f(x)=x^2-6x+8$이므로

$f(5)=25-30+8=3$

답 ③

06 $g(x)=f(x-a)+b$이고 $g(0)=0$이므로

$g(0)=f(-a)+b$, $0=-a^3+b \qquad \therefore b=a^3$

따라서 $g(x)=f(x-a)+a^3$이므로

$$\int_a^{3a}g(x)dx-\int_0^{2a}f(x)dx$$
$$=\int_a^{3a}\{f(x-a)+a^3\}dx-\int_0^{2a}f(x)dx$$
$$=\int_a^{3a}f(x-a)dx+\int_a^{3a}a^3dx-\int_0^{2a}f(x)dx$$
$$=\int_0^{2a}f(x)dx+\int_a^{3a}a^3dx-\int_0^{2a}f(x)dx$$
$$=\int_a^{3a}a^3dx=\Big[a^3x\Big]_a^{3a}=3a^4-a^4=2a^4$$

즉 $2a^4=32$이므로 $a^4=16$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

답 ①

참고 $y=f(x-a)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동하면 $y=f(x)$의 그래프가 되므로

$$\int_a^{3a}f(x-a)dx=\int_0^{2a}f(x)dx$$

다른풀이 $y=x^3$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=(x-a)^3 \qquad \therefore y=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3+b$

즉 $g(x)=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3+b$이고 $g(0)=0$이므로

$-a^3+b=0 \qquad \therefore g(x)=x^3-3ax^2+3a^2x$

$$\int_a^{3a}g(x)dx=\int_a^{3a}(x^3-3ax^2+3a^2x)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-ax^3+\frac{3a^2}{2}x^2\Big]_a^{3a}$$
$$=\frac{27}{4}a^4-\frac{3}{4}a^4=6a^4,$$
$$\int_0^{2a}f(x)dx=\int_0^{2a}x^3dx=\Big[\frac{1}{4}x^4\Big]_0^{2a}=4a^4$$

이므로 $\displaystyle\int_a^{3a}g(x)dx-\int_0^{2a}f(x)dx=32$에서

$6a^4-4a^4=32$, $2a^4=32$

$a^4=16 \qquad \therefore a=2$ ($\because a>0$)

07 모든 실수 x에 대하여 $f(-2+x)=f(-2-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\displaystyle\int_{-4}^{-1}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx=b$이므로

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx=\int_{-2}^{-4} f(x)dx+\int_{-4}^{-1} f(x)dx$$
$$=-\int_{-4}^{-2} f(x)dx+\int_{-4}^{-1} f(x)dx$$
$$=-a+b$$

답 ②

08 $\int_{0}^{15} f(x)dx$

$=\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{7} f(x)dx+\int_{7}^{15} f(x)dx$

$=(0+1)^2+(1+1)^2+(3+1)^2+(7+1)^2$

$=1+4+16+64=85$

답 ③

09 $\int_{0}^{1} (x+a)|x-a|dx$

$=\int_{0}^{a} (x+a)(-x+a)dx+\int_{a}^{1} (x+a)(x-a)dx$

$=\int_{0}^{a} (-x^2+a^2)dx+\int_{a}^{1} (x^2-a^2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+a^2x\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_a^1$

$=\left\{\left(-\frac{1}{3}a^3+a^3\right)-0\right\}+\left\{\left(\frac{1}{3}-a^2\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-a^3\right)\right\}$

$=\frac{2}{3}a^3+\left(\frac{2}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{4}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}$

$f(a)=\frac{4}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}$이라 하면

$f'(a)=4a^2-2a=2a(2a-1)$

$f'(a)=0$에서 $a=\frac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$)

$0<a<1$에서 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	

따라서 $0<a<1$일 때, 함수 $f(a)$는 $a=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{1}{4}$을 갖는다.

답 ①

10 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1} (1+2x+3x^2+\cdots+100x^{99})dx$

$=\int_{-1}^{1} (1+3x^2+5x^4+\cdots+99x^{98})dx$

$=2\int_{0}^{1} (1+3x^2+5x^4+\cdots+99x^{98})dx$

$=2\left[x+x^3+x^5+\cdots+x^{99}\right]_0^1$

$=2\times(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{50\text{개}})=100$

답 ③

11 조건 (가)에서 $\int_{0}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{-x} f(t)dt$

$\int_{0}^{x} f(t)dt-\int_{0}^{-x} f(t)dt=0$

$\int_{0}^{x} f(t)dt+\int_{-x}^{0} f(t)dt=0$

$\therefore \int_{-x}^{x} f(t)dt=0$

즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

라 하면

$f'(x)=3ax^2+b$

$f'(0)=1$이므로 $b=1$

$f'(1)=7$이므로 $3a+1=7$, $3a=6$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x^3+x$이므로

$\int_{2}^{4} f(x)dx=\int_{2}^{4} (2x^3+x)dx=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_2^4$

$=(128+8)-(8+2)$

$=126$

답 ④

12 $\int_{0}^{x} (2t-x)f(t)dt=\frac{3}{4}x^5-\frac{1}{3}x^4+ax^3$에서

$2\int_{0}^{x} tf(t)dt-x\int_{0}^{x} f(t)dt=\frac{3}{4}x^5-\frac{1}{3}x^4+ax^3$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)-\int_{0}^{x} f(t)dt-xf(x)=\frac{15}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+3ax^2$

$\therefore xf(x)-\int_{0}^{x} f(t)dt=\frac{15}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+3ax^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=15x^3-4x^2+6ax$

$\therefore xf'(x)=15x^3-4x^2+6ax$

$\therefore f'(x)=15x^2-4x+6a$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (15x^2-4x+6a)dx$

$=5x^3-2x^2+6ax+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(1)=1$이므로 $5-2+6a=1$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=5x^3-2x^2-2x$이므로

$f(2)=40-8-4=28$

답 ②

13 $f(x)=\int_{0}^{x} (t+1)(t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)(x-a)$ ← 즉 $f(x)$는 삼차함수

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=a$

삼차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로 $x=a$에서 극소이고

$f(x)$의 극댓값이 $\frac{5}{3}$이므로 $f(-1)=\frac{5}{3}$

이때

$$f(-1)=\int_0^{-1}(t+1)(t-a)dt$$
$$=\int_0^{-1}\{t^2+(1-a)t-a\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1-a}{2}t^2-at\right]_0^{-1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1-a}{2}+a\right)-0$$
$$=\frac{a}{2}+\frac{1}{6}$$

이므로

$\frac{a}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$, $\frac{a}{2}=\frac{3}{2}$　　$\therefore a=3$

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 $f(x)$의 극솟값은

$$f(3)=\int_0^3(t+1)(t-3)dt=\int_0^3(t^2-2t-3)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2-3t\right]_0^3=(9-9-9)-0=-9$$

답 ②

14 $\frac{1}{2}t-x=0$에서 $t=2x$

$t\le 2x$일 때 $\frac{1}{2}t-x\le 0$, $t\ge 2x$일 때 $\frac{1}{2}t-x\ge 0$이므로

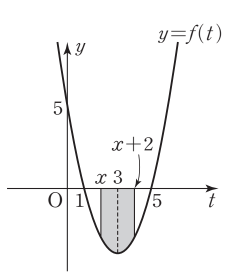
$$f(x)=\int_0^3\left|\frac{1}{2}t-x\right|dt$$
$$=\int_0^{2x}\left(-\frac{1}{2}t+x\right)dt+\int_{2x}^3\left(\frac{1}{2}t-x\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{4}t^2+xt\right]_0^{2x}+\left[\frac{1}{4}t^2-xt\right]_{2x}^3$$
$$=x^2+\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)$$
$$=2x^2-3x+\frac{9}{4}=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\ \left(\text{단, } 0\le x\le\frac{3}{2}\right)$$

따라서 $0\le x\le\frac{3}{2}$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}$에서 최소가 되므로

$a=\frac{3}{4}$

답 ⑤

15 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축이 직선 $t=\frac{1+5}{2}=3$이므로 함수 $g(x)=\int_x^{x+2}f(t)dt$는 $\frac{x+(x+2)}{2}=3$, 즉 $x=2$일 때 최솟값을 갖는다.



따라서 함수 $g(x)$의 최솟값은

$$g(2)=\int_2^4 f(t)dt=\int_2^4(t^2-6t+5)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right]_2^4$$
$$=\left(\frac{64}{3}-48+20\right)-\left(\frac{8}{3}-12+10\right)$$
$$=-\frac{22}{3}$$

답 ②

16 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

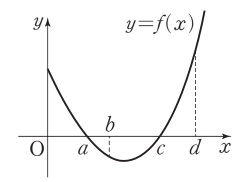
$F'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=c$이고, 함수 $y=F(x)$가

$0\le x\le a$에서 증가하므로 이 구간에서 $F'(x)=f(x)\ge 0$

$a\le x\le c$에서 감소하므로 이 구간에서 $F'(x)=f(x)\le 0$

$x\ge c$에서 증가하므로 이 구간에서 $F'(x)=f(x)\ge 0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(b)<0$ (거짓)

ㄴ. $f(d)>0$ (참)

ㄷ. $x>0$에서 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 곡선 $y=f(x)$ $(x>0)$와 x축의 교점의 x좌표와 같으므로 a, c이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

17 $g(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $g(0)=5$이므로

$f(0)+C=5$　　$\therefore C=5$ $(\because f(0)=0)$

$\therefore g(x)=f(x)+5$

$g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면 $G'(t)=g(t)$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x g(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{\left[G(t)\right]_1^x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{G(x)-G(1)}{x-1}$$
$$=G'(1)=g(1)=f(1)+5$$
$$=\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{100\text{개}}+5$$
$$=100+5=105$$

답 ⑤

18 $f(t)=|t+a|$라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$F'(t)=f(t)$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h|t+a|dt=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(t)dt$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[F(t)\right]_0^h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$$
$$=F'(0)=f(0)$$
$$=|a|=-a\ (\because a<0)$$

즉 $-a=a+8$이므로 $-2a=8$　　$\therefore a=-4$

답 ③

19 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

이때

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(-2x+1)=-4+1=-3$,

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2-4x+a)=4-8+a=a-4$,

$f(2)=a-4$

이므로

$-3=a-4 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -2x+1 & (0\le x<2) \\ x^2-4x+1 & (2\le x<4)\end{cases}$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\begin{aligned}\int_{13}^{15} f(x)dx&=\int_1^3 f(x)dx\\&=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx\\&=\int_1^2(-2x+1)dx+\int_2^3(x^2-4x+1)dx\\&=\Big[-x^2+x\Big]_1^2+\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+x\Big]_2^3\\&=-2+\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{14}{3}\end{aligned}$$

답 ②

20 $g(x)=\int_2^x (t-2)f'(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(x-2)f'(x) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이면 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 삼차함수이다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극값을 가지면 $g'(0)=0$이므로 $g'(x)$는 x를 인수로 갖는다. 이때 ㉠에서 $g'(2)=0$이고, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서는 극값을 가지지 않으므로 $g'(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가져야 한다.

따라서 $g'(x)=3x(x-2)^2$, $f'(x)=3x(x-2)$이므로

$$\begin{aligned}g(0)&=\int_2^0 (t-2)f'(t)dt=\int_2^0 3t(t-2)^2dt\\&=\int_2^0(3t^3-12t^2+12t)dt\\&=\Big[\frac{3}{4}t^4-4t^3+6t^2\Big]_2^0=-4\end{aligned}$$

답 ①

21 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 자연수)라 하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1(x^3+ax^2+bx+c)dx\\&=\Big[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\Big]_0^1\\&=\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\end{aligned}$$

즉 $\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=\frac{71}{12}$이므로

$2a+3b+6c=34 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 f(x)dx&=\int_{-2}^2(x^3+ax^2+bx+c)dx\\&=\int_{-2}^2(ax^2+c)dx=2\int_0^2(ax^2+c)dx\\&=2\Big[\frac{a}{3}x^3+cx\Big]_0^2\\&=2\left(\frac{8}{3}a+2c\right)=\frac{16}{3}a+4c\end{aligned}$$

즉 $\frac{16}{3}a+4c=\frac{68}{3}$이므로

$4a+3c=17$

이때 a, c는 자연수이므로 $a=2$, $c=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$4+3b+18=34$, $3b=12 \qquad \therefore b=4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+4x+3$이므로

$f(2)=8+8+8+3=27$

답 ④

22 $\int_0^1 f(x)dx=A$, $\int_0^1 g(x)dx=B$ (A, B는 상수)라 하면

$f(x)=15x^2+Bx$, $g(x)=Ax^2+30x$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1(15x^2+Bx)dx\\&=\Big[5x^3+\frac{B}{2}x^2\Big]_0^1=5+\frac{B}{2}\end{aligned}$$

즉 $5+\frac{B}{2}=A$이므로 $2A-B=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)dx&=\int_0^1(Ax^2+30x)dx\\&=\Big[\frac{A}{3}x^3+15x^2\Big]_0^1=\frac{A}{3}+15\end{aligned}$$

즉 $\frac{A}{3}+15=B$이므로 $A-3B=-45 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$A=15$, $B=20$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1\{f(x)+g(x)\}dx&=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx\\&=A+B=15+20=35\end{aligned}$$

답 ③

23 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로 조건 (가)에서

$f(1)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}ax^2=a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

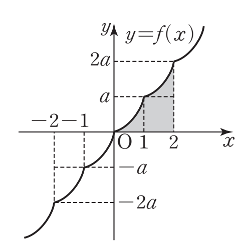
또 $f(0)=0$이고, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x+1)=f(x)+k$이므로

$f(1)=f(0)+k=0+k=k \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=k \qquad \cdots\cdots$ ❶

즉 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)+a$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $\cdots\cdots$ ❷



따라서 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx&=2\int_0^1 ax^2dx+1\times a\\&=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1+a\\&=\frac{2}{3}a+a=\frac{5}{3}a\end{aligned}$$

이므로 조건 (다)에서

$\frac{5}{3}a=\frac{20}{3} \qquad \therefore a=4 \qquad \cdots\cdots$ ❸

따라서 $0\le x<1$에서 $f(x)=4x^2$, $f(1)=4$이므로

$f(10)=f(9)+4=f(8)+4+4$
$=f(7)+4+4+4$
$\vdots$
$=f(1)+\underbrace{4+4+4+\cdots+4}_{9\text{개}}$
$=f(1)+36=4+36=40$ …… ❹

답 40

채점기준	배점
❶ $k=a$임을 설명하기	2
❷ $y=f(x)$의 그래프 그리기	2
❸ a의 값 구하기	2
❹ $f(10)$의 값 구하기	2

24 $f(x)=\int_0^x (3at^2+2bt+3a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+3a$ …… ❶

함수 $f(x)$가 극값을 가지지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $3ax^2+2bx+3a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=b^2-3a\times 3a=b^2-9a^2\le 0$ …… ㉠

이때 $f(1)=3$이므로

$f(1)=\int_0^1 (3at^2+2bt+3a)dt=\Big[at^3+bt^2+3at\Big]_0^1$
$=(a+b+3a)-0=4a+b=3$

$\therefore b=3-4a$ …… ㉡ …… ❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$(3-4a)^2-9a^2\le 0$

$7a^2-24a+9\le 0$, $(7a-3)(a-3)\le 0$

$\therefore \frac{3}{7}\le a\le 3$ …… ❸

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다. …… ❹

답 3

채점기준	배점
❶ $f'(x)$ 구하기	1
❷ a, b 사이의 관계식 구하기	3
❸ a의 값의 범위 구하기	2
❹ 정수 a의 최댓값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.107~111

01 $\int_0^2 f'(x)dx=\int_0^4 f'(x)dx=0$에서

$\Big[f(x)\Big]_0^2=\Big[f(x)\Big]_0^4=0$

$f(2)-f(0)=f(4)-f(0)=0$

$\therefore f(0)=f(2)=f(4)$

즉 $f(0)=f(2)=f(4)=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=x(x-2)(x-4)+k$

따라서 $f'(x)=(x-2)(x-4)+x(x-4)+x(x-2)$이므로

$f'(2)=2\times(-2)=-4$

답 ①

02 $\int_0^2 (t^2+1)dt+\int_2^3 (3x^2-1)dx+2\int_0^2 (s^2-1)ds$

$=\int_0^2 (x^2+1)dx+\int_2^3 (3x^2-1)dx+2\int_0^2 (x^2-1)dx$

$=\int_0^2 (x^2+1)dx+2\int_0^2 (x^2-1)dx+\int_2^3 (3x^2-1)dx$

$=\int_0^2 \{(x^2+1)+2(x^2-1)\}dx+\int_2^3 (3x^2-1)dx$

$=\int_0^2 (3x^2-1)dx+\int_2^3 (3x^2-1)dx$

$=\int_0^3 (3x^2-1)dx$

$=\Big[x^3-x\Big]_0^3=(27-3)-0=24$

답 ②

03 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다. 즉 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(ax^3+bx+c)=0$ $\therefore c=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3+bx}{x}=\lim_{x\to 0}(ax^2+b)=b$이므로

$b=2$

따라서 $f(x)=ax^3+2x$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (ax^3+2x)dx=\Big[\frac{a}{4}x^4+x^2\Big]_0^1$
$=\frac{a}{4}+1$

즉 $\frac{a}{4}+1=3$이므로 $\frac{a}{4}=2$ $\therefore a=8$

따라서 $f(x)=8x^3+2x$이므로

$f(1)=8+2=10$

답 ①

04 $\int_1^4 \{f(x)-2\}^2dx=\int_1^4 [\{f(x)\}^2-4f(x)+4]dx$
$=\int_1^4 \{f(x)\}^2dx-4\int_1^4 f(x)dx+\int_1^4 4dx$

이때

$\int_1^4 f(x)dx=-\int_4^1 f(x)dx=-2$,

$\int_1^4 4dx=\Big[4x\Big]_1^4=16-4=12$

이므로

$\int_1^4 \{f(x)-2\}^2dx=\int_1^4 \{f(x)\}^2dx-4\int_1^4 f(x)dx+\int_1^4 4dx$
$=10-4\times(-2)+12=30$

답 ⑤

05 조건 (나)에서

$\int_n^{n+3} f(x)dx=\int_n^{n+1} 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_n^{n+1}$
$=(n+1)^2-n^2=2n+1$

이므로

$\int_{0}^{12} f(x)dx$

$=\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{6} f(x)dx+\int_{6}^{9} f(x)dx+\int_{9}^{12} f(x)dx$

$=(2\times0+1)+(2\times3+1)+(2\times6+1)+(2\times9+1)$

$=40$

$\int_{0}^{11} f(x)dx$

$=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{8} f(x)dx+\int_{8}^{11} f(x)dx$

$=0+(2\times2+1)+(2\times5+1)+(2\times8+1)$

$=33$

$\therefore \int_{11}^{12} f(x)dx=\int_{11}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{12} f(x)dx$

$=-\int_{0}^{11} f(x)dx+\int_{0}^{12} f(x)dx$

$=-33+40=7$

답 ⑤

06 $\int_{-2}^{0} f(x)dx=\int_{-2}^{6} f(x)dx+\int_{6}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{0} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{6} f(x)dx-\int_{2}^{6} f(x)dx+\int_{2}^{0} f(x)dx$

$=12-4+(-2)=6,$

$\int_{-2}^{0} (2x+3)dx=\Big[x^2+3x\Big]_{-2}^{0}=0-(4-6)=2$

이므로

$\int_{-2}^{0} \{f(x)-(2x+3)\}dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx-\int_{-2}^{0} (2x+3)dx$

$=6-2=4$

답 ①

07 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1+} f(x)=f(1)$이다. 즉

$\lim\limits_{x\to1-} k=\lim\limits_{x\to1+} \frac{2}{x+1}=1$이므로 $k=1$

$\therefore f(x)=\begin{cases} 1 & (x<1) \\ \frac{2}{x+1} & (x\ge1) \end{cases}$

$\therefore \int_{0}^{3} f(x)dx-\int_{1}^{3} \frac{2x^2}{x+1}dx$

$=\int_{0}^{1} 1dx+\int_{1}^{3} \frac{2}{x+1}dx-\int_{1}^{3} \frac{2x^2}{x+1}dx$

$=\int_{0}^{1} 1dx+\int_{1}^{3} \left(\frac{2}{x+1}-\frac{2x^2}{x+1}\right)dx$

$=\int_{0}^{1} 1dx+\int_{1}^{3} \frac{2-2x^2}{x+1}dx$

$=\int_{0}^{1} 1dx+\int_{1}^{3} \frac{2(1+x)(1-x)}{x+1}dx$

$=\int_{0}^{1} 1dx+\int_{1}^{3} (2-2x)dx$

$=\Big[x\Big]_{0}^{1}+\Big[2x-x^2\Big]_{1}^{3}$

$=1+(-4)=-3$

답 ②

08 $3x^2-2x=0$에서 $x(3x-2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

$0\le x\le\frac{2}{3}$일 때 $3x^2-2x\le0$, $x\ge\frac{2}{3}$일 때 $3x^2-2x\ge0$이므로

$\int_{0}^{a} |3x^2-2x|dx$

$=\int_{0}^{\frac{2}{3}} (-3x^2+2x)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{a} (3x^2-2x)dx$

$=\Big[-x^3+x^2\Big]_{0}^{\frac{2}{3}}+\Big[x^3-x^2\Big]_{\frac{2}{3}}^{a}$

$=\frac{4}{27}+\left(a^3-a^2+\frac{4}{27}\right)$

$=a^3-a^2+\frac{8}{27}$

즉 $a^3-a^2+\frac{8}{27}=\frac{8}{27}$이므로

$a^3-a^2=0$, $a^2(a-1)=0$

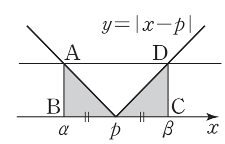
$\therefore a=1 \left(\because a>\frac{2}{3}\right)$

답 ①

09 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2p$, $\alpha\beta=p-1$

즉 $\frac{\alpha+\beta}{2}=p$ $(\alpha<\beta)$이므로 함수 $y=|x-p|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$p-\alpha=\beta-p=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\therefore \int_{\alpha}^{\beta} |x-p|dx=\frac{1}{2}\square\mathrm{ABCD}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{DC}}$

$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)|\beta-p|$

$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\times\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2=\frac{1}{4}\{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta\}$

$=\frac{1}{4}\{(2p)^2-4(p-1)\}=\frac{1}{4}(4p^2-4p+4)$

$=p^2-p+1=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

따라서 $\int_{\alpha}^{\beta} |x-p|dx$는 $p=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

답 ④

10 $f(x)=x^2+2x+3$에서 $f'(x)=2x+2$

$-1\le x\le1$에서 $f'(x)\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 증가한다. 따라서

$-1\le t\le x$일 때 $f(t)\le f(x)$, $x\le t\le1$일 때 $f(x)\le f(t)$

이므로 $-1\le x\le1$일 때

$g(x)=\int_{-1}^{1} |f(t)-f(x)|dt$

$=\int_{-1}^{x} \{f(x)-f(t)\}dt+\int_{x}^{1} \{f(t)-f(x)\}dt$

$=f(x)\int_{-1}^{x} 1dt-\int_{-1}^{x} f(t)dt+\int_{x}^{1} f(t)dt-f(x)\int_{x}^{1} 1dt$

$=f(x)\Big[t\Big]_{-1}^{x}-\int_{-1}^{x}f(t)dt+\int_{x}^{1}f(t)dt-f(x)\Big[t\Big]_{x}^{1}$

$=f(x)(x+1)-\int_{-1}^{x}f(t)dt+\int_{x}^{1}f(t)dt-f(x)(1-x)$

$=2xf(x)-\int_{-1}^{x}f(t)dt-\int_{1}^{x}f(t)dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2f(x)+2xf'(x)-f(x)-f(x)$

$=2xf'(x)$ (단, $-1<x<1$)

$\therefore g'\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}\times3=3$ 답 ②

11 $\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(-3x^2+4x)dx=\Big[-x^3+2x^2\Big]_{0}^{1}=1$,

$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{1}^{2}(-x+2)dx=\Big[-\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{1}^{2}=\frac{1}{2}$

이므로

$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

조건 (나)의 $f(4-x)=f(x)$의 양변에 x 대신 $x+2$를 대입하면

$f(2-x)=f(2+x)$

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$\int_{2}^{4}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx=\frac{3}{2}$

또 조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉

$\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx=\frac{3}{2}$,

$\int_{-3}^{-2}f(x)dx=\int_{2}^{3}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}$

$\therefore \int_{-3}^{4}f(x)dx$

$=\int_{-3}^{-2}f(x)dx+\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=5$ 답 ①

12 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=6$에서 다항함수 $f(x)+f(-x)$는 최고차항의 계수가 6인 이차함수이고, 다항함수 $f(x)+f(-x)$의 홀수 차수의 항의 계수는 0이므로

$f(x)+f(-x)=6x^2+a$ (단, a는 상수)

양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f(0)=a \quad \therefore a=-8\ (\because f(0)=-4)$

$\therefore f(x)+f(-x)=6x^2-8$

이때 $\int_{-3}^{3}f(x)dx=\int_{-3}^{3}f(-x)dx$이므로

$\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{2}\left\{\int_{-3}^{3}f(x)dx+\int_{-3}^{3}f(-x)dx\right\}$

$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}dx$

$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(6x^2-8)dx=\int_{0}^{3}(6x^2-8)dx$

$=\Big[2x^3-8x\Big]_{0}^{3}=30$ 답 ⑤

13 $\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(-x+1)dx=\Big[-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{0}^{1}=\frac{1}{2}$,

$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{1}^{2}(-4x^2+12x-8)dx$

$=\Big[-\frac{4}{3}x^3+6x^2-8x\Big]_{1}^{2}=\frac{2}{3}$,

$\int_{2}^{3}f(x)dx=\int_{2}^{3}(x-2)dx=\Big[\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_{2}^{3}=\frac{1}{2}$

이므로

$\int_{0}^{3}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_{-10}^{10}f(x)dx$

$=\int_{-10}^{-9}f(x)dx+\int_{-9}^{-6}f(x)dx+\int_{-6}^{-3}f(x)dx$

$+\int_{-3}^{0}f(x)dx+\cdots+\int_{6}^{9}f(x)dx+\int_{9}^{10}f(x)dx$

$=\int_{2}^{3}f(x)dx+6\int_{0}^{3}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=\frac{1}{2}+6\times\frac{5}{3}+\frac{1}{2}=11$ 답 ②

14 $\int_{-1}^{1}(x+2)^2f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^2+4x+4)f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx+4\int_{-1}^{1}xf(x)dx+4\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$g(x)=x^2f(x)$라 하면

$g(-x)=(-x)^2f(-x)=x^2f(x)=g(x)$

이므로

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=2\int_{0}^{1}x^2f(x)dx=2\times4=8$

또 $h(x)=xf(x)$라 하면

$h(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-h(x)$

이므로

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=0$

$\therefore \int_{-1}^{1}(x+2)^2f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx+4\int_{-1}^{1}xf(x)dx+4\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=8+4\times0+4\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=4\int_{-1}^{1}f(x)dx+8$

즉 $4\int_{-1}^{1}f(x)dx+8=20$이므로 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=3$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx=\int_{-3}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx$$
$$=3\int_{-1}^{1} f(x)dx=3\times 3=9$$

답 ④

참고 ① 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $y=x^2f(x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이고, $y=xf(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^{1} x^2f(x)dx=2\int_{0}^{1} x^2f(x)dx,\ \int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$$

② (우함수)×(우함수)=(우함수), (우함수)×(기함수)=(기함수), (기함수)×(기함수)=(우함수)

15 $\int_{1}^{x} (x-t)f'(t)dt=x^4-4x^3+8x+a$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-4+8+a \qquad \therefore a=-5$

$\int_{1}^{x} (x-t)f'(t)dt=x^4-4x^3+8x-5$에서

$$x\int_{1}^{x} f'(t)dt-\int_{1}^{x} tf'(t)dt=x^4-4x^3+8x-5$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{1}^{x} f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=4x^3-12x^2+8$$

$$\therefore \int_{1}^{x} f'(t)dt=4x^3-12x^2+8 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (12x^2-24x)dx$$
$$=4x^3-12x^2+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

이므로

$M=f(0)=C,\ m=f(2)=32-48+C=C-16$

$\therefore M-m-a=C-(C-16)-(-5)=21$

답 ④

참고 ㉠에서 $f(x)-f(1)=4x^3-12x^2+8$

16 삼차함수 $f(x)$가 $x=-1,\ x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=f'(1)=0$

또 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이면 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-1)=3x^2-3$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-3)dx$$
$$=x^3-3x+C \text{ (단, }C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=x^3-3x$

$F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=x^3-3x=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$F'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$-2\le x\le 2$에서 함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$F'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$F(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $F(x)$의 극댓값은 $F(0)=0$이고

$$F(-2)=F(2)=\int_{0}^{2} (t^3-3t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2\right]_{0}^{2}=-2$$

따라서 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $F(x)$의 최댓값은 0이다.

답 ③

17 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 5이고 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로

$f(x)=5x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)

라 하자. $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $F'(t)=f(t)$이므로 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x} f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{\Big[F(t)\Big]_{1}^{x}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)$$

$\therefore f(1)=9$

즉 $5+a+b=9$이므로 $a+b=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 조건 (다)에서

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} (5x^4+ax^2+b)dx$$
$$=2\int_{0}^{1} (5x^4+ax^2+b)dx$$
$$=2\left[x^5+\frac{a}{3}x^3+bx\right]_{0}^{1}$$
$$=2+\frac{2}{3}a+2b$$

이므로

$2+\frac{2}{3}a+2b=6 \qquad \therefore a+3b=6 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=1$

따라서 $f(x)=5x^4+3x^2+1$이므로

$f(-2)=80+12+1=93$

답 ③

18 $g(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt+9$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=9$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)+xf'(x)-f(x)=xf'(x)$

$f(x)$가 최고차항의 계수가 $\frac{4}{3}$인 삼차함수이면 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로 $xf'(x)$, 즉 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다.

이때 $\int_{-k}^{k} g'(x)dx=0$에서 삼차함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$g'(x)=4x^3+ax$ (a는 상수)

라 하자. 이때 $\int_0^1 g'(x)dx=-9$이고

$$\begin{aligned}\int_0^1 g'(x)dx&=\int_0^1 (4x^3+ax)dx\\&=\left[x^4+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1\\&=1+\frac{1}{2}a\end{aligned}$$

이므로

$1+\frac{1}{2}a=-9$, $\frac{1}{2}a=-10$ $\quad\therefore a=-20$

$\therefore g'(x)=4x^3-20x$

$$\begin{aligned}\therefore g(x)&=\int g'(x)dx=\int(4x^3-20x)dx\\&=x^4-10x^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때 $g(0)=9$이므로 $C=9$

$\therefore g(x)=x^4-10x^2+9$

$g'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{5}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	-16	↗	9	↘	-16	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\pm\sqrt{5}$에서 최솟값 -16을 갖는다.

답 ③

19 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$F'(x)=f(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

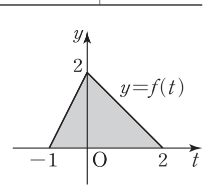
함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. 함수 $F(x)$는 $x=2$에서 극댓값

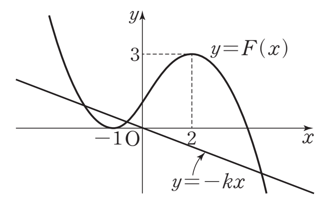
$F(2)=\int_{-1}^{2} f(t)dt=\frac{1}{2}\times3\times2=3$

을 갖는다. (거짓)



ㄴ. 함수 $F(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $F(-1)=\int_{-1}^{-1} f(t)dt=0$을 갖는다. (참)

ㄷ. 방정식 $F(x)+kx=0$, 즉 $F(x)=-kx$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=-kx$의 교점의 개수와 같다.



위의 그림과 같이 함수 $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=-kx$ ($k>0$)가 서로 다른 세 점에서 만나므로 임의의 양수 k에 대하여 방정식 $F(x)=-kx$, 즉 $F(x)+kx=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

20 $xf(x)=g(x)+\int_0^x tf'(t)dt$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=g(0)+0$ $\quad\therefore g(0)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=g'(x)+xf'(x)$

$\therefore f(x)=g'(x)$

이때 $f(x)$가 일차함수이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

따라서 $g(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(x)=g'(x)=2ax+b$

$f(x)g(x)=2x^3+3x^2+x$에서

$(2ax+b)(ax^2+bx)=2x^3+3x^2+x$

$\therefore 2a^2x^3+3abx^2+b^2x=2x^3+3x^2+x$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2a^2=2$, $3ab=3$, $b^2=1$

따라서 $a=1$, $b=1$ 또는 $a=-1$, $b=-1$이므로

$f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2+x$

또는 $f(x)=-2x-1$, $g(x)=-x^2-x$

(i) $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2+x$이면

$f(1)g(2)=3\times6=18$

(ii) $f(x)=-2x-1$, $g(x)=-x^2-x$이면

$f(1)g(2)=(-3)\times(-6)=18$

(i), (ii)에서 $f(1)g(2)=18$

답 ⑤

21 $g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}(6x+4)(ax+b) & (x\geq0)\\ -2(ax+b) & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로 $\lim_{x\to0+} f(x)g(x)=\lim_{x\to0-} f(x)g(x)=f(0)g(0)$이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0+}(6x+4)(ax+b)=4b$,

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}\{-2(ax+b)\}=-2b$,

$f(0)g(0)=4b$

이므로

$4b=-2b,\ 6b=0 \qquad \therefore b=0$

따라서 $g(x)=ax$이고, $g(1)=1$이므로 $a=1$

$\therefore g(x)=x$

따라서 $f(x)g(x)=xf(x)=\begin{cases} 6x^2+4x & (x\ge 0) \\ -2x & (x<0) \end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx&=\int_{-1}^{0}(-2x)dx+\int_{0}^{1}(6x^2+4x)dx\\&=\Big[-x^2\Big]_{-1}^{0}+\Big[2x^3+2x^2\Big]_{0}^{1}\\&=\{0-(-1)\}+\{(2+2)-0\}\\&=5\end{aligned}$$

답 ③

22 $x\{f(x)+x^2\}=\int_0^x f(t)dt-x^3\int_0^1 f'(t)dt+3x^4$에서

$xf(x)+x^3=\int_0^x f(t)dt-x^3\int_0^1 f'(t)dt+3x^4$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)+3x^2=f(x)-3x^2\int_0^1 f'(t)dt+12x^3$

$xf'(x)=12x^3-3x^2-3x^2\int_0^1 f'(t)dt$

$\therefore f'(x)=12x^2-3x-3x\int_0^1 f'(t)dt$ …… ❶

$\int_0^1 f'(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면 $f'(x)=12x^2-3x-3kx$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(t)dt&=\int_0^1(12t^2-3t-3kt)dt\\&=\Big[4t^3-\frac{3}{2}t^2-\frac{3k}{2}t^2\Big]_0^1\\&=-\frac{3}{2}k+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

즉 $-\frac{3}{2}k+\frac{5}{2}=k$이므로 $k=1$

따라서 $f'(x)=12x^2-6x$이므로 …… ❷

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx=\int(12x^2-6x)dx\\&=4x^3-3x^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=4x^3-3x^2$이므로 …… ❸

$f(2)=32-12=20$ …… ❹

답 20

채점기준	배점
❶ $f'(x)$를 $\int_0^1 f'(t)dt$를 이용하여 나타내기	2
❷ $f'(x)$ 구하기	3
❸ $f(x)$ 구하기	1
❹ $f(2)$의 값 구하기	1

23 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)=x^3-3x+2a$ …… ❶

사차함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다. …… ❷

$f(x)=x^3-3x+2a$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$2a+2$	↘	$2a-2$	↗

…… ❸

(i) $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

(극댓값)×(극솟값)>0이므로

$(2a+2)(2a-2)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>1$

(ii) $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

(극댓값)×(극솟값)$=0$이므로

$(2a+2)(2a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 $a\le -1$ 또는 $a\ge 1$

따라서 음수 a의 최댓값은 -1이다. …… ❹

답 -1

채점기준	배점
❶ $F'(x)=f(x)$임을 알아내기	1
❷ 함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가질 조건 구하기	2
❸ 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값 구하기	2
❹ 음수 a의 최댓값 구하기	3

참고 삼차함수 $f(x)$는 극값을 가지므로 삼차방정식 $f(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

수능형 기출문제 & 변형문제

p.112~116

1 $\int_{-2}^{a} f(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx$에서

$\int_{-2}^{a} f(x)dx-\int_{-2}^{0} f(x)dx=0$

$\int_{-2}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{-2} f(x)dx=0$

$\therefore \int_0^a f(x)dx=0$

즉 $\int_0^a(3x^2-16x-20)dx=0$이므로

$\Big[x^3-8x^2-20x\Big]_0^a=0,\ a^3-8a^2-20a=0$

$a(a+2)(a-10)=0 \qquad \therefore a=10\ (\because a>0)$

답 ④

다른풀이 $\int_{-2}^{a} f(x)dx=\int_{-2}^{a}(3x^2-16x-20)dx$

$=\left[x^3-8x^2-20x\right]_{-2}^{a}$

$=a^3-8a^2-20a$

$\int_{-2}^{a} f(x)dx=\int_{-2}^{0}(3x^2-16x-20)dx$

$=\left[x^3-8x^2-20x\right]_{-2}^{0}$

$=0$

즉 $a^3-8a^2-20a=0$이므로

$a(a+2)(a-10)=0 \qquad \therefore a=10\ (\because a>0)$

2 $\int_{a}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx$에서

$\int_{a}^{1} f(x)dx-\int_{0}^{1} f(x)dx=0$

$\int_{a}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{0} f(x)dx=0$

$\therefore \int_{a}^{0} f(x)dx=0$

즉 $\int_{a}^{0}(3x^2-4x-15)dx=0$이므로

$\left[x^3-2x^2-15x\right]_{a}^{0}=0$

$-a^3+2a^2+15a=0$

$-a(a+3)(a-5)=0$

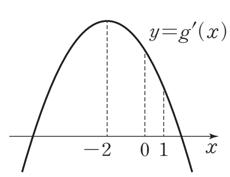
$\therefore a=-3\ (\because a<0)$ 답 ③

3 $g(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=-x^2-4x+a$

$=-(x+2)^2+a+4$

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하려면 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $g'(x)\geq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$g'(1)=a-5\geq 0$

$\therefore a\geq 5$

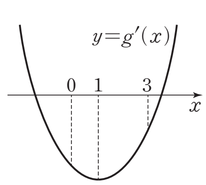
따라서 실수 a의 최솟값은 5이다. 답 5

4 $g(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=x^2-2x+a$

$=(x-1)^2+a-1$

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 감소하려면 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $g'(x)\leq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$g'(3)=a+3\leq 0$

$\therefore a\leq -3$

따라서 실수 a의 최댓값은 -3이다. 답 -3

5 $(x^2+1)+(3x-1)=x^2+3x$이므로 조건 (나), (다)를 만족시키는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 될 수 있는 식은 x^2+1, $3x-1$이다.

한편 두 함수 $y=x^2+1$, $y=3x-1$의 그래프의 교점의 x좌표는

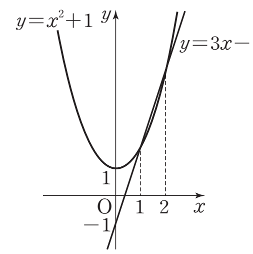
$x^2+1=3x-1$에서

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 두 함수 $y=x^2+1$, $y=3x-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 조건 (가)를 만족시키려면

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\leq 1 \text{ 또는 } x\geq 2) \\ 3x-1 & (1<x<2) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 3x-1 & (x\leq 1 \text{ 또는 } x\geq 2) \\ x^2+1 & (1<x<2) \end{cases}$$

$\therefore \int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{0}^{1}(x^2+1)dx+\int_{1}^{2}(3x-1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{4}{3}+\frac{7}{2}=\frac{29}{6}$ 답 ③

6 $(-x^2+3)+(x-3)=-x^2+x$이므로 조건 (나), (다)를 만족시키는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 될 수 있는 식은 $-x^2+3$, $x-3$이다.

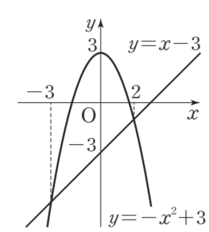
한편 두 함수 $y=-x^2+3$, $y=x-3$의 그래프의 교점의 x좌표는 $-x^2+3=x-3$에서

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 두 함수 $y=-x^2+3$, $y=x-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 조건 (가)를 만족시키려면

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & (x\leq -3 \text{ 또는 } x\geq 2) \\ x-3 & (-3<x<2) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x-3 & (x\leq -3 \text{ 또는 } x\geq 2) \\ -x^2+3 & (-3<x<2) \end{cases}$$

$\therefore \int_{0}^{3} g(x)dx=\int_{0}^{2}(-x^2+3)dx+\int_{2}^{3}(x-3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{2}^{3}$

$=\frac{10}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{6}$ 답 ①

7 조건 (가)에서 함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{1}{6}$이고, 조건 (가)에서

$g(x)=-f(x+1)+1\ (-1<x<0)$이므로

$$\int_{-1}^{0} g(x)dx=\int_{-1}^{0}\{-f(x+1)+1\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{0} f(x+1)dx+\int_{-1}^{0} 1dx$$
$$=-\int_{0}^{1} f(x)dx+\Big[x\Big]_{-1}^{0}$$
$$=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$$
또 $g(x)=f(x)$ $(0\le x\le 1)$이므로
$$\int_{0}^{1} g(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{1}{6}$$
$$\therefore \int_{-1}^{1} g(x)dx=\int_{-1}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{1} g(x)dx$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$
조건 ㈏에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이므로
$$\int_{-3}^{2} g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{1}^{2} g(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{0} g(x)dx$$
$$=2\int_{-1}^{1} g(x)dx+\int_{-1}^{0} g(x)dx$$
$$=2\times 1+\frac{5}{6}$$
$$=\frac{17}{6}$$
답 ②

8 $f(0)=0$, $f(2)=2$, $\int_{0}^{2} f(x)dx=\frac{1}{4}$이고, 조건 ㈎에서
$g(x)=f(x+2)$ $(-2<x<0)$이므로
$$\int_{-2}^{0} g(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x+2)dx$$
$$=\int_{0}^{2} f(x)dx=\frac{1}{4}$$
또 $g(x)=-f(x)+2$ $(0\le x\le 2)$이므로
$$\int_{0}^{2} g(x)dx=\int_{0}^{2}\{-f(x)+2\}dx$$
$$=-\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{0}^{2} 2dx$$
$$=-\frac{1}{4}+\Big[2x\Big]_{0}^{2}$$
$$=-\frac{1}{4}+4=\frac{15}{4}$$
$$\therefore \int_{-2}^{2} g(x)dx=\int_{-2}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{2} g(x)dx$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{15}{4}=4$$
조건 ㈏에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x+4)=g(x)$이므로
$$\int_{-2}^{8} g(x)dx=\int_{-2}^{2} g(x)dx+\int_{2}^{6} g(x)dx+\int_{6}^{8} g(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2} g(x)dx+\int_{-2}^{2} g(x)dx+\int_{-2}^{0} g(x)dx$$
$$=2\int_{-2}^{2} g(x)dx+\int_{-2}^{0} g(x)dx$$
$$=2\times 4+\frac{1}{4}=\frac{33}{4}$$
답 ④

9 조건 ㈎에서 $\int_{1}^{x} f(t)dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(1)\}+\frac{x-1}{2}f'(x)$$
$\therefore f(x)=f(1)+(x-1)f'(x)$ …… ㉠
함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\ne 0$인 상수, n은 자연수)이라 하면 ㉠의 우변의 최고차항은 $x\times anx^{n-1}=anx^n$이므로
$ax^n=anx^n$ $\quad\therefore n=1$
이때 $f(0)=1$이므로 $f(x)=ax+1$이고
$$\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{0}^{2}(ax+1)dx=\Big[\frac{a}{2}x^2+x\Big]_{0}^{2}=2a+2$$
$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+x)dx=\int_{-1}^{1} ax^2dx$$
$$=2\int_{0}^{1} ax^2dx=2\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_{0}^{1}$$
$$=\frac{2}{3}a$$
조건 ㈏에서 $\int_{0}^{2} f(x)dx=5\int_{-1}^{1} xf(x)dx$이므로
$2a+2=5\times\frac{2}{3}a$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2}$
따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$이므로
$f(4)=6+1=7$
답 7

10 조건 ㈎에서 $\int_{-1}^{x} f(t)dt=\frac{x+1}{2}\{f(x)+f(-1)\}$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(-1)\}+\frac{x+1}{2}f'(x)$$
$\therefore f(x)=f(-1)+(x+1)f'(x)$ …… ㉠
함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n ($a\ne 0$인 상수, n은 자연수)이라 하면 ㉠의 우변의 최고차항은 $x\times anx^{n-1}=anx^n$이므로
$ax^n=anx^n$ $\quad\therefore n=1$
이때 $f(0)=-8$이므로 $f(x)=ax-8$이고
$$\int_{-1}^{0} xf(x)dx=\int_{-1}^{0}(ax^2-8x)dx$$
$$=\Big[\frac{a}{3}x^3-4x^2\Big]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{a}{3}+4$$
$$\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1}(ax-8)dx$$
$$=\Big[\frac{a}{2}x^2-8x\Big]_{0}^{1}$$
$$=\frac{a}{2}-8$$
조건 ㈏에서 $\int_{-1}^{0} xf(x)dx=-4\int_{0}^{1} f(x)dx$이므로
$\frac{a}{3}+4=-4\left(\frac{a}{2}-8\right)$ $\quad\therefore a=12$
따라서 $f(x)=12x-8$이므로
$f(2)=24-8=16$
답 16

3 정적분의 활용

교과서 예제 p.119

01 (1) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이는

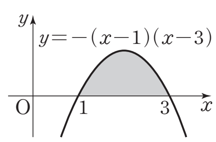
$$\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=2\Big[-\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^1=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

(2) 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}\{-x^2(x-2)\}dx=\int_{0}^{2}(-x^3+2x^2)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\Big]_0^2=\frac{4}{3}$$

답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$

02 (1) 곡선 $y=-(x-1)(x-3)$과 x축의 교점의 x좌표는



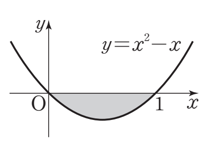
$-(x-1)(x-3)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{1}^{3}\{-(x-1)(x-3)\}dx=\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\Big]_1^3=\frac{4}{3}$$

(2) 곡선 $y=x^2-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-x=0$에서



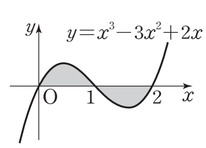
$x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{-(x^2-x)\}dx=\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1=\frac{1}{6}$$

(3) 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-3x^2+2x=0$에서



$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}|x^3-3x^2+2x|dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx+\int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{2}$

03 (1) 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}x^2dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{8}{3}-\Big(-\frac{1}{3}\Big)=3$$

(2) 닫힌구간 $[-3,\ -2]$에서 $y\leq 0$, 닫힌구간 $[-2,\ -1]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^{-1}|-x^2-x+2|dx$$
$$=\int_{-3}^{-2}(x^2+x-2)dx+\int_{-2}^{-1}(-x^2-x+2)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_{-3}^{-2}+\Big[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{-2}^{-1}$$
$$=\Big(\frac{10}{3}-\frac{3}{2}\Big)+\Big\{-\frac{13}{6}-\Big(-\frac{10}{3}\Big)\Big\}$$
$$=\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=3$$

답 (1) 3 (2) 3

04 (1) $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

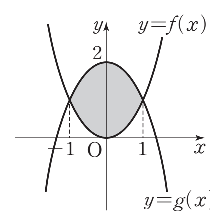
$x^2=-x^2+2$에서

$2x^2-2=0$, $2(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

이때 $a<b$이므로 $a=-1$, $b=1$

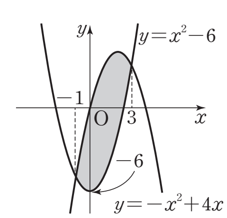
(2) 오른쪽 그림과 같이 구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(x)\leq g(x)$



(3) $$\int_{-1}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\{(-x^2+2)-x^2\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx$$
$$=2\Big[-\frac{2}{3}x^3+2x\Big]_0^1=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 (1) $a=-1$, $b=1$ (2) $f(x)\leq g(x)$ (3) $\frac{8}{3}$

05 (1) 두 곡선의 교점의 x좌표는



$-x^2+4x=x^2-6$에서

$2x^2-4x-6=0$

$2(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{3}\{(-x^2+4x)-(x^2-6)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\Big]_{-1}^{3}$$
$$=18-\Big(-\frac{10}{3}\Big)=\frac{64}{3}$$

(2) 두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^3-x^2=x^2$에서

$x^3-2x^2=0$, $x^2(x-2)=0$

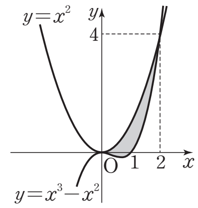
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2 \{x^2-(x^3-x^2)\}dx$

$=\int_0^2 (-x^3+2x^2)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$



답 (1) $\frac{64}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$

06 (1) $0+\int_0^1 (t^2-4t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_0^1=-\frac{5}{3}$

(2) $\int_1^2 (t^2-4t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_1^2$

$=-\frac{16}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)$

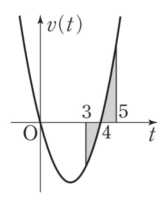
$=-\frac{11}{3}$

(3) $v(t)=0$에서

$t^2-4t=0$, $t(t-4)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=4$

즉 $t=4$에서 속도의 부호가 바뀌므로 구하는 거리는



$\int_3^5 |t^2-4t|dt=\int_3^4 (-t^2+4t)dt+\int_4^5 (t^2-4t)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_3^4+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_4^5$

$=\left(\frac{32}{3}-9\right)+\left\{-\frac{25}{3}-\left(-\frac{32}{3}\right)\right\}$

$=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=4$

답 (1) $-\frac{5}{3}$ (2) $-\frac{11}{3}$ (3) 4

기출 Best | 1회

p.120~123

01 곡선 $y=9-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는

$9-x^2=0$에서

$(3+x)(3-x)=0$

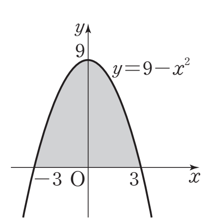
$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

$\therefore S_1=\int_{-3}^3 (9-x^2)dx$

$=2\int_0^3 (9-x^2)dx$

$=2\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$

$=2\times 18=36$



곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=0$에서 $x(x-3)=0$

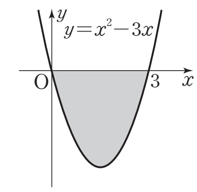
$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore S_2=\int_0^3 \{-(x^2-3x)\}dx$

$=\int_0^3 (-x^2+3x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$

$=\frac{9}{2}$



$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{36}{\frac{9}{2}}=8$

답 ④

다른풀이 $S_1=\frac{|-1|\times\{3-(-3)\}^3}{6}=36$

$S_2=\frac{1\times(3-0)^3}{6}=\frac{9}{2}$

02 $\int_0^x f(t)dt=-3x^3+x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

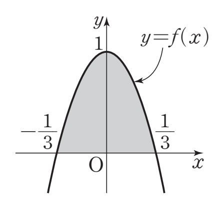
$f(x)=-9x^2+1$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$-9x^2+1=0$에서

$-(3x+1)(3x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$



따라서 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} (-9x^2+1)dx=2\int_0^{\frac{1}{3}} (-9x^2+1)dx$

$=2\left[-3x^3+x\right]_0^{\frac{1}{3}}$

$=2\times\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

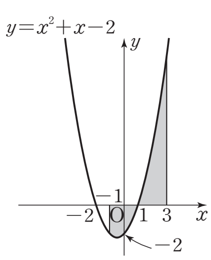
답 ②

03 곡선 $y=x^2+x-2$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+x-2=0$에서

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{-1}^3 |x^2+x-2|dx$

$=\int_{-1}^1 (-x^2-x+2)dx+\int_1^3 (x^2+x-2)dx$

$=2\int_0^1 (-x^2+2)dx+\int_1^3 (x^2+x-2)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^3$

$=2\times\frac{5}{3}+\left\{\frac{15}{2}-\left(-\frac{7}{6}\right)\right\}$

$=\frac{10}{3}+\frac{26}{3}=12$

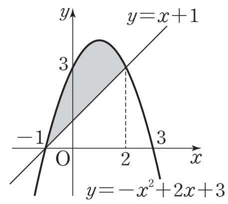
답 ②

04 곡선 $y=-x^2+2x+3$과 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2x+3=x+1$에서

$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{2}$$

답 ⑤

05 $x^2-2x=0$에서 $x(x-2)=0$

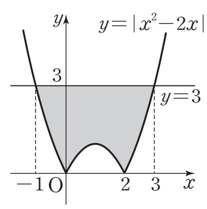
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

$$\therefore\ y=|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+2x & (0\le x\le 2)\end{cases}$$

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=3$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=3$에서

$x^2-2x-3=0,\ (x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{3}\{3-|x^2-2x|\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\{3-(x^2-2x)\}dx+\int_{0}^{2}\{3-(-x^2+2x)\}dx+\int_{2}^{3}\{3-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x+3)dx+\int_{0}^{2}(x^2-2x+3)dx+\int_{2}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{14}{3}+\left(9-\frac{22}{3}\right)=8$$

답 ④

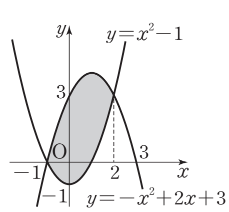
06 두 곡선 $y=x^2-1,\ y=-x^2+2x+3$의 교점의 x좌표는

$x^2-1=-x^2+2x+3$에서

$2x^2-2x-4=0$

$2(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{20}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=9$$

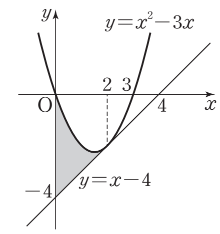
답 ③

07 $f(x)=x^2-3x$라 하면 $f'(x)=2x-3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=x-2\qquad \therefore\ y=x-4$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{0}^{2}\{(x^2-3x)-(x-4)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$$

답 ④

08 곡선 $y=-x^2+ax+9-3a$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{3}(-x^2+ax+9-3a)dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+(9-3a)x\right]_{0}^{3}=0$$

$$-9+\frac{9}{2}a+27-9a=0$$

$$-\frac{9}{2}a=-18\qquad \therefore\ a=4$$

답 ②

09 $S_1=S_2$이므로

$$\int_{0}^{1}(x^2-2x+1-k)dx=0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+(1-k)x\right]_{0}^{1}=0$$

$$\frac{1}{3}-1+1-k=0\qquad \therefore\ k=\frac{1}{3}$$

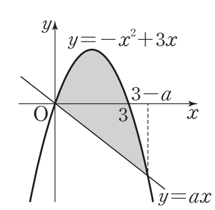
답 ②

10 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=ax\ (a<0)$의 교점의 x좌표는

$-x^2+3x=ax$에서

$x\{x-(3-a)\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3-a$



곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{3-a}\{(-x^2+3x)-ax\}dx=\int_{0}^{3-a}\{-x^2+(3-a)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3-a}{2}x^2\right]_{0}^{3-a}$$

$$=-\frac{(3-a)^3}{3}+\frac{(3-a)^3}{2}$$

$$=\frac{(3-a)^3}{6}$$

또 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=0$에서

$x(x-3)=0\qquad \therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}$$

곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이가 x축에 의하여 이등분되므로

$\dfrac{(3-a)^3}{6}=2\times\dfrac{9}{2}$　　$\therefore (3-a)^3=54$ 답 ⑤

11 곡선 $y=x^2-tx$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t(-x^2+tx)dx+\int_t^4(x^2-tx)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{t}{2}x^2\right]_0^t+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{t}{2}x^2\right]_t^4$$
$$=\frac{1}{6}t^3+\left\{\left(\frac{64}{3}-8t\right)-\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}t^3-8t+\frac{64}{3}$$

$S'(t)=t^2-8=(t+2\sqrt{2})(t-2\sqrt{2})$

$S'(t)=0$에서 $t=2\sqrt{2}$ ($\because 0<t<4$)

$0<t<4$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$	(4)
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=2\sqrt{2}$에서 최소가 된다. 답 ④

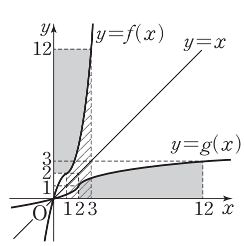
12 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$\int_1^5 f(x)dx=\int_5^9 f(x)dx=\int_9^{13} f(x)dx=6$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^{13}|f(x)|dx=\int_1^{13}f(x)dx$$
$$=\int_1^5 f(x)dx+\int_5^9 f(x)dx+\int_9^{13}f(x)dx$$
$$=3\times6=18$$
답 ④

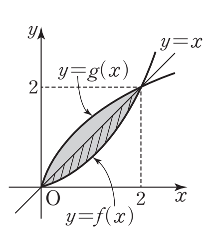
13 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



이때 $f(1)=2$, $f(3)=12$이고, 오른쪽 그림에서 어두운 두 부분의 넓이는 같으므로

$$\underbrace{\int_1^3 f(x)dx}_{\text{빗금 친 부분의 넓이}}+\underbrace{\int_{f(1)}^{f(3)} g(x)dx}_{\text{어두운 부분 중 한 부분의 넓이}}=3\times12-1\times2=34$$
답 ③

14 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표이다.



$\dfrac{1}{2}x^2=x$에서 $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$　　$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\underbrace{\text{곡선 } y=f(x)\text{와 직선 } y=x\text{로 둘러싸인 도형의 넓이}}_{\text{빗금 친 부분의 넓이}}$의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^2\{x-f(x)\}dx=2\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$=\int_0^2(2x-x^2)dx$$
$$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$$
답 ②

15 $f(x)=3x^2+5$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

$S(h)=\displaystyle\int_{2-h}^{2+h}f(x)dx\ (h>0)$

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{S(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{F(2+h)-F(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{F(2+h)-F(2)-\{F(2-h)-F(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{F(2+h)-F(2)}{h}-\frac{F(2-h)-F(2)}{-h}\times(-1)\right\}$$
$$=F'(2)-\{-F'(2)\}=2F'(2)$$
$$=2f(2)=2\times(12+5)=34$$
답 ②

16 점 P가 움직이는 방향이 바뀌는 시각에서의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$-t^2+t=0$, $-t(t-1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)

따라서 $t=1$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^1(-t^2+t)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$
답 ①

17 $v(t)=0$에서 $24-6t=0$

$6t=24$　　$\therefore t=4$

따라서 자동차는 제동을 건 시점으로부터 4초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^4|v(t)|dt=\int_0^4|24-6t|dt=\int_0^4(24-6t)dt$$
$$=\left[24t-3t^2\right]_0^4=48\ (\mathrm{m})$$
답 ④

18 $t=2$에서 $t=8$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_2^8 v(t)dt=\int_2^4 v(t)dt+\int_4^8 v(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times4\times2=-2$$

$\therefore a=-2$

$t=2$에서 $t=8$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_2^8 |v(t)|dt=\int_2^4 v(t)dt+\int_4^8 \{-v(t)\}dt$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times4\times2$$
$$=2+4=6$$

$\therefore\ \beta=6$

$\therefore\ \alpha+\beta=-2+6=4$

답 ⑤

19 ㄱ. $t=2$일 때, 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v(t)dt=\frac{1}{2}\times2\times1=1\ (\text{참})$$

ㄴ. $t=6$일 때, 점 P의 위치는

$$0+\int_0^6 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^6 v(t)dt$$
$$=1-\frac{1}{2}\times4\times2$$
$$=1-4=-3$$

$t=10$일 때, 점 P의 위치는

$$0+\int_0^{10} v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^6 v(t)dt+\int_6^{10} v(t)dt$$
$$=1-4+\frac{1}{2}\times4\times2$$
$$=1-4+4=1$$

따라서 $t=6$일 때, 점 P는 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다. (참)

ㄷ. $0<t<2$에서 $v(t)>0$, $2<t<6$에서 $v(t)<0$, $6<t<10$에서 $v(t)>0$이고 $t=2$, $t=6$, $t=10$일 때의 점 P의 위치가 각각 1, -3, 1이므로 점 P는 출발 후 원점을 2번 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

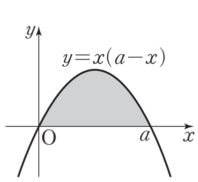
답 ⑤

기출 Best | 2회

p.124~127

01 곡선 $y=x(a-x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x(a-x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=a$



곡선 $y=x(a-x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^a x(a-x)dx=\int_0^a (-x^2+ax)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a$$
$$=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}$$
$$=\frac{a^3}{6}$$

따라서 $\dfrac{a^3}{6}=36$이므로

$a^3=216 \qquad \therefore\ a=6\ (\because\ a>0)$

답 ⑤

다른풀이 곡선 $y=x(a-x)$, 즉 $y=-x(x-a)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

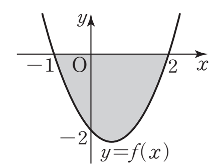
$$\frac{|-1|\times(a-0)^3}{6}=\frac{a^3}{6}$$

02 $xf(x)=\int_0^x tf'(t)dt+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=xf'(x)+x^2-x-2$

$\therefore\ f(x)=x^2-x-2$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-x-2=0$에서



$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^2 \{-f(x)\}dx=\int_{-1}^2 \{-(x^2-x-2)\}dx$$
$$=\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$$
$$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{2}$$

답 ①

03 $f(x)=(x-a)(x-b)\ (a<b)$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_a^b |f(x)|dx=-\int_a^b f(x)dx$$

이때 $\int_0^a f(x)dx=\frac{7}{6}$, $\int_0^b f(x)dx=-\frac{10}{3}$이므로

$$\int_a^b |f(x)|dx=-\int_a^b f(x)dx$$
$$=-\left\{\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx\right\}$$
$$=-\left(-\frac{10}{3}-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{2}$$

답 ④

04 주어진 그래프에서 $f(-2)=f(2)=0$이므로

$f(x)=a(x+2)(x-2)\ (a<0)$

라 하자. 이때 그래프에서 $f(0)=4$이므로

$a\times2\times(-2)=4 \qquad \therefore\ a=-1$

$\therefore\ f(x)=-(x+2)(x-2)=-x^2+4$

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+4=3x$에서

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

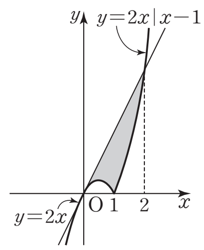
$$\int_0^1 3x\,dx+\int_1^2 (-x^2+4)dx=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2$$
$$=\frac{3}{2}+\left(\frac{16}{3}-\frac{11}{3}\right)=\frac{19}{6}$$

답 ④

05 $x-1=0$에서 $x=1$

$\therefore y=2x|x-1|=\begin{cases} 2x^2-2x & (x\ge1) \\ -2x^2+2x & (x\le1) \end{cases}$

$y=2x|x-1|$의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는



(ⅰ) $x\ge1$일 때

$2x^2-2x=2x$에서 $2x^2-4x=0$

$2x(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x\ge1$)

(ⅱ) $x\le1$일 때

$-2x^2+2x=2x$에서 $-2x^2=0$

$\therefore x=0$ ($\because x\le1$)

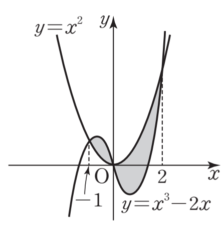
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 넓이는

$\int_0^1\{2x-(-2x^2+2x)\}dx+\int_1^2\{2x-(2x^2-2x)\}dx$

$=\int_0^1 2x^2dx+\int_1^2(-2x^2+4x)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_1^2=\frac{2}{3}+\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\right)=2$ 답 ②

06 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서



$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^2|(x^3-2x)-x^2|dx$

$=\int_{-1}^0\{(x^3-2x)-x^2\}dx+\int_0^2\{x^2-(x^3-2x)\}dx$

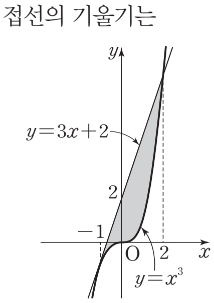
$=\int_{-1}^0(x^3-x^2-2x)dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$

$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$ 답 ④

07 $f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$이므로 접선의 방정식은



$y-(-1)=3\{x-(-1)\}$

$\therefore y=3x+2$

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는 $x^3=3x+2$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^2\{(3x+2)-x^3\}dx=\int_{-1}^2(-x^3+3x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$

$=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}$ 답 ①

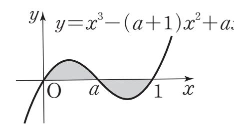
08 곡선 $y=x^3-(a+1)x^2+ax$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-(a+1)x^2+ax=0$에서

$x(x-a)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=1$

오른쪽 그림에서 곡선 $y=x^3-(a+1)x^2+ax$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로



$\int_0^1\{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx=0$

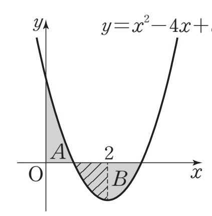
$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=0$

$\frac{1}{4}-\frac{a+1}{3}+\frac{a}{2}=0$, $\frac{a}{6}=\frac{1}{12}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 답 ③

09 $y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$

이므로 곡선 $y=x^2-4x+a$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B$이다.



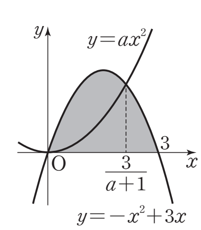
이때 $A:B=1:2$에서 $A=\frac{1}{2}B$이므로 곡선 $y=x^2-4x+a$와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같다.

즉 $\int_0^2(x^2-4x+a)dx=0$이므로

$\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax\right]_0^2=0$, $\frac{8}{3}-8+2a=0$

$2a=\frac{16}{3}$ $\therefore a=\frac{8}{3}$ 답 ③

10 두 곡선 $y=-x^2+3x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=ax^2$에서



$(a+1)x^2-3x=0$

$(a+1)x\left(x-\frac{3}{a+1}\right)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{3}{a+1}$

두 곡선 $y=-x^2+3x$, $y=ax^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^{\frac{3}{a+1}}\{(-x^2+3x)-ax^2\}dx$

$=\int_0^{\frac{3}{a+1}}\{-(a+1)x^2+3x\}dx$

$$=\left[-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{3}{a+1}}$$

$$=-\frac{9}{(a+1)^2}+\frac{27}{2(a+1)^2}=\frac{9}{2(a+1)^2}$$

또 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+3x=0$에서 $-x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=ax^2$에 의하여 이등분되므로

$$\frac{9}{2(a+1)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2},\ (a+1)^2=2$$

$\therefore a=\sqrt{2}-1\ (\because a>0)$

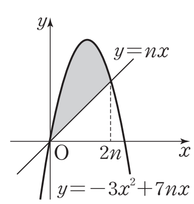
답 ①

11 $-3x^2+7nx=nx$에서

$-3x^2+6nx=0,\ -3x(x-2n)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2n$

곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 하면



$$S_n=\int_0^{2n}\{(-3x^2+7nx)-nx\}dx$$

$$=\int_0^{2n}(-3x^2+6nx)dx$$

$$=\left[-x^3+3nx^2\right]_0^{2n}$$

$$=-8n^3+12n^3=4n^3$$

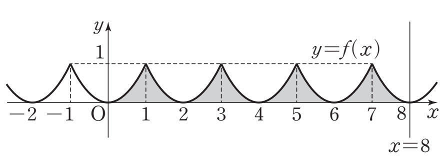
즉 $S_n\geq 200$에서

$4n^3\geq 200\qquad \therefore n^3\geq 50$

이때 $3^3=27,\ 4^3=64$이므로 자연수 n의 최솟값은 4이다.

답 ③

12



조건 (가), (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$\int_0^8|f(x)|dx=\int_0^8 f(x)dx=8\int_0^1 f(x)dx$$

$$=8\int_0^1 x^2dx=8\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

답 ③

다른풀이 조건 (나)에 의하여

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx=\int_4^6 f(x)dx=\int_6^8 f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 x^2dx\ (\because \text{조건 (가)})$$

$$=2\int_0^1 x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

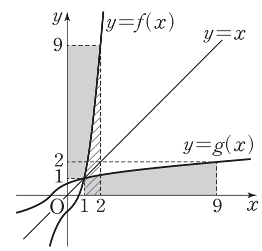
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^8|f(x)|dx=\int_0^8 f(x)dx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx+\int_6^8 f(x)dx$$

$$=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

13 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

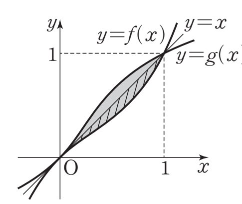


이때 $f(1)=1,\ f(2)=9$이고, 오른쪽 그림에서 어두운 두 부분의 넓이는 같으므로

$$\underbrace{\int_1^2 f(x)dx}_{\text{빗금 친 부분의 넓이}}+\underbrace{\int_1^9 g(x)dx}_{\text{어두운 부분 중 한 부분의 넓이}}=2\times 9-1\times 1=17$$

답 ②

14 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$의 교점의 x좌표이다.



$x^3-x^2+x=x$에서

$x^3-x^2=0,\ x^2(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

빗금 친 부분의 넓이

$$2\int_0^1\{x-(x^3-x^2+x)\}dx=2\int_0^1(-x^3+x^2)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

답 ①

15 $f(x)=3x^2+2x+1$이라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

$$S(h)=\int_{3-h}^{3+2h}f(x)dx\ (h>0)$$

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{S(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{3-h}^{3+2h}f(x)dx$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{F(3+2h)-F(3-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{F(3+2h)-F(3)-\{F(3-h)-F(3)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{F(3+2h)-F(3)}{2h}\times 2-\frac{F(3-h)-F(3)}{-h}\times(-1)\right\}$$

$=2F'(3)-\{-F'(3)\}=3F'(3)$

$=3f(3)=3\times(27+6+1)=102$ 답 ⑤

16 $t=2$에서 점 P의 위치가 $\frac{2}{3}$이므로

$0+\int_0^2 (t^2-5t+a)dt=\frac{2}{3}$

$\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+at\right]_0^2=\frac{2}{3}$

$\frac{8}{3}-10+2a=\frac{2}{3}$, $2a=8$

$\therefore a=4$

따라서 $t=2$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_2^6 (t^2-5t+4)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_2^6$

$=6-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$ 답 ③

17 $v(t)=0$에서 $-10t+50=0$ $\therefore t=5$

$0<t<5$일 때 $v(t)>0$, $5<t<10$일 때 $v(t)<0$이므로 구하는 거리는

$\int_0^{10} |v(t)|dt=\int_0^5 v(t)dt+\int_5^{10} \{-v(t)\}dt$

$=\int_0^5 (-10t+50)dt+\int_5^{10} (10t-50)dt$

$=\left[-5t^2+50t\right]_0^5+\left[5t^2-50t\right]_5^{10}$

$=125+125=250\ (\mathrm{m})$ 답 ④

18 $t=6$에서 점 P의 위치는

$0+\int_0^6 v(t)dt=\int_0^5 v(t)dt+\int_5^6 v(t)dt$

$=-\frac{1}{2}\times(5+2)\times2+\frac{1}{2}\times1\times2=-6$

$\therefore a=-6$

$t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^6 |v(t)|dt=\int_0^5 \{-v(t)\}dt+\int_5^6 v(t)dt$

$=\frac{1}{2}\times(5+2)\times2+\frac{1}{2}\times1\times2=8$

$\therefore b=8$

$\therefore ab=-6\times8=-48$ 답 ⑤

19 ㄱ. $v(t)$의 부호는 $t=4$일 때 음에서 양으로 바뀌고, $t=12$일 때 양에서 음으로 바뀐다.

따라서 점 P는 $t=4$, $t=12$에서 운동 방향을 바꾼다. (참)

ㄴ. $t=10$에서 점 P의 위치는

$0+\int_0^{10} v(t)dt=\int_0^4 v(t)dt+\int_4^{10} v(t)dt$

$=-\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times(4+6)\times2$

$=-8+10=2$

즉 $t=10$에서 점 P의 위치는 2이다. (거짓)

ㄷ. $\int_0^{12} v(t)dt=\int_0^4 v(t)dt+\int_4^{12} v(t)dt$

$=-\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times(4+8)\times2$

$=-8+12=4$

$\int_0^{12} |v(t)|dt=\int_0^4 \{-v(t)\}dt+\int_4^{12} v(t)dt$

$=\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times(4+8)\times2$

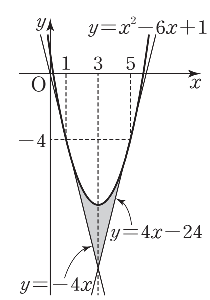
$=8+12=20$

$\therefore 5\int_0^{12} v(t)dt=\int_0^{12} |v(t)|dt$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

변형유형 집중공략 p.128~129

1-1 $f(x)=x^2-6x+1$이라 하면



$f'(x)=2x-6$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(-4)=-4(x-1)$

$\therefore y=-4x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(5, -4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(5)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-(-4)=4(x-5)$

$\therefore y=4x-24$

두 직선 $y=-4x$, $y=4x-24$의 교점의 x좌표는

$-4x=4x-24$에서

$8x=24$ $\therefore x=3$

두 직선 $y=-4x$, $y=4x-24$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\int_1^3 \{(x^2-6x+1)-(-4x)\}dx$

$=2\int_1^3 (x^2-2x+1)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^3$

$=2\times\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$ 답 ①

1-2 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$이라 하면 $f'(x)=x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ $(t>0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=t$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t)$ $\therefore y=tx-\frac{1}{2}t^2$ …… ㉠

이 직선이 곡선 $y=-(x-a)^2$과 접하므로 이차방정식

$tx-\frac{1}{2}t^2=-(x-a)^2$, 즉 $x^2+(t-2a)x+a^2-\frac{1}{2}t^2=0$이 중근을 갖는다. 따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(t-2a)^2-4\left(a^2-\frac{1}{2}t^2\right)=0$

$3t^2-4at=0,\ t(3t-4a)=0$

$\therefore t=\frac{4}{3}a\ (\because t>0)$

㉠에서 직선 l의 방정식은

$y=\frac{4}{3}ax-\frac{8}{9}a^2$

직선 l과 x축의 교점의 x좌표는 $\frac{4}{3}ax-\frac{8}{9}a^2=0$에서

$x=\frac{2}{3}a$

따라서 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 x축 및 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^{\frac{2}{3}a}\frac{1}{2}x^2dx+\int_{\frac{2}{3}a}^{\frac{4}{3}a}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\frac{4}{3}ax-\frac{8}{9}a^2\right)\right\}dx$

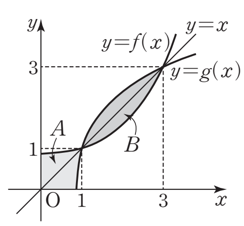
$=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{2}{3}a}+\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{2}{3}ax^2+\frac{8}{9}a^2x\right]_{\frac{2}{3}a}^{\frac{4}{3}a}$

$=\frac{4}{81}a^3+\frac{4}{81}a^3=\frac{8}{81}a^3$

즉 $\frac{8}{81}a^3=\frac{8}{3}$이므로 $a^3=27$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 3

2-1 오른쪽 그림에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(1, 1)$, $(3, 3)$을 지난다.



즉 $f(1)=1$, $f(3)=3$이므로

$a+b=1$, $27a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{13}$, $b=\frac{12}{13}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{13}x^3+\frac{12}{13}$이므로

$A=2\int_0^1\{f(x)-x\}dx$

$=2\int_0^1\left\{\left(\frac{1}{13}x^3+\frac{12}{13}\right)-x\right\}dx$

$=2\int_0^1\left(\frac{1}{13}x^3-x+\frac{12}{13}\right)dx$

$=2\left[\frac{1}{52}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{12}{13}x\right]_0^1$

$=2\times\frac{23}{52}=\frac{23}{26}$

$B=2\int_1^3\{x-f(x)\}dx$

$=2\int_1^3\left\{x-\left(\frac{1}{13}x^3+\frac{12}{13}\right)\right\}dx$

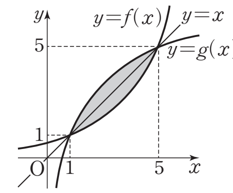
$=2\int_1^3\left(-\frac{1}{13}x^3+x-\frac{12}{13}\right)dx$

$=2\left[-\frac{1}{52}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{12}{13}x\right]_1^3$

$=2\times\frac{8}{13}=\frac{16}{13}$

$\therefore 2A+B=2\times\frac{23}{26}+\frac{16}{13}=3$ 답 3

2-2 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



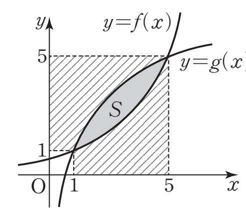
따라서 구하는 넓이는

$2\int_1^5\{x-f(x)\}dx=2\left\{\int_1^5 x\,dx-\int_1^5 f(x)dx\right\}$

$=2\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5-9\right)$

$=2\times(12-9)=6$ 답 6

다른풀이 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$2\int_1^5 f(x)dx+S+(1\times1)=5\times5$

$2\times9+S+1=25$

$\therefore S=6$

서술형 What & How

p.130~131

1 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

$$S(t)=\begin{cases}\int_1^t f(x)dx & (t>1)\\ 0 & (t=1)\\ \int_t^1 f(x)dx & (t<1)\end{cases}\quad\cdots\cdots ❶$$

또 연속함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$F'(x)=f(x)$이므로

$\lim_{t\to1+}\frac{S(t)-S(1)}{t-1}=\lim_{t\to1+}\frac{\int_1^t f(x)dx-0}{t-1}$

$=\lim_{t\to1+}\frac{\left[F(x)\right]_1^t}{t-1}=\lim_{t\to1+}\frac{F(t)-F(1)}{t-1}$

$=F'(1)=f(1)=1$ …… ❷

$\lim_{t\to1-}\frac{S(t)-S(1)}{t-1}=\lim_{t\to1-}\frac{\int_t^1 f(x)dx-0}{t-1}$

$=\lim_{t\to1-}\frac{\left[F(x)\right]_t^1}{t-1}=\lim_{t\to1-}\frac{F(1)-F(t)}{t-1}$

$=-\lim_{t\to1-}\frac{F(t)-F(1)}{t-1}$

$=-F'(1)=-f(1)=-1$ …… ❸

$\therefore \lim_{t\to1+}\frac{S(t)-S(1)}{t-1}-\lim_{t\to1-}\frac{S(t)-S(1)}{t-1}$

$=1-(-1)=2$ …… ❹

답 2

참고 $\lim_{t\to1+}\frac{S(t)-S(1)}{t-1}\neq\lim_{t\to1-}\frac{S(t)-S(1)}{t-1}$이므로 함수 $S(t)$는 $t=1$에서 미분가능하지 않다.

2 $f(x)=x^2-4x+6$이라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=(x-2)^2+2>0$이므로

$$S(h)=\begin{cases}\int_{2-2h}^{2+2h}f(x)dx & (h>0)\\ 0 & (h=0)\\ \int_{2+2h}^{2-2h}f(x)dx & (h<0)\end{cases}\quad\cdots\cdots ❶$$

또 연속함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{S(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{\int_{2-2h}^{2+2h}f(x)dx}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{\Big[F(x)\Big]_{2-2h}^{2+2h}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{F(2+2h)-F(2-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{F(2+2h)-F(2)-\{F(2-2h)-F(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{F(2+2h)-F(2)}{2h}\times2-\frac{F(2-2h)-F(2)}{-2h}\times(-2)\right\}$$
$$=2F'(2)-\{-2F'(2)\}$$
$$=4F'(2)=4f(2)$$
$$=4\times2=8\quad\cdots\cdots ❷$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{S(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{\int_{2+2h}^{2-2h}f(x)dx}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{\Big[F(x)\Big]_{2+2h}^{2-2h}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{F(2-2h)-F(2+2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{F(2-2h)-F(2)-\{F(2+2h)-F(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\left\{\frac{F(2-2h)-F(2)}{-2h}\times(-2)-\frac{F(2+2h)-F(2)}{2h}\times2\right\}$$
$$=-2F'(2)-2F'(2)$$
$$=-4F'(2)=-4f(2)$$
$$=-4\times2=-8\quad\cdots\cdots ❸$$

$$\therefore \lim_{h\to0+}\frac{S(h)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{S(h)}{h}=8\times(-8)=-64\quad\cdots\cdots ❹$$

답 -64

채점기준	배점
❶ 함수 $S(h)$를 정적분을 이용하여 나타내기	1
❷ $\lim_{h\to0+}\frac{S(h)}{h}$의 값 구하기	2
❸ $\lim_{h\to0-}\frac{S(h)}{h}$의 값 구하기	2
❹ 주어진 식의 값 구하기	1

참고 $\lim_{h\to0+}\frac{S(h)}{h}\neq\lim_{h\to0-}\frac{S(h)}{h}$, 즉 $\lim_{h\to0+}\frac{S(0+h)-S(0)}{h}\neq\lim_{h\to0-}\frac{S(0+h)-S(0)}{h}$이므로 함수 $S(h)$는 $h=0$에서 미분가능하지 않다.

3 $t=10$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^{10}v_P(t)dt=\int_0^2 2t\,dt+\int_2^{10}\left(-\frac{1}{2}t+5\right)dt$$
$$=\Big[t^2\Big]_0^2+\Big[-\frac{1}{4}t^2+5t\Big]_2^{10}$$
$$=4+16$$
$$=20\quad\cdots\cdots ❶$$

$t=10$에서 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^{10}v_Q(t)dt=\int_0^{10}\left(-\frac{27}{50}t^2+at\right)dt$$
$$=\Big[-\frac{9}{50}t^3+\frac{a}{2}t^2\Big]_0^{10}$$
$$=50a-180\quad\cdots\cdots ❷$$

$t=10$에서 두 점 P, Q가 만나므로

$20=50a-180$, $50a=200$ $\quad\therefore a=4\quad\cdots\cdots ❸$

답 4

4 $t=10$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^{10}v_P(t)dt=\int_0^4 t\,dt+\int_4^{10}(-2t+12)dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^4+\Big[-t^2+12t\Big]_4^{10}$$
$$=8+(-12)$$
$$=-4\quad\cdots\cdots ❶$$

$t=10$에서 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^{10}v_Q(t)dt=\int_0^{10}\left(-\frac{3}{25}t^2+at\right)dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{25}t^3+\frac{a}{2}t^2\Big]_0^{10}$$
$$=50a-40\quad\cdots\cdots ❷$$

$t=10$에서 두 점 P, Q가 만나므로

$-4=50a-40$, $50a=36$ $\quad\therefore a=\frac{18}{25}$

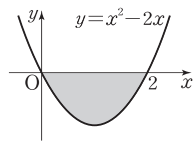
$\therefore 100a=100\times\frac{18}{25}=72\quad\cdots\cdots ❸$

답 72

채점기준	배점
❶ $t=10$에서 점 P의 위치 구하기	2
❷ $t=10$에서 점 Q의 위치 구하기	2
❸ $100a$의 값 구하기	2

실전 문제 | 1회 p.132~135

01 곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=0$에서

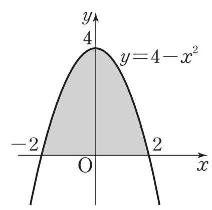


$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$$\therefore S_1=\int_0^2\{-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_0^2(-x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

곡선 $y=4-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는



$4-x^2=0$에서

$(2+x)(2-x)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

$$\therefore S_2=\int_{-2}^2(4-x^2)dx$$
$$=2\int_0^2(4-x^2)dx$$
$$=2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{32}{3}$$

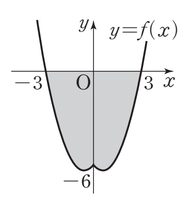
$$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{32}{3}}{\frac{4}{3}}=8$$

답 ④

02 $f(x)=x^2-|x|-6$이라 하면

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x-6 & (x\geq 0)\\ x^2+x-6 & (x\leq 0)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는



(i) $x\geq 0$일 때

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x\geq 0$)

(ii) $x\leq 0$일 때

$x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ ($\because x<0$)

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^3|f(x)|dx=2\int_0^3|f(x)|dx$$
$$=2\int_0^3\{-f(x)\}dx$$
$$=2\int_0^3\{-(x^2-x-6)\}dx$$
$$=2\int_0^3(-x^2+x+6)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_0^3$$
$$=2\times\frac{27}{2}=27$$

답 ④

03 임의의 실수 a에 대하여 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$이므로 삼차함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+kx$ (k는 상수)라 하면 $f'(x)=3x^2+k$

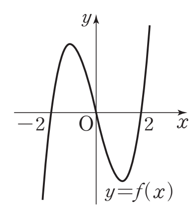
이때 $f'(0)=-4$이므로 $k=-4$

$\therefore f(x)=x^3-4x$

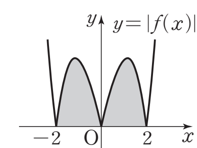
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-4x=0$에서 $x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1], $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^2|f(x)|dx=2\int_0^2|f(x)|dx$$
$$=2\int_0^2\{-f(x)\}dx$$
$$=2\int_0^2(-x^3+4x)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2$$
$$=2\times 4=8$$

답 ①

04 $\int_{-4}^3\{f(x)-x\}dx$

$$=\int_{-4}^3 f(x)dx-\int_{-4}^3 xdx$$
$$=\int_{-4}^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^3$$
$$=-A+B-\left(-\frac{7}{2}\right)$$
$$=-A+B+\frac{7}{2}$$

답 ③

05 $\int_0^6 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx$

이때 $\int_0^3 f(x)dx$는 x축, y축 및 두 직선 $x=3$, $y=7$로 둘러싸인 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=3$, $y=7$로 둘러싸인 도형의 넓이 3을 뺀 값과 같으므로

$$\int_0^3 f(x)dx=3\times 7-3=18$$

$\int_3^6 f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=3$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로

$\int_3^6 f(x)dx=8$

$\therefore \int_0^6 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx$

$=18+8=26$

답 ④

06 세 도형 A, B, C의 넓이가 각각 10, 8, 6이고

닫힌구간 $[-5, 0]$에서 $f(x)-g(x)\le 0$,

닫힌구간 $[0, 5]$에서 $f(x)-g(x)\ge 0$,

닫힌구간 $[5, 7]$에서 $f(x)-g(x)\le 0$이므로

$S_1=\left|\int_{-5}^7 \{f(x)-g(x)\}dx\right|$

$=\left|\int_{-5}^0 \{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^5 \{f(x)-g(x)\}dx+\int_5^7 \{f(x)-g(x)\}dx\right|$

$=|-10+8-6|=8$

$S_2=\int_{-5}^7 |f(x)-g(x)|dx$

$=\int_{-5}^0 |f(x)-g(x)|dx+\int_0^5 |f(x)-g(x)|dx+\int_5^7 |f(x)-g(x)|dx$

$=10+8+6=24$

$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{24}{8}=3$

답 ⑤

07 두 곡선 $y=x^2$, $y=-3x^2+ax-36$이 접하려면 이차방정식 $x^2=-3x^2+ax-36$, 즉 $4x^2-ax+36=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4\times4\times36=0$, $a^2=576$

$\therefore a=24$ ($\because a>0$)

곡선 $y=-3x^2+24x-36$과 x축의 교점의 x좌표는

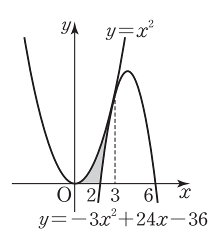
$-3x^2+24x-36=0$에서

$x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=6$

두 곡선 $y=x^2$, $y=-3x^2+24x-36$의 교점의 x좌표는



$x^2=-3x^2+24x-36$에서

$4x^2-24x+36=0$

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0 \qquad \therefore x=3$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^3 x^2dx-\int_2^3 (-3x^2+24x-36)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3-\left[-x^3+12x^2-36x\right]_2^3$

$=9-5=4$

답 ③

08 두 곡선 $y=-x^2(x-2)$, $y=ax(x-2)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^2 \{-x^2(x-2)-ax(x-2)\}dx=0$

$\int_0^2 \{-x^3+(2-a)x^2+2ax\}dx=0$

$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2-a}{3}x^3+ax^2\right]_0^2=0$

$\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}=0$, $\frac{4}{3}a=-\frac{4}{3}$

$\therefore a=-1$

답 ③

09 함수 $y=3-|x|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=\int_{-x}^x (3-|t|)dt=2\int_0^x (3-|t|)dt$

(i) $x\ge0$일 때

$f(x)=2\int_0^x (3-t)dt=2\left[3t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x$

$=2\left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)$

$=-x^2+6x$

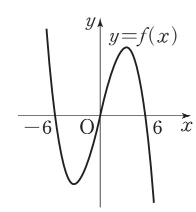
(ii) $x\le0$일 때

$f(x)=2\int_0^x (3+t)dt=2\left[3t+\frac{1}{2}t^2\right]_0^x$

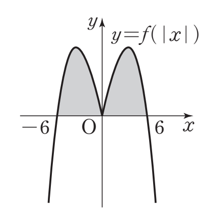
$=2\left(3x+\frac{1}{2}x^2\right)$

$=x^2+6x$

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1], 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$y=f(|x|)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\int_0^6 (-x^2+6x)dx=2\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6$

$=2\times36$

$=72$

답 ④

10 $f(x)=x^3-3x^2+\int_0^2 f(t)dt$에서 $\int_0^2 f(t)dt=k$라 하면

$f(x)=x^3-3x^2+k$

이것을 $\int_0^2 f(t)dt=k$에 대입하면

$\int_0^2 (t^3-3t^2+k)dt=k$, $\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+kt\right]_0^2=k$

$2k-4=k \qquad \therefore k=4$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+4$

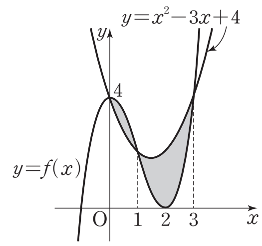
두 곡선 $y=f(x)$, $y=x^2-3x+4$ 의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+4=x^2-3x+4$에서

$x^3-4x^2+3x=0$

$x(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{(x^3-3x^2+4)-(x^2-3x+4)\}dx$$

$$+\int_1^3 \{(x^2-3x+4)-(x^3-3x^2+4)\}dx$$

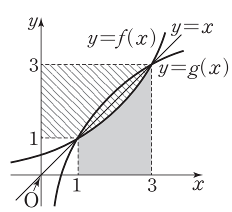
$$=\int_0^1 (x^3-4x^2+3x)dx+\int_1^3 (-x^3+4x^2-3x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 ⑤

11 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서 $\int_1^3 f(x)dx$는 어두운 부분의 넓이와 같고 $\int_1^3 g(x)dx$는 빗금 친 부분의 넓이와 같으므로

$$\int_1^3 g(x)dx+\int_1^3 f(x)dx+1\times1=3\times3$$

$$\int_1^3 g(x)dx+\frac{10}{3}+1=9$$

$$\therefore \int_1^3 g(x)dx=\frac{14}{3}$$

답 ④

12 $t=10$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^{10} v(t)dt$$

$$=\int_0^3 \frac{2}{3}t\,dt+\int_3^6 2dt+\int_6^{10}\left(-\frac{1}{2}t+5\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^2\right]_0^3+\left[2t\right]_3^6+\left[-\frac{1}{4}t^2+5t\right]_6^{10}$$

$$=3+6+4$$

$$=13$$

답 ④

13 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_{\mathrm{P}}(t)$, $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$$x_{\mathrm{P}}(t)=7+\int_0^t (3s^2-2)ds$$

$$=7+\left[s^3-2s\right]_0^t$$

$$=t^3-2t+7$$

$$x_{\mathrm{Q}}(t)=k+\int_0^t 1ds=k+\left[s\right]_0^t=t+k$$

$x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)$에서

$t^3-2t+7=t+k$

$\therefore t^3-3t+7=k$ ...... ㉠

두 점 P, Q가 두 번 만나려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^3-3t+7$이라 하면

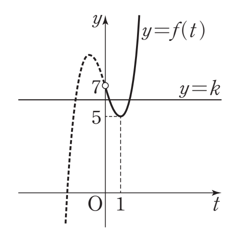
$f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t>0$)

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	5	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(t)$ $(t>0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $f(t)=k$가 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 $y=f(t)$ $(t>0)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$5<k<7$

$\therefore k=6$ ($\because k$는 정수)

답 ③

14 모형 자동차가 출발한 후 a초 동안 달린 거리가 6 m라 하면

$$\int_0^a |v(t)|dt=\int_0^a \left|\frac{3}{2}t^2+t\right|dt$$

$$=\int_0^a \left(\frac{3}{2}t^2+t\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}a^2=6$$

즉 $a^3+a^2=12$이므로

$a^3+a^2-12=0$

$(a-2)(a^2+3a+6)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a^2+3a+6>0$)

즉 모형 자동차가 6 m를 달리는 데 2초가 걸리고, 이때 모형 자동차의 속도는

$$v(2)=\frac{3}{2}\times4+2=8$$

또 $v(t)$가 연속함수이므로

$$v(t)=\begin{cases}\frac{3}{2}t^2+t & (0\le t<2)\\ 8 & (t\ge2)\end{cases}$$

따라서 모형 자동차가 출발한 후 4초 동안 달린 거리는

$$\int_0^4 |v(t)|dt=\int_0^2 \left(\frac{3}{2}t^2+t\right)dt+\int_2^4 8dt$$

$$=6+\left[8t\right]_2^4$$

$$=6+16=22\ (\mathrm{m})$$

답 ②

15 ㄱ. $0<t<3$에서 $v(t)>0$, $3<t<6$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 $t=3$에서만 운동 방향을 바꾼다. (거짓)

ㄴ. $t=3$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)dt=\frac{1}{2}\times(1+3)\times1=2 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $t=1$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^1 v(t)dt=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

$t=5$에서 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}0+\int_0^5 v(t)dt&=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^5 v(t)dt\\&=2-\frac{1}{2}\times(2+1)\times1\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 점 P는 $t=1$과 $t=5$일 때 같은 위치에 있다. (참)

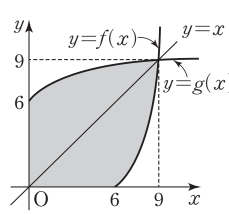
ㄹ. $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_1^4 |v(t)|dt&=\int_1^3 v(t)dt+\int_3^4 \{-v(t)\}dt\\&=\frac{1}{2}\times(1+2)\times1+\frac{1}{2}\times1\times1\\&=2 \text{ (참)}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

16 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표이다.



$(x-6)^2=x$에서

$x^2-13x+36=0$, $(x-4)(x-9)=0$

$\therefore x=9$ $(\because x\geq6)$

구하는 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로

$$\begin{aligned}&2\left\{\int_0^9 x\,dx-\int_6^9 f(x)dx\right\}\\&=2\times\left\{\frac{1}{2}\times9\times9-\int_6^9(x-6)^2dx\right\}\\&=81-2\int_6^9(x^2-12x+36)dx\\&=81-2\left[\frac{1}{3}x^3-6x^2+36x\right]_6^9\\&=81-2\times9=63\end{aligned}$$

답 ③

17 12분 후 열기구의 지면으로부터의 높이는

$$\begin{aligned}0+\int_0^{12} v(t)dt&=\int_0^{10} t\,dt+\int_{10}^{12}(30-2t)dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{10}+\left[30t-t^2\right]_{10}^{12}\\&=50+16=66\ (\text{m})\end{aligned}$$

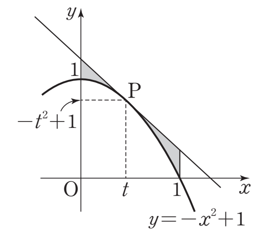
답 ⑤

18 $f(x)=-x^2+1$이라 하면

$f'(x)=-2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점

P$(t,\ -t^2+1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이므로 접선의 방정식은



$y-(-t^2+1)=-2t(x-t)$

$\therefore y=-2tx+t^2+1$ …… ❶

$$\begin{aligned}\therefore S(t)&=\int_0^1\{(-2tx+t^2+1)-(-x^2+1)\}dx\\&=\int_0^1(x^2-2tx+t^2)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^1\\&=t^2-t+\frac{1}{3}\\&=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\ (0<t<1)\end{aligned}$$ …… ❷

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{1}{12}$을 가지므로 …… ❸

$p=12$, $q=1$

$\therefore p+q=12+1=13$ …… ❹

답 13

채점기준	배점
❶ 접선의 방정식 구하기	1
❷ $S(t)$ 구하기	2
❸ $S(t)$의 최솟값 구하기	1
❹ $p+q$의 값 구하기	1

19 두 점 P, Q가 시각 $t=a$에서 다시 만나므로 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$x_P(a)=x_Q(a)$

이때

$$\begin{aligned}x_P(a)&=0+\int_0^a v_P(t)dt=\int_0^a(3t^2+4t+3)dt\\&=\left[t^3+2t^2+3t\right]_0^a\\&=a^3+2a^2+3a,\end{aligned}$$ …… ❶

$$\begin{aligned}x_Q(a)&=0+\int_0^a v_Q(t)dt=\int_0^a(-2t+7)dt\\&=\left[-t^2+7t\right]_0^a\\&=-a^2+7a\end{aligned}$$ …… ❷

이므로

$a^3+2a^2+3a=-a^2+7a$

$a^3+3a^2-4a=0$, $a(a+4)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ $(\because a>0)$ …… ❸

답 1

채점기준	배점
❶ $t=a$에서 점 P의 위치 구하기	2
❷ $t=a$에서 점 Q의 위치 구하기	2
❸ a의 값 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.136~139

01 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to -\infty$이므로 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다. 또 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=0$에서 x축과 만나고 $x=3$에서 x축에 접하므로

$f(x)=ax(x-3)^2 \ (a<0)$

이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3 |f(x)|dx=\int_0^3 \{-f(x)\}dx=\int_0^3 \{-ax(x-3)^2\}dx$$
$$=\int_0^3 (-ax^3+6ax^2-9ax)dx$$
$$=\left[-\frac{a}{4}x^4+2ax^3-\frac{9a}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=-\frac{27}{4}a$$

즉 $-\frac{27}{4}a=\frac{81}{8}$이므로 $a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x(x-3)^2$이므로

$f(1)=-\frac{3}{2}\times 1\times 4=-6$ 답 ①

02 $f(x)=x^4-4x^3+5x^2+ax$라 하면

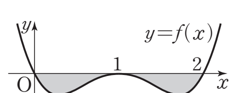
$f'(x)=4x^3-12x^2+10x+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$이므로 $f'(-1)=-28$에서

$-4-12-10+a=-28 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore f(x)=x^4-4x^3+5x^2-2x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^4-4x^3+5x^2-2x=0$에서



$x(x-2)(x-1)^2=0$

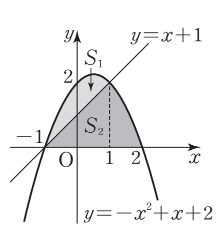
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 |f(x)|dx=\int_0^2 \{-f(x)\}dx$$
$$=\int_0^2 \{-(x^4-4x^3+5x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_0^2 (-x^4+4x^3-5x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+x^4-\frac{5}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{4}{15}$$

답 ②

03 곡선 $y=-x^2+x+2$와 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는



$-x^2+x+2=x+1$에서

$x^2=1 \qquad \therefore x=\pm 1$

$\therefore S_1$

$$=\int_{-1}^1 \{(-x^2+x+2)-(x+1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^1 (-x^2+1)dx$$
$$=2\int_0^1 (-x^2+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

직선 $y=-x^2+x+2$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+x+2=0$에서

$x^2-x-2=0, \ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

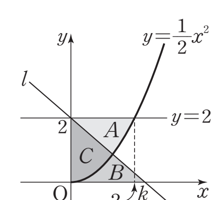
$$\therefore S_2=\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)dx-S_1$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2-\frac{4}{3}$$
$$=\frac{9}{2}-\frac{4}{3}=\frac{19}{6}$$

$\therefore S_2-S_1=\frac{19}{6}-\frac{4}{3}=\frac{11}{6}$ 답 ②

다른풀이 $S_2=\int_{-1}^1 (x+1)dx+\int_1^2 (-x^2+x+2)dx$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$$
$$=2+\frac{7}{6}=\frac{19}{6}$$

04 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2 \ (x\geq 0)$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 C라 하면



$A+C=B+C \qquad \cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2 \ (x\geq 0)$과 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{2}x^2=2$에서

$x^2=4 \qquad \therefore x=2 \ (\because x\geq 0)$

$$\therefore A+C=\int_0^2 \left(2-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$=\left[2x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

또 직선 l의 x절편을 k라 하면

$B+C=\frac{1}{2}\times k\times 2=k$

따라서 ㉠에서 $k=\frac{8}{3}$이므로 직선 l의 x절편은 $\frac{8}{3}$이다. 답 ③

05 $f(x)=x^3+ax+b, \ g(x)=ax^2+bx+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+a, \ g'(x)=2ax+b$

두 곡선 $y=f(x), \ y=g(x)$가 $x=-1$인 점에서 서로 접하므로

$f(-1)=g(-1), \ f'(-1)=g'(-1)$

$f(-1)=g(-1)$에서

$-1-a+b=a-b+1, \ 2a-2b=-2$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉠

$f'(-1)=g'(-1)$에서

$3+a=-2a+b$

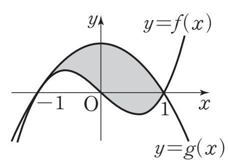
$\therefore 3a-b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=0$

$\therefore f(x)=x^3-x,\ g(x)=-x^2+1$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=-x^2+1$에서



$x^3+x^2-x-1=0$

$(x-1)(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\{(-x^2+1)-(x^3-x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^3-x^2+x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 ①

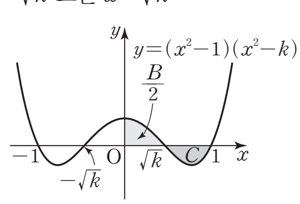
06 곡선 $y=(x^2-1)(x^2-k)$와 x축의 교점의 x좌표는

$(x^2-1)(x^2-k)=0$에서

$(x+1)(x-1)(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{k}$ 또는 $x=\sqrt{k}$

곡선 $y=(x^2-1)(x^2-k)$는 y축에 대하여 대칭이므로



$A=C$

이때 $A+C=B$이므로

$C+C=B,\ 2C=B$

$\therefore \frac{B}{2}=C$

즉 $\int_0^1(x^2-1)(x^2-k)dx=0$이므로

$$\int_0^1\{x^4+(-k-1)x^2+k\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{-k-1}{3}x^3+kx\right]_0^1=0$$

$\frac{2}{3}k-\frac{2}{15}=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{5}$

답 ②

07 $f(x)=x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

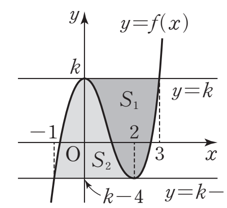
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	k	↘	$k-4$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 k, $x=2$에서 극솟값 $k-4$를 가지므로

$M=k,\ m=k-4$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 $x^3-3x^2+k=k$에서



$x^3-3x^2=0,\ x^2(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

$$\therefore S_1=\int_0^3\{k-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^3\{k-(x^3-3x^2+k)\}dx$$

$$=\int_0^3(-x^3+3x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3$$

$$=\frac{27}{4}$$

이때 $S_1=S_2$이므로

$S_1+S_2=2S_1=2\times\frac{27}{4}=\frac{27}{2}$

답 ④

다른풀이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k-4$의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+k=k-4$에서

$x^3-3x^2+4=0,\ (x+1)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$$\therefore S_2=\int_{-1}^{2}\{f(x)-(k-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\{(x^3-3x^2+k)-(k-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{27}{4}$$

08 $g(x)$는 다항함수 $t^2-f(t)$의 정적분으로 정의된 함수이므로 다항함수이다. 이때 $f(x)$가 이차함수, $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$도 이차함수이다.

따라서 $g'(x)=x^2-f(x)$는 일차함수이므로

$x^2-f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

라 하면 $f(x)=x^2-ax-b$

$$\therefore g(x)=\int_0^x\{t^2-f(t)\}dt=\int_0^x(at+b)dt$$

$$=\left[\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^x=\frac{a}{2}x^2+bx$$

따라서 $f(x)g(x)=-x^4-2x^3$에서

$$(x^2-ax-b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx\right)=-x^4-2x^3$$

이때 우변에서 x의 계수가 0이므로 좌변의 x의 계수 $-b^2$도 0이다. 즉 $b=0$이므로

$\frac{a}{2}x^2(x^2-ax)=-x^4-2x^3$

$\therefore \frac{a}{2}x^4-\frac{a^2}{2}x^3=-x^4-2x^3$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

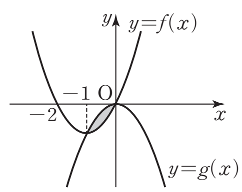
$\frac{a}{2}=-1,\ -\frac{a^2}{2}=-2 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore f(x)=x^2+2x,\ g(x)=-x^2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $x^2+2x=-x^2$에서

$2x^2+2x=0,\ 2x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$



따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{-x^2-(x^2+2x)\}dx=\int_{-1}^{0}(-2x^2-2x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$

답 ①

09 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이므로

$$\int_0^5|f(x)|dx=\int_0^5 f(x)dx$$

$$=\int_0^2 x\,dx+\int_2^4 2\,dx+\int_4^5(-2x+10)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\left[2x\right]_2^4+\left[-x^2+10x\right]_4^5$$

$$=2+4+1=7$$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+5)=f(x)$이므로

$\int_0^{15}f(x)dx=3\int_0^5 f(x)dx=3\times 7=21$

$\int_0^{20}f(x)dx=4\int_0^5 f(x)dx=4\times 7=28$

이때 $\int_0^k f(x)dx=23$이므로 $15<k<20$이고

$\int_0^k f(x)dx=\int_0^{15}f(x)dx+\int_{15}^k f(x)dx$

$23=21+\int_{15}^k f(x)dx \qquad \therefore \int_{15}^k f(x)dx=2$

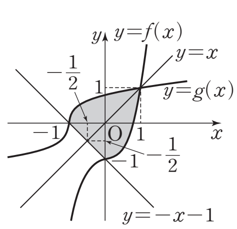
이때

$\int_{15}^{17}f(x)dx=\int_{10}^{12}f(x)dx=\int_5^7 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=2$

이므로 $k=17$

답 ③

10 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표이다.



$2x^3-1=x$에서 $2x^3-x-1=0$

$(x-1)(2x^2+2x+1)=0$

$\therefore x=1\ (\because 2x^2+2x+1>0)$

두 직선 $y=-x-1$, $y=x$의 교점의 x좌표는 $x=-x-1$에서

$2x=-1 \qquad \therefore x=-\frac{1}{2}$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=-x-1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=-x-1$, $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\left[\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}+\int_0^1\{x-f(x)\}dx\right]$$

$$=2\left[\frac{1}{4}+\int_0^1\{x-(2x^3-1)\}dx\right]$$

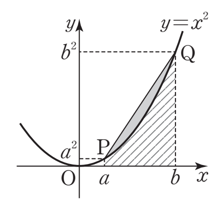
$$=2\left\{\frac{1}{4}+\int_0^1(-2x^3+x+1)dx\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{4}+\left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{5}{2}$$

답 ③

11 곡선 $y=x^2$과 선분 PQ로 둘러싸인 도형의 넓이는 오른쪽 그림의 사다리꼴의 넓이에서 빗금 친 부분의 넓이를 뺀 것과 같으므로



$$\frac{1}{2}\times(a^2+b^2)\times(b-a)-\int_a^b x^2dx$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)(a^2+b^2)-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)(a^2+b^2)-\left(\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{3}a^3\right)$$

$$=\frac{1}{6}(b^3-3ab^2+3a^2b-a^3)=\frac{(b-a)^3}{6}$$

즉 $\frac{(b-a)^3}{6}=36$이므로 $(b-a)^3=216$

$\therefore b-a=6\ (\because b>a)$

이때

$$\overline{PQ}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}$$

$$=\sqrt{(b-a)^2+(b-a)^2(b+a)^2}$$

$$=\sqrt{(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}}$$

$$=6\sqrt{1+(b+a)^2}$$

$$=6\sqrt{1+(2a+6)^2}$$

$$=6\sqrt{4a^2+24a+37}$$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{\overline{PQ}}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{6\sqrt{4a^2+24a+37}}{a}$$

$$=\lim_{a\to\infty}6\sqrt{4+\frac{24}{a}+\frac{37}{a^2}}$$

$$=6\times 2=12$$

답 ②

12 최고 높이에 도달했을 때의 로켓의 속도는 0 m/s이므로

$v(t)=0$에서 $-10t+30=0$

$-10t=-30 \qquad \therefore t=3$

따라서 $t=3$일 때 로켓의 높이는

$$40+\int_0^3 v(t)dt=40+\int_0^3(-10t+30)dt$$
$$=40+\Big[-5t^2+30t\Big]_0^3$$
$$=40+45=85\ (\mathrm{m})$$

답 ⑤

13 이차함수 $x'(t)$에 대하여 $x'(1)=x'(3)=0$이므로

$x'(t)=a(t-1)(t-3)\ (a>0)$

이라 하자. 이때 $x'(0)=3$이므로

$a\times(-1)\times(-3)=3 \qquad \therefore a=1$

$\therefore x'(t)=(t-1)(t-3)=t^2-4t+3$

$x'(t)$는 점 P의 시각 t에서의 속도를 나타내므로 점 P가 출발한 후 3초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^3 |x'(t)|dt$$
$$=\int_0^1 x'(t)dt+\int_1^3\{-x'(t)\}dt$$
$$=\int_0^1(t^2-4t+3)dt+\int_1^3(-t^2+4t-3)dt$$
$$=\Big[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\Big]_1^3$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 ④

14 ㄱ. 점 Q가 출발한 후 $t=4$까지 움직인 거리는

$$\int_0^4|v_{\mathrm{Q}}(t)|dt=\int_0^4 4\,dt=\Big[4t\Big]_0^4=16\ (\text{참})$$

ㄴ. 점 P의 운동 방향이 바뀔 때 $v_{\mathrm{P}}(t)=0$이므로

$4t-8=0$에서 $4t=8 \qquad \therefore t=2$

$t=2$에서 점 P의 위치는

$$10+\int_0^2 v_{\mathrm{P}}(t)dt=10+\int_0^2(4t-8)dt$$
$$=10+\Big[2t^2-8t\Big]_0^2$$
$$=10+(-8)=2\ (\text{거짓})$$

ㄷ. 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_{\mathrm{P}}(t)$, $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$$x_{\mathrm{P}}(t)=10+\int_0^t v_{\mathrm{P}}(s)ds$$
$$=10+\int_0^t(4s-8)ds$$
$$=10+\Big[2s^2-8s\Big]_0^t=2t^2-8t+10$$
$$x_{\mathrm{Q}}(t)=-9+\int_0^t v_{\mathrm{Q}}(s)ds$$
$$=-9+\int_0^t 4ds$$
$$=-9+\Big[4s\Big]_0^t=4t-9$$

이때

$$x_{\mathrm{P}}(t)-x_{\mathrm{Q}}(t)=(2t^2-8t+10)-(4t-9)$$
$$=2t^2-12t+19$$
$$=2(t-3)^2+1>0$$

이므로 $|x_{\mathrm{P}}(t)-x_{\mathrm{Q}}(t)|=x_{\mathrm{P}}(t)-x_{\mathrm{Q}}(t)$의 최솟값은 $t=3$일 때 1이다.

즉 두 점 P, Q 사이의 거리는 $t=3$일 때 최소가 된다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

15 $\int_0^a|v(t)|dt=A$, $\int_a^b|v(t)|dt=B$, $\int_b^c|v(t)|dt=C$라 하면

점 P는 출발한 후 $t=a$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로

$10=0+\int_0^a v(t)dt=A \qquad \therefore A=10$

점 P의 시각 $t=c$에서의 위치가 8이므로

$8=0+\int_0^c v(t)dt=10-B+C$

$\therefore B-C=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\int_0^b v(t)dt=\int_b^c v(t)dt$이므로

$10-B=C \qquad \therefore B+C=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $B=6$, $C=4$

따라서 점 P가 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리는

$\int_a^b|v(t)|dt=B=6$

답 ④

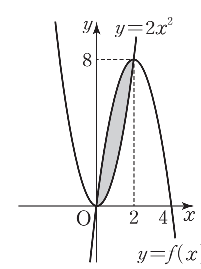
16 곡선 $y=2x^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

$y=-2x^2$

이 곡선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y=-2(x-2)^2+8$

$\therefore f(x)=-2(x-2)^2+8=-2x^2+8x$



두 곡선 $y=2x^2$, $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 $2x^2=-2x^2+8x$에서

$4x^2-8x=0$, $4x(x-2)=0$

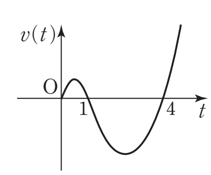
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2\{(-2x^2+8x)-2x^2\}dx$$
$$=\int_0^2(-4x^2+8x)dx$$
$$=\Big[-\frac{4}{3}x^3+4x^2\Big]_0^2$$
$$=\frac{16}{3}$$

답 ③

17 $0<t<1$에서 $v(t)>0$이므로 점 P가 처음 출발할 때의 방향과 반대 방향으로 움직이는 것은 $v(t)<0$, 즉 $1<t<4$일 때이다.



따라서 구하는 거리는

$$\int_1^4|v(t)|dt=\int_1^4\{-v(t)\}dt$$
$$=\int_1^4\{-t(t-1)(t-4)\}dt$$

$$=\int_1^4 (-t^3+5t^2-4t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{5}{3}t^3-2t^2\right]_1^4$$

$$=\frac{45}{4}$$

답 ②

18 $f(x)=x(x-a)(x-3)$, $g(x)=-x(x-b)(x-3)$이라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^3 \{f(x)-g(x)\}dx=0 \quad \cdots\cdots ❶$$

이때

$$\int_0^3 \{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^3 [x(x-a)(x-3)-\{-x(x-b)(x-3)\}]dx$$

$$=\int_0^3 \{2x^3-(a+b+6)x^2+3(a+b)x\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{a+b+6}{3}x^3+\frac{3(a+b)}{2}x^2\right]_0^3$$

$$=\frac{9}{2}(a+b)-\frac{27}{2} \quad \cdots\cdots ❷$$

이므로 $\frac{9}{2}(a+b)-\frac{27}{2}=0$, $\frac{9}{2}(a+b)=\frac{27}{2}$

$\therefore a+b=3$ ⋯⋯ ❸

답 3

채점기준	배점
❶ 두 곡선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 조건 구하기	1
❷ ❶의 조건의 정적분을 a, b에 대한 식으로 나타내기	2
❸ $a+b$의 값 구하기	1

참고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는

$f(x)=g(x)$에서

$x(x-a)(x-3)=-x(x-b)(x-3)$

$x(x-a)(x-3)+x(x-b)(x-3)=0$

$x(x-3)\{(x-a)+(x-b)\}=0$

$x(x-3)\{2x-(a+b)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\frac{a+b}{2}$

이때 $0<a<3$, $0<b<3$이므로

$0<\frac{a+b}{2}<3$

19 세 점 P, Q, M의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$, $x_M(t)$라 하면

$$x_P(t)=0+\int_0^t v_P(s)ds=\int_0^t(-6s-2)ds$$

$$=\left[-3s^2-2s\right]_0^t=-3t^2-2t$$

$$x_Q(t)=0+\int_0^t v_Q(s)ds=\int_0^t(3s^2+2)ds$$

$$=\left[s^3+2s\right]_0^t=t^3+2t \quad \cdots\cdots ❶$$

$$\therefore x_M(t)=\frac{x_P(t)+x_Q(t)}{2}$$

$$=\frac{(-3t^2-2t)+(t^3+2t)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t^2 \quad \cdots\cdots ❷$$

점 M이 출발한 후 다시 원점을 지나는 때는 $x_M(t)=0$에서

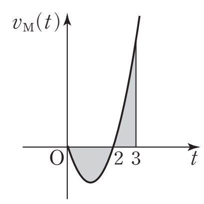
$\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t^2=0$, $\frac{1}{2}t^2(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$) ⋯⋯ ❸

한편 점 M의 시각 t에서의 속도를 $v_M(t)$라 하면

$$v_M(t)=x_M{}'(t)=\frac{3}{2}t^2-3t \quad \cdots\cdots ❹$$

$v_M(t)$의 그래프와 t축의 교점의 t좌표는



$\frac{3}{2}t^2-3t=0$에서

$\frac{3}{2}t(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 점 M이 출발한 후 다시 원점을 지날 때, 즉 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_M(t)|dt$$

$$=\int_0^3 \left|\frac{3}{2}t^2-3t\right|dt$$

$$=\int_0^2\left(-\frac{3}{2}t^2+3t\right)dt+\int_2^3\left(\frac{3}{2}t^2-3t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_2^3$$

$$=2+2=4 \quad \cdots\cdots ❺$$

답 4

채점기준	배점
❶ 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치 구하기	2
❷ 점 M의 시각 t에서의 위치 구하기	1
❸ 점 M이 출발한 후 다시 원점을 지나는 시각 구하기	1
❹ 점 M의 시각 t에서의 속도 구하기	1
❺ 점 M이 출발한 후 다시 원점을 지날 때까지 움직인 거리 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.140~144

1 $A=B$이므로

$$\int_0^2 \{(-x^2+k)-(x^3+x^2)\}dx=0$$

$$\int_0^2(-x^3-2x^2+k)dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+kx\right]_0^2=0$$

$2k-\frac{28}{3}=0$, $2k=\frac{28}{3}$

$\therefore k=\frac{14}{3}$

답 ④

2 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $-(x+1)^3+8=0$에서

$(x+1)^3=8$, $x+1=2$ ($\because$ x는 실수)

$\therefore$ $x=1$

즉 직선 l의 방정식은 $x=1$

$S_1=S_2$이려면

$$\int_0^1 \{f(x)-k\}dx=0$$

$$\int_0^1 \{-(x+1)^3+8-k\}dx=0$$

$$\int_0^1 (-x^3-3x^2-3x+7-k)dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+(7-k)x\right]_0^1=0$$

$$\frac{17}{4}-k=0 \qquad \therefore k=\frac{17}{4}$$

답 ②

3 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)$ $(k<1)$

라 하면

$f'(x)=(x-2)(x-k)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-2)$

$f'(0)=-7$이므로

$2k+k+2=-7 \qquad \therefore k=-3$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)=x^3-7x+6$

$f(3)=12$이므로 $\mathrm{P}(3, 12)$

따라서 직선 OP의 방정식은 $y=4x$이므로 점 Q의 x좌표를 a라 하면

$$A=\int_0^a \{f(x)-4x\}dx,\ B=\int_a^3 \{4x-f(x)\}dx$$

$$\begin{aligned}\therefore B-A&=\int_a^3 \{4x-f(x)\}dx-\int_0^a \{f(x)-4x\}dx\\&=\int_a^3 \{4x-f(x)\}dx+\int_0^a \{4x-f(x)\}dx\\&=\int_0^3 \{4x-f(x)\}dx\\&=\int_0^3 \{4x-(x^3-7x+6)\}dx\\&=\int_0^3 (-x^3+11x-6)dx\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_0^3\\&=\frac{45}{4}\end{aligned}$$

답 ⑤

4 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(-1)=0$이므로

$f(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

라 하면

$f'(x)=x^2+ax+b+(x+1)(2x+a)$

$f(4)=10$이므로

$5(16+4a+b)=10$, $16+4a+b=2$

$\therefore$ $4a+b=-14$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(0)=1$이므로

$a+b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=6$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=(x+1)(x^2-5x+6)\\&=(x+1)(x-2)(x-3)\\&=x^3-4x^2+x+6\end{aligned}$$

두 점 $\mathrm{P}(-1, 0)$, $\mathrm{Q}(4, 10)$을 지나는 직선 PQ의 방정식은

$$y=\frac{10-0}{4-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$\therefore$ $y=2x+2$

점 R의 x좌표를 a라 하면

$$A=\int_{-1}^a \{f(x)-(2x+2)\}dx,\ B=\int_a^4 \{(2x+2)-f(x)\}dx$$

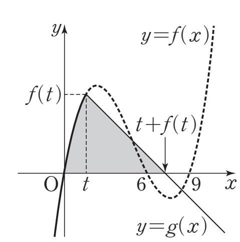
$\therefore$ $B-A$

$$\begin{aligned}&=\int_a^4 \{(2x+2)-f(x)\}dx-\int_{-1}^a \{f(x)-(2x+2)\}dx\\&=\int_a^4 \{(2x+2)-f(x)\}dx+\int_{-1}^a \{(2x+2)-f(x)\}dx\\&=\int_{-1}^4 \{(2x+2)-f(x)\}dx\\&=\int_{-1}^4 \{(2x+2)-(x^3-4x^2+x+6)\}dx\\&=\int_{-1}^4 (-x^3+4x^2+x-4)dx\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x\right]_{-1}^4\\&=\frac{125}{12}\end{aligned}$$

답 ④

5 $x\ge t$일 때, $g(x)=-(x-t)+f(t)$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(t, f(t))$를 지나고 기울기가 -1인 직선이고, 이 직선은 x축과 점 $(t+f(t), 0)$에서 만난다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라 하면



$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$$

$$\begin{aligned}S'(t)&=f(t)+f(t)\times f'(t)\\&=f(t)\{1+f'(t)\}\end{aligned}$$

$0<t<6$에서 $f(t)>0$이므로

$S'(t)=0$에서 $1+f'(t)=0$

이때

$1+f'(t)$

$$\begin{aligned}&=1+\frac{1}{9}\{(t-6)(t-9)+t(t-9)+t(t-6)\}\\&=1+\frac{1}{9}(3t^2-30t+54)=\frac{1}{3}(t^2-10t+21)\\&=\frac{1}{3}(t-3)(t-7)\end{aligned}$$

이므로 $1+f'(t)=0$에서

$t=3$ ($\because 0<t<6$)

$0<t<6$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(6)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

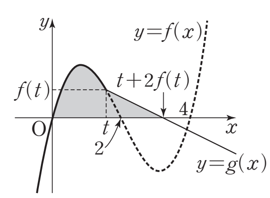
따라서 함수 $S(t)$는 $t=3$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$$S(3)=\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2$$
$$=\frac{1}{9}\int_0^3 x(x-6)(x-9)dx+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{9}\times 3\times(-3)\times(-6)\right\}^2$$
$$=\frac{1}{9}\int_0^3 (x^3-15x^2+54x)dx+18$$
$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_0^3+18$$
$$=\frac{1}{9}\times\frac{513}{4}+18$$
$$=\frac{129}{4}$$

답 ③

6 $x\ge t$일 때, $g(x)=-\frac{1}{2}(x-t)+f(t)$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선이고, 이 직선은 x축과 점 $(t+2f(t),\ 0)$에서 만난다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라 하면



$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\{f(t)\}^2$$
$$S'(t)=f(t)+2f(t)\times f'(t)$$
$$=f(t)\{1+2f'(t)\}$$

$0<t<2$에서 $f(t)>0$이므로

$S'(t)=0$에서 $1+2f'(t)=0$

이때

$$1+2f'(t)$$
$$=1+2\times\frac{1}{2}\{(t-2)(t-4)+t(t-4)+t(t-2)\}$$
$$=1+(3t^2-12t+8)$$
$$=3(t^2-4t+3)$$
$$=3(t-1)(t-3)$$

이므로 $1+2f'(t)=0$에서

$t=1$ ($\because 0<t<2$)

$0<t<2$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

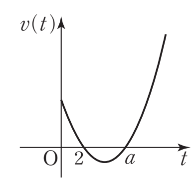
t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=1$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$$S(1)$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\{f(1)\}^2$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-2)(x-4)dx+\left\{\frac{1}{2}\times 1\times(-1)\times(-3)\right\}^2$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^3-6x^2+8x)dx+\frac{9}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_0^1+\frac{9}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}+\frac{9}{4}$$
$$=\frac{27}{8}$$

답 ②

7 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 원점을 출발한 점 P는 $0<t<2$에서 양의 방향, $2<t<a$에서 음의 방향, $t>a$에서 양의 방향으로 움직이므로 점 P가 원점으로 돌아오는 순간이 한 번뿐이려면 $t=a$에서 원점으로 돌아와야 한다.

즉 점 P의 시각 $t=a$에서의 위치가 0이어야 하므로

$$0+\int_0^a v(t)dt=0$$
$$\int_0^a 3(t-2)(t-a)dt=0$$
$$\int_0^a \{3t^2-3(a+2)t+6a\}dt=0$$
$$\left[t^3-\frac{3}{2}(a+2)t^2+6at\right]_0^a=0$$
$$a^3-\frac{3}{2}(a+2)a^2+6a^2=0$$
$$-\frac{1}{2}a^2(a-6)=0$$

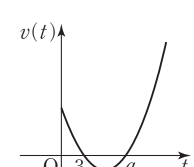
$\therefore a=6$ ($\because a>2$)

따라서 $v(t)=3(t-2)(t-6)$이므로

$v(8)=3\times 6\times 2=36$

답 ②

8 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 원점을 출발한 점 P는 $0<t<3$에서 양의 방향, $3<t<a$에서 음의 방향, $t>a$에서 양의 방향으로 움직이므로 점 P가 원점으로 돌아오는 순간이 한 번뿐이려면 $t=a$에서 원점으로 돌아와야 한다.

즉 점 P의 시각 $t=a$에서의 위치가 0이어야 하므로

$$0+\int_0^a v(t)dt=0$$

$\int_0^a 3(t-3)(t-a)dt=0$

$\int_0^a \{3t^2-3(a+3)t+9a\}dt=0$

$\left[t^3-\frac{3}{2}(a+3)t^2+9at\right]_0^a=0$

$a^3-\frac{3}{2}(a+3)a^2+9a^2=0$

$-\frac{1}{2}a^2(a-9)=0$

$\therefore a=9$ ($\because a>3$)

따라서 $v(t)=3(t-3)(t-9)$이므로

$v(10)=3\times7\times1=21$ 답 ①

9 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x_1(t)$라 하면

$x_1(t)=1+\int_0^t v_1(s)ds$

$=1+\int_0^t (3s^2+4s-7)ds$

$=1+\left[s^3+2s^2-7s\right]_0^t$

$=t^3+2t^2-7t+1$

점 Q의 시각 t에서의 위치를 $x_2(t)$라 하면

$x_2(t)=8+\int_0^t v_2(s)ds$

$=8+\int_0^t (2s+4)ds$

$=8+\left[s^2+4s\right]_0^t$

$=t^2+4t+8$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리가 4가 되는 시각은

$|x_1(t)-x_2(t)|=4$에서

$|(t^3+2t^2-7t+1)-(t^2+4t+8)|=4$

$|t^3+t^2-11t-7|=4$

$t^3+t^2-11t-7=4$ 또는 $t^3+t^2-11t-7=-4$

$\therefore t^3+t^2-11t-11=0$ 또는 $t^3+t^2-11t-3=0$

(i) $t^3+t^2-11t-11=0$일 때

$(t+1)(t^2-11)=0$

$\therefore t=\sqrt{11}$ ($\because t>0$)

(ii) $t^3+t^2-11t-3=0$일 때

$(t-3)(t^2+4t+1)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

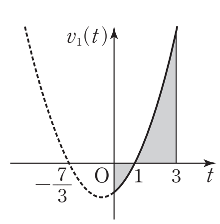
(i), (ii)에서 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 되는 시각은 $t=3$

$v_1(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 t 좌표는 $v_1(t)=0$에서

$3t^2+4t-7=0$

$(3t+7)(t-1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)



따라서 점 P가 출발한 후 $t=3$까지 움직인 거리는

$\int_0^3 |v_1(t)|dt$

$=\int_0^3 |3t^2+4t-7|dt$

$=\int_0^1 (-3t^2-4t+7)dt+\int_1^3 (3t^2+4t-7)dt$

$=\left[-t^3-2t^2+7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$

$=4+28=32$ 답 ⑤

10 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x_1(t)$라 하면

$x_1(t)=2+\int_0^t v_1(s)ds$

$=2+\int_0^t (3s^2+8s-3)ds$

$=2+\left[s^3+4s^2-3s\right]_0^t$

$=t^3+4t^2-3t+2$

점 Q의 시각 t에서의 위치를 $x_2(t)$라 하면

$x_2(t)=10+\int_0^t v_2(s)ds$

$=10+\int_0^t (4s+5)ds$

$=10+\left[2s^2+5s\right]_0^t$

$=2t^2+5t+10$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리가 8이 되는 시각은

$|x_1(t)-x_2(t)|=8$에서

$|(t^3+4t^2-3t+2)-(2t^2+5t+10)|=8$

$|t^3+2t^2-8t-8|=8$

$t^3+2t^2-8t-8=8$ 또는 $t^3+2t^2-8t-8=-8$

$\therefore t^3+2t^2-8t-16=0$ 또는 $t^3+2t^2-8t=0$

(i) $t^3+2t^2-8t-16=0$일 때

$(t+2)(t^2-8)=0$

$\therefore t=2\sqrt{2}$ ($\because t>0$)

(ii) $t^3+2t^2-8t=0$일 때

$t(t+4)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

(i), (ii)에서 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 8이 되는 시각은 $t=2$

따라서 점 Q가 출발한 후 $t=2$까지 움직인 거리는

$\int_0^2 |v_2(t)|dt=\int_0^2 |4t+5|dt$

$=\int_0^2 (4t+5)dt$

$=\left[2t^2+5t\right]_0^2=18$ 답 ④

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.146~149

01 $f'(x)=3x^2-4ax+(a^2+3a)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-3(a^2+3a)\leq 0$

$a^2-9a\leq 0,\ a(a-9)\leq 0 \qquad \therefore 0\leq a\leq 9$

따라서 실수 a의 최댓값은 9이다.

답 ④

02 $f(x)=\int(5x^3+3x-3)dx+\int(-5x^3+x)dx$

$=\int\{(5x^3+3x-3)+(-5x^3+x)\}dx$

$=\int(4x-3)dx$

$=2x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=3$이므로

$2-3+C=3 \qquad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+4$이므로

$f(2)=8-6+4=6$

답 ②

03 $x^2-3x=0$에서

$x(x-3)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 $-2\leq x\leq 0$일 때 $x^2-3x\geq 0$, $0\leq x\leq 2$일 때 $x^2-3x\leq 0$이므로

$\int_{-2}^{2}|x^2-3x|dx=\int_{-2}^{0}(x^2-3x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+3x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$

$=\left\{0-\left(-\frac{8}{3}-6\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{8}{3}+6\right)-0\right\}$

$=\frac{26}{3}+\frac{10}{3}=12$

답 ①

04 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2mt+n$

점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=6t+2m$

이때 $t=2$에서의 점 P의 가속도가 0이므로

$6\times 2+2m=0 \qquad \therefore m=-6$

$\therefore v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+n$

$t=1$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌면 이때 속도는 0이므로

$3\times 1^2-12\times 1+n=0 \qquad \therefore n=9$

따라서 $v=3t^2-12t+9$이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$3\times 2^2-12\times 2+9=-3$

답 ②

05 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(-x^2+6x)\right\}dx$

$=-x^2+6x+C$ (단, C는 적분상수)

$=-(x-3)^2+C+9$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $C+9$를 갖고 최댓값이 3이므로

$C+9=3 \qquad \therefore C=-6$

따라서 $f(x)=-x^2+6x-6$이므로

$f(1)=-1+6-6=-1$

답 ②

06 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

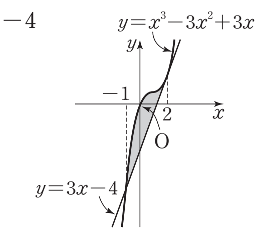
$\int_{5}^{10}f(x)dx=\int_{5}^{6}f(x)dx+\int_{6}^{8}f(x)dx+\int_{8}^{10}f(x)dx$

$=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$

$=3+5+5=13$

답 ②

07 곡선 $y=x^3-3x^2+3x$와 직선 $y=3x-4$의 교점의 x좌표는



$x^3-3x^2+3x=3x-4$에서

$x^3-3x^2+4=0$

$(x+1)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{2}\{(x^3-3x^2+3x)-(3x-4)\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$

$=(4-8+8)-\left(\frac{1}{4}+1-4\right)$

$=4-\left(-\frac{11}{4}\right)=\frac{27}{4}$

답 ④

08 $f(2)=\int_{1}^{2}(3t^2-4t+3)dt=\left[t^3-2t^2+3t\right]_{1}^{2}$

$=(8-8+6)-(1-2+3)=6-2=4$

$f(x)=\int_{1}^{x}(3t^2-4t+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-4x+3$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(2,\ f(2))$, 즉 $P(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12-8+3=7$

접선의 방정식은

$y-4=7(x-2) \qquad \therefore y=7x-10$

따라서 $m=7$, $n=-10$이므로

$m-n=7-(-10)=17$

답 ⑤

09 $x^2\int_{1}^{x}f(t)dt=\int_{1}^{x}t^2f(t)dt+ax^4+bx^2+6$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=0+a+b+6 \qquad \therefore a+b=-6$ ...... ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x\int_1^x f(t)dt+x^2f(x)=x^2f(x)+4ax^3+2bx$

$2x\int_1^x f(t)dt=4ax^3+2bx$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=2ax^2+b$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2a+b=0$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=6,\ b=-12$

따라서 $\int_1^x f(t)dt=12x^2-12$이므로

$\int_1^3 f(t)dt=108-12=96$ 답 ①

10 $S(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$S'(x)=f(x)$

$S'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=5$ ($\because 0\le x\le 5$)

$0\le x\le 5$에서 함수 $S(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	2	…	5
$S'(x)$		$-$	0	$+$	0
$S(x)$		↘	극소	↗	

이때 $S(x)=\int_0^x f(t)dt$이므로

$S(0)=0,\ S(2)=\int_0^2 f(t)dt=-3$

$S(5)=\int_0^5 f(t)dt$

$=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^5 f(t)dt$

$=-3+4=1$

즉 닫힌구간 $[0, 5]$에서 $S(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이므로 구하는 합은

$1+(-3)=-2$ 답 ④

11 $\int_0^{500} f(x)dx=\int_3^{500} f(x)dx$에서

$\int_0^3 f(x)dx+\int_3^{500} f(x)dx=\int_3^{500} f(x)dx$

$\therefore \int_0^3 f(x)dx=0$

$f(2)=0$이고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$f(x)=3(x-2)(x-k)$ (k는 상수)

라 하면

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 3(x-2)(x-k)dx$

$=\int_0^3 \{3x^2-3(k+2)x+6k\}dx$

$=\left[x^3-\frac{3(k+2)}{2}x^2+6kx\right]_0^3$

$=\left\{27-\frac{27(k+2)}{2}+18k\right\}-0=\frac{9}{2}k$

즉 $\frac{9}{2}k=0$이므로 $k=0$

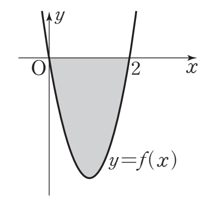
$\therefore f(x)=3x(x-2)$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는

$f(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는



$\int_0^2 \{-f(x)\}dx$

$=\int_0^2 \{-3x(x-2)\}dx$

$=\int_0^2 (-3x^2+6x)dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2$

$=(-8+12)-0=4$ 답 ③

12 $0\le t\le 2,\ 2\le t\le 4,\ 4\le t\le 8$에서 점 P가 움직인 거리는 각각

$\int_0^2 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

$\int_2^4 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

$\int_4^8 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\times(1+4)\times 2=5$

① $t=4$일 때 점 P의 위치는 $0+\int_0^4 v(t)dt=2-2=0$

② $t=2$일 때 점 P의 위치는 $0+\int_0^2 v(t)dt=2$

$t=4$일 때 점 P의 위치는 $0+\int_0^4 v(t)dt=2-2=0$

$t=8$일 때 점 P의 위치는 $0+\int_0^8 v(t)dt=2-2+5=5$

따라서 점 P는 $t=8$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

③ $t=0$에서 $t=8$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^8 |v(t)|dt=2+2+5=9$

④ $1\le t\le 2,\ 4\le t\le 5$에서 점 P가 움직인 거리는 각각

$\int_1^2 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$

$\int_4^5 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$

따라서 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_1^5 v(t)dt=\int_1^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt+\int_4^5 v(t)dt$

$=1-2+1=0$

⑤ $0<t<2$에서 $v(t)>0$, $2<t<4$에서 $v(t)<0$, $4<t<8$에서 $v(t)>0$이므로 점 P는 $t=2$, $t=4$에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 점 P는 출발 후 $t=8$까지 운동 방향을 2번 바꾼다.

답 ②

13 $f(x)=g(x)$에서

$2x^3+5x^2-3x=x^3+8x^2+6x+a$

$\therefore x^3-3x^2-9x=a$

$h(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면 주어진 방정식은 $h(x)=a$이고

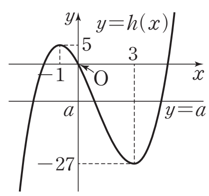
$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	5	↘	-27	↗

따라서 삼차함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $h(x)=a$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

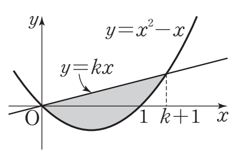


$-27<a<0$

따라서 정수 a는 $-26,\ -25,\ -24,\ \dots,\ -1$의 26개이다.

답 ②

14 곡선 $y=x^2-x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-x=0$에서



$x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

곡선 $y=x^2-x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1\{-(x^2-x)\}dx=\int_0^1(-x^2+x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-0$$
$$=\frac{1}{6}$$

또 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=kx$의 교점의 x좌표는

$x^2-x=kx$에서

$x^2-(k+1)x=0,\ x\{x-(k+1)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=k+1$

곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=kx$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{k+1}\{kx-(x^2-x)\}dx=\int_0^{k+1}\{-x^2+(k+1)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k+1}{2}x^2\right]_0^{k+1}$$
$$=\left\{-\frac{(k+1)^3}{3}+\frac{(k+1)^3}{2}\right\}-0$$
$$=\frac{(k+1)^3}{6}$$

곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=kx$로 둘러싸인 도형의 넓이가 x축에 의하여 이등분되므로

$\dfrac{(k+1)^3}{6}=2\times\dfrac{1}{6}$

$\therefore (k+1)^3=2$

답 ①

15 삼차함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $x=\alpha\ (\alpha>2)$에서 극솟값을 갖는다고 하면

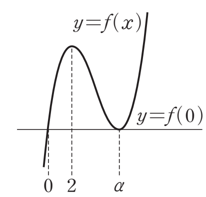
$f'(2)=0,\ f'(\alpha)=0$

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이면 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$f'(x)=3(x-2)(x-\alpha)$ (단, $\alpha>2$)

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 3(x-2)(x-\alpha)dx$$
$$=\int\{3x^2-(3\alpha+6)x+6\alpha\}dx$$
$$=x^3-\frac{3\alpha+6}{2}x^2+6\alpha x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

방정식 $f(x)=f(0)$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 $f(\alpha)=f(0)$이어야 하므로



$\alpha^3-\dfrac{3\alpha+6}{2}\alpha^2+6\alpha^2+C=C$

$\alpha^3-\dfrac{3\alpha+6}{2}\alpha^2+6\alpha^2=0$

$\alpha-\dfrac{3\alpha+6}{2}+6=0\ (\because \alpha>2)$

$2\alpha-(3\alpha+6)+12=0$

$-\alpha-6+12=0 \qquad \therefore \alpha=6$

$\therefore f(x)=x^3-12x^2+36x+C$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $f(2)=C+32$, $x=6$에서 극솟값 $f(6)=f(0)=C$를 가지므로

$M=C+32,\ m=C$

$\therefore M-m=(C+32)-C=32$

답 ②

16 양수 a에 대하여 함수

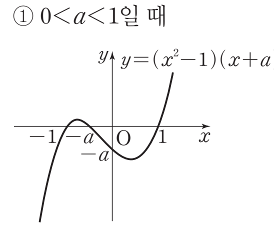
$f(x)=|(x^2-1)(x+a)|$

의 그래프의 개형은 양수 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

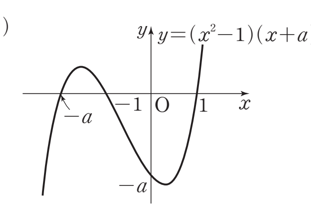
(i) $0<a<1$ 또는 $a>1$일 때

함수 $y=(x^2-1)(x+a)=(x+1)(x-1)(x+a)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

① $0<a<1$일 때

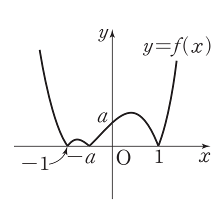


② $a>1$일 때

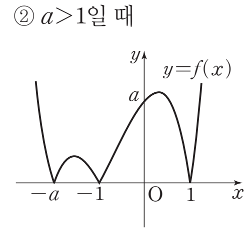


따라서 함수 $f(x)=|(x^2-1)(x+a)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

① $0<a<1$일 때



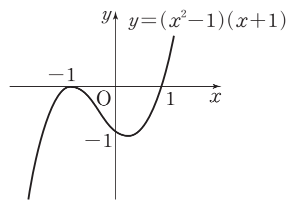
② $a>1$일 때



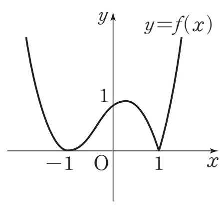
이때 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=-a$, $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$일 때

함수 $y=(x^2-1)(x+a)=(x+1)^2(x-1)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)=|(x+1)^2(x-1)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때 $f(x)$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=1$이고, 함수 $f(x)=|(x^2-1)(x+1)|$의 극댓값은 함수 $y=(x^2-1)(x+1)$의 극솟값의 절댓값과 같다.

$g(x)=(x^2-1)(x+1)$이라 하면

$$g'(x)=2x(x+1)+(x^2-1)$$
$$=3x^2+2x-1$$
$$=(3x-1)(x+1)$$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	0	↘	$-\frac{32}{27}$	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{3}$에서 극솟값 $-\frac{32}{27}$를 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{3}$에서 극댓값 $\left|-\frac{32}{27}\right|=\frac{32}{27}$를 갖는다. 답 ④

17 $f'(x)=-8x+k$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-8x+k)dx$$
$$=-4x^2+kx+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \quad \cdots\cdots ❶$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$f(0)=4$ $\quad\therefore C=4$

$\therefore f(x)=-4x^2+kx+4$ …… ❷

방정식 $f(x)=0$, 즉 $-4x^2+kx+4=0$의 두 근의 합이 $\frac{1}{2}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{k}{-4}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore k=2$ …… ❸

답 2

채점기준	배점
❶ $f(x)$를 적분상수를 이용하여 나타내기	2
❷ $f(x)$ 구하기	1
❸ k의 값 구하기	2

18 조건 (가), (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 가지므로 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서도 극값을 갖는다고 하면 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-\alpha)$ …… ❶

$f'(-2)=3(\alpha+2)$, $f'(0)=-3\alpha$이므로 조건 (다)에서

$f'(-2)\times f'(0)=-9\alpha(\alpha+2)=-135$

$\alpha^2+2\alpha-15=0$, $(\alpha+5)(\alpha-3)=0$

$\therefore \alpha=-5$ 또는 $\alpha=3$

함수 $f(x)$의 모든 항의 계수는 자연수이므로

$\alpha=-5$

$\therefore f'(x)=3(x+1)(x+5)=3x^2+18x+15$ …… ❷

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+18x+15)dx$$
$$=x^3+9x^2+15x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

삼차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 갖고 조건 (나)에서 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 극댓값 5를 가지므로 $f(-1)=-5$이다.

즉

$f(-1)=C-7=-5$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^3+9x^2+15x+2$이므로

$f(1)=1+9+15+2=27$ …… ❸

답 27

채점기준	배점
❶ $f'(x)$의 식 세우기	2
❷ $f'(x)$ 구하기	2
❸ $f(1)$의 값 구하기	2

19 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_{\mathrm{P}}(t)$, $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$$x_{\mathrm{P}}(t)=0+\int_0^t v_{\mathrm{P}}(s)ds=\int_0^t(6s^2+2s-3)ds$$
$$=\Big[2s^3+s^2-3t\Big]_0^t=2t^3+t^2-3t$$
$$x_{\mathrm{Q}}(t)=0+\int_0^t v_{\mathrm{Q}}(s)\,ds=\int_0^t\left(2s+\frac{a}{3}\right)ds$$
$$=\left[s^2+\frac{a}{3}s\right]_0^t=t^2+\frac{a}{3}t \quad \cdots\cdots ❶$$

두 점 P, Q가 만나려면 $x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)$에서

$2t^3+t^2-3t=t^2+\frac{a}{3}t$, $2t^3-\left(3+\frac{a}{3}\right)t=0$

$\therefore t\left\{2t^2-\left(3+\frac{a}{3}\right)\right\}=0$ …… ❷

두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나려면 이 방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가져야 하므로

$3+\frac{a}{3}>0$, $\frac{a}{3}>-3$ $\quad\therefore a>-9$

따라서 정수 a의 최솟값은 -8이다. …… ❸

답 -8

채점기준	배점
❶ 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치 각각 구하기	3
❷ 두 점 P, Q가 만나는 시각 t에 대한 방정식 세우기	2
❸ 정수 a의 최솟값 구하기	2

20 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ …… ❶

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2\le\frac{f(2x)-f(0)}{2x}\le x^4$$

이므로

$$\frac{3x^2+2ax+b}{2}+x^2-2\le\frac{8x^3+4ax^2+2bx}{2x}\le x^4$$

$\dfrac{3x^2+2ax+b}{2}+x^2-2\le\dfrac{8x^3+4ax^2+2bx}{2x}$에서

$3x^2+2ax+b+2x^2-4\le 8x^2+4ax+2b$

$\therefore\ 2ax+b\ge -3x^2-4$ …… ㉠

$\dfrac{8x^3+4ax^2+2bx}{2x}\le x^4$에서

$8x^2+4ax+2b\le 2x^4$

$\therefore\ 2ax+b\le x^4-4x^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-3x^2-4\le 2ax+b\le x^4-4x^2$ …… ㉢ …… ❷

이때 $g(x)=-3x^2-4$, $h(x)=x^4-4x^2$이라 하면

$h'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

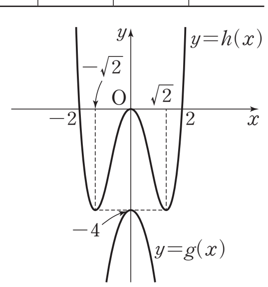
$h'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	-4	↗	0	↘	-4	↗

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 부등식 ㉢을 만족시키려면 직선 $y=2ax+b$가 직선 $y=-4$와 일치해야 하므로



$a=0$, $b=-4$

따라서

$f'(x)=3x^2-4$ …… ❸

이므로

$f'(3)=27-4=23$ …… ❹

답 23

채점기준	배점
❶ $f(x)$, $f'(x)$의 식 세우기	1
❷ $f(x)$, $f'(x)$를 대입하여 x에 대한 부등식 구하기	2
❸ $f'(x)$ 구하기	3
❹ $f'(3)$의 값 구하기	1

실전 모의고사 2회

p.150~153

01 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-1$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로

$a=-1$, $f(a)=f(-1)=-2-3+12-1=6$

$\therefore\ a+f(a)=-1+6=5$

답 ③

02 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3-\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times(-2)\right\}$

$=3f'(1)-(-2)f'(1)$

$=5f'(1)$

$f(x)=\displaystyle\int(3x^2+2x+1)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2x+1$ $\quad\therefore\ f'(1)=3+2+1=6$

따라서 구하는 식의 값은

$5f'(1)=5\times6=30$

답 ④

03 $\displaystyle\int_a^b(x-4)(x+2)(x-1)^2dx$

$\displaystyle=\int_a^b(x^2-2x-8)(x-1)^2dx$

$\displaystyle=\int_a^b\{(x-1)^2-9\}(x-1)^2dx$

$\displaystyle=\int_a^b\{(x-1)^4-9(x-1)^2\}dx$

$\displaystyle=\int_a^b(x-1)^4dx-9\int_a^b(x-1)^2dx$

$=44-9\times\dfrac{22}{9}=22$

답 ②

04 $f(-x)=-f(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\displaystyle\int_{-4}^{4}f(x)dx=0$에서

$\displaystyle\int_{-4}^{0}f(x)dx+\int_0^4f(x)dx=0$

$\displaystyle\therefore\ \int_{-4}^{0}f(x)dx=-\int_0^4f(x)dx$

$\displaystyle=-\left\{\int_0^6f(x)dx-\int_4^6f(x)dx\right\}$

$=-\{-5-(-8)\}=-3$

답 ②

05 $\int_0^2 f(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면 $f(x)=4x^3-3x^2+2+a$이므로

$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (4t^3-3t^2+2+a)dt=\left[t^4-t^3+2t+at\right]_0^2$

$=(16-8+4+2a)-0=2a+12$

즉 $2a+12=a$이므로 $a=-12$

따라서 $f(x)=4x^3-3x^2-10$이므로

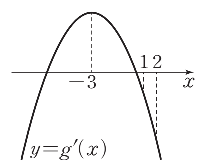
$f(1)=4-3-10=-9$

답 ⑤

06 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=-x^2-6x+a$

삼차함수 $g(x)$가 $1\le x\le 2$에서 감소하려면 $1\le x\le 2$에서 $g'(x)\le 0$이어야 하므로



$g'(1)\le 0$

$-1-6+a\le 0 \qquad \therefore a\le 7$

따라서 실수 a의 최댓값은 7이다.

답 ⑤

07 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=x'(t)=4t^3+3at^2$

$t=3$에서의 점 P의 속도가 0이므로

$4\times 3^3+3a\times 3^2=0$, $4+a=0 \qquad \therefore a=-4$

따라서 $v(t)=4t^3-12t^2$이고 $0\le t\le 3$에서 $v(t)\le 0$이므로

$t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^3 |v(t)|dt=\int_0^3 |4t^3-12t^2|dt$

$=\int_0^3 (-4t^3+12t^2)dt$

$=\left[-t^4+4t^3\right]_0^3$

$=(-81+108)-0=27$

답 ②

08 $\frac{d}{dx}\int \{f(x)+2x^3-6x\}dx=f(x)+2x^3-6x$

$\int\left[\frac{d}{dx}\{3f(x)+8x^2\}\right]dx=3f(x)+8x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$f(x)+2x^3-6x=3f(x)+8x^2+C$

$2f(x)=2x^3-8x^2-6x-C$

$\therefore f(x)=x^3-4x^2-3x-\frac{C}{2}$

이때 $f(2)=-12$이므로

$8-16-6-\frac{C}{2}=-12$, $\frac{C}{2}=-2$

$\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2-3x+2$이므로

$f(0)=2$

답 ⑤

09 원의 반지름의 길이는 한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$ cm인 정삼각형의 높이와 같으므로 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$r=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{3}=6$ (cm)

t초 후 원의 반지름의 길이는 $(6+2t)$ cm이므로 원의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\pi(6+2t)^2=4\pi t^2+24\pi t+36\pi$ (cm^2)

$\therefore \frac{dS}{dt}=8\pi t+24\pi$ (cm^2/s)

따라서 5초 후 원의 넓이의 변화율은

$8\pi\times 5+24\pi=64\pi$ (cm^2/s)

답 ⑤

10 ㄱ. $t=b$, $t=d$, $t=f$일 때 $x(t)=0$이므로 $0<t<g$에서 점 P는 $t=b$, $t=d$, $t=f$일 때 원점에 있다. (참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면 $v(t)=x'(t)$
이때 $v(a)=v(c)=v(e)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=a$, $t=c$, $t=e$에서 운동 방향을 각각 한 번씩 바꾼다. 즉 $0<t<g$에서 점 P는 운동 방향을 3번 바꾼다. (참)

ㄷ. $0<t<g$에서 $t=e$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P는 $t=e$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

11 $f(x)=x^2+4x+k=(x+2)^2+k-4$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge k-4$

$f(x)=t$로 놓으면

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)=t^3-6t^2+9t+3$ $(t\ge k-4)$

$g'(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

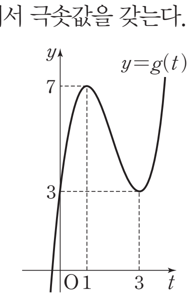
$g'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극댓값, $t=3$에서 극솟값을 갖는다.

이때 $t\ge k-4$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 3이려면 오른쪽 그림에서 $0\le k-4\le 3$이어야 하므로

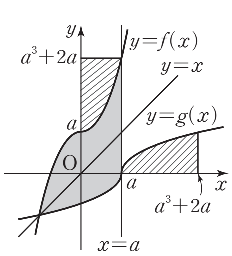


$4\le k\le 7$

따라서 정수 k는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

답 ③

12 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 도형의 넓이는 서로 같다. 이때



$\int_0^a f(x)dx+\int_a^{a^3+2a} g(x)dx=3$

이므로 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 a^3+2a인 직사각형의 넓이가 3이다. 즉

$a(a^3+2a)=3$, $a^4+2a^2-3=0$

$(a^2+3)(a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$\therefore f(x)=x^3+x+1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3+x+1=x$에서

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ ($\because x^2-x+1>0$)

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{-1}^{0}\{f(x)-x\}dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$$

$$=2\int_{-1}^{0}(x^3+1)dx+\int_{0}^{1}(x^3+x+1)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}$$

$$=2\left\{0-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)-0\right\}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{7}{4}=\frac{13}{4}$$

답 ③

13 $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+(1-a)x^2-2ax$에서

$f'(x)=-2x^3+2(1-a)x-2a$

$\quad=-2(x+1)(x^2-x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-x+a=0$이 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times a=1-4a<0 \qquad \therefore a>\frac{1}{4}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-x+a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖거나 $x=-1$이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

(ㄱ) 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 $x=-1$을 근으로 가질 때

$1-(-1)+a=0 \qquad \therefore a=-2$

(ㄴ) 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 $x=-1$이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1-4a=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

(iii) 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 $x=-1$을 중근으로 가질 수 없으므로 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$이므로 실수 a의 최솟값은 -2이다.

답 ②

14 함수 $f(x)+2g(x)$가 함수 $f(x)-2g(x)$의 한 부정적분이므로

$4x^3-2x^2+2x+2+2g(x)$

$=\int\{4x^3-2x^2+2x+2-2g(x)\}dx$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$12x^2-4x+2+2g'(x)=4x^3-2x^2+2x+2-2g(x)$

$2g(x)+2g'(x)=4x^3-14x^2+6x$

$\therefore g(x)+g'(x)=2x^3-7x^2+3x \qquad \cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$의 차수를 n이라 하면 ㉠의 좌변의 차수는 n이고 우변의 차수는 3이므로

$n=3$

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$g'(x)=3ax^2+2bx+c$

㉠에서

$(ax^3+bx^2+cx+d)+(3ax^2+2bx+c)$

$=2x^3-7x^2+3x$

$\therefore ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)=2x^3-7x^2+3x$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$a=2$, $3a+b=-7$, $2b+c=3$, $c+d=0$

위의 네 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-13$, $c=29$, $d=-29$

따라서 $g(x)=2x^3-13x^2+29x-29$이므로

$g(3)=54-117+87-29=-5$

답 ⑤

15 ㄱ. $x(0)=0$, $x(2)=0$이므로 $t=0$, $t=2$일 때 점 P의 위치는 모두 원점이다. 즉 $t=0$에서 $t=2$까지의 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$\int_{0}^{2}v(t)dt=0$ (참)

ㄴ. $0<t_1<2$에서 $|x(t_1)|>2$인 t_1이 존재하면 $t=t_1$에서 점 P와 원점 사이의 거리는 2보다 크다. 이때 원점을 출발한 점 P가 $t=2$일 때 다시 원점으로 돌아오므로 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 4보다 크다. 그런데

$\int_{0}^{2}|v(t)|dt=4$, 즉 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리가 4이므로 $|x(t_1)|>2$인 t_1은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $0\leq t\leq2$인 모든 t에서 점 P와 원점 사이의 거리가 2보다 작을 때, $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리가 4가 되려면 점 P는 $0<t<2$에서 적어도 한 번은 원점을 지나야 한다. 즉 $0\leq t\leq2$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<2$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 2)$에 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

16 조건 (나)에서 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (-1\leq x<0)\\ x & (0\leq x\leq1)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{0}t^2dt+\int_{0}^{1}t\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\left\{0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}+\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

이때

$$g(a+4)-g(a-2)=\int_{1}^{a+4} f(t)dt-\int_{1}^{a-2} f(t)dt$$
$$=\int_{1}^{a+4} f(t)dt+\int_{a-2}^{1} f(t)dt$$
$$=\int_{a-2}^{a+4} f(t)dt$$

이고, 조건 ㈎에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{a-2}^{a+4} f(t)dt=\int_{a-2}^{a} f(t)dt+\int_{a}^{a+2} f(t)dt+\int_{a+2}^{a+4} f(t)dt$$
$$=\int_{-1}^{1} f(t)dt+\int_{-1}^{1} f(t)dt+\int_{-1}^{1} f(t)dt$$
$$=3\int_{-1}^{1} f(t)dt$$
$$=3\times\frac{5}{6}=\frac{5}{2}$$

답 ②

17 $f(x)=\int f'(x)dx$이므로

(i) $x<1$일 때

$f(x)=\int(2x-1)dx=x^2-x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

(ii) $x>1$일 때

$f(x)=\int(3x^2-2)dx=x^3-2x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

이때 $f(2)=3$이므로

$8-4+C_2=3 \qquad \therefore C_2=-1$

$\therefore f(x)=x^3-2x-1$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+C_1 & (x<1) \\ x^3-2x-1 & (x>1) \end{cases}$$ …… ❶

이때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉 $\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-x+C_1)=1-1+C_1=C_1$,

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(x^3-2x-1)=1-2-1=-2$

에서

$C_1=-2=f(1)$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & (x<1) \\ x^3-2x-1 & (x\ge1) \end{cases}$이므로 …… ❷

$f(-3)=9+3-2=10$, $f(3)=27-6-1=20$

$\therefore f(-3)+f(3)=10+20=30$ …… ❸

답 30

채점기준	배점
❶ $f(x)$를 적분상수를 이용하여 나타내기	2
❷ $f(x)$ 구하기	2
❸ $f(-3)+f(3)$의 값 구하기	1

18 $g(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2-8$이라 하면

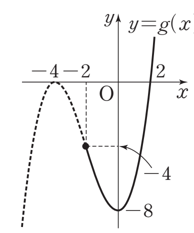
$g'(x)=\frac{3}{4}x^2+3x=\frac{3}{4}x(x+4)$

$g'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$

$x\ge-2$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	-4	↘	-8	↗

…… ❶



$a=0$일 때, 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(-2)=-4$이므로

$f(0)=-4$

$a=2$일 때, 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(2)=0$이므로

$f(2)=0$

$a=4$일 때, 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(4)=32$이므로

$f(4)=32$ …… ❷

$\therefore f(0)+f(2)+f(4)=-4+0+32=28$ …… ❸

답 28

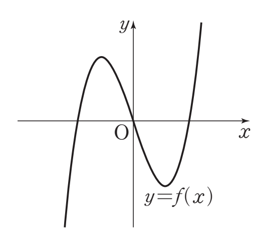
채점기준	배점
❶ 함수 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2-8$의 증가와 감소를 표로 나타내기	2
❷ $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$의 값 각각 구하기	3
❸ $f(0)+f(2)+f(4)$의 값 구하기	1

19 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

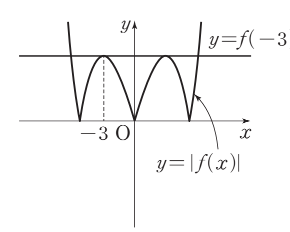
$f(x)=x^3+ax$ (a는 상수) ← $f(0)=0$ …… ❶

라 하면

$f'(x)=3x^2+a$



[그림 1]



[그림 2]

방정식 $|f(x)|=f(-3)$이 서로 다른 네 실근을 가지려면 삼차함수 $f(x)$는 극값을 가져야 하므로 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1], $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다. 따라서 삼차함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 가져야 하므로

$f'(-3)=0$ …… ❷

$27+a=0 \qquad \therefore a=-27$ …… ❸

따라서 $f(x)=x^3-27x$이므로

$f(1)=1-27=-26$ …… ❹

답 -26

채점기준	배점
❶ $f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)로 나타내기	2
❷ $y=f(x)$, $y=\lvert f(x)\rvert$의 그래프를 그리고 $f'(-3)=0$임을 설명하기	3
❸ a의 값 구하기	1
❹ $f(1)$의 값 구하기	1

20 $f(2-x)=-f(2+x)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(2)=-f(2)$, $2f(2)=0$ $\quad\therefore f(2)=0$

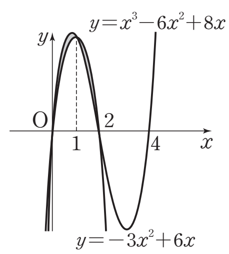
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(0)=-f(4)$ $\quad\therefore f(4)=0$

따라서 $f(0)=0$, $f(2)=0$, $f(4)=0$이고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x-2)(x-4)=x^3-6x^2+8x$ ⋯⋯ ❶

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-3x^2+6x$의 교점의 x좌표는



$x^3-6x^2+8x=-3x^2+6x$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ ⋯⋯ ❷

$$\therefore S=\int_0^1\{(x^3-6x^2+8x)-(-3x^2+6x)\}dx+\int_1^2\{(-3x^2+6x)-(x^3-6x^2+8x)\}dx$$

$$=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-0\right\}+\left\{(-4+8-4)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$\therefore 4S=4\times\dfrac{1}{2}=2$ ⋯⋯ ❸

답 2

채점기준	배점
❶ $f(x)$ 구하기	3
❷ 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기	2
❸ 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S와 $4S$의 값 구하기	2

실전 모의고사 3회

p.154~157

01 $(x-1)f(x)=(-2x^3+3x^2+C)'$

$=-6x^2+6x$

$=-6x(x-1)$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f(x)=-6x$

$\therefore f(-2)=12$

답 ⑤

02 $|x|=\begin{cases}x & (x\ge 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^2(x^2+2|x|-1)dx$$

$$=\int_{-1}^2(x^2-1)dx+2\int_{-1}^2|x|dx$$

$$=\int_{-1}^2(x^2-1)dx+2\left\{\int_{-1}^0(-x)dx+\int_0^2 x\,dx\right\}$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-1}^2+2\left(\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\right)$$

$$=\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right\}+2\left[\left\{0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+(2-0)\right]$$

$=5$

답 ⑤

03 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$t^2-9=0$, $(t+3)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=3$ $(\because t>0)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)dt=0+\int_0^3(t^2-9)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-9t\right]_0^3$$

$$=(9-27)-0=-18$$

답 ④

04 곡선 $y=x^3-3x^2-4x+k$와 직선 $y=5x+3$이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3-3x^2-4x+k=5x+3$, 즉 $x^3-3x^2-9x+k-3=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x+k-3$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(3)<0$이어야 하므로

$(k+2)(k-30)<0$ $\quad\therefore -2<k<30$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1, $\dots$, 29의 31개이다.

답 ④

05 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x\le 2$ 또는 $x\ge 4$일 때 증가하고 $2\le x\le 4$일 때 감소하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 2, 4이다. 즉 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+4=-\dfrac{2a}{3}$, $2\times 4=\dfrac{b}{3}$

$\therefore a=-9$, $b=24$

$\therefore a+b=-9+24=15$

답 ①

06 (i) $x>-1$일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-2x)dx$$

$=x^3-x^2+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(0)=4$이므로 $C_1=4$

$\therefore f(x)=x^3-x^2+4$

(ii) $x<-1$일 때

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+3)dx$

$=-x^2+3x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+4 & (x>-1) \\ -x^2+3x+C_2 & (x<-1) \end{cases}$이고 함수

$f(x)$는 미분가능하므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^3-x^2+4)=-1-1+4=2$

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-x^2+3x+C_2)$

$=-1-3+C_2=C_2-4$

에서 $2=C_2-4=f(-1)$

$\therefore C_2=6,\ f(-1)=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+4 & (x\geq-1) \\ -x^2+3x+6 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$f(-2)=-4-6+6=-4$

답 ③

07 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이고

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx=0$에서

$F(1)-F(0)=F(3)-F(0)=0$

$\therefore F(0)=F(1)=F(3)$

이때 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $F(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다. 즉

$F(x)=\frac{1}{3}x(x-1)(x-3)+k$ (k는 상수)

라 하면

$F'(x)=f(x)=\frac{1}{3}\{(x-1)(x-3)+x(x-3)+x(x-1)\}$

$\therefore f(3)=\frac{1}{3}\times(3\times2)=2$

답 ④

다른풀이 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\int_0^1 f(x)dx=0$에서

$\int_0^1(x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}a+b=0$ ...... ㉠

또 $\int_0^3 f(x)dx=0$에서

$\int_0^3(x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^3$

$=9+\frac{9}{2}a+3b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{8}{3}$, $b=1$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{8}{3}x+1$이므로

$f(3)=9-8+1=2$

08 $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-2h}^{2+h}f'(t)dt$

$=\lim_{h\to0}\frac{\left[f(t)\right]_{2-2h}^{2+h}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-2h)-f(2)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}\times(-2)\right\}$

$=f'(2)-\{-2f'(2)\}=3f'(2)$

이때 $f(x)=\int_0^x(3t^2-4)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-4 \qquad \therefore f'(2)=12-4=8$

따라서 구하는 값은

$3f'(2)=3\times8=24$

답 ⑤

09 $F(x)=\int f(x)dx$

$G(x)=\int\{2f(x)+1\}dx$

$=2\int f(x)dx+\int 1dx$

$=2F(x)+x+C$ (C는 적분상수)

이므로

$G(3)=2F(3)+3+C$

이때 $G(3)=2F(3)$이므로

$3+C=0 \qquad \therefore C=-3$

$\therefore G(x)=2F(x)+x-3$

따라서 $G(7)=2F(7)+7-3=2F(7)+4$이므로

$G(7)-2F(7)=4$

답 ②

10 ㄱ. $a<x<c$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $a<x<c$에서 증가한다. (참)

ㄴ. $f'(a)=0$, $x<a$에서 $f'(x)<0$, $a<x<c$에서 $f'(x)>0$

$g'(a)=0$, $x<a$에서 $g'(x)<0$, $x>a$에서 $g'(x)>0$

즉 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=a$에서 각각 극솟값을 가지지만 $f(a)=g(a)$인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

$h'(b)=f'(b)-g'(b)=0$

$a<x<b$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

$x>b$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$

즉 함수 $h(x)$는 $x=b$에서 극댓값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

11 $f(x)=x^2-4x+2$라 하면 $f'(x)=2x-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(3, -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=6-4=2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-(-1)=2(x-3) \qquad \therefore y=2x-7$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^3 \{(x^2-4x+2)-(2x-7)\}dx$

$=\int_0^3 (x^2-6x+9)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3$

$=(9-27+27)-0=9$

답 ①

12 ㄱ. $k=0$이면 $v(t)=t^2+4$이므로 $t=3$일 때 점 P의 위치는

$0+\int_0^3 v(t)dt=0+\int_0^3 (t^2+4)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+4t\right]_0^3$

$=(9+12)-0=21$ (참)

ㄴ. $k=2$이면

$v(t)=t^2-2t+4=(t-1)^2+3>0$

이므로 출발한 후 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다. (거짓)

ㄷ. $k=5$이면

$v(t)=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$

$0<t<1$일 때 $v(t)>0$, $1<t<2$일 때 $v(t)<0$이므로 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2 |v(t)|dt$

$=\int_0^2 |t^2-5t+4|dt$

$=\int_0^1 (t^2-5t+4)dt+\int_1^2 \{-(t^2-5t+4)\}dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_1^2$

$=\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\right)-0\right\}-\left\{\left(\frac{8}{3}-10+8\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\right)\right\}$

$=\frac{11}{6}-\left(-\frac{7}{6}\right)$

$=3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

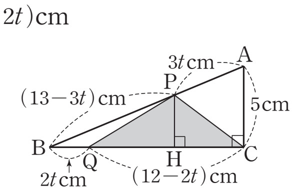
13 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{13^2-12^2}=5(\text{cm})$

t초 후 $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$의 길이는 각각 $3t$ cm, $2t$ cm이므로

$\overline{BP}=(13-3t)$cm, $\overline{QC}=(12-2t)$cm

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle PBH \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)

이므로

$\overline{PH} : \overline{AC}=\overline{BP} : \overline{BA}$

$\overline{PH} : 5=(13-3t) : 13$, $13\overline{PH}=5(13-3t)$

$\therefore \overline{PH}=\frac{5}{13}(13-3t)(\text{cm})$

삼각형 PQC의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{QC}\times\overline{PH}$

$=\frac{1}{2}\times(12-2t)\times\frac{5}{13}(13-3t)$

$=\frac{5}{13}(t-6)(3t-13)$

이므로

$\frac{dS}{dt}=\frac{5}{13}\{(3t-13)+3(t-6)\}$

$=\frac{5}{13}(6t-31)$

따라서 $t=3$일 때 삼각형 PQC의 넓이의 변화율은

$\frac{5}{13}\times(6\times3-31)=-5\ (\text{cm}^2/\text{s})$

답 ②

14 두 곡선 $y=-x^4+2x^3$, $y=ax(x-2)$로 둘러싸인 도형의 넓이와 두 곡선 $y=ax(x-2)$, $y=x^4-8x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 같으므로

$\int_0^2 \{(-x^4+2x^3)-ax(x-2)\}dx$

$=\int_0^2 \{ax(x-2)-(x^4-8x)\}dx$

$\int_0^2 \{(-x^4+2x^3)-ax(x-2)\}dx$

$-\int_0^2 \{ax(x-2)-(x^4-8x)\}dx=0$

$\int_0^2 [(-x^4+2x^3)-ax(x-2)-\{ax(x-2)$

$-(x^4-8x)\}]dx=0$

$\int_0^2 \{(-x^4+2x^3)-2ax(x-2)+(x^4-8x)\}dx=0$

$\int_0^2 \{2x^3-2ax^2+(4a-8)x\}dx=0$

$\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}ax^3+(2a-4)x^2\right]_0^2=0$

$\left\{8-\frac{16}{3}a+4(2a-4)\right\}-0=0$

$24-16a+12(2a-4)=0$, $24-16a+24a-48=0$

$8a=24$　　$\therefore a=3$

답 ④

15 조건 (나)에서 $\int_0^2 f(x)dx=0$이고

$\int_0^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 \{f(x-1)+2\}dx$ ($\because$ 조건 (가))

$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x-1)dx+\int_1^2 2dx$

$=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\left[2x\right]_1^2$

$=2\int_0^1 f(x)dx+(4-2)$

$=2\int_0^1 f(x)dx+2$

이므로 $2\int_0^1 f(x)dx+2=0$, $2\int_0^1 f(x)dx=-2$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=-1$ ...... ㉠

이때 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$에서

$0=-1+\int_1^2 f(x)dx \quad \therefore \int_1^2 f(x)dx=1$ ...... ㉡

$\therefore \int_2^4 f(x)dx$

$=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx$

$=\int_2^3 \{f(x-1)+2\}dx+\int_3^4 \{f(x-1)+2\}dx$ (∵ 조건 (가))

$=\int_2^3 \{f(x-1)+2\}dx+\int_3^4 [\{f(x-2)+2\}+2]dx$

(∵ 조건 (가))

$=\int_2^3 f(x-1)dx+\int_2^3 2dx+\int_3^4 f(x-2)dx+\int_3^4 4dx$

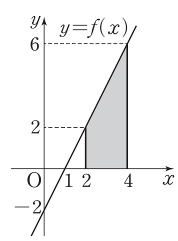
$=\int_1^2 f(x)dx+\Big[2x\Big]_2^3+\int_1^2 f(x)dx+\Big[4x\Big]_3^4$

$=1+(6-4)+1+(16-12)$

$=8$

답 ①

다른풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프를 오른쪽 그림과 같이 그리면 조건을 만족시킨다.

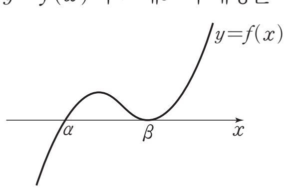


$\therefore \int_2^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\times(2+6)\times 2=8$

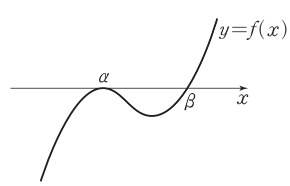
참고 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f(x-m)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 것이므로

$\int_\alpha^\beta f(x-m)dx=\int_{\alpha-m}^{\beta-m} f(x)dx$

16 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 32이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같아야 하므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2\ (\alpha<\beta)$이라 하면

$f'(x)=(x-\beta)^2+(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)(x-\beta)$

$=(x-\beta)^2+2(x-\alpha)(x-\beta)$

$=(x-\beta)(3x-2\alpha-\beta)$

$f'(x)=0$에서 $x=\beta$ 또는 $x=\frac{2\alpha+\beta}{3}$

즉 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2\alpha+\beta}{3}$에서 극댓값 32를 가지므로

$f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)=\frac{4}{27}(\beta-\alpha)^3=32,\ (\beta-\alpha)^3=216$

$\therefore \beta-\alpha=6$ ...... ㉠

$f(0)=-49$이므로 $-\alpha\beta^2=-49$

$\therefore \alpha\beta^2=49$ ...... ㉡

㉠에서 $\alpha=\beta-6$을 ㉡에 대입하면

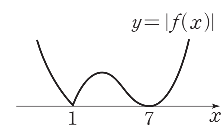
$(\beta-6)\beta^2=49,\ \beta^3-6\beta^2-49=0$

$(\beta-7)(\beta^2+\beta+7)=0$

$\therefore \beta=7\ (\because \beta^2+\beta+7>0)$

$\therefore \alpha=7-6=1$

이때 함수 $|f(x)|$는 $x=1,\ x=7$에서 극솟값을 가지므로



$a=1,\ b=7$

$\therefore a+b=1+7=8$

답 ⑤

17 $f(x)=9x^2+\int_0^1\left(x-\frac{1}{4}\right)f(t)dt$

$=9x^2+\left(x-\frac{1}{4}\right)\int_0^1 f(t)dt$

이때 $\int_0^1 f(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=9x^2+a\left(x-\frac{1}{4}\right)=9x^2+ax-\frac{1}{4}a$ ...... ❶

이므로

$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\left(9t^2+at-\frac{1}{4}a\right)dt$

$=\left[3t^3+\frac{1}{2}at^2-\frac{1}{4}at\right]_0^1$

$=\left(3+\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a\right)-0$

$=\frac{1}{4}a+3$

즉 $\frac{1}{4}a+3=a$이므로

$\frac{3}{4}a=3 \quad \therefore a=4$ ...... ❷

따라서 $f(x)=9x^2+4x-1$이므로

$f(-2)=36-8-1=27$ ...... ❸

답 27

채점기준	배점
❶ $\int_0^1 f(t)dt=a$라 하고 $f(x)$를 상수 a를 포함한 식으로 나타내기	2
❷ a의 값 구하기	2
❸ $f(-2)$의 값 구하기	1

18 삼차함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다. ...... ❶

$f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(a+1)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2(2a-1)x+a+1$

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a-1)^2-3(a+1)\le 0$ …… ❷

$4a^2-7a-2\le 0,\ (4a+1)(a-2)\le 0$

$\therefore -\frac{1}{4}\le a\le 2$ …… ❸

따라서 실수 a의 최댓값은 2, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이므로

$M=2,\ m=-\frac{1}{4}$

$\therefore 10Mm=10\times 2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-5$ …… ❹

답 -5

채점기준	배점
❶ 삼차함수 $f(x)$가 일대일대응일 조건 설명하기	1
❷ a에 대한 부등식 세우기	2
❸ a의 값의 범위 구하기	2
❹ $10Mm$의 값 구하기	1

19 $f(x)=x^3-3x^2+3x$에서

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고

$f'(1)=0,\ f(1)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 0이다.

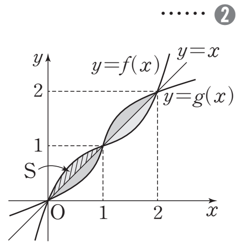
또 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 1)$에 대하여 대칭이다. …… ❶

곡선 $y=x^3-3x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+3x=x$에서

$x^3-3x^2+2x=0,\ x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ …… ❷



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 $0\le x\le 1$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면 구하는 넓이는 $4S$와 같다.

$S=\int_0^1\{(x^3-3x^2+3x)-x\}dx$

$=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1$

$=\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-0=\frac{1}{4}$ …… ❸

따라서 구하는 넓이는

$4S=4\times\frac{1}{4}=1$ …… ❹

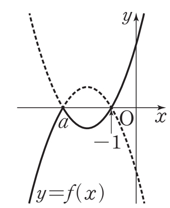
답 1

채점기준	배점
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형 파악하기	2
❷ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표 구하기	2
❸ $0\le x\le 1$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	2
❹ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	1

20 $f(x)=\begin{cases}(x+1)(x-a) & (x\ge a)\\ -(x+1)(x-a) & (x<a)\end{cases}$

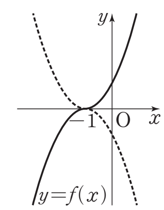
이므로 상수 a의 값의 범위에 따른 극댓값을 구하면 다음과 같다.

(i) $a<-1$일 때



함수 $f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 $x=a$에서 극댓값 0을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다. …… ❶

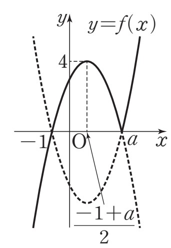
(ii) $a=-1$일 때



$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x\ge -1)\\ -(x+1)^2 & (x<-1)\end{cases}$

이므로 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다. …… ❷

(iii) $a>-1$일 때



함수 $y=-(x+1)(x-a)$, 즉

$y=-x^2+(-1+a)x+a$의 그래프의 축은 직선 $x=\frac{-1+a}{2}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{-1+a}{2}$에서 극댓값을 갖는다. 이때 극댓값이 4이므로

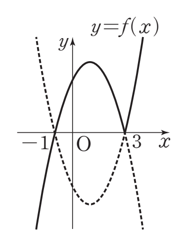
$f\left(\frac{-1+a}{2}\right)=-\left(\frac{-1+a}{2}+1\right)\left(\frac{-1+a}{2}-a\right)=4$

$-\frac{1+a}{2}\times\frac{-1-a}{2}=4,\ (a+1)^2=16$

$a+1=4$ 또는 $a+1=-4$

$\therefore a=3\ (\because a>-1)$ …… ❸

(i), (ii), (iii)에서 $a=3$이고



$f(x)=\begin{cases}(x+1)(x-3) & (x\ge 3)\\ -(x+1)(x-3) & (x<3)\end{cases}$

$=\begin{cases}x^2-2x-3 & (x\ge 3)\\ -x^2+2x+3 & (x<3)\end{cases}$

$\therefore \int_0^6 f(x)dx$

$=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx$

$=\int_0^3(-x^2+2x+3)dx+\int_3^6(x^2-2x-3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_3^6$

$=\{(-9+9+9)-0\}+\{(72-36-18)-(9-9-9)\}$

$=9+27$

$=36$ …… ❹

답 36

채점기준	배점
❶ $a<-1$일 때 조건을 만족시키지 않음을 설명하기	2
❷ $a=-1$일 때 조건을 만족시키지 않음을 설명하기	1
❸ $a>-1$일 때 상수 a의 값 구하기	2
❹ $\int_0^6 f(x)dx$의 값 구하기	2

실전 모의고사 4회

p.158~161

01 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2ax-1)dx$

$=x^3+ax^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=2$이므로 $C=2$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2-x+2$

$f(1)=1$이므로

$1+a-1+2=1 \qquad \therefore a=-1$

답 ③

02 $\int_{-1}^{1}(x^5+4x^4+2x^3-3x^2-2x+1)dx$

$=\int_{-1}^{1}(4x^4-3x^2+1)dx=2\int_{0}^{1}(4x^4-3x^2+1)dx$

$=2\left[\frac{4}{5}x^5-x^3+x\right]_0^1=2\left\{\left(\frac{4}{5}-1+1\right)-0\right\}=\frac{8}{5}$

답 ④

03 $A=3$, $B=7$이므로

$\int_{-2}^{3}f'(x)dx=\int_{-2}^{0}f'(x)dx+\int_{0}^{3}f'(x)dx$

$=A+(-B)$

$=3+(-7)=-4$

이고

$\int_{-2}^{3}f'(x)dx=f(3)-f(-2)=f(3)-6$

따라서 $f(3)-6=-4$이므로

$f(3)=2$

답 ②

04 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t-24$

점 P의 속도가 -15이면 $v=-15$에서

$3t^2-6t-24=-15$, $3t^2-6t-9=0$

$3(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3 \ (\because t>0)$

점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=6t-6$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$6\times3-6=12$

답 ④

05 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 위로 볼록하고, 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 2)$이므로

$f'(x)=a(x+1)^2+2 \ (a<0)$

라 하면 $f'(0)=0$에서

$a+2=0 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore f'(x)=-2(x+1)^2+2=-2x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값, $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

이때 $f(x)$의 극댓값이 3이므로 $f(0)=3$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x^2-4x)dx$

$=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$ (C는 적분상수)

이므로 $f(0)=3$에서 $C=3$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+3$이므로

$f(-3)=18-18+3=3$

답 ⑤

06 $f(x)=\frac{1}{9}x^3-3x+k$에서

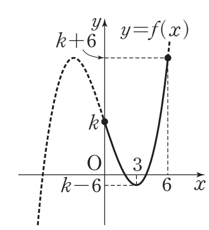
$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-3=\frac{1}{3}(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[0, 6]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	k	↘	$k-6$	↗	$k+6$

따라서 닫힌구간 $[0, 6]$에서 함수 $f(x)$는 $x=6$일 때 최댓값 $k+6$, $x=3$일 때 최솟값 $k-6$을 갖는다.



이때 최댓값이 11이므로

$k+6=11 \qquad \therefore k=5$

따라서 닫힌구간 $[0, 6]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$k-6=5-6=-1$

답 ②

07 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(x^4-x^3+3x+a)-(2x^4-5x^3+3x)$

$=-x^4+4x^3+a$

$h'(x)=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	a	↗	$a+27$	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $a+27$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)<0$이 성립하려면

$a+27<0 \qquad \therefore a<-27$

따라서 정수 a의 최댓값은 -28이다.

답 ②

08 $xf(x)-\int f(x)dx=x^3-3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=3x^2-6x$

$xf'(x)=3x^2-6x$

$\therefore f'(x)=3x-6$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x-6)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(-1)=8$이므로

$\frac{3}{2}+6+C=8 \qquad \therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$이므로

$f(3)=\frac{27}{2}-18+\frac{1}{2}=-4$ 답 ①

09 $f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)dt=-x^3+2x^2-6x+4$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=4$ ...... ㉡

또 ㉠에서

$f(x)+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=-x^3+2x^2-6x+4$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-3x^2+4x-6$

$\therefore f'(x)+\int_0^x f(t)dt=-3x^2+4x-6$ ...... ㉢

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=-6$ ...... ㉣

또 ㉢에서 $f(x)$가 n차함수이면 $f'(x)$는 $(n-1)$차함수, $\int_0^x f(t)dt$는 $(n+1)$차함수이므로 ㉢의 좌변은 $(n+1)$차식이다. 이때 ㉢의 우변이 이차식이므로

$n+1=2 \qquad \therefore n=1$

즉 $f(x)$는 일차함수이므로

$f(x)=ax+4$ $(a\neq 0)$ ($\because f(0)=4$)

라 하면

$f'(x)=a \qquad \therefore a=-6$ ($\because$ ㉣)

따라서 $f(x)=-6x+4$이므로

$f(3)=-18+4=-14$ 답 ④

10 $\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx$

$=-1+\int_2^3 4x\,dx+\int_6^7 4x\,dx$ ($\because$ 조건 (가), (나))

$=-1+\left[2x^2\right]_2^3+\left[2x^2\right]_6^7$

$=-1+(18-8)+(98-72)$

$=-1+10+26$

$=35$

$\int_0^8 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx$

$=\int_0^1 4x\,dx+\int_4^5 4x\,dx$ ($\because$ 조건 (나))

$=\left[2x^2\right]_0^1+\left[2x^2\right]_4^5$

$=(2-0)+(50-32)$

$=20$

$\therefore \int_8^{10} f(x)dx=\int_0^{10} f(x)dx-\int_0^8 f(x)dx$

$=35-20=15$ 답 ⑤

11 조건 (나)에서 $\int_{-3}^1 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx=0$이므로

$\int_{-1}^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx=0$ ($\because$ 조건 (가))

$\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx=0$

$2\int_0^1 f(x)dx+\int_1^6 f(x)dx=0$ ($\because$ 조건 (가))

$\therefore \int_1^6 f(x)dx=-2\int_0^1 f(x)dx$

$=-2\times 8$

$=-16$ ($\because$ 조건 (다)) 답 ①

12 $f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

조건 (가)의 $f(4)=8$에서

$16a+4b=8 \qquad \therefore 4a+b=2$ ...... ㉠

조건 (나)에서 $\int_0^{100} f(x)dx=\int_1^{100} f(x)dx-\frac{7}{3}$이므로

$\int_0^{100} f(x)dx-\int_1^{100} f(x)dx=-\frac{7}{3}$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=-\frac{7}{3}$

즉 $\int_0^1 (ax^2+bx)dx=-\frac{7}{3}$이므로

$\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_0^1=-\frac{7}{3}$

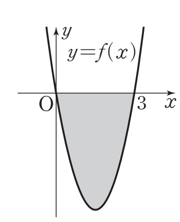
$\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)-0=-\frac{7}{3}$

$\therefore 2a+3b=-14$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-6$

따라서 $f(x)=2x^2-6x=2x(x-3)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



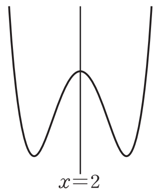
$\int_0^3 |f(x)|dx=\int_0^3 \{-f(x)\}dx$

$=\int_0^3 (-2x^2+6x)dx$

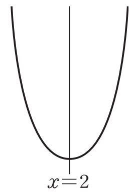
$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^3$

$=(-18+27)-0=9$ 답 ④

13 조건 (나)에서 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



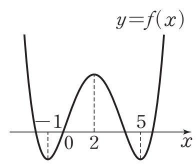
[그림 1]



[그림 2]

이때 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.

또 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=5$에서 극솟값, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.



즉 $f'(-1)=0$, $f'(2)=0$, $f'(5)=0$이고 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$$f'(x)=4(x+1)(x-2)(x-5)$$
$$=4x^3-24x^2+12x+40$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-24x^2+12x+40)dx$$
$$=x^4-8x^3+6x^2+40x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^4-8x^3+6x^2+40x$이므로

$f(1)=1-8+6+40=39$ 답 ②

14 $t>2$일 때, $a(t)=6t+4$이므로

$$v(t)=\int a(t)dt=\int(6t+4)dt$$
$$=3t^2+4t+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $v(t)$는 $t=2$에서 연속이므로

$\lim_{t\to2+}v(t)=v(2)$, 즉 $\lim_{t\to2+}(3t^2+4t+C)=0$

$12+8+C=0 \quad \therefore C=-20$

$$\therefore v(t)=\begin{cases}2t^3-8t & (0<t\le2)\\ 3t^2+4t-20 & (t>2)\end{cases}$$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)dt$$
$$=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt$$
$$=\int_0^2(2t^3-8t)dt+\int_2^4(3t^2+4t-20)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^4-4t^2\right]_0^2+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^4$$
$$=\{(8-16)-0\}+\{(64+32-80)-(8+8-40)\}$$
$$=-8+40$$
$$=32$$

답 ④

15 ㄱ. 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로 도함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 6이다. 이때 $f'(0)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=6x(x-1)=6x^2-6x$ ...... ㉠

$\therefore f'(2)=12$ (참)

ㄴ. $f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-6x)dx$

$=2x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

이므로

$f(x)-f(0)=(2x^3-3x^2+C)-C=2x^3-3x^2$

$f(x+1)-f(1)$

$=2(x+1)^3-3(x+1)^2+C-(2-3+C)$

$=2x^3+3x^2$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}2x^3-3x^2 & (x\le0)\\ 2x^3+3x^2 & (x>0)\end{cases}$$

이때

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}(2x^3+3x^2)=0$,

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}(2x^3-3x^2)=0$,

$g(0)=0$

에서 $\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 또

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(2x^3+3x^2)-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}(2x^2+3x)=0,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(2x^3-3x^2)-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}(2x^2-3x)=0$$

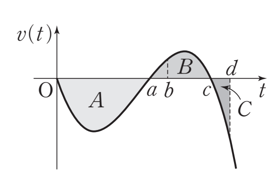
에서 $\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이므로

$$\int_{-1}^1 g(x)dx$$
$$=\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx$$
$$=\int_{-1}^0(2x^3-3x^2)dx+\int_0^1(2x^3+3x^2)dx$$
$$=\int_{-1}^0 2x^3dx-\int_{-1}^0 3x^2dx+\int_0^1 2x^3dx+\int_0^1 3x^2dx$$
$$=\int_{-1}^1 2x^3dx-\int_{-1}^0 3x^2dx+\int_0^1 3x^2dx$$
$$=0-\left[x^3\right]_{-1}^0+\left[x^3\right]_0^1=-\{0-(-1)\}+(1-0)$$
$$=-1+1$$
$$=0 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

16 오른쪽 그림과 같이 속도 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 차례대로 A, B, C라 하면



$\int_0^a|v(t)|dt=\int_a^d|v(t)|dt$에서

$A=B+C$

ㄱ. $\int_0^d v(t)dt = -A+B-C = -(B+C)+B-C$

$= -2C$ (거짓)

ㄴ. $\int_0^b v(t)dt + \int_b^d |v(t)|dt$

$= \int_0^a v(t)dt + \int_a^b v(t)dt + \int_b^c |v(t)|dt + \int_c^d |v(t)|dt$

$= -A + \int_a^b v(t)dt + \int_b^c v(t)dt + C$

$= -A + \int_a^c v(t)dt + C$

$= -A+B+C = -(B+C)+B+C = 0$

$\therefore \int_0^b v(t)dt = -\int_b^d |v(t)|dt$ (참)

ㄷ. $0 + \int_0^a v(t)dt = -A < 0$

$0 + \int_0^c v(t)dt = -A+B = -C < 0$

$x > c$일 때

$0 + \int_0^x v(t)dt = \int_0^c v(t)dt + \int_c^x v(t)dt$

$= -C + \int_c^x v(t)dt < 0$

이므로 점 P의 위치는 항상 0보다 작다.

즉 점 P는 출발 후 원점으로 돌아오지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

17 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) \ge g(x_2)$가 성립하므로

($f(x)$의 최솟값)$\ge$($g(x)$의 최댓값) …… ㉠

이어야 한다. …… ❶

$f(x) = 3x^4 - 8x^3$에서

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2)$

$f'(x) = 0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	-16	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 -16을 갖는다. …… ❷

한편 $g(x) = -2x^2 + 4x + k = -2(x-1)^2 + k + 2$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $k+2$를 갖는다. …… ❸

㉠에서 $-16 \ge k+2$ $\quad \therefore k \le -18$

따라서 실수 k의 최댓값은 -18이다. …… ❹

답 -18

채점기준	배점
❶ 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) \ge g(x_2)$가 성립할 조건 구하기	1
❷ 함수 $f(x)$의 최솟값 구하기	2
❸ 함수 $g(x)$의 최댓값을 k를 사용한 식으로 나타내기	1
❹ 실수 k의 최댓값 구하기	1

18 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v = \frac{dx}{dt} = 4t^3 - 24t^2 + 36t + m$

점 P가 출발한 후 운동 방향이 3번 바뀌려면 삼차방정식

$4t^3 - 24t^2 + 36t + m = 0$, 즉

$4t^3 - 24t^2 + 36t = -m$

이 서로 다른 양의 실근 3개를 가져야 한다. …… ❶

$f(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t$라 하면

$f'(t) = 12t^2 - 48t + 36 = 12(t-1)(t-3)$

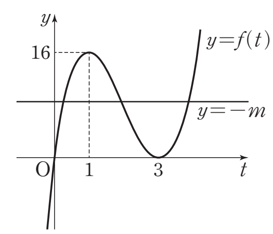
$f'(t) = 0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	16	↘	0	↗

…… ❷

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $f(t) = -m$이 서로 다른 양의 실근 3개를 가지려면 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=-m$이 $t>0$에서 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$0 < -m < 16$

$\therefore -16 < m < 0$

따라서 정수 m은 $-15, -14, \dots, -1$의 15개이다. …… ❸

답 15

채점기준	배점
❶ 점 P의 운동 방향이 3번 바뀔 조건 구하기	2
❷ $v-m=f(t)$라 하고 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내기	2
❸ 정수 m의 개수 구하기	2

19 조건 (가)의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0 = f(1) - 3 \quad \therefore f(1) = 3$

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = f(x) + xf'(x) - 4x$, $xf'(x) = 4x$

$\therefore f'(x) = 4$

$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int 4dx = 4x + C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(1) = 3$이므로

$f(1) = 4 + C_1 = 3 \quad \therefore C_1 = -1$

따라서 $f(x) = 4x - 1$이므로

$F(x) = \int f(x)dx = \int (4x-1)dx$

$= 2x^2 - x + C_2$ (단, C_2는 적분상수) …… ❶

한편 $f(x)G(x) + F(x)g(x) = \{F(x)G(x)\}'$이므로 조건 (나)에서 $\{F(x)G(x)\}' = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\therefore F(x)G(x) = \int \{F(x)G(x)\}'dx = \int (8x^3 + 3x^2 + 1)dx$

$= 2x^4 + x^3 + x + C_3$ (단, C_3은 적분상수)

…… ㉠

이때 $F(x) = 2x^2 - x + C_2$이고 $G(x)$는 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다. 따라서

$G(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 ㉠에서

$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)=2x^4+x^3+x+C_3$

양변의 x^3의 계수를 비교하면

$2a-1=1 \qquad \therefore a=1$

즉 $G(x)=x^2+x+b$이므로 …… ❷

$$\int_1^5 g(x)dx=\Big[G(x)\Big]_1^5=G(5)-G(1)$$
$$=(25+5+b)-(1+1+b)$$
$$=28$$
…… ❸

답 28

채점기준	배점
❶ $F(x)$ 구하기	3
❷ $G(x)$ 구하기	3
❸ $\int_1^5 g(x)dx$의 값 구하기	1

20 $f(x)=-x^3+3x^2-3$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

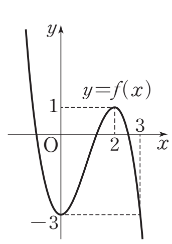
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘

$f(0)=-3$이므로 $f(x)=-3$에서

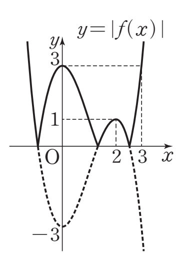
$-x^3+3x^2-3=-3$, $-x^2(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3, -3)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고, $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다. …… ❶



[그림 1]



[그림 2]

(i) $0\le t\le 3$일 때

$0\le x\le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값은 $|f(0)|=3$이므로

$g(t)=3$

(ii) $t>3$일 때

$0\le x\le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값은 $|f(t)|$이므로

$g(t)=|f(t)|=-f(t)$ ($\because t>3$일 때 $f(t)<0$)

$=-(-t^3+3t^2-3)$

$=t^3-3t^2+3$

(i), (ii)에서 $g(t)=\begin{cases} 3 & (0\le t\le 3) \\ t^3-3t^2+3 & (t>3)\end{cases}$ …… ❷

이때

$\lim\limits_{x\to 3+} g(t)=\lim\limits_{x\to 3+}(t^3-3t^2+3)=27-27+3=3$,

$\lim\limits_{x\to 3-} g(t)=\lim\limits_{x\to 3-} 3=3$, $g(3)=3$

에서 $\lim\limits_{x\to 3+} g(t)=\lim\limits_{x\to 3-} g(t)=g(3)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=3$에서 연속이다.

따라서 함수 $g(t)$는 닫힌구간 $[0, 5]$에서 연속이므로 …… ❸

$$\int_0^5 g(t)dt=\int_0^3 g(t)dt+\int_3^5 g(t)dt$$
$$=\int_0^3 3dt+\int_3^5 (t^3-3t^2+3)dt$$
$$=\Big[3t\Big]_0^3+\Big[\frac{1}{4}t^4-t^3+3t\Big]_3^5$$
$$=(9-0)+\Big\{\Big(\frac{625}{4}-125+15\Big)-\Big(\frac{81}{4}-27+9\Big)\Big\}$$
$$=9+44$$
$$=53$$
…… ❹

답 53

채점기준	배점
❶ 두 함수 $y=f(x)$, $y=\|f(x)\|$의 그래프 그리기	2
❷ $g(t)$ 구하기	2
❸ $g(t)$가 닫힌구간 $[0, 5]$에서 연속임을 설명하기	1
❹ $\int_0^5 g(t)dt$의 값 구하기	2

실전 모의고사 5회

p.162~165

01 $f(x)=\int f'(x)dx=\int (8x^3+3x^2)dx$

$=2x^4+x^3+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=4$이므로

$2+1+C=4 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=2x^4+x^3+1$이므로

$f(-1)=2+(-1)+1=2$

답 ④

02 $\int_{-a}^{a}(4x^3-3x^2+3)dx=\int_{-a}^{a}4x^3dx+\int_{-a}^{a}(-3x^2+3)dx$

$$=0+2\int_0^a(-3x^2+3)dx$$
$$=2\Big[-x^3+3x\Big]_0^a$$
$$=2\{(-a^3+3a)-0\}$$
$$=-2a^3+6a$$

즉 $-2a^3+6a=4$이므로 $2a^3-6a+4=0$

$a^3-3a+2=0$, $(a-1)^2(a+2)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

답 ①

03 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=20-10t$

물체가 최고 높이에 도달했을 때 물체의 속도는 0 m/s이므로

$v=0$에서 $20-10t=0$, $10t=20 \qquad \therefore t=2$

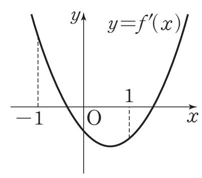
따라서 $t=2$일 때 물체의 지면으로부터의 높이는

$30+40-20=50(\mathrm{m})$ 답 ③

04 $f(x)=4x^3+3ax^2-18a^2x+1$에서

$f'(x)=12x^2+6ax-18a^2=6(2x+3a)(x-a)$

이차방정식 $f'(x)=0$의 한 실근은 $-1<x<1$에, 다른 실근은 $x>1$에 존재해야 하므로



$f'(-1)>0$, $f'(1)<0$

이어야 한다.

$f'(-1)=6(-2+3a)(-1-a)>0$에서

$(3a-2)(a+1)<0 \quad \therefore -1<a<\dfrac{2}{3}$ …… ㉠

$f'(1)=6(2+3a)(1-a)<0$에서

$(3a+2)(a-1)>0 \quad \therefore a<-\dfrac{2}{3}$ 또는 $a>1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<a<-\dfrac{2}{3}$ 답 ③

05 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=f'(x)+g'(x)=2x-5$ …… ㉠

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=f'(x)-g'(x)=2x-1$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2f'(x)=4x-6 \quad \therefore f'(x)=2x-3$

㉠−㉡을 하면

$2g'(x)=-4 \quad \therefore g'(x)=-2$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-3)dx$

$=x^2-3x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $C_1=1$

$\therefore f(x)=x^2-3x+1$

$g(x)=\int g'(x)dx=\int(-2)dx$

$=-2x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$g(0)=3$이므로 $C_2=3$

$\therefore g(x)=-2x+3$

따라서 $f(-1)=1+3+1=5$, $g(-1)=2+3=5$이므로

$f(-1)g(-1)=5\times5=25$ 답 ⑤

06 $xf(x)=2x^3-x^2+\int_{-1}^{x}f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-f(-1)=-2-1+0 \quad \therefore f(-1)=3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-2x+f(x)$

$xf'(x)=6x^2-2x$

$\therefore f'(x)=6x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx$

$=3x^2-2x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(-1)=3$이므로

$3+2+C=3 \quad \therefore C=-2$

즉 $f(x)=3x^2-2x-2$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(3x^2-2x-2)dx$

$=\Big[x^3-x^2-2x\Big]_0^1$

$=(1-1-2)-0=-2$ 답 ⑤

07 $f(x)=x^2-2x+a$라 하고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이므로

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\int_{2-h}^{2+3h}(x^2-2x+a)dx$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\int_{2-h}^{2+3h}f(x)dx=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\Big[F(x)\Big]_{2-h}^{2+3h}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(2+3h)-F(2-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(2+3h)-F(2)-\{F(2-h)-F(2)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{F(2+3h)-F(2)}{3h}\times3-\dfrac{F(2-h)-F(2)}{-h}\times(-1)\right\}$

$=3F'(2)-\{-F'(2)\}=4F'(2)$

$=4f(2)=4a$

즉 $4a=8$이므로 $a=2$ 답 ②

08 $f(x+y)=f(x)+f(y)+kxy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$

$\therefore f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+kxh-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}+kx$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}+kx \ (\because f(0)=0)$

$=f'(0)+kx$

이때 $f'(1)=1$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=f'(0)+k \quad \therefore f'(0)=-k+1$

즉 $f'(x)=kx-k+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(kx-k+1)dx$

$=\dfrac{k}{2}x^2+(-k+1)x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(1)=2$이므로

$\dfrac{k}{2}-k+1=2 \quad \therefore k=-2$ 답 ①

09 $f(x)=x^2-6x+9$라 하면 $f'(x)=2x-6$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ t^2-6t+9)$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t-6$

이므로 접선의 방정식은

$y=(2t-6)(x-t)+t^2-6t+9$ …… ㉠

직선 ㉠의 x절편은 $0=(2t-6)(x-t)+t^2-6t+9$에서

$0=2(t-3)(x-t)+(t-3)^2$

$0=(t-3)\{2(x-t)+(t-3)\}$

$0=2(x-t)+(t-3)$ ($\because 0<t<3$)

$2x=t+3 \qquad \therefore x=\frac{t+3}{2}$

직선 ㉠의 y절편은 $x=0$을 대입하면

$y=(2t-6)(0-t)+t^2-6t+9=-t^2+9$

따라서 직선 ㉠과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t+3}{2}\times(-t^2+9)$

$\quad=-\frac{1}{4}(t^3+3t^2-9t-27)$ ($0<t<3$)

$S'(t)=-\frac{1}{4}(3t^2+6t-9)=-\frac{3}{4}(t+3)(t-1)$

$S'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because 0<t<3$)

$0<t<3$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=1$에서 극대이면서 최대이므로 삼각형의 넓이의 최댓값은

$S(1)=8$

답 ②

10 $0\le x\le 6$에서 $0\le\frac{x}{3}\le 2$

$0\le t\le 2$일 때

$$|3t-x|=\begin{cases}3t-x & \left(\frac{x}{3}\le t\le 2\right)\\ -3t+x & \left(0\le t<\frac{x}{3}\right)\end{cases}$$

이므로

$f(x)=\int_0^2|3t-x|dt$

$\quad=\int_0^{\frac{x}{3}}(-3t+x)dt+\int_{\frac{x}{3}}^2(3t-x)dt$

$\quad=\left[-\frac{3}{2}t^2+xt\right]_0^{\frac{x}{3}}+\left[\frac{3}{2}t^2-xt\right]_{\frac{x}{3}}^2$

$\quad=\left\{\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{3}\right)-0\right\}+\left\{(6-2x)-\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^2}{3}\right)\right\}$

$\quad=\frac{x^2}{6}+\left(\frac{x^2}{6}-2x+6\right)=\frac{1}{3}x^2-2x+6$

$\quad=\frac{1}{3}(x-3)^2+3$ ($0\le x\le 6$)

따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{3}(x-3)^2+3$ ($0\le x\le 6$)은 $x=3$에서 최솟값 3을 가지므로

$a=3,\ m=3$

$\therefore a+m=3+3=6$

답 ⑤

11 $f(x)=\frac{1}{4}x^2$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2}x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$이므로 점 P에서의 접선과 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=-(x-2) \qquad \therefore y=-x+3$

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 직선 $y=-x+3$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{4}x^2=-x+3$에서

$x^2=-4x+12,\ x^2+4x-12=0$

$(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

따라서

$S_1=\int_{-6}^0\left\{(-x+3)-\frac{1}{4}x^2\right\}dx=\int_{-6}^0\left(-\frac{1}{4}x^2-x+3\right)dx$

$\quad=\left[-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-6}^0=0-(18-18-18)$

$\quad=18$

$S_2=\int_0^2\left\{(-x+3)-\frac{1}{4}x^2\right\}dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2-x+3\right)dx$

$\quad=\left[-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^2=\left(-\frac{2}{3}-2+6\right)-0$

$\quad=\frac{10}{3}$

이므로

$S_1\times S_2=18\times\frac{10}{3}=60$

답 ①

12 ㄱ. $x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)$에서

$t^2-6t=3t^2-12t,\ 2t^2-6t=0,\ 2t(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

따라서 두 점 P, Q는 출발 후 $t=3$일 때 만난다. (거짓)

ㄴ. 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}}(t),\ v_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$v_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{P}}'(t)=2t-6,\ v_{\mathrm{Q}}(t)=x_{\mathrm{Q}}'(t)=6t-12$

두 점 P, Q의 속도의 부호가 서로 다를 때 운동 방향이 서로 반대이므로 $v_{\mathrm{P}}(t)v_{\mathrm{Q}}(t)<0$에서

$(2t-6)(6t-12)<0,\ (t-3)(t-2)<0$

$\therefore 2<t<3$

즉 두 점 P, Q는 $2<t<3$에서만 서로 반대 방향으로 움직인다. (거짓)

ㄷ. $|v_{\mathrm{P}}(t)|=|2t-6|=\begin{cases}2t-6 & (t\ge 3)\\ -2t+6 & (0\le t<3)\end{cases}$

이므로 점 P가 출발하여 4초 동안 이동한 거리는

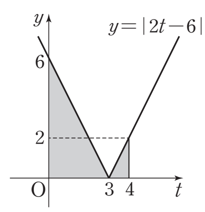
$$\int_0^4 |v_P(t)|dt=\int_0^4 |2t-6|dt$$
$$=\int_0^3 (-2t+6)dt+\int_3^4 (2t-6)dt$$
$$=\Big[-t^2+6t\Big]_0^3+\Big[t^2-6t\Big]_3^4$$
$$=\{(-9+18)-0\}+\{(16-24)-(9-18)\}$$
$$=9+1=10 \text{ (참)}$$

답 ②

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

다른풀이 ㄷ. $\int_0^4 |v_P(t)|dt$

$$=\int_0^4 |2t-6|dt$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times6+\frac{1}{2}\times1\times2=10 \text{ (참)}$$



13 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면 구와 원기둥의 겉넓이의 합이 90π로 일정하므로

$4\pi r^2+2\pi r^2+2\pi rh=90\pi$

$6\pi r^2+2\pi rh=90\pi$, $3r^2+rh=45$

$rh=45-3r^2 \qquad \therefore h=\dfrac{-3r^2+45}{r}$ ($\because r>0$)

이때 $h>0$, $r>0$이므로

$-3r^2+45>0$, $r^2-15<0$

$(r+\sqrt{15})(r-\sqrt{15})<0$, $r-\sqrt{15}<0$ ($\because r>0$)

$\therefore 0<r<\sqrt{15}$ ($\because r>0$)

구와 원기둥의 부피의 합을 $V(r)$이라 하면

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2\times\frac{-3r^2+45}{r}$$
$$=-\frac{5}{3}\pi r^3+45\pi r$$

$V'(r)=-5\pi r^2+45\pi=-5\pi(r+3)(r-3)$

$V'(r)=0$에서 $r=3$ ($\because 0<r<\sqrt{15}$)

$0<r<\sqrt{15}$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	$(\sqrt{15})$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	90π	↘	

따라서 함수 $V(r)$은 $r=3$에서 최댓값 90π를 가지므로 부피의 합의 최댓값은 90π이다.

답 ③

14 직선 $y=g(x)$가 두 점 $\mathrm{A}\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(3, \frac{5}{2}\right)$를 지나므로

$$g(x)=\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{3-1}(x-1)+\frac{3}{2} \qquad \therefore g(x)=\frac{1}{2}x+1$$

주어진 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_1^3 \{f(x)-g(x)\}dx=0$ ($\because$ 참고 참조)

$$\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3 g(x)dx=0$$
$$\therefore \int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 g(x)dx$$

이때

$$\int_1^3 g(x)dx=\int_1^3\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{9}{4}+3\right)-\left(\frac{1}{4}+1\right)=4$$

이므로 $\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 g(x)dx=4$

$$\therefore \int_1^3 \{f(x)+g(x)\}dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx$$
$$=4+4=8$$

답 ①

참고 주어진 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 점 B의 x좌표를 b라 하면

$$\int_1^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_b^3 \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$\int_1^b \{f(x)-g(x)\}dx-\int_b^3 \{g(x)-f(x)\}dx=0$$
$$\int_1^b \{f(x)-g(x)\}dx+\int_b^3 \{f(x)-g(x)\}dx=0$$
$$\therefore \int_1^3 \{f(x)-g(x)\}dx=0$$

15 $\int_{-1}^0 g(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=\dfrac{1}{4}$

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 \{-f(x-1)+1\}dx$$
$$=-\int_0^1 f(x-1)dx+\int_0^1 1dx$$
$$=-\int_{-1}^0 f(x)dx+\Big[x\Big]_0^1$$
$$=-\frac{1}{4}+(1-0)=\frac{3}{4}$$

한편 $x-1=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to-1+$이고, $f(x)$는 연속함수이므로

$$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+}\{-f(x-1)+1\}$$
$$=-\lim_{x\to0+} f(x-1)+1$$
$$=-\lim_{t\to-1+} f(t)+1$$
$$=-f(-1)+1 \ (\because f(t)\text{는 연속함수})$$
$$=0+1=1$$

$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-} f(x)=f(0)=1$

$g(0)=-f(-1)+1=0+1=1$

즉 $\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0-} g(x)=g(0)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

같은 방법으로 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$$\therefore \int_{-2}^3 g(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx$$
$$+\int_1^2 g(x)dx+\int_2^3 g(x)dx$$

$$=\int_0^1 g(x)dx+\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx+\int_{-1}^0 g(x)dx$$

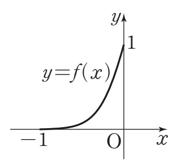
$$+\int_0^1 g(x)dx \ (\because \text{ 조건 (나)})$$

$$=3\int_0^1 g(x)dx+2\int_{-1}^0 g(x)dx$$

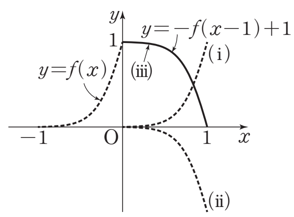
$$=3\times\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$$

답 ⑤

다른풀이

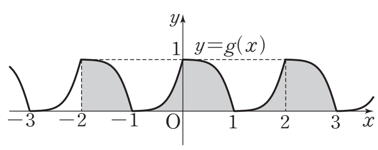


[그림 1]



[그림 2]

$f(-1)=0$, $f(0)=1$, $\int_{-1}^0 f(x)dx=\frac{1}{4}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같다고 하면 함수 $y=-f(x-1)+1$의 그래프는 [그림 2]와 같이 $y=f(x)$의 그래프를 (i) x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후, (ii) x축에 대하여 대칭이동하고, (iii) y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 위의 그림과 같고

$\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=1$, $\frac{1}{4}+\int_0^1 f(x)dx=1$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{4}$

$\therefore \int_{-2}^3 g(x)dx=\frac{3}{4}+1+1=\frac{11}{4}$

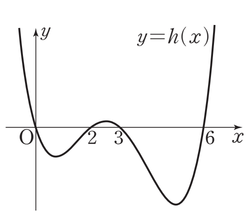
16 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $h(x)$는 사차함수이다.

$g(x)=|h(x)|$이고, $g(0)=g(2)=g(3)=g(6)=0$이므로

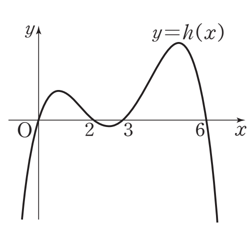
$h(0)=h(2)=h(3)=h(6)=0$

즉 $h(x)=ax(x-2)(x-3)(x-6)$ $(a\neq0)$이라 하면

$y=h(x)$의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 $h'(x)=f(x)$에서 $h'(0)=f(0)>0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같고, $a<0$이다.

$$\int_m^{m+2} f(x)dx=\int_0^{m+2} f(x)dx-\int_0^m f(x)dx$$

$$=h(m+2)-h(m)>0$$

이고 [그림 2]에서

$m=1$일 때, $h(3)-h(1)<0$

$m=2$일 때, $h(4)-h(2)>0$

$m=3$일 때, $h(5)-h(3)>0$

$m=4$일 때, $h(6)-h(4)<0$

$m=5$일 때, $h(7)-h(5)<0$

$m\geq6$일 때, $h(m+2)-h(m)<0$

따라서 $\int_m^{m+2} f(x)dx>0$을 만족시키는 자연수 m은 2, 3의 2개이다.

답 ②

17 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to-\infty$이므로

$a<0$ …… ❶

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ …… ❷

삼차함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지므로 α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이다. 이때 $\alpha<0<\beta$, $|\alpha|<|\beta|$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0,\ \alpha\beta=\frac{c}{3a}<0$$

$\therefore b>0,\ c>0\ (\because a<0)$ …… ❸

$$\therefore \frac{|a|}{a}-\frac{|b|}{b}-\frac{|c|}{c}=\frac{-a}{a}-\frac{b}{b}-\frac{c}{c}$$

$$=-1-1-1=-3$$ …… ❹

답 −3

채점기준	배점
❶ a의 부호 구하기	1
❷ $f'(x)$ 구하기	1
❸ b, c의 부호 구하기	2
❹ $\frac{\vert a\vert}{a}-\frac{\vert b\vert}{b}-\frac{\vert c\vert}{c}$의 값 구하기	1

18 점 P의 운동 방향이 바뀔 때 $v(t)=0$이므로

$0\leq t\leq3$일 때, $-t^2+t+2=0$에서

$t^2-t-2=0$, $(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

$t>3$일 때, $k(t-3)-4=0$에서 $kt-3k-4=0$

$kt=3k+4\qquad \therefore t=3+\frac{4}{k}\ (k>0)$

따라서 출발 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 것은

$t=3+\frac{4}{k}$일 때이다. …… ❶

시각 $t=3+\frac{4}{k}$에서의 점 P의 위치가 1이므로

$0+\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt=1$ …… ❷

이때

$$0+\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt$$

$$=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt$$

$=\int_0^3(-t^2+t+2)dt+\int_3^{3+\frac{4}{k}}(kt-3k-4)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3+\left[\frac{1}{2}kt^2-(3k+4)t\right]_3^{3+\frac{4}{k}}$

$=\frac{3}{2}-\frac{8}{k}$

이므로

$\frac{3}{2}-\frac{8}{k}=1,\ \frac{8}{k}=\frac{1}{2}\qquad \therefore k=16$ …… ❸

답 16

채점기준	배점
❶ 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각 구하기	2
❷ 정적분을 이용하여 k에 대한 식 세우기	1
❸ 양수 k의 값 구하기	3

19 조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극솟값 0을 가지므로

$g(2)=0,\ g'(2)=0$ …… ❶

$g(x)=\int_2^x f(t)dt+f(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=0+f(2)\qquad \therefore f(2)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)+f'(x)$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=f(2)+f'(2)\qquad \therefore f'(2)=0$ …… ❷

$f(2)=0,\ f'(2)=0$이고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x-2)^2(x-k)$ (k는 상수)

라 하면

$f'(x)=(x-2)(x-k)+(x-2)(x-k)+(x-2)^2$

$=2(x-2)(x-k)+(x-2)^2$

$=(x-2)\{2(x-k)+(x-2)\}$

$=(x-2)(3x-2k-2)$

㉡에서

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$=(x-2)^2(x-k)+(x-2)(3x-2k-2)$

$=(x-2)\{(x-2)(x-k)+(3x-2k-2)\}$

$=(x-2)\{x^2+(-k+1)x-2\}$

조건 (나)에서 $g'(-2)=8$이므로

$g'(-2)=-4\{4-2(-k+1)-2\}=8$

$4+2k-2-2=-2$

$2k=-2\qquad \therefore k=-1$

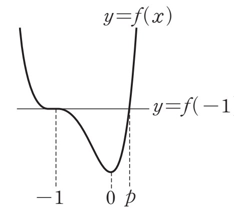
따라서 $f(x)=(x-2)^2(x+1)$이므로

$f(3)=4$ …… ❸

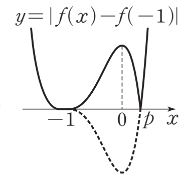
답 4

채점기준	배점
❶ $g(2),\ g'(2)$의 값 각각 구하기	1
❷ $f(2),\ f'(2)$의 값 각각 구하기	3
❸ $f(3)$의 값 구하기	3

20 함수 $|f(x)-f(-1)|$은 $x=-1$에서 미분가능하므로 $f'(-1)=0$이고, $x=p\ (p>0)$에서만 미분가능하지 않으므로 $x=p$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(-1)$의 교점의 x좌표이면서 $f'(p)\neq0$이다. 이때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같고, 함수 $y=|f(x)-f(-1)|$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2] …… ❶

이때 $f'(-1)=0$이지만 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않으므로 삼차함수 $f'(x)$는 $(x+1)^2$을 인수로 갖는다.

또 조건 (가)에 의하여 $f'(0)=0$이고, 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 삼차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 4이다.

즉

$f'(x)=4x(x+1)^2=4x^3+8x^2+4x$ …… ❷

이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3+8x^2+4x)dx$

$=x^4+\frac{8}{3}x^3+2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$\therefore f(-3)-f(0)=(81-72+18+C)-C$

$=27$ …… ❸

답 27

채점기준	배점
❶ 두 함수 $y=f(x),\ y=\|f(x)-f(-1)\|$의 그래프의 개형 그리기	3
❷ $f'(x)$ 구하기	2
❸ $f(-3)-f(0)$의 값 구하기	2

MEMO

MEMO